arXiv:2303.12510v1 [math.OA] 22 Mar 2023

函数系统的射影正性

ANAR DOSI

Abstract. 本文致力于研究函数系统范畴中的射影正性，这在算子系统的量子化问题中发挥着关键作用。本文的主要结果表明，每个含单位元的 $*$-范数空间都可以赋予射影正性。本文还描述了 L^p- 空间、 Schatten 矩阵空间以及有限冯 · 诺依曼代数的 L^p- 空间中相关态空间的几何性质。

1. 引言

具体函数系统是含单位元的交换 C^*-代数的含幺自伴子空间，而抽象函数系统则定义为带有阿基米德序单位 e 的有序 $*$-向量空间 (V, e)。函数系统可视为配备了序（半）范数的含单位元 $*$-范数空间，而 V 中的所有序范数均等价；这是通过介于最小和最大序范数 [17, 之间的过程得到的（定理 4.5、4.7]）。在巴拿赫格理论中，函数系统被称为带有强序单位 [14, 的有序向量空间（第 18] 页）。每个抽象函数系统都可以在其配备 w^*-拓扑的态空间上等距地实现为一个具体函数系统。这是实函数系统的 Kadison 表示定理的复数版本 [17, （定理 5.2]）。回顾一下，有序 $*$-向量空间 V（带有阿基米德序单位 e，其正元素构成含幺锥 V_+ ）的态空间 $S(V_+)$，定义为范数对偶空间 V^* 中实超平面 $V_{he}^* = \{\varphi \in V^* \colon \varphi = \varphi^*, \langle e, \varphi\rangle = 1\}$ 的 $V_{he}^* \cap$ 球 V^* 与由泛函 $\langle e, \cdot\rangle \colon V^* \to \mathbb{C}$ 给定的单位球 V^* 的交集。锥 V_+ 恰可通过其态空间 $S(V_+)$ 定义，即 $v \geq 0$ 当且仅当 $\langle v, S(V_+)\rangle \geq 0$ [17, （命题 2.20]）。Kadison 表示由含单位元映射给出

$$\Phi : V \to C\left(S\left(V_+\right)\right), \quad \Phi(v)(\varphi) = \langle v, \varphi\rangle,$$

其中， $C(S(V_+))$ 是豪斯多夫紧拓扑空间 $S(V_+)$ 上所有复值连续函数构成的 C^*-代数。Paulsen 和 Tomforde 在 [17] 中通过引入函数系统本身这一概念，对函数系统进行了详细研究。

在量子泛函分析中， [8], [9] 函数系统被视为交换算子系统（或量子系统），而配备各种含幺量子锥的算子系统则是底层函数系统的量子化。算子系统被定义为复希尔伯特空间 H 上所有有界线性算子构成的算子代数 $\mathcal{B}(H)$ 的含幺自伴子空间；算子空间则是 $\mathcal{B}(H)$ 的子空间。含单位元的 $*$-向量空间中含幺锥的量子化原理由 Paulsen、Todorov 和 Tomforde 在 [18] 中提出。这些构造构成了抽象算子系统的范畴论背景，而 Choi 和 Effros 的关键结果 [2] 则给出了算子系统的抽象刻画（另见 [16, 第 13] 章）。 [6] 研究了含单位元的 $*$-向量空间上的算子空间结构中算子系统的分类问题。结果表明，每一种算子系统构造都可以通过一种算子空间构造来实现，从而得到一个

日期：2023年3月3日。2000年数学主题分类。主分类 46L07；次分类 46B40、47L25。关键词和短语：函数系统、算子系统、含幺锥、态空间、射影正性。

与之相关的适当含幺量子锥。该含幺量子锥继而在底层含单位元的 $*$-向量空间上生成一种新的函数系统结构。但在实践中，如何识别与某种算子空间构造相关的含幺锥，尚不清楚。例如，算子系统的射影张量积，甚至 1-和，都不以恰当意义存在（见 [12]）。下面这个简单例子可以说明这一点。平凡算子空间 $\mathbb{C}$ 与其算子对偶 $V^* = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ 的 1-和 $V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ 是良定义的

1 ∞。注意， V 具有自然对合 $z = (z_0, z_1) \mapsto z^* = (z_0^*, z_1^*)$，使得 $\|z^*\|_1 = \|z\|_1$，且单位元为$e = (2^{-1}, 2^{-1})$。在此情形下， $V_{he}^* = \left\{ w \in \mathbb{R} \overset{\infty}{\oplus} \mathbb{R} : w_0 + w_1 = 2 \right\}$，且 $V_{he}^* \cap$ 球 $V^* = \{(1, 1)\}$，也就是说，相关态空间已退化，只能在 $_1V$ 中定义一个非分离锥。因此，如何在这个平凡情形下定义算子系统的 1-和 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$，仍不清楚。

在算子系统范畴中构造射影对象是一项严峻的挑战。算子系统商并不总能保留相应的算子空间商（参见 [13, 第 4]节的讨论）。事实上，在函数系统层面，这个问题仍未解决。前面的例子中， $\mathbb{C}$ 是一个函数系统。本文的主要目标是探讨哪些函数系统是射影函数系统。

我们通过发展射影 Positivity 的一般概念，彻底解决了这个问题。回顾一下， $*$向量空间 V 上的范数若其单位球 V 是厄米的，即 $(\text{ball } V)^* = \text{ball } V$，则称为 $*$-范数。在这种情况下，(V, V^*) 是一个对偶 $*$对 [4],，而 V_h^*表示 V 上所有有界厄米泛函构成的实向量空间。固定一个非零的 $e \in V_h$，并如上令 $V_{he}^* = \{y \in V_h^* \colon \langle e, y \rangle = 1\}$。那么， $S = V_{he}^* \cap \text{ball}\, V^*$ 是 V_h^*的一个凸子集。若 $S \neq \varnothing$，我们称e 是 V 的单位元（或简称单位元）。 $*$-赋范空间 V 的每个厄米单位向量 e 自动都是一个单位元。带有固定单位元 e 的 $*$-赋范向量空间 V 称为含单位元的

$*$范数空间（V， e）。正如我们上面所见，集合 S 可能不足以在 V 中定义序。这也是分析学中许多其他基本例子的情形（见下文第 5、6 节）。

如果球 V等价于 S的绝对极 S°，我们就称球V为含幺球，而（V， e）也称为抽象函数系统，其态空间为 S。在这种情况下，$\mathfrak{c} = \{v \in V_h \colon \langle v, S \rangle \geq 0\}$ 是 V中的分离的、闭的、含单位元锥，使得 S（$\mathfrak{c}$） $= S$ 且 $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_e$，其中 $\|v\|_e = \sup |\langle v, S \rangle|$， $v \in V$（最小范数）。因此，我们的函数系统比上文所述的概念稍微一般一些。再次利用 Kadison 表示，可以将 V识别为 C（S（$\mathfrak{c}$））中的一个含幺自伴子空间，且这种识别在序和拓扑意义下是同构的；也就是说，（V， $\mathfrak{c}$）是定义在 S（$\mathfrak{c}$）上的具体函数系统。若球 $V = S^\circ$，则 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_e$，于是得到等距嵌入 $\Phi \colon V \to C$（S（$\mathfrak{c}$）。

对于非含单位元的球V，我们考虑以下凸集 $S_\varepsilon = V_{he}^* \cap \varepsilon$ 球 V^* 对$\varepsilon > 0$。因此，当球 $V \sim S_1^\circ$时，球 V是含单位元的。但如果球 V不是含单位元的，那么我们证明

$$\text{ball}\, V \sim S_\varepsilon^\circ \quad \text{for every } \varepsilon > 1/\|e\|$$

