arXiv:2303.12470v1 [math.AC] 22 Mar 2023

具有给定弗罗贝尼乌斯数的 Arf 数值半群集合

M. A. Moreno-Fr´ıas * J. C. Rosales †

摘要

本文将证明，若 F 是一个正整数，则满足以下条件的集合 Arf(F) $=\{S \mid S$ 是弗罗贝尼乌斯数为 $F\}$的 Arf 数值半群：1) $\Delta(F) = \{0, F+1, \rightarrow\}$ 是 Arf(F) 的最小值；2) 若 $\{S,T\} \subseteq$ Arf(F)，则 $S \cap T \in$ Arf(F)；3) 若 $S \in$ Arf(F)，$S \neq \Delta(F)$ 且 m(S) $=$ min($S\backslash\{0\}$)，则 $S\backslash\{\text{m}(S)\} \in$ Arf(F)。

我们将利用前述结果给出一个计算集合 Arf(F) 的算法。此外，我们还将看到，若对于某个 $S \in$ Arf(F)，有 $X \subseteq S\backslash\Delta(F)$，则存在包含 X. 的 Arf(F) 的最小元

Keywords: 数值半群、多重度、弗罗贝尼乌斯数、余维数、Arf 数值半群、Arf序列、算法。

MSC-class: 20M14（主要分类），11D07、13H10（次要分类）。

1 引言

分别用 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 表示整数集和非负整数集。数值半群是 $\mathbb{N}$ 的非空子集，在加法下封闭，包含零元素，且其在 $\mathbb{N}$ 中的补集是有限集。

设 $\{n_1 < \cdots < \text{n}_p\} \subseteq \mathbb{N}$，且 gcd($n_1, \ldots, n_p$) $= 1$. 那么

$$\langle n_1, \ldots, n_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i n_i \mid \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

是一个数值半群，并且每个数值半群都具有这种形式（见 [14,引理 2.1]）。集合 $n_1 < \cdots < n_p$ 称为 S的生成元系，我们

*加的斯大学理学院数学系，E-11510，Puerto Real（西班牙加的斯）。本研究部分得到安达卢西亚自治区政府 FQM-298 研究组、安达卢西亚自治区政府卓越项目 ProyExcel 00868、UCA 2022-2023 自主研究计划项目（PR2022-011）和 UCA 2022-2023 自主研究计划项目（PR2022-004）的资助。电子邮箱：mariangeles.moreno@uca.es。

† ´代数系，格拉纳达大学理学院，E-18071，格拉纳达（西班牙）。本研究部分得到安达卢西亚自治区政府 FQM-343 研究组、安达卢西亚自治区政府卓越项目 ProyExcel 00868，以及校内研究计划项目 UCA 2022-2023（PR2022-011）的资助。电子邮箱：jrosales@ugr.es。

记为 $S = \langle n_1、 \ldots\ldots、 n_p \rangle$. 。如果数值半群的一个生成元系的任何真子集都不能生成该数值半群，我们就称这个生成元系为极小生成元系。每个数值半群都有唯一的极小生成元系，而且该生成元系还是有限的（见 [14, 推论 2.8]）。数值半群 S的极小生成元集合记为 msg(S)。其基数称为嵌入维数，记为 e(S)。

给定 S 一个数值半群， S的重数记作 m(S)，它是 $S\backslash\{0\}$中的最小元素；$\mathbb{N}\backslash S$ 中元素的集合称为 S的间隙集。其基数称为 S的亏格，记作 g(S)；不属于 S的最大整数记作 F(S)，称为其弗罗贝尼乌斯数。这三个不变量在数值半群理论中非常重要（例如参见 [12] 和[3] 及其中给出的参考文献），并且它们将在本文中发挥重要作用。

数值半群的所谓弗罗贝尼乌斯问题（见 [12]），是寻找公式，以便根据数值半群的极小生成元系求出其弗罗贝尼乌斯数和亏格。对于嵌入维数为二的数值半群，这个问题已在 [15] 中得到解决。如今，对于嵌入维数大于或等于三的数值半群，该问题仍未解决。此外，在这种情况下，计算一般数值半群的弗罗贝尼乌斯数是 NP难问题。

在半群文献中，可以找到大量通过值半群研究一维解析不可约整环的著作（例如参见 [4], [5], [6], [9], [16] 和 [17]）。利用这种方法研究这类环时，Arf 性质是其中一项受到关注的性质。Lipman 基于 [2], 在 [10] 中引入并阐述了研究 Arf环的动机。根据值半群对这类环进行刻画，进而产生了 Arf 半群的概念（下文称为 A-半群）。

为了归纳某些数值半群族的共同性质， [11]中引入了协变类的概念。协变类是满足以下条件的非空数值半群族 $\mathscr{C}$:

1) $\mathscr{C}$ 有一个最小元，记为 $\Delta(\mathscr{C}) = \min(\mathscr{C})$。

2) 若 $\{S, T\} \subseteq \mathscr{C}$，则 $S \cap T \in \mathscr{C}$。

3) 若 $S \in \mathscr{C}$ 和 $S \neq \Delta(\mathscr{C})$，则 $S\backslash\{\mathrm{m}(S)\} \in \mathscr{C}$。

本文运用协变类的技术研究 A-半群的集合。

本文结构如下。在第2节中，我们证明，若 F 是一个正整数，则 Arf(F) $= \{S \mid S$ 是一个 A-半群，且 F(S) $= F\}$ 是一个协变类。这一事实以及 [11], 中的结果，将使我们能够在第3节中将 Arf(F) 集合的元素排列成一棵有根树。在第4节中，我们将运用这些概念和结果给出一个算法，用于计算 Arf(F) 的所有元素。

沿用 [8], 中引入的术语，我们称整数的 n-序列（$x_1, \ldots, x_n$）为 Arf 序列（下文简称 A-序列），条件是

1) $2 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$,

2) 对所有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $x_{i+1} \in \{x_i, x_i + x_{i-1}, \ldots, x_i + x_{i-1} + \cdots + x_1, \rightarrow\}$（这里 $\rightarrow$ 表示所有大于 $x_i + x_{i-1} + \cdots + x_1$ 的整数都属于该集合）。

在第5节中，我们将看到 A-序列与 A-半群之间存在一一对应关系。我们还将研究与 Arf(F) 的极大元相关联的 A-序列。

如果集合 X 满足以下条件，我们就称其为 Arf(F)-集：

1) $X \cap \Delta(\mathrm{Arf}(F)) = \emptyset$.