（见定理 4.1）。本文的主要结果断言

$$\mathfrak{c}_\varepsilon = \{v \in V_h : \langle v, S_\varepsilon \rangle \geq 0\}$$

是 V中的一个闭的、含单位元的锥，其态空间 $S(\mathfrak{c}_\varepsilon) = S_\varepsilon$，并且 $(V, \mathfrak{c}_\varepsilon)$ 是 S_ε 上的一个具体函数系统，其 ε-范数 $\|v\|_\varepsilon = \vee |\langle v, S_\varepsilon \rangle|$, $v \in V$ 对每个 $\varepsilon > 1/\|e\|$ 都与 V 的原范数等价。因此，在不改变含单位元的 $*$-范数空间 (V, e) 的原有拓扑的情况下，可以为其赋予一种相容的函数系统结构，称为投影函数系统。

作为主要结果的一项实际应用，我们考察了若干例子，包括 L^p-空间、矩阵 Schatten 空间，以及有限冯·诺依曼代数的非交换 L^p-空间。在第 5 节，我们讨论经典 $L_\mu^p(\mathcal{T})$、 $1 \leq p \leq \infty$ 空间的情形。单位向量$e_p = \mu(\mathcal{T})^{-1/p}\, 1$ 确实是相关 Banach $*$-空间 $L_\mu^p(\mathcal{T})$ 的单位元。但它们的球 $\text{ball}\, L_\mu^p(\mathcal{T})$

对于所有 $1 \leq p < \infty$，它们都不是含单位元的。对于 $p = \infty$，我们考虑带有单位元 $e_\infty = 1$ 的阿贝尔冯·诺依曼代数$L_\mu^\infty(\mathcal{T})$，而 $\left(L_\mu^\infty(\mathcal{T})\, e_\infty\right)$ 是一个算子系统，因而也是一个函数系统。对于满足 $p < \infty$ 和 $\varepsilon \geq 1$ 的共轭指数对 (p, q)，我们定义以下凸子集

$$S_\varepsilon^p = \left\{ f \in L^q(\mathcal{T})_h : \|f\|_q \leq \varepsilon, \int f d\mu = \mu(\mathcal{T})^{1/p} \right\} \subseteq \partial\left(\varepsilon \operatorname{ball} L^q(\mathcal{T})\right).$$

球 $L_\mu^q(\mathcal{T})$中的态空间 S_1^p 再次退化为单点集 $\{e_q\}$。尽管如此，含幺 $*$-范数空间 $L_\mu^p(\mathcal{T})$具有由分离的、闭的含单位元锥 $L_\mu^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 所赋予的射影正性，其态空间对每个 $\varepsilon > 1$都是 S_ε^p。结果表明，巴拿赫格 $L^p(\mathcal{T})_h$ 的原锥 $L^p(\mathcal{T})_+$与含幺锥 $L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 截然不同；除非 $\operatorname{supp}(\mu)$ 是有限的，否则它们不可比较（见定理 5.1）。此外，在有限维非平凡情形下，只有当 $n = 2$ 且 $\varepsilon = 2^{1/p}$时，我们才有 $\ell^p(n)_+ = \ell^p(n)_\varepsilon^+$。

在第 6 节中，我们首先考虑全矩阵代数 $\mathbb{M}_n$ 及其单位矩阵 e，其中 $n > 1$。配备 Schatten p-范数的代数 $\mathbb{M}_n$ 记作 $\mathfrak{S}_p$, $1 \leq p \leq \infty$。在这种情况下，$\mathfrak{S}_\infty^* = \mathfrak{S}_1$，而 $\mathfrak{S}_\infty^+$ 是正元素的标准含幺锥，其态空间为 $S_\tau = \{y \in \mathfrak{S}_1 : \ y \geq 0, \tau(y) = 1\}$ 是来自 $\mathbb{M}_n$的密度矩阵，也就是说，$(\mathfrak{S}_\infty, e)$ 是一个函数系统。但其余情形 $(\mathfrak{S}_p, e)$ 并非如此；它们是具有共同单位元 e 的含幺 $*$-范数空间。尽管如此，$(\mathfrak{S}_p, e)$ 仍是一个函数系统，配备由 $\varepsilon = 1 > 1/\|e\|_p$ 给出的射影锥 $\mathfrak{S}_p^+$，满足 $\mathfrak{S}_{\infty,\ \varepsilon}^+ \subseteq \mathfrak{S}_1^+ \subseteq \mathfrak{S}_p^+ \subseteq \mathfrak{S}_\infty^+, \varepsilon \geq n$ 是由含幺锥及其态空间构成的递增族

$$S\left(\mathfrak{S}_p^+\right) = \left\{ (1+r)z - rw : z, w \in S_\tau, zw = 0, \|(1+r)z + rw\|_q \leq 1 \right\}$$

对于所有共轭指数对（p, q）（见定理 6.1）。此外，只有当 $n = 2$ 和 $\varepsilon = 2^{1/p}$时，$\mathfrak{S}_p^+$才会化为 $\mathfrak{S}_p$ 的原始锥。因此，只有对于二能级量子系统（量子比特）[10, Ch. 2],，射影正性才会恰好化为原有的正性。态空间 $S\left(\mathfrak{S}_p^+\right)$ 的（有限维）几何在定理 6.1 的证明中有所描述。

最后，定理 6.2 将所得的 $\mathbb{M}_n$ 结果推广到有限冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 的情形，该代数带有忠实有限正规迹 τ, $\tau(e) > 1$。此外还证明（见命题 6.1），含幺锥 $L^2(\mathcal{M}, \tau)_\varepsilon^+$对于含幺希尔伯特 $*$-空间（$L^2(\mathcal{M}, \tau)\ e$）的 $\varepsilon = (2/\tau(e))^{1/2} > 1/\sqrt{\tau(e)}$，可化为其中一个 [7]。因此，$L^2(\mathcal{M}, \tau)_\varepsilon^+$是 Pisier 的算子希尔伯特空间 [8, 3.5], [9, 7.4]背后的正性。

2. The preliminary material on operator systems

为了避免读者在阅读新内容时感到不适，本节将介绍算子系统的一些重要结果，并补充一些新事实。对于某些论断，很难指出相关的直接参考文献，因此我们在附录第 7 节中为本节内容提供支持。对于基本的格运算 inf 和 sup，我们分别使用记号 $\wedge$ and $\vee$。向量空间中子集 S 的凸包记作 $\operatorname{co}(S)$，而 $\operatorname{abc}(S)$ 表示 S 的绝对凸包。集合 S 的特征函数记作 $[S]$。

2.1. 算子系统。我们称希尔伯特空间 H 上的算子系统（或非交换函数系统）V 为 $\mathcal{B}(H)$ 的一个含单位元自伴子空间。因此，$V \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是满足 $e \in V$ 和 $V^* = V$ 的子空间，其中 e 是 $\mathcal{B}(H)$ 的单位元。含单位元的 C^*-代数是算子系统的一个例子。算子系统 V 中所有厄米元素构成的实子空间记作 V_h，而 $V_+ = V \cap \mathcal{B}(H)_+$ 是其正元素构成的（代数或拓扑意义下（见 [4]））闭锥。锥 V_+ 是分离的，即 $V_+ \cap -V_+ = \{0\}$。此外，它还是含幺锥，因为 $V_+ - e$ 吸收所有 V_h。也就是说，对任意 $x \in V_h$，都有