2) 存在 $S \in$ Arf(F)，使得 $X \subseteq S$.

在第6节中，我们将证明，若 X 是一个 Arf(F)-集，则 Arf(F) 中存在包含 X 的最小元素，我们将其记为 Arf(F)$[X]$.

如果 X 是一个 Arf(F)-集，且 $S =$ Arf(F)$[X]$，我们称 X 为 S. 的 Arf(F)-生成元系。我们将证明，Arf(F) 中的每个元素 S 都有唯一的极小生成元系，记作 Arf(F)msg(S)。Arf(F)msg(S) 的基数称为 S 的 Arf(F)-秩，记作 Arf$(F)_{\mathrm{rank}}(S)$。在第 6 节中，我们将通过刻画满足 Arf$(F)_{\mathrm{rank}}(S)$ 等于一的 Arf(F) 中的元素 S 来结束讨论。

2 基本结果

以下结果见命题 3.10] [14, 。

命题 2.1. 如果 S 是一个数值半群，那么 e(S) $\leq$m(S)。

如果一个数值半群 S 满足 e(S) =m(S)，则称其具有最大嵌入维数（以下称为 MED 半群）。

命题 3.12] [14, 中给出了以下结果。

命题 2.2. 设 S 是一个数值半群。则以下条件等价。

1) S 是一个 MED 半群。

2) 对所有 $\{x, y\} \subseteq S \backslash \{0\}$., $x + y -$ m(S) $\in S$

3) $(S \backslash \{0\}) + \{-$m($S$)$\}$ 是一个数值半群。

若对所有满足 $x \geq y \geq z$. 的 $\{x, y, z\} \subseteq S$，都有 $x+y-z \in S$，则称数值半群为 A-半群。

由命题 2.2 可得以下结果。

推论 2.3. 每个 A-半群都是 MED 半群。

以下结果由 [14, 命题 3.2] 推导得出，它解决了 MED 半群的 Frobenius 问题，因此也解决了 A-半群的 Frobenius 问题。

命题 2.4. 设 S 为一个 MED 半群，满足 msg(S) $=\{n_1 < n_2 < \cdots < n_e\}$. 那么 F($S$) $= n_e - n_1$ 且 g(S) $= \frac{1}{n_1}(n_2 + \cdots + n_e) - \frac{n_1 - 1}{2}$.

本节接下来的目标是证明：若 F 是一个正整数，则 Arf(F) $=\{S \mid S$是一个 A-半群，而 F(S) $= F\}$是一个协变类。

下面的结果广为人知，且易于证明。

引理 2.5. 设 S 和 T 为数值半群，且 $x \in S$. 则有以下结论：

1) $S \cap T$是一个数值半群，且 F($S \cap T$) $=$max{F(S), F(T)}.

2) $S\backslash\{x\}$ 是一个数值半群，当且仅当 $x \in$msg(S).

3) m(S) $=$min (msg(S))。

以下结果见 [14, 命题 3.22]。

引理 2.6。A-半群的有限交集仍是一个 A-半群。

命题 2.7。若 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，则 Arf($F$) 是一个协变类。

证明。显然， $\Delta(F) = \{0, F+1, \to\}$ 是 Arf(F) 的最小元。应用引理 2.5 和引理 2.6，我们可推出，若 $\{S, T\} \subseteq$Arf(F)，则 $S \cap T \in$Arf(F)。为完成证明，我们将说明，若 $S \in$Arf(F) 且 $S \neq \Delta(F)$，则 $S\backslash\{$m(S)$\} \in$Arf(F)。由引理 2.5 可知， $T = S\backslash\{$m(S)$\}$ 是一个数值半群。由于 $S \neq \Delta(F)$，因此 F(T) $= F$. 令 $\{x, y, z\} \subseteq T$ 使得 $x \geq y \geq z$. 。我们分两种情况讨论：

- 若 $z = 0$，则 $x + y - z = x + y \in T$.
- 若 $z \neq 0$，则 $x \geq y \geq z >$m(S)。因此， $x+y-z \in S$且 $x+y-z >$m(S)。由此可得， $x + y - z \in T$.

□

设 S 为一个数值半群。我们递归地定义与 S相关联的序列如下：

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = S_n\backslash\{$m($S_n$)$\}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$.

设 S 为一个数值半群。若元素 $s \in S$ 满足 $s <$ F(S)，则称其为小元素。我们用 N(S) 表示 S的小元素集合。N(S) 的基数记为 n(S)。

显然，集合 $\{0, \ldots,$ F(S)$\}$ 是集合 N(S) 和 $\mathbb{N}\backslash S$. 的不相交并。因此，我们得到以下结果。

引理 2.8. 若 S 是一个数值半群，则 g(S) + n(S) $=$ F(S) $+ 1$.

若 S 是一个数值半群，且 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是其关联序列，则集合 Cad(S) $=\{S_0, S_1, \ldots, S_{\mathrm{n}(S)-1}\}$ 称为 S. 的伴随链。请注意， $S_{\mathrm{n}(S)-1} = \Delta(\mathrm{F}(S)) = \{0, \mathrm{F}(S)+1, \rightarrow\}$.