$x \in \|x\|(V_+ - e)$。还要注意，对每个 $x \in V_h$，都有 $x = (x + \|x\| e) - \|x\| e \in V_+ - V_+$，即 $V_h = V_+ - V_+$，进而推出 $V = (V_+ - V_+) + i(V_+ - V_+)$。

线性泛函 $\mu\colon V \to \mathbb{C}$ 定义其共轭 $\mu^*\colon V \to \mathbb{C}$ 为 $\langle x, \mu^* \rangle = \langle x^*, \mu \rangle^*$, $x \in V$。若 $\mu = \mu^*$，则称 μ 为 V上的厄米泛函，而 V上所有厄米泛函构成的实向量空间记为 V_h^*。注意，$\mu \in V_h^*$ 当且仅当 $\langle V_h, \mu \rangle \subseteq \mathbb{R}$。事实上，若 $\mu \in V_h^*$且$x \in V_h$，则 $\langle x, \mu \rangle^* = \langle x^*, \mu \rangle^* = \langle x, \mu^* \rangle = \langle x, \mu \rangle$，也就是说，$\langle x, \mu \rangle \in \mathbb{R}$。反过来，$\langle V_h, \mu \rangle \subseteq \mathbb{R}$意味着

$$\langle x, \mu^* \rangle = \langle \operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x, \mu^* \rangle = \langle \operatorname{Re} x - i \operatorname{Im} x, \mu \rangle^* = \langle \operatorname{Re} x, \mu \rangle + i \langle \operatorname{Im} x, \mu \rangle = \langle x, \mu \rangle$$

对所有 $x \in V$，也就是说，$\mu = \mu^*$。此外，

$$\|\mu\| = \vee |\langle \operatorname{ball} V_h, \mu \rangle| \text{ for all } \mu \in V_h^*. \tag{2.1}$$

事实上，对于每个 $x \in$球 V，若其 $\langle x$非零，则$\mu\rangle$有 $|\langle x, \mu \rangle| = \langle \theta x, \mu \rangle = \operatorname{Re} \langle \theta x, \mu \rangle =$⟨Re$(\theta x)$ $\mu\rangle$，其中适当选取了 $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta| = 1$。但 $\|\operatorname{Re}(\theta x)\| \leq \|x\| \leq 1$, 因此 $|\langle x, \mu \rangle| \trianglelefteq$⟨球 $V_h, \mu\rangle$。于是 $\|\mu\| = \vee |\langle$球 $V, \mu\rangle| \leq |\langle$球 V_h, $\mu\rangle| \leq \|\mu\|$。

若线性泛函 $\mu : V \to \mathbb{C}$ 满足 $\langle V_+, \mu \rangle \geq 0$，则称其为正泛函。在这种情况下，$\mu = \mu^*$自动成立。事实上，$\langle V_h, \mu \rangle = \langle V_+, \mu \rangle - \langle V_+, \mu \rangle \subseteq \mathbb{R}$，进而可推出 $\mu \in V_h^*$。V上的所有正泛函构成的集合记为 V_+^*。它是 V_h^*的一个子锥。若 $V = C(\mathcal{T})$ 是紧豪斯多夫拓扑空间 $\mathcal{T}$ 上所有连续函数构成的阿贝尔 C^*-代数，则 $C(\mathcal{T})^* = M(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{T}$ 上所有拉东电荷构成的空间。在这种情况下，$M(\mathcal{T})_+$ 由 $\mathcal{T}$ 上所有正拉东测度构成。拉东电荷 $\mu \in M(\mathcal{T})$ 为正（即 $\mu \geq 0$）当且仅当$\|\mu\| = \langle 1, \mu \rangle = \mu($ $\mathcal{T})$。对于算子系统上的线性泛函，这一事实也成立（见下文附录第 7 节中的引理 7.2）。

2.2. 算子系统的态。称 V 上的幺正正泛函为锥 V_+的态，并记

$$S(V_+) = \left\{ \varphi \in V_+^* : \langle e, \varphi \rangle = 1 \right\}$$

为锥 V_+的态空间。在 $V = C(\mathcal{T})$ 的情形下，我们得到由 $\mathcal{T}$上的概率测度构成的凸集$P(\mathcal{T})$，即 $P(\mathcal{T}) = S\left(C(\mathcal{T})_+\right)$（见第 7.3 小节）。我们还记 $V_{he}^* = \{\varphi \in V_h^* \colon \langle e, \varphi \rangle = 1\}$ 为V上所有幺正厄米泛函构成的实超平面。利用引理 7.2，我们得出

$$S(V_+) = \{\varphi \in \operatorname{ball} V^* : \|\varphi\| = \langle e, \varphi \rangle = 1\} = V_{he}^* \cap \operatorname{ball} V^*.$$

特别地，$S(V_+)$ 是球V^*中的一个 w^*-紧子集。对于每个单位向量 $\zeta \in H$，泛函$\omega_\zeta\colon V \to \mathbb{C}$, $\omega_\zeta(x) = ($ $x\zeta, \zeta)$ 属于 $S(V_+)$。特别地，

$$x \in V_+ \quad \text{iff} \quad \langle x, S(V_+) \rangle \geq 0, \tag{2.2}$$

这意味着算子系统的正性就是态正性。

利用态空间 $S(V_+)$，可以按以下方式在 V上定义一个新的（态）范数 $\|\cdot\|_e \|x\|_e = \vee |\langle x, S(V_+) \rangle|$。

命题 2.1. V 上的范数 $\|\cdot\|_e$ 是一个含单位元的 $*$-范数，且与 V的原范数等价。此外，$\|x\|_e = \|x\|$, $x \in V_h$和 $\|\cdot\|_e$ 是一个序范数，其含义如下：

$$\|x\|_e = \wedge \{r > 0 : -re \leq x \leq re\} \text{ for all } x \in V_h.$$

特别地，对于每个 $\mu \in V_h^*$，都有 $\|\mu\|_e = \|\mu\|$。

证明。对于每个 $x \in V$，我们有

$$\|x\|_e \leq \|x\| (\vee \|S(V_+)\|) = \|x\| (\vee \langle e, S(V_+) \rangle) = \|x\|$$

且 $\|e\|_e = \vee|\langle e、\ S(V_+)\rangle| = 1$。此外，$\|x^*\|_e = \vee|\langle x^*、\ S(V_+)\rangle| = \vee|\langle x、\ S(V_+)\rangle^*| = \|x\|_e$ 且

$$\|\mathrm{Re}\, x\|_e = \vee|\langle \mathrm{Re}\, x, S(V_+)\rangle| = \vee|\mathrm{Re}\,\langle x, S(V_+)\rangle| \leq \|x\|_e .$$

类似地，$\|\mathrm{Im}\, x\|_e \leq \|x\|_e$。若 $x \in V_h$，则（见 [19, 3.2.25]）

$$\|x\| = \vee\{|(x\zeta,\zeta)| : \|\zeta\| = 1\} = \vee\{|\langle x, \omega_\zeta|V\rangle| : \|\zeta\| = 1\} \leq \vee|\langle x, S(V_+)\rangle| = \|x\|_e ,$$

也就是说，对所有 $x \in V_h$，都有 $\|x\|_e = \|x\|$。特别地，对每个 $x \in V$，都有 $\|x\| \leq \|\mathrm{Re}\ x\| + \|\mathrm{Im}\ x\| \leq 2\|x\|_e \leq 2\|x\|$。因此，$\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_e$ 是 V 上的等价范数。若 $\alpha = \wedge\{r > 0 :$ 对于 $x \in V_h$，$-re \leq x \leq re\}$，则

$$\begin{aligned}\alpha &= \wedge\{r > 0 : re \pm x \geq 0\} = \wedge\{r > 0 : \langle re \pm x, \varphi\rangle \geq 0, \varphi \in S(V_+)\} \\ &= \wedge\{r > 0 : r \pm \langle x, \varphi\rangle \geq 0, \varphi \in S(V_+)\} = \wedge\{r > 0 : \vee|\langle x, S(V_+)\rangle| \leq r\} \\ &= \vee|\langle x, S(V_+)\rangle| = \|x\|_e ,\end{aligned}$$

也就是说，$\|\cdot\|_e$ 是 V 上的序范数。最后，根据（2.1），对每个 $\mu \in V_h^*$，我们有 e

$$\|\mu\|_e = \vee|\langle \mathrm{ball}\,\|\cdot\|_e, \mu\rangle| = \vee\{|\langle x, \mu\rangle| : x \in V_h, \|x\|_e \leq 1\} = \vee|\langle \mathrm{ball}\, V_h, \mu\rangle| = \|\mu\| ,$$

也就是说，$\|\mu\|_e = \|\mu\|$。 □

存在一个定义良好的含单位元的 $*$-线性映射 $\Phi: V \to C(S(V_+))$，$\Phi(x)(\varphi) = \langle x, \varphi\rangle$，$x \in V, \varphi \in S(V_+)$（Kadison 表示）。注意，$\Phi(V_+) \subseteq C(S(V_+))_+$。

推论 2.1. $*$-表示 $\Phi : (V, \|\cdot\|_e) \to C(S(V_+))$ 是一个序同构，且是到其值域上的等距映射。

证明。根据命题 2.1，我们有

$$\|\Phi(x)\|_\infty = \vee|\Phi(x)(S(V_+))| = \vee|\langle x, S(V_+)\rangle| = \|x\|_e$$

对所有 $x \in V$ 均成立，也就是说，Φ 是一个等距映射。此外

$$\Phi(x) \in C(S(V_+))_+ \Leftrightarrow \langle x, S(V_+)\rangle \geq 0 \Leftrightarrow x \in V_+$$

由 (2.2) 得。因此 $\Phi(V_+) = C(S(V_+))_+ \cap \Phi(V_h)$，这意味着 Φ 是到其值域上的序同构。□

因此，如果 V 的原范数等于 $\|\cdot\|_e$，那么 V 就成为 $C(S(V_+))$的含单位元的 $*$-子空间；也就是说，V 在等距映射意义下是一个具体函数系统。

推论 2.2. 设 V 是一个算子系统。那么，V 是函数系统，当且仅当 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_e$。

证明. 假设 V 是函数系统，也就是说，对于某个豪斯多夫紧拓扑空间 $\mathcal{T}$，$V \subseteq C(\mathcal{T})$ 是一个含幺自伴子空间。如果 $\varphi \in S(V_+)$，那么 $\varphi \in$ 球 V^*，并且根据 Hahn-Banach 延拓定理，它可以通过某个 $\mu \in M(\mathcal{T})$ 有界线性延拓，其中 $\|\mu\| = 1 = \langle e、\ \varphi\rangle = \langle e、\ \mu\rangle$。由引理 7.2 可得 $\mu \in P(\mathcal{T})$。由于 $P(\mathcal{T})|V \subseteq S(V_+)$，因此（见命题 7.1）

$$\begin{aligned}\|f\|_e = \vee|\langle f, S(V_+)\rangle| &\leq \vee|\langle f, P(\mathcal{T})|V\rangle| \leq \vee|\langle f, \mathrm{ball}\, M(\mathcal{T})\rangle| = \|f\|_\infty \\ &= \vee|f(\mathcal{T})| = \vee\{|\langle f, \delta_t|V\rangle| : t \in \mathcal{T}\} \leq \vee|\langle f, S(V_+)\rangle| = \|f\|_e ,\end{aligned}$$

也就是说，对于所有 $f \in V$，都有 $\|f\|_e = \|f\|_\infty$。反向蕴含由推论 2.1 得出。 □

推论 2.3. 如果 V 是一个算子系统，那么球 $V_h^* \subseteq$ abc $S(V_+)$。特别地，2^{-1} 球 $V^* \subseteq$abc $S(V_+) \subseteq$ 球 V^*。

证明。包含关系 abc $S(V_+)\subseteq$球V^*显然成立。取 $\varphi\in$球V_h^*。根据定理 7.1， φ存在正交展开 $\varphi=\varphi_+-\varphi_-$。在展开非平凡的情况下，令 $\phi_+=r_+^{-1}\varphi_+$，其中 $\phi_-=r_-^{-1}\varphi_-$、 $r_+=\langle e、\varphi_+\rangle$、 $r_-=\langle e、\varphi_-\rangle$。于是，根据引理 7.2， $\phi_+,\phi_-\in S(V_+)$，并且 $\varphi=r_+\phi_+-r_-\phi_-$。由于 $r_++r_-=\|\varphi\|\leq 1$，可得 $\varphi=r_+\phi_+-r_-\phi_-\in$ abc $S(V_+)$。因此，球$V_h^*\subseteq$abc $S(V_+)$。最后，每个 $\varphi\in$球 V^*都有展开 $\varphi=$Re $\varphi+i$ Im φ，其中 Re φ，Im $\varphi\in$球 V_h^*。由此可得球 $V^*\subseteq 2$ abc $S(V_+)$。□

根据定理 7.1，我们还可推出， V_h^*单位球面上的每个元素都是 $S(V_+)\cup -S(V_+)$的凸组合。当 $\mathcal{A}$是一个 C^*-代数时，该凸组合是唯一的。

3. ε-POSITIVITY IN OPERATOR SYSTEMS

本节通过对 V的原始正性进行变形，分析算子系统 V中的一种新概念： ε-正性。

3.1. ε-正性。设 V是一个算子系统，其单位元为 e，正元素构成的分离的、闭的含单位元锥为 V_+，其态空间记为 $S(V_+)$（赋予 w^*-拓扑）。我们将 $\varepsilon\geq 1$记为 $S_\varepsilon=V_{he}^*\cap\varepsilon$球$V^*$。在此情形下， $S_1=V_{he}^*\cap$球 $V^*=S(V_+)$。若元素 $v\in V_h$满足 $v\geq\|v\|\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e$属于 V，则称其为 ε-正元素。V中所有 ε-正元素的集合记为 V_ε^+。注意， $V_\varepsilon^+\subseteq V_+$、 $V_1^+=V_+$和 V_ε^+是一个分离的（范数）闭锥。

引理 3.1。锥 V_ε^+含幺，且

$$A_\varepsilon=S\left(V_\varepsilon^+\right)=S_\varepsilon,$$

其中 $A_\varepsilon=\{(1+s)\ \phi-s\psi\colon\ \phi,\psi\in S(V_+)\ \ 0\leq s\leq 2^{-1}(\varepsilon-1)\}$。

证明。由于当 $\varepsilon=1$时该断言显然成立，我们假设 $\varepsilon>1$。取 $v\in V_h$并令$r=\|v\|\varepsilon$。则 $v+re\in V_\varepsilon^+$。事实上，

$$\|v+re\|\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e\leq(\|v\|+r)\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e=(\|v\|\varepsilon-\|v\|)e=re-\|v\|e\leq re+v,$$