下面给出 A-半群的一种刻画。

命题 2.9. 设 S 是一个数值半群。以下陈述等价:

1) S 是一个 A-半群。

2) 如果 T 是与 S对应序列中的一个元素，那么 T 是一个 MED 半群。

3) 如果 $T \in$Cad(S)，那么 T 是一个 MED 半群。

证明. 1) $\Longrightarrow$ 2). 如果 $\{x, y\} \subseteq T\backslash\{0\}$ 和 $x \geq y \geq \mathrm{m}(T)$，那么 $x + y - \mathrm{m}(T) \in S$且 $x+y-\mathrm{m}(T) \geq \mathrm{m}(T)$。因此， $x+y-\mathrm{m}(T) \in T.$。应用命题 2.2，可得 T 是一个 MED 半群。

2) $\Longrightarrow$ 3）。显然。
3) $\Longrightarrow$ 1）。设 $\{x, y, z\} \subseteq S$，使得 $x \geq y \geq z.$。我们要证明 $x+y-z \in S.$。分三种情况讨论。

1. 若 $z = 0$，则结论成立。

2. 若 $z \geq \mathrm{F}(S) + 1$，则结论显然也成立。

3. 若 $0 < z < \mathrm{F}(S) + 1$，则存在 $i \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{n}(S) - 1\}$，使得$z = \mathrm{m}(S_i)$。由于 S_i 是 MED 半群，且 $\{x, y\} \subseteq S_i\backslash\{0\}$，因此 $x+y-z = x + y - \mathrm{m}(S_i) \in S_i.$。所以， $x + y - z \in S.$

□

3 与 Arf(F) 相关的树

图 G 是一个有序对 (V, E)，其中 V 是非空集合，且 E 是 $\{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$ 的子集。 V 和 E 中的元素分别称为顶点和边。连接 G 中顶点 x 和 y 的一条长度为 n 的路径，是由不同边组成的序列，形式为 $(v_0, v_1), (v_1, v_2) \ldots, (v_{n-1}, v_n)$，满足 $v_0 = x$ 和 $v_n = y$。

如果存在一个顶点 r （称为 G 的根），使得对于 G 中任意其他顶点 x，都存在一条连接 x 和 r 的唯一路径，则称图 G 是一棵树。如果 (u, v) 是树 G 的一条边，则称 u 是 v 的子节点。

定义图 G(F) 如下:

- G(F) 的顶点集为 Arf(F),
- $(S, T) \in$Arf(F) $\times$ Arf(F) 是 G(F) 的一条边，当且仅当 $T = S\backslash\{\mathrm{m}(S)\}$.

由 [11, 命题 2.6] 和命题 2.7，可得以下结果。

命题 3.1. G(F) 是一棵以 $\Delta(F) = \{0, F+1, \rightarrow\}$. 为根的树

从根开始，通过边将已构建的顶点与其子节点连接起来，可以递归地构建一棵树。因此，刻画 G(F) 中任意顶点的子节点非常有意义。为此，我们将引入一些概念和结果。

按照 [13]，中引入的记号，如果 z 是数值半群 S 的一个伪弗罗贝尼乌斯数，则 $z \notin S$ 且对所有 $s \in S\backslash\{0\}$. 都有 $z+s \in S$。我们用 PF(S) 表示由 S. 的伪弗罗贝尼乌斯数组成的集合。PF(S) 的基数是 S 的一个重要不变量（见 [7] 和 [3]），称为 S 的型，记作 t(S)。

例 3.2. 设 $S = \langle 5, 7, 9\rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$. 。简单计算可得 PF($S$) $= \{11, 13\}$. 。因此，t(S) $= 2$.

给定一个数值半群，我们用 SG(S) $= \{x \in$PF(S) $\mid 2x \in S\}$. 表示。其元素称为特殊间隙。

以下结果见命题 4.33]。

引理 3.3. 设 S 是一个数值半群，且 $x \in \mathbb{N}\backslash S$. 。那么 $x \in$SG(S) 当且仅当 $S \cup \{x\}$ 是一个数值半群。

以下结果由命题 2.9] 推得。

命题 3.4. 若 $S \in$ Arf(F)，则树 G(F) 中 S 的子节点所构成的集合为

$$\{S \cup \{x\} \mid x \in \mathrm{SG}(S),\ x < \mathrm{m}(S)\ \ and\ S \cup \{x\} \in \mathrm{Arf}(F)\}.$$

设 $S \in$ Arf(F) 且 $x \in$ SG(S)，满足 $x <$ m(S)。我们接下来的目标是给出一个算法过程，用以判定 $S \cup \{x\}$ 是否为 Arf(F) 的元素。

引理 3.5. 设 $S \in$ Arf(F) 且 $x \in$ SG(S)，满足 F(S) $\neq x <$ m(S)。那么 $S \cup \{x\} \in$ Arf(F) 当且仅当 $S \cup \{x\}$ 是 MED 半群。

证明. 必要性. 由推论 2.3 可得。
充分性. 根据引理 3.3，我们知道 $S \cup \{x\}$ 是一个弗罗贝尼乌斯数为 F. 的数值半群。显然，Cad($S \cup \{x\}$) $=$Cad(S) $\cup \{S \cup \{x\}\}$ 。利用命题 2.9 即可轻易完成证明。□

引理 3.6. 设 S 是一个数值半群，且 $x \in SG(S)$ 满足 $x <$m(S)。那么以下条件等价。

1) $T = S \cup \{x\}$ *is a* MED*-semigroup.*

2）如果 $\{a, b\} \subseteq$ 极小生成元集合(S)，那么 $a + b - x \in S$.