这意味着 $v+re\in V_\varepsilon^+$，也就是说， V_ε^+是一个含幺锥。

现在证明 $S(V_+)\subseteq S(V_\varepsilon^+)\subseteq S_\varepsilon$。由于 $V_\varepsilon^+\subseteq V_+$，显然有 $S(V_+)\subseteq S(V_\varepsilon^+)$。若 $\varphi\in S(V_\varepsilon^+)$且 $v\in V_h$，则 $\pm v+\|v\|\varepsilon e\in V_\varepsilon^+$且 $\langle\pm v+\|v\|\varepsilon e,\varphi\rangle\geq 0$，这意味着 $|\langle v,\varphi\rangle|\leq\varepsilon\|v\|$。根据 (2.1)，我们得到 $\|\varphi\|=\vee|\langle$球 $V_h,\varphi\rangle|\leq\varepsilon$。因此 $S(V_\varepsilon^+)\subseteq V_{he}^*\cap\varepsilon$球$V^*=S_\varepsilon$。

进一步，取 $\varphi\in A_\varepsilon$，即 $\varphi=(1+s)\phi-s\psi$，其中 $\phi,\psi\in S(V_+)$且 $0\leq s\leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$。证明 $\varphi\in S(V_\varepsilon^+)$。正如上文刚刚指出的，当 $s=0$时，命题成立。设$s>0$。则 $\varphi\in V_h^*$且 $\langle e,\varphi\rangle=(1+s)\ \langle e,\phi\rangle-s\langle e,\psi\rangle=1$，也就是说， $\varphi\in V_{he}^*$。取一个非零的$v\in V_\varepsilon^+$。则 $\|v\|e\geq v\geq\|v\|\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e$且

$$\langle v,\varphi\rangle=(1+s)\langle v,\phi\rangle-s\langle v,\psi\rangle\geq(1+s)\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\|v\|-s\|v\|=s\|v\|\left(\frac{1+s}{s}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}-1\right).$$

实值函数 $f(s)=\dfrac{1+s}{s}$，$0<s\leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$是递减的，且 $\wedge f=\min f=f(2^{-1}(\varepsilon-1))$ $=\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$，因此 $\langle v,\varphi\rangle\geq 0$或 $\varphi\in S(V_\varepsilon^+)$。于是 $S(V_+)\subseteq A_\varepsilon\subseteq S(V_\varepsilon^+)\subseteq S_\varepsilon$。剩下要证明 $S_\varepsilon\backslash S(V_+)\subseteq A_\varepsilon$。

取 $\varphi\in S_\varepsilon\backslash S(V_+)$。作为 V上的厄米泛函，根据定理 7.1，它有一个正交分解。也就是说， $\varphi=\varphi_+-\varphi_-$，其中 φ_+和 φ_-是正泛函，且 $\|\varphi\|=$

$\|\varphi_+\|+\|\varphi_-\|$。令 $t=\|\varphi_+\|=\langle e、\varphi_+\rangle$ 和 $s=\|\varphi_-\|=\langle e、\varphi_-\rangle$。在此情形下，$t+s\le\varepsilon$ 和 $1=\langle e、\varphi\rangle=t-s$。于是 $t>0$。但 $s>0$ 也成立，否则 $\varphi=\varphi_+\in S(V_+)$。因此，$\varphi_+$ 和 φ_- 都是非零泛函。令 $\phi=t^{-1}\varphi_+$ 和 $\psi=s^{-1}\varphi_-$。于是 $\varphi=(1+s)\phi-s\psi$，其中 ϕ、$\psi\in S(V_+)$ 和 $0\le s\le 2^{-1}(\varepsilon-1)$。这意味着 $\varphi\in A_\varepsilon$。□

ε-正性生成了 V 上的 ε-范数 $\|v\|_\varepsilon=\vee|\langle v,S(V_\varepsilon^+)\rangle|$，$v\in V$。对于 $\varepsilon=1$，我们有$\|\cdot\|_\varepsilon=\|\cdot\|_e$（见第2.2小节），它与 V 的原范数等价，这由命题 2.1得出。

推论3.1. 若 V 是一个算子系统，则对于每个 $\varepsilon\ge 1$，其 ε-范数都与原范数等价。

证明. 若 $\varphi\in S(V_\varepsilon^+)$，则由引理 3.1可得 $\varphi\in A_\varepsilon$，这意味着对于某些 ϕ、$\psi\in S_1$ 和 $0\le s\le 2^{-1}(\varepsilon-1)$，有 $\varphi=(1+s)\phi-s\psi$。由于 $|1+s|+|-s|=1+2s\le\varepsilon$，我们得出$\varphi\in\varepsilon\,\mathrm{abc}(S_1)$。因此

$$S_1=V_{he}^*\cap\operatorname{ball}V^*\subseteq V_{he}^*\cap\varepsilon\operatorname{ball}V^*=S\left(V_\varepsilon^+\right)=A_\varepsilon\subseteq\varepsilon\operatorname{abc}(S_1),$$

这进而推出 V 中极集之间的包含关系 $\varepsilon^{-1}S_1^\circ=\varepsilon^{-1}\,\mathrm{abc}\,(S_1)^\circ\subseteq S(V_\varepsilon^+)^\circ\subseteq S_1^\circ$。于是，对所有 $v\in V$，都有 $\|v\|_\varepsilon\le\|v\|_e\le\varepsilon\|v\|_\varepsilon$，即 $\|\cdot\|_\varepsilon\sim\|\cdot\|_e$。剩下的只需应用命题 2.1。□

3.2. 具有 ε-振荡的连续函数。现在暂且假设 $V=C(\mathcal{T})$ 是一个阿贝尔含单位元的 C^*-代数，其中 $\mathcal{T}$ 是一个紧 Hausdorff 拓扑空间。回顾一下，函数 $h:\mathcal{T}\to\mathbb{C}$ 在子集 $E\subseteq\mathcal{T}$ 上的振荡由量 $\omega(h,E)=\vee\{|h(t)-h(l)|:t,l\in E\}$ 给出，它衡量了 h 在 E 上的最大振幅。取 $f\in C(\mathcal{T})_h$。根据定义，$f\in C(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 当且仅当对所有 $t\in\mathcal{T}$ 都有 $f(t)\ge\|f\|_\infty\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$。若函数$f\in C(\mathcal{T})_+$ 满足 $f=0$ 或 $\omega(\ln f,\mathcal{T})\le c_\varepsilon$，其中 $c_\varepsilon=\ln\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$，则称其具有 ε-振荡。对于 $\varepsilon=1$，每个来自 $C(\mathcal{T})_+$ 的函数都具有 ε-振荡（令 $c_1=+\infty$）。一个更具体的例子是函数 $f(t)=3^t$ 在 $\varepsilon=2$ 时定义于 $\mathcal{T}=[0,1]$ 上，而 3^{3^t} 没有 2-振荡。

考虑含单位元的 $*$-表示 $\Phi:V\to C(S(V_+))$，$\Phi(v)(\varphi)=\langle v,\varphi\rangle$，$v\in V$，$\varphi\in S(V_+)$，其中 $\Phi(V_+)=C(S(V_+))_+\cap\Phi(V_h)$（见推论 2.1）。

引理 3.2. 等式 $\Phi(V_\varepsilon^+)=C(\mathcal{T})_\varepsilon^+\cap\Phi(V_h)$ 成立。此外，对于每个非零的 $v\in V_h$，以下断言等价：

(*i*) $v\in V_\varepsilon^+$；(*ii*) $\Phi(v)$具有 ε-振荡；(*iii*) $\langle v,S(V_\varepsilon^+)\rangle\ge 0$。因此，双极定理（见备注 5.3]）对所有含幺锥 V_ε^+, $\varepsilon\ge 1$ 均成立。

证明. 取 $v\in V_h$。则 $v\in V_\varepsilon^+$当且仅当 $\left\langle v-\|v\|\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e,S(V_+)\right\rangle\ge 0$，由 (2.2) 得出。这意味着，得益于推论 2.1，$\Phi(v)\ge\|v\|\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}=\|\Phi(v)\|_\infty\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$。因此 $\Phi(V_\varepsilon^+)=C(\mathcal{T})_\varepsilon^+\cap\Phi(V_h)$。

现在取一个非零的 $v\in V_h$。若 $v\in V_\varepsilon^+$，则 $\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}v\ge\|v\|e\ge v$，并且

$$\langle v,\varphi\rangle\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\ge\|v\|\ge\langle v,\psi\rangle$$

对所有 φ，$\psi \in S(V_+)$ 都成立。特别地，对所有 $\phi \in S$，$\langle v、\phi\rangle > 0\,(V_+)$ 都成立；并且，对所有 φ，$\frac{\langle v\ \psi\rangle}{\langle v}、,\ \varphi\rangle \leq \overline{\varepsilon-1}\ \psi \in S(V_+)$ 都成立。因此，对所有 φ，$\Phi(v)$（ψ）$\Phi(v)$（φ）$\leq \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\ \psi \in S(V_+)$，这意味着

$$\omega\left(\ln\Phi(v), S(V_+)\right) = \vee\left\{\left|\ln\Phi(v)(\psi) - \ln\Phi(v)(\varphi)\right| : \psi, \varphi \in S(V_+)\right\} \leq c_\varepsilon$$

或 $\Phi(v)$ 具有 ε-振荡。因此，$(i) \Rightarrow (ii)$ 成立。

现在假设 $\Phi(v)$ 具有 ε-振荡。那么，对于所有 $\phi \in S(V_+)$，$\langle v, \phi\rangle > 0$，且$\underline{\langle v\ \psi\rangle}, , \varphi\rangle \leq \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$。与引理 3.1 的证明一样，我们有 $\frac{\langle v\ \psi\rangle}{\langle v}, , \varphi\rangle \leq \frac{s+1}{s}$，对所有 $0 < s \leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$ 均成立。因此，对于所有 $0 \leq s \leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$，$\langle v, (1+s)$

$\phi - s\psi\rangle \geq 0$ 均成立（如果 $s=0$，那么对所有$\phi \in S(V_+)$，$\langle v, \phi\rangle > 0$ 均成立）。因此，$\langle v, A_\varepsilon\rangle \geq 0$，并且由引理 3.1 可得 $(ii) \Rightarrow (iii)$。

最后，证明 $(iii) \Rightarrow (i)$。若 $\langle v, A_\varepsilon\rangle \geq 0$，则 $(1+s)\langle v, \phi\rangle \geq s\langle v, \psi\rangle$ 对所有 $\phi, \psi \in S(V_+)$ 和 $0 \leq s \leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$ 都成立。但 $\|v\| = \|v\|_e > 0$，因此对于某个 $\psi \in S(V_+)$，有$\underline{1}\ \langle v, \psi\rangle > 0$（见推论 2.2）。由此可得，对所有 $\phi \in S(V_+)$，$\langle v, \phi\rangle > 0$。如上所述，$\frac{\langle v\ \psi\rangle}{\langle v}, , \varphi\rangle \leq \overline{\varepsilon-1}$ 对所有 $\phi, \psi \in S(V_+)$ 都成立。于是

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\|v\| = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \vee \langle v, S(V_+)\rangle = \vee\left\langle v, \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} S(V_+)\right\rangle \leq \langle v, \varphi\rangle$$

对所有 $\varphi \in S(V_+)$，也就是说，$\left\langle v - \|v\|\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e, S(V_+)\right\rangle \geq 0$。由 (2.2)，我们推得 $v \in V_\varepsilon^+$。

□

在 $V = C(\mathcal{T})$ 的情形下，我们有 $\mathcal{T} = \partial P(\mathcal{T}) \subseteq P(\mathcal{T}) = S\left(C(\mathcal{T})_+\right)$（见第 7.3 小节），相关的 $*$-表示 $\Phi\colon\ C(\mathcal{T}) \to C(P(\mathcal{T}))$ 可由函数 $f \in C(\mathcal{T})$ 通过 $\Phi(f)(\mu) = \langle f, \mu\rangle$, $\mu \in P(\mathcal{T})$ 在 $P(\mathcal{T})$ 上的自然延拓 $\Phi(f)$ 来表示。如果 $\mu = \delta_t$ 对某个 $t \in \mathcal{T}$ 成立，那么 $\Phi(f)(\delta_t) = f(t)$。

推论 3.2. 含幺锥 $C(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 恰由所有具有 ε-振荡的函数组成。

证明。取一个非零的 $f \in C(\mathcal{T})_h$。首先假设 $f \in C(\mathcal{T})_\varepsilon^+$。根据引理 3.2，$\Phi(f)$ 在 $P(\mathcal{T})$ 上具有 ε-振荡。特别地，它在子集 $\mathcal{T}$ 上也具有 ε-振荡。还需指出，$f = \Phi(f)\ |\mathcal{T}$。

反过来，假设 f具有 ε振荡。于是$f(t)\ f(l) \leq \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$, $\underline{t, l \in \mathcal{T}}$，这意味着对于所有 $t, l \in \mathcal{T}$ 和 $0 \leq s \leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$，$(1+s)\langle f, \delta_t\rangle \geq s\langle f, \delta_l\rangle$。由命题 7.1，我们有 $\mathrm{co}\,(\mathcal{T})^{-w^*} = \mathrm{co}\,(\partial P(\mathcal{T}))^{-w^*} = P(\mathcal{T})$，因此对于所有 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$和$0 \leq s \leq 2^{-1}(\varepsilon-1)$，$(1+s)\langle f, \mu\rangle \geq s\langle f, \nu\rangle$。由引理 3.1 可知，$\left\langle f, S\left(C(\mathcal{T})_\varepsilon^+\right)\right\rangle \geq 0$。利用引理 3.2，我们得到 $f \in C(\mathcal{T})_\varepsilon^+$（双极定理）。□

4. 抽象函数系统

I本节中，我们证明关于射影函数系统的主要结果 .

4.1. 含单位元的 $*$-范数空间。设 V 是一个 $*$-向量空间，也就是说，V 是一个带有对合的复向量空间。称 V 上的范数 $\|\cdot\|$ 为 $*$-范数，若其单位球V是厄米的，即 $(\mathrm{ball}\,V)^* = \mathrm{ball}\ V$。后者等价于性质 $\|v^*\| = \|v\|$ 对所有 $v \in V$均成立。V中所有厄米元素构成的实向量空间记为 V_h。注意，范数对偶空间V^* 也具有对合 $\varphi \mapsto \varphi^*$，其定义为 $\langle v, \varphi^*\rangle = \langle v^*, \varphi\rangle^*$。若 V是一个 $*$-范数空间，则对所有 $\varphi \in V^*$均有 $\|\varphi^*\| = \|\varphi\|$，且 V上的对合是一个 $\sigma(V, V^*)$-连续映射。因此