证明。1) $\Longrightarrow$ 2) 。如果 $\{a,b\} \subseteq$极小生成元集合(S)，那么 $\{a,b\} \subseteq T\backslash\{0\}.$。应用命题 2.2 可得 $a+b-x \in T.$。由于 $a+b-x > x$，那么 $a+b-x \in S.$

2) $\Longrightarrow$ 1)。为了证明 T 是一个 MED 半群，根据命题 2.2，只需验证：若 $\{p,q\} \subseteq T\backslash\{0\}$，则 $p+q-x \in T.$。为此，我们分两种情况讨论：

1. 若 $x \in \{p,q\}$，则结论显然成立。

2. 若 $x \notin \{p,q\}$，则 $\{p,q\} \subseteq S\backslash\{0\}.$。因此，存在 $\{a,b\} \subseteq$、极小生成元集合(S)和 $\{s,s'\} \subseteq S$，使得 $p = a+s$ 且 $q = b+s'.$。于是 $p+q-x$ =$(a+b-x)$ $+s+s' \in S \subseteq T.$

□

接下来，我们给出所述算法。

算法 3.7。

INPUT：一个数值半群 S 以及 $x \in$ SG(S)，使得 $x <$ m(S)。OUTPUT： $S \cup \{x\}$ 是一个 MED 半群，或者 $S \cup \{x\}$ 不是 MED 半群。

(1) 如果对于所有 $\{a,b\} \subseteq$ msg(S)， $a+b-x \in S$，则返回 $S \cup \{x\}$ 是一个 MED 半群。

(2) 返回 $S \cup \{x\}$ 不是一个 MED 半群。

我们通过以下示例说明算法 3.7 的用法。

例 3.8。设 $S = \langle 5,\ 8,\ 9,\ 12\rangle = \{0,5,8,9,10,12,\rightarrow\}.$ 那么 $4 \in$ SG(S)。由于 $5+5-4 \notin S$，我们可以说 $S \cup \{4\}$ 不是一个 MED 半群。

4 计算 Arf(F) 的算法

设 S 是一个数值半群，且 $n \in S\backslash\{0\}.$。将 n 在 S 中的阿佩里集（Ap´ery 集）（以 [1] 命名）定义为 Ap(S, n) $= \{s \in S \mid s-n \notin S\}$。

以下结果可由 [14, 引理 2.4] 推得。

引理 4.1. 设 S 是一个数值半群，且 $n \in S\backslash\{0\}.$ 则 Ap(S, n) 是一个基数为 $n.$ 的集合。此外，Ap(S, n) $= \{0 = w(0)\ w(1) \ldots, w(n-1)\}$，其中 $w(i)$ 是 S 中与 i 模 n同余的最小元素，对所有 $i \in \{0,\ldots,n-1\}.$

由 [14], 的命题 3.1 可推得以下结果。

引理4.2. 设 S 是一个数值半群。当且仅当 msg(S) $=$ (Ap(S, m(S))$\backslash\{0\}) \cup \{$m(S)$\}.$ 时， S 是一个 MED 半群。

设 S 是一个数值半群。在 $\mathbb{Z}$ 上定义如下序关系： $a \leq_S b$ 当且仅当 $b-a \in S.$

以下结果是 [13] 中的引理 10。

引理 4.3。若 S 是一个数值半群，且 $n \in S\backslash\{0\}.$，则

$$\mathrm{PF}(S) = \{w - n \mid w \in \mathrm{Maximals}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)\}.$$

下一个引理的证明是显然的。

引理 4.4. 设 S 是一个数值半群，$n \in S\backslash\{0\}$ 和 $w \in$ 为阿佩里集(S,n)。那么，$w \in$ 属于阿佩里集(S,n)的极大元$\leq_s$，当且仅当对于所有$w' \in$ 属于阿佩里集(S,n)的 $w + w' \notin$，都有 $w + w' \notin$ 属于阿佩里集$(S,n)\backslash\{0\}$.

下面结果的证明非常简单。

引理 4.5. 如果 S 是一个数值半群且 $S \neq \mathbb{N}$，那么

$$\mathrm{SG}(S) = \{x \in \mathrm{PF}(S) \mid 2x \notin \mathrm{PF}(S)\}.$$

注 4.6. 注意，如果 S 是一个数值半群，并且我们知道某个 $n \in S\backslash\{0\}$对应的阿佩里集(S,n)，那么根据引理 4.3、4.4 和 4.5，我们可以轻松计算 SG(S)。

我们将通过一个例子来说明上一条注记的内容。

例 4.7。设 $S = \langle 5,\ 7,\ 9\rangle.$。那么 Ap$(S,5) = \{0,7,9,16,18\}.$。由引理 4.4 可知，Maximals$_{\leq_S}Ap(S,5) = \{16,18\}.$。根据引理 4.3，我们知道 PF$(S) = \{11,13\}.$。最后，引理 4.5 断言 SG$(S) = \{11,13\}$.

以下结果显然可得。

引理 4.8。设 S 是一个数值半群，$n \in S\backslash\{0\}$ 且 $x \in$SG(S)。那么$x + n \in$ Ap(S,n)。此外，Ap $(S \cup \{x\},n) =$(Ap$(S,n)\backslash\{x+n\}) \cup \{x\}$.

注 4.9。注意，由引理 4.8 可知，若已知 Ap(S,n)，便可轻松计算 Ap$(S \cup \{x\}, n)$。特别地，若$S \in$ Arf(F)，则对树 G(F) 中 S 的每个子节点 T，引理 4.8 都能让我们根据 Ap(S,n) 计算集合 Ap(T,n)（见命题 3.4）。

接下来，我们通过一个例子说明上述备注。

例 4.10. 我们再次考虑数值半群 $S = \langle 5, 7, 9\rangle.$。由例 4.7 可知，Ap$(S, 5)$ $= \{0,7,9,16,18\}$ 且 $11 \in$SG(S)。应用引理 4.8，我们有 Ap$(S \cup \{11\}, 5)$ $= \{0,7,9,11,18\}$.

命题 4.11. 设 S 是一个数值半群，且 $x \in$ SG(S)，使得$x <$ m(S)，并且 $S \cup \{x\}$ 是一个 MED 半群。那么以下条件成立。

1) For every $i \in \{1,\ldots,x-1\}$ *there is* $a \in \mathrm{msg}(S)$ *such that* $a \equiv i\,(mod\ x)$.