(V, V^*) 是一个对偶 $*$-对（见 [4], [5]）。V上所有有界厄米泛函构成的实向量空间记为 V_h^*。

现在固定一个 $*$-赋范向量空间 V中的非零 $e \in V_h$。令 $V_{he}^* = \{y \in V_h^* \colon \langle e, y\rangle = 1\}$ 为来自 V^*的所有含幺厄米泛函构成的实超平面。如上所述，令 $S = V_{he}^* \cap$ 球 V^*（或$V_{he}^* \cap$(球 V)°）为一个凸集。若 e 满足 $S \neq \varnothing$，我们就称它是 V的单位元（或简称单位元）。因此，$1 = \langle e, y\rangle \leq \|e\|\,\|y\| \leq \|e\|$ 对某个 $y \in S$ 成立，也就是说，$\|e\| \geq 1$。$*$-赋范空间 V 中的每个厄米单位向量 e自动都是单位元。事实上，由于 $\|e\| = 1$，根据 Hahn-Banach 延拓性质可得，对于某个 $y \in$ 球 V^*，有 $\langle e, y\rangle = 1$。但是 $\mathrm{Re}\, y \in$ 球 V^*，并且$\langle e,\ \mathrm{Re}\, y\rangle = 2^{-1}(\langle e, y\rangle + \langle e, y\rangle^*) = 1$，也就是说，$\mathrm{Re}\ y \in V_{he}^* \cap$ 球 $V^* = S$。因此，e 是 V的单位元，并且 $S \subseteq \partial$球 V^*。带有固定单位元 (V, e) 的 $*$-赋范向量空间 V称为含单位元的 $*$-赋范空间。

4.2. 含单位元的 $*$-范数空间的含幺球。含单位元的 $*$-范数空间 (V, e) 的单位球 V 称为含幺球，如果球 V是其态空间 S的绝对极集，即球 $V = S^\circ$。带有其含幺球的含单位元 $*$-范数空间 (V, e) 称为抽象函数系统，或称为带有其态空间 S 的交换算子系统。为简便起见，我们称 V 为函数系统。$C(\mathcal{T})$ 的含幺自伴子空间 V是（具体）函数系统的一个例子（见推论 2.2）。在 $V = C(\mathcal{T})$ 且具有 $e = 1$ 的情形下，我们得到 $S = P(\mathcal{T})$（见命题 7.1）。

引理 4.1. 设 (V, e) 是一个函数系统，$\mathfrak{c} = \{v \in V_h \colon \langle v, S\rangle \geq 0\}$，且 $\|v\|_e = \vee|\langle v, S\rangle|, v \in V$。则 $\mathfrak{c}$ 是 V中的一个分离的、闭的、含单位元锥，使得 $S(\mathfrak{c}) = S$ 且 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_e$。特别地，e 是一个单位向量。

证明。利用绝对双极定理，我们推得 $\mathrm{ball}\ V^* = (\mathrm{ball}\ V)^\circ = S^{\circ\circ} = \mathrm{abc}\,(S)^{-w^*}$，其中 $\mathrm{abc}\,(S)^{-w^*}$ 是 w^* 的绝对凸包 $\mathrm{abc}\,(S)$ 的闭包。因此

$$\|v\| = \vee|\langle v, \mathrm{ball}\, V^*\rangle| = \vee\left|\left\langle v, \mathrm{abc}\,(S)^{-w^*}\right\rangle\right| = \vee|\langle v, S\rangle| = \|v\|_e$$

对所有 $v \in V$ 均成立。特别地，$\|e\| = \|e\|_e = \sup|\langle e, S\rangle| = 1$，这意味着 e 是 V 的单位向量。进一步，取 $v \in V_h$。若 $\pm v \in \mathfrak{c}$，则 $\langle v, S\rangle = \{0\}$ 或 $\|v\|_e = 0$，也就是说，$v = 0$。此外，$\langle \|v\|\, e \pm v, S\rangle = \|v\| \pm \langle v, S\rangle = \|v\|_e \pm \langle v, S\rangle \geq 0$，这意味着 $\|v\|\, e \pm v \in \mathfrak{c}$。因此，$\mathfrak{c}$ 是 V 中一个分离的、闭的、含单位元锥。事实上，$\mathfrak{c}$ 是弱闭的。

此外，取 $y \in S(\mathfrak{c})$，这意味着 $y \colon V \to \mathbb{C}$ 是一个线性泛函，使得 $\langle \mathfrak{c}, y\rangle \geq 0$且 $\langle e, y\rangle = 1$。由于 $\|v\|\, e \pm v \in \mathfrak{c}$ 对 $v \in V_h$成立，我们得到 $|\langle v, y\rangle| \leq \|v\|$。考虑到 $V = V_h + iV_h$ 和 $V_h = \mathfrak{c} - \mathfrak{c}$，我们得出 $y \in V_{he}^*$（见第2.1小节）。对于非零 $\langle v$ 的 $v \in V$，有 $y\rangle$, $|\langle v, y\rangle| = \langle \theta v$Re $y\rangle =$, $\langle \theta v$Re $(y\rangle = \langle) \theta v$Re $(y\rangle \leq \|)\theta v$，其中某些 $\| \leq \|\theta v\| = \|v\|$, $\theta \in \mathbb{C}$。因此 $|\theta| = 1$球 $y \in V_{he}^* \cap$，即 $V^* = S($ S $)$ $\mathfrak{c}$。 $= S$

因此，每个函数系统都可视为 [17] 意义下的阿基米德有序 $*$-向量空间。利用推论 2.1 中的 $*$ 表示，我们可以在保序等距同构意义下，将 V 识别为 $C(S(\mathfrak{c}))$ 的含幺自伴子空间；也就是说，$(V, \mathfrak{c})$ 是定义在 $S(\mathfrak{c})$ 上的具体函数系统。

4.3. 非含单位元的球。设 (V, e) 是一个含单位元的 $*$-赋范空间。令 $S_\varepsilon = V_{he}^* \cap \varepsilon\,\mathrm{ball}\ V^*$ for $\varepsilon > 0$。因此，当 $\mathrm{ball}\ V = S_1^\circ$ 时，$\mathrm{ball}\ V$ 是含单位元的；在这种情况下，$\mathrm{ball}\ V^* = \mathrm{abc}\,(S_1)^{-w^*}$。对于非含单位元的球 V，我们可以要求它满足 $\mathrm{ball}\, V \sim S_\varepsilon^\circ$，其中 $\varepsilon > 0$ 是某个元素。回顾一下，球的等价关系 $\mathrm{ball}\ V \sim S_\varepsilon^\circ$ 意味着，对于某个正实数 r 和 R，有 $rS_\varepsilon^\circ \subseteq \mathrm{ball}\, V \subseteq RS_\varepsilon^\circ$。如果 $\mathrm{ball}\ V \sim S_1^\circ$，那么我们也称其为含单位元的情形。在这种情况下，范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_e$ 等价，而 e 相对于范数 $\|\cdot\|_e$ 是一个单位向量。根据命题 2.1，每个算子系统（忽略其量子化或非交换结构）都可视为

在等价范数下的函数系统（另见推论 2.1）。在非含单位元的情形下， e 可能不是单位向量。

引理 4.2. 设 (V,e) 是一个含单位元的 $*$-范数空间，其态空间为 S。则球 $V\sim S_2^\circ$。

证明. 我们采用 [6, Proposition 4.1] 中用于量子系统的论证。首先注意，Re (球 V^*) $\subseteq$ 球 V_h^* $\cap$ 球 V^* $=$ 球 V_h^*。类似地，Im (球 V^*) $\subseteq$ 球 V_h^*，且球 V^* $\subseteq$ Re (球 V^*) $+i$ Im (球 V^*) $\subseteq 2$ abc(球 V_h^*)。