2) 如果 $\alpha(i) =$min$\{a \in$极小生成元集合$(S) \mid a \equiv i$(模 $x)\}$ 对所有 $i \in \{1,\ldots,x-1\}$ 都成立，那么 极小生成元集合$(S \cup \{x\}) = \{x, \alpha(1) .. ., \alpha(x-1)\}$.

证明. 1) 由于 $S \cup \{x\}$ 是一个 MED 半群且 m($S \cup \{x\}$) $= x$，根据引理4.2可知，如果阿佩里集 ($S \cup \{x\}, x$) $= \{0, w(1) \ldots, w(x-1)\}$，那么 极小生成元集合 ($S \cup \{x\}$) $= \{x, w(1) \ldots, w(x-1)\}$.

显然，msg($S \cup \{x\}$) $\subseteq$ msg(S) $\cup \{x\}$. 因此 $\{x, w(1) \ldots, w(x-1)\} \subseteq$ msg(S) $\cup \{x\}$. 由此可推得，对于所有 $i \in \{1, \ldots, x-1\}$，都存在 $a \in$ msg(S)，使得 $a \equiv i (\mathrm{mod}\ x)$。

2) 由于 msg($S \cup \{x\}$) $\subseteq$ msg(S) $\cup \{x\}$ 且 msg($S \cup \{x\}$) $= \{x, w(1) \ldots, w(x-1)\}$，由此可推得，对于每个 $i \in \{1, \ldots, x-1\}$.，$w(i) = \alpha(i)$

□

下面的例子说明了上述结果。

例4.12。设 $S = \langle 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\rangle$，则 $4 \in$ SG(S) $4 <$ m(S) $= 7$，且 $S \cup \{4\} = \{0, 4, 7, \rightarrow\} = \langle 4, 7, 9, 10\rangle$ 是一个 MED 半群。注意，$\alpha(1) = 9$, $\alpha(2) = 10$ 且 $\alpha(3) = 7$.

注4.13. 注意，根据命题 4.11，若 $S \in$ Arf(F) 且已知 msg(S)，则可以轻松计算树 G(F) 中 S 的所有子节点 T 的 msg(T)（见命题 4.11 和引理 3.5）。

现在我们可以给出本节标题所指的算法了。

算法 4.14。

INPUT：一个正整数 F.
OUTPUT：Arf(F)。

(1) $\Delta = \langle F+1, \ldots, 2F+1\rangle$, Arf($F$) $= \{\Delta\}$ 和 $B = \{\Delta\}$.(2) 对每个 $S \in B$, 计算 $\theta(S) = \{x \in$ SG(S) $\mid x <$ m(S) $x \neq F$ 和 $S \cup \{x\}$ 是 MED 半群$\}$.(3) 若 $\bigcup_{S \in B} \theta(S) = \emptyset$，则返回 Arf($F$)。(4) $C = \bigcup_{S \in B} \{S \cup \{x\} \mid x \in \theta(S)\}$.(5) 对所有 $S \in C$ 计算 msg(S)。(6) Arf(F) $=$ Arf(F) $\cup C$, $B = C$，并转到步骤 (2)。

接下来，我们通过一个例子来说明该算法。

例 4.15。我们将使用算法 4.14 计算 Arf(5) 的集合。

- $\Delta = \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11\rangle$, $\mathrm{Arf}(5) = \{\Delta\}$ and $B = \{\Delta\}$.
- $\theta(\Delta) = \{3, 4\}$ and $C = \{\Delta \cup \{3\} = \langle 3, 7, 8\rangle, \Delta \cup \{4\} = \langle 4, 6, 7, 9\rangle\}$.

- Arf(5) $=\{\Delta,\langle 3,7,8\rangle,\langle 4,6,7,9\rangle\}$ 和 $B=\{\langle 3,7,8\rangle,\langle 4,6,7,9\rangle\}$.
- $\theta(\langle 3,7,8\rangle)=\emptyset$, $\theta(\langle 4,6,7,9\rangle)=\{2\}$ 和 $C=\{\langle 2,7\rangle\}$.
- Arf(5) $=\{\Delta,\langle 3,7,8\rangle,\langle 4,6,7,9\rangle,\langle 2,7\rangle\}$ 和 $B=\{\langle 2,7\rangle\}$.
- $\theta(\langle 2,7\rangle)=\emptyset$.
- 该算法返回 Arf(5) $=\{\Delta,\langle 3,7,8\rangle,\langle 4,6,7,9\rangle,\langle 2,7\rangle\}$.

5 A-序列

设 $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，我们称整数的 n-序列（$x_1,\ldots,x_n$）为 A-序列，如果满足以下条件：

1）$2\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$,

2）$x_{i+1}\in\{x_i,x_i+x_{i-1},\ldots,x_i+x_{i-1}+\cdots+x_1,\rightarrow\}$.

下面的结果见 [8, 命题 1]。

命题 5.1。设 S 是 $\mathbb{N}$ 的一个非空子集，满足 $S\neq\mathbb{N}$. 那么 S 是 A-半群，当且仅当存在一个 A-序列 $(x_1,\ldots,x_n)$，使得

$$S=\{0,x_n,x_n+x_{n-1},\ldots,x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1,\rightarrow\}.$$

前一命题中的数值半群 S 称为与 A-序列 $(x_1,\ldots,x_n)$ 相关联的 A-半群。

由命题 5.1 可得以下结果。

推论 5.2。设 $S=\{0=s_0<s_1<\cdots<s_{\mathrm{n}(S)-1}<s_{\mathrm{n}(S)}=\mathrm{F}(S)+1,\rightarrow\}$ 是一个数值半群。那么 S 是 A-半群，当且仅当$\left(s_{\mathrm{n}(S)}-s_{\mathrm{n}(S)-1},s_{\mathrm{n}(S)-1}-s_{\mathrm{n}(S)-2},\ldots,s_1-s_0\right)$是一个 A-序列。

前一个推论中的 n(S)-序列将称为与 S. 关联的序列

注意，推论 5.2 为我们提供了一种判断数值半群是否为 A-半群的方法。

接下来，我们将通过一个例子说明上述方法。

例 5.3. 1. 利用推论 5.2，我们将证明数值半群 $S=\langle 4,6,21,23\rangle$ 是一个 A-半群。事实上，若 $S=\{0,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\rightarrow\}$，则 F($S$) $=19$. 因此，其关联序列为 $(20-18,18-16,16-14,14-12,12-10,10-8,8-6,6-4,4-0)$ =(2,2,2,2,2,2,2,2,4)，显然这是一个 A-序列。因此，S 是一个 A-半群。

2. 令 $S=\langle 4,\ 17,\ 18,\ 23\rangle$. 。于是我们有 $S=\{0,4,8,12,16,17,18,20,\rightarrow\}$, 因此 F($S$) $=19$. 。所以，它的关联序列为 $(20-18,\ 18-17,\ 17-16,\ 16-12,\ 12-8,\ 8-4,\ 4-0)$ =(2, 1, 1, 4, 4, 4, 4)，这不是一个 A-序列。根据推论 5.2，我们可以说，一个 S 不是 A-半群。

现在，我们的目标是研究与 Arf(F) 的极大元相关联的 A-序列。

引理 5.4. 若 $\{S,T\}\subseteq$Arf(F) $S\subsetneq T$且 $x=$max($T\backslash S$)，则 $S\cup\{x\}\in$Arf(F)。

证明。由于 $2x\in T$且 $2x>x$，因此 $2x\in S.$。若 $s\in S\backslash\{0\}$，则 $x+s\in T$且 $x+s>x.$。因此 $x+s\in S$，从而 $S\cup\{x\}$ 是一个数值半群。显然， $x<F$，因此 F($S\cup\{x\}$) $=F.$。为完成证明，我们将证明 $S\cup\{x\}$是一个 A-半群。为此，我们将证明：若 $\{a,b,c\}\subseteq S\cup\{x\}$且 $a\leq b\leq c$，则 $b+c-a\in S\cup\{x\}.$。我们分两种情况讨论。

1. 若 $\{a,b,c\}\subseteq S$，则 $b+c-a\in S\subseteq S\cup\{x\}.$

2. 若 $\{a,b,c\}\nsubseteq S$，则 $x\in\{a,b,c\}.$。我们很容易推出 $b+c-a\in T$ 和 $b+c-a\geq x.$。因此， $b+c-a\in S\cup\{x\}.$

□

引理 5.5. 设 ($x_1,\ldots,x_n$) 是一个 A-序列，且 $a\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}.$。则以下条件成立：

1) $(a,x_1-a,x_2,\ldots,x_n)$ *be an* A*-sequence if and only if* $a\leq\dfrac{x_1}{2}$.

2) 若 $i\in\{2,\ldots,n\}$，则 ($x_1,\ldots,x_{i-1},a,x_i-a,x_{i+1},\ldots,x_n$) 是一个 A-序列，当且仅当 $a\in\{x_{i-1},x_{i-1}+x_{i-2},\ldots,x_{i-1}+x_{i-2}+\ldots,x_1,\rightarrow\}$ 和 $x_i\in\{2a,2a+x_{i-1},\ldots,2a+x_{i-1}+\cdots+x_1,\rightarrow\}$.

证明。1) 如果 ($a,x_1-a,x_2,\ldots,x_n$) 是一个 A-序列，那么 $a\leq x_1-a$，因此 $a\leq\dfrac{x_1}{2}$.

反过来，如果 $a\leq\dfrac{x_1}{2}$，那么 $a\leq x_1-a\leq x_2\leq\cdots\leq x_n.$。显然，如果 $i\in\{2,\ldots,n\}$，那么 $x_i\in\{x_{i-1},x_{i-1}+x_{i-2},\ldots,x_{i-1}+\cdots+x_1,\rightarrow\}$，因此 $x_i\in\{x_{i-1},x_{i-1}+x_{i-2},\ldots,x_{i-1}+\cdots+x_2+x_1-a+a,\rightarrow\}.$。所以 ($a,x_1-a,x_2,\ldots,x_n$) 是一个 A- 序列。

2) 如果 ($x_1,\ldots,x_{i-1},a,x_i-a,x_{i+1},\ldots,x_n$) 是一个 A-序列，那么 $a\in\{x_{i-1},x_{i-1}+x_{i-2},\ldots,x_{i-1}+x_{i-2}+\cdots+x_1,\rightarrow\}$，并且 $x_i-a\in\{a,a+x_{i-1},\ldots,a+x_{i-1}+\cdots+x_1、\ \rightarrow\}$，因此 $x_i\in\{2a,2a+x_{i-1},\ldots,2a+x_{i-1}+\cdots+x_1,\rightarrow\}$.
反过来，要证明 ($x_1,\ldots,x_{i-1},a,x_i-a,x_{i+1},\ldots,x_n$) 是一个 A-序列，只需验证 $x_i-a\in\{a,a+x_{i-1},\ldots,a+x_{i-1}+\cdots+x_1、\ \rightarrow\}$ 和 $a\in\{x_{i-1},\ldots,x_{i-1}+\cdots+x_1,\rightarrow\}.$。但这一事实可由假设推出。

□

我们称 A-序列 ($x_1,\ldots,x_n$) 存在真细化，如果存在 $a\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ 和 $i\in\{1,\ldots,n\}$，使得 ($x_1,\ldots,x_{i-1},a,x_i-a,x_{i+1},\ldots,x_n$) 是一个 A-序列。

如果 $(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个 A-序列，我们用 S$(x_1,\ldots,x_n)$ 表示其对应的 A-半群。注意，根据命题 5.1，我们知道 S$(x_1,\ldots,x_n)$ $\in$Arf(F) 当且仅当 $x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1=F+1$.

记 $\mathcal{J}(F)=\{(x_1,\ldots,x_k)\mid k\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\ (x_1,\ldots,x_k)$ 是一个不接受真细化的 A-序列，并且 $x_1+\cdots+x_k=F+1\}$. 由 Arf(F) 的所有极大元构成的集合记为 Max(Arf(F))。

下述结果是引理 5.4 的推论。

命题 5.6. 对应关系 f: $\mathcal{J}(F)\longrightarrow$Max(Arf($F$)) $f(x_1,\ldots,x_k)$ =S$(x_1,\ldots,x_k)$ 是一个双射。

接下来我们将通过一个例子来说明这一结果。

例 5.7. 显然，(2, 2, 2, 8)、(2, 2, 2, 2, 6)、(2, 2, 2, 2, 2, 4) 和 (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) 都是 A-序列，且每一个都是前一个的细化。此外，(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) 不接受真细化。因此，S(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) $\in$ Max(Arf(13))，且 S(2, 2, 2, 8) $\subseteq$ S(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)。

6 阿尔夫（F）生成元系

若 X 是一个阿尔夫（F）集，则将包含 X. 的所有阿尔夫（F）集的交记作 Arf(F)$[X]$。由于 Arf(F) 是有限集，根据命题 2.7，Arf(F) 中各元素的交仍是 Arf(F) 的一个元素。因此，我们得到以下结果。

命题 6.1。设 X 是一个阿尔夫（F）集。则 Arf(F)$[X]$ 是包含 X. 的 Arf(F) 的最小元。

若 X 是一个阿尔夫（F）集且 $S=$ Arf(F)$[X]$, 则称 X 是 S. 的阿尔夫（F）生成元系。此外，若对所有 $Y\subsetneq X$, 都有 $S\neq$ Arf(F)$[Y]$，则称 X 是 S. 的极小阿尔夫（F）生成元系。

我们的下一个目标是证明，Arf(F) 的每个元素都有唯一的极小阿尔夫（F）生成元系。为此，我们给出一些必要的结果。

下面的结果可直接证明。

引理 6.2. 设 X 和 Y 是 Arf(F)-集，使得 $X\subseteq Y$. 则 Arf(F)$[X]\subseteq$Arf(F)$[Y]$.

引理 6.3. 设 $S\in$ Arf(F)。则 $X=\{x\in$ 极小生成元集合(S) $\mid S\backslash\{x\}\in$ Arf(F)$\}$ 是一个 Arf(F)-集，且 $S=$Arf(F)$[X]$.

证明。显然， X 是一个 Arf(F)-集，且 $X\subseteq S$. 因此 Arf(F) $\subseteq S$. 令$T=$Arf(F)$[X]$，并设 $T\subsetneq S$. 于是存在 $a=$min($S\backslash T$)。因此我们得到， $a\in$msg(S)，其中 $a<F$. 若 $S=T\cup\{s_1>s_2>\cdots>s_n\}$，则 $s_n=a$. 因此，反复应用引理 5.4，可得 $T, T\cup\{s_1\}, T\cup\{s_1,s_2\},\ldots T\cup\{s_1,s_2,\ldots,s_{n-1}\}$ 都是 Arf(F) 的元素。因此，$S\backslash\{a\}=T\cup\{s_1,s_2,\ldots,s_{n-1}\}$ 是 Arf(F) 的一个元素。于是，Arf(F)$[X]\subseteq S\backslash\{a\}$ 这与 $a\in X$. 的事实矛盾 □

命题 6.4。设 $S \in \mathrm{Arf}(F)$。则 $X = \{x \in \mathrm{msg}(S) \mid S\backslash\{x\} \in \mathrm{Arf}(F)\}$是 $S.$的唯一极小 Arf(F)-生成元系

证明。根据引理 6.3，我们知道 X 是一个 Arf(F)-集，且 $S = \mathrm{Arf}(F)[X].$。为完成证明，我们将证明，若 Y 是一个 Arf(F)-集且 $S = \mathrm{Arf}(F)[Y]$，则 $X \subseteq Y.$。事实上，若 $X \nsubseteq Y$，则存在 $x \in X\backslash Y.$。因此， $S\backslash\{x\} \in \mathrm{Arf}(F)$ 且 $Y \subseteq S\backslash\{x\}.$。于是，$\mathrm{Arf}(F)[Y] \subseteq S\backslash\{x\}$，这显然矛盾。 □

现在我们用一个例子来说明上述结果。

例 6.5。显然， $S = \langle 6、8、10、31、33、35\rangle \in \mathrm{Arf}(29)$ $S\backslash\{6\} \in \mathrm{Arf}(29)$ $S\backslash\{8\} \in \mathrm{Arf}(29)$，且 $S\backslash\{10\} \notin \mathrm{Arf}(29)$。应用命题 6.4，我们断言 $\{6, 8\}$ 是 $S.$的最小 Arf(29)-生成元系

由命题 2.7 和命题 6.4 可得以下结果。

推论 6.6. 若 $S \in \mathrm{Arf}(F)$ 且 $S \neq \Delta(F)$，则 $\mathrm{m}(S)$ 属于 $S.$的极小 Arf(F)-生成元系。

若 $S \in \mathrm{Arf}(F)$，则我们用 Arf(F)msg(S) 表示 $S.$ 的极小 Arf(F)-生成元系。Arf(F)msg(S) 的基数称为 S 的 Arf(F)-秩，并记作 $\mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S)$。

以下结果由命题 6.4 和推论 6.6 推出。

推论 6.7. 若 $S \in \mathrm{Arf}(F)$，则以下断言成立。

1）$\mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S) \leq \mathrm{e}(S)$.

2) $\mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S) = 0$当且仅当 $S = \Delta(F)$。

3) $\mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S) = 1$当且仅当 Arf($F$)极小生成元集合($S$) $= \{\mathrm{m}(S)\}$.

我们的下一个目标是描述 Arf(F) 中 Arf(F)-秩等于一的元素。

对于整数 a 和 b，我们称 a 整除 b，如果存在一个整数 c 使得 $b = ca$，并记作 $a \mid b.$。否则， a 不整除 b，记作 $a \nmid b.$

引理 6.8. 若 $\{m, F\} \subseteq \mathbb{N}$、 $2 \leq m < F$和 $m \nmid F$，则 $S = \langle m\rangle \cup \{F + 1, \to\}$是 Arf($F$) 的一个元素，且 $S =$Arf(F)[{m}].

证明. 容易证明 S 是一个 A-半群，$\mathrm{F}(S) = F$，并且每个包含 $\{m\}$ 的 Arf(F) 元素都包含 $S.$。因此， $S =$Arf(F)[{m}]. □

命题 6.9。在上述记号约定下，以下条件等价。

1) $S \in \mathrm{Arf}(F)$ 和 $\mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S) = 1.$

2) 存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $2 \leq m < F$、 $m \nmid F$ 和 $S = \langle m\rangle \cup \{F + 1, \to\}.$

证明。1) $\Longrightarrow$ 2）。根据推论 6.7，我们知道 $S = \mathrm{Arf}(F)[\{\mathrm{m}\}]$ 且 $S \neq \Delta(F)$。于是 $\mathrm{m}(S) \in \mathbb{N}, 2 \leq \mathrm{m}(S) < \mathrm{F}(S)$ 且 $\mathrm{m}(S) \nmid F.$。结论由引理 6.8 得出。

2) $\Longrightarrow$ 1)。此外，这可以由引理 6.8 推得。

□

若 $q \in \mathbb{Q}$，则我们记 $\lfloor q \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq q\}$.

推论 6.10. 若 $S \in \mathrm{Arf}(F)$ 且 $\mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S) = 1$，则 $\mathrm{g}(S) = F - \left\lfloor \frac{F}{\mathrm{m}(S)} \right\rfloor \cdot \mathrm{m}(S)$

证明。根据命题 6.9，我们知道 $S = \langle \mathrm{m}(S) \rangle \cup \{F+1, \to\}$. 因此，$S = \{0, \mathrm{m}(S), 2\mathrm{m}(S) \ldots, \left\lfloor \frac{F}{\mathrm{m}(S)} \right\rfloor \mathrm{m}(S) \ F+1, \ \to\}$. 所以 $\mathrm{g}(S) = F - \left\lfloor \frac{F}{\mathrm{m}(S)} \right\rfloor \cdot \mathrm{m}(S)$。

□

下面的例子将说明如何运用前面的结果。

例 6.11. 若 $S = \mathrm{Arf}(17)[\{5\}]$，则应用推论 6.10 可得 $\mathrm{g}(S) = 17 - \left\lfloor \frac{17}{5} \right\rfloor = 17 - 3 = 14.$

设 P_1、…、P_r 是互不相同的正素数，且 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{N}.$。我们知道，$P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$ 的正因数个数为 $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$。因此，作为命题 6.9 的推论，我们得到以下结果。

推论 6.12. 设 F 是一个满足 $F \geq 2.$ 的整数。若 $F = P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$ 是 F 的素数分解，则 $\{S \in \mathrm{Arf}(F) \mid \mathrm{Arf}(F)_{\mathrm{rank}}(S) = 1\}$ 是一个基数为 $F - (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ 的集合。

我们以一个应用上述推论的例子作为本文的结尾。

例 6.13. 由于 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$，根据推论 6.12，我们得到 $\{S \in \mathrm{Arf}(360) \mid \mathrm{Arf}(360)_{\mathrm{rank}}(S) = 1\}$ 的基数为 $360 - (3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 360 - 24 = 336.$

参考文献

[1] R. Apéry, 关于代数曲线超线性分支，巴黎科学院院刊 222 (1946), 1198–2000。

[2] C. Arf, 对代数分支重数阶数序列的一种代数解释，伦敦数学会会刊 Ser.2,50(1949), 256– 287。

[3] V. Barucci, D. E. Dobbs and M. Fontana,《数值半群中的极大性及其在一维解析不可约局部整环中的应用》，《美国数学会回忆录》598（1997）。

[4] J. Bertin, P. Carbonne,《整数半群及其在分支上的应用》，《代数杂志》49（1977），81–95。[5] J. Castellanos,《重数序列与代数曲线芽的值半群之间的关系》，《纯粹与应用代数》43（1986），119–127。[6] C. Delorme,《 ℕ的完全交子幺半群》，《高等师范学校科学年鉴》（第4辑）9（1976），145–154。[7] R. Fröber, G. Gottlieb and R. Häggkvist,《关于数值半群》，《半群论坛》35（1987），63–83。[8] P. A. García, B. A. Heredia, H. I. Karakas and J. C. Rosales,《Arf 数值半群的参数化》，《代数及其应用》16（2017），1750209（31页）。[9] E. Kunz,《一维Gorenstein环的值半群》，《美国数学会会刊》25（1973），748–751。[10] J. Lipman,《稳定理想与Arf环》，《美国数学杂志》93（1971），649–685。[11] M. A. Moreno-Frías and J. C. Rosales,《固定弗罗贝尼乌斯数的数值半群的协变性》，https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.09121 [12] J. L. Ramírez Alfonsín,《丢番图弗罗贝尼乌斯问题》，牛津大学出版社，伦敦（2005）。[13] J. C. Rosales and M. B. Branco,《可表示为对称数值半群交集的数值半群》，《纯粹与应用代数》171（2002），303–314。[14] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez,《数值半群》，《数学进展》第20卷，施普林格，纽约，2009。[15] J. J. Sylvester,《数学问题及其解答》，《教育时报》41（1884），21。[16] B. Teissier,《“平面分支的模问题”附录》，O. Zariski在巴黎综合理工学院数学中心讲授的课程（1973）。[17] K. Watanabe,《一维Gorenstein整环的一些例子》，《名古屋数学杂志》49（1973），101–109。