现在取 $z\in$ 球 V_h^*，并固定 $y\in S=V_{he}^*\cap$ 球 V^*（根据假设 $S\neq\varnothing$）。注意，$\langle e,z\rangle\in\mathbb{R}$ 满足 $-\|e\|\leq\langle e,z\rangle\leq\|e\|$，也就是说，$0\leq\langle e,\pm z\rangle\leq\|e\|$。令 $w=\pm z+y$ 满足 $a=\langle e,w\rangle$，也就是说，$1\leq a\leq 1+\|e\|$。若 $u=a^{-1}w$，则 $u\in V_{he}^*$ 且 $\|u\|\leq a^{-1}\|w\|\leq\|\pm z\|+\|y\|\leq 2$，这意味着 $u\in V_{he}^*\cap 2$ 球 $V^*=S_2$。但是 $z=\mp au\pm y$ 且 $|\mp a|+|\pm 1|\leq 2+\|e\|$，也就是说，$z\in(2+\|e\|)$ abc (S_2)。因此，球 $V^*\subseteq 2$ abc (球 V_h^*) $\subseteq 2\,(2+\|e\|)$ abc (S_2)。考虑到 $S_2\subseteq 2$ 球 V^*，我们得出结论：

$$2^{-1}\operatorname{abc}(S_2)\subseteq\operatorname{ball}V^*\subseteq 2\,(2+\|e\|)\operatorname{abc}(S_2)\,, \tag{4.1}$$

也就是说，abc (S_2) $\sim$ 球 V^* 或 $S_2^\circ=$ (abc (S_2))$^\circ\sim$ 球 V。 □

引理 4.2 的断言可以按以下方式推广。

定理 4.1. 设 (V,e) 是一个含单位元的 $*$-范数空间，其态空间为 S。那么对每个 $\varepsilon>1/\|e\|$，球 $V\sim S_\varepsilon^\circ$。

证明. 对于正实数 r，我们令 $V_h^*(re)=\{y\in V_h^*\colon\langle re,y\rangle=1\}$ 为所有来自 V^* 的 re-含幺厄米泛函构成的实超平面。注意到 $V_{h(re)}^*=r^{-1}V_{he}^*$，并如上所述，定义集合 $S_{re,\varepsilon}=V_h^*(re)\cap\varepsilon$ 球 V^*，对所有 $\varepsilon>0$ 均成立。证明 $S_{re,\varepsilon}=r^{-1}S_{r\varepsilon}$。事实上，$y\in S_{re,\varepsilon}$ 当且仅当 $\|y\|\leq\varepsilon,\langle re,y\rangle=1$，这意味着 $y=r^{-1}ry$，其中 $\|ry\|\leq r\varepsilon,\langle e,ry\rangle=1$，也就是说，$ry\in S_{r\varepsilon}$。反过来，若 $y\in S_{r\varepsilon}$，则 $\|r^{-1}y\|\leq r^{-1}r\varepsilon=\varepsilon$ 且 $\langle re,r^{-1}y\rangle=\langle e,y\rangle=1$，这意味着 $r^{-1}y\in S_{re,\varepsilon}$。因此 $S_{re,\varepsilon}=r^{-1}S_{r\varepsilon}$，通过取极集可得 $S_{re,\varepsilon}^\circ=rS_{r\varepsilon}^\circ$。特别地，对于 $\varepsilon>1/\|e\|$，我们有 $rS_\varepsilon^\circ=rS_{r\varepsilon/r}^\circ=S_{re,\varepsilon/r}^\circ$，其中 $\varepsilon/r>1/(\|e\|r)$。因此，对所有 $\varepsilon>1/(\|e\|r)$，球 $V\sim S_\varepsilon^\circ,\varepsilon>1/\|e\|$ 当且仅当球 $V\sim S_{re,\varepsilon}^\circ$。于是，断言归结为单位向量 e 的情形（只需令 $r=\|e\|^{-1}$），我们需要证明对每个 $\varepsilon>1$，球 $V\sim S_\varepsilon^\circ$。

由引理 4.2，球 $V\sim S_2^\circ$，即 2^{-1} abc $(S_2)\subseteq$ 球 $V^*\subseteq 6$ abc (S_2)（见 (4.1)）。假设对于某个 $\varepsilon>1$ 和实数 R，有 ε^{-1} abc $(S_\varepsilon)\subseteq$ 球 $V^*\subseteq R$ abc (S_ε)。取 $0<\delta\leq(2R+1)^{-1}$ 和 $\sigma=\varepsilon-(\varepsilon-1)\delta$。注意到

$$1<\frac{2R\varepsilon+1}{2R+1}=\varepsilon-\frac{\varepsilon-1}{2R+1}\leq\varepsilon-(\varepsilon-1)\delta=\sigma<\varepsilon,$$

也就是说，$\delta<1<\sigma<\varepsilon$。对于 $\varepsilon=2$，我们有 $R=6$ 和 $\delta\leq 13^{-1}$。证明球 $V^*\subseteq(R+1)$ abc (S_σ)。取 $w\in$ 球 V^*。那么 $w\in R$ abc (S_ε)，这意味着 $w=Rz$，其中 $z\in$ abc (S_ε)、$z=\sum_{i=1}^n a_iz_i$、$\sum|a_i|\leq 1$ 和 $\{z_i\}\subseteq S_\varepsilon$。与引理 4.2 的证明类似，固定 $y\in S_1$ 并令 $z_{i,\delta}=(1-\delta)\,z_i+\delta y$，其中 $\langle e,z_{i,\delta}\rangle=(1-\delta)+\delta=1$。因此 $\{z_{i,\delta}\}\subseteq V_{he}^*$ 和 $\|z_{i,\delta}\|\leq(1-\delta)\,\|z_i\|+\delta\leq(1-\delta)\,\varepsilon+\delta=\sigma$，这意味着 $\{z_{i,\delta}\}\subseteq V_{he}^*\cap\sigma$ 球 $V^*=S_\sigma$。如果 $z_\delta=\sum_{i=1}^n a_iz_{i,\delta}$ 和 $w_\delta=Rz_\delta$，那么 $z_\delta\in$ abc (S_σ) 并且

$$w_\delta=(1-\delta)\,Rz+R\delta ay=(1-\delta)\,w+R\delta ay,$$

其中 $a=\sum a_i$ 满足 $|a|\leq 1$。由此可得

$$(R+1)^{-1}\,w=\frac{R}{(1-\delta)\,(R+1)}z_\delta-\frac{\delta R}{(1-\delta)\,(R+1)}ay$$

with

$$\frac{R}{(1-\delta)(R+1)}+\frac{R\delta}{(1-\delta)(R+1)}=\frac{R(1+\delta)}{(R+1)(1-\delta)}\leq\frac{R\left(1+(2R+1)^{-1}\right)}{(R+1)\left(1-(2R+1)^{-1}\right)}=1.$$

因此，$(R+1)^{-1}w\in\mathbf{abc}\{z_\delta,ay\}\subseteq\mathbf{abc}(S_\sigma)$（注意 $y\in S_1\subseteq S_\sigma$, $\sigma>1$）或 $w\in(R+1)\,\mathbf{abc}(S_\sigma)$。于是

$$\sigma^{-1}\operatorname{abc}(S_\sigma)\subseteq\operatorname{ball}V^*\subseteq(R+1)\operatorname{abc}(S_\sigma),\tag{4.2}$$

这意味着 $\mathbf{abc}(S_\sigma)\sim$球 V^*。

现在根据引理 4.2，我们令 $\sigma_0=2,R=6,\delta_0=(2R+1)^{-1}=1/13,\sigma_1=\sigma_0(1-\delta_0)+\delta_0=25/13$ 以及 $\delta_1=(2(R+1)+1)^{-1}=1/15$。可以重复同样的论证，得到一个递归序列。也就是说，我们有 $\delta_n=(2(6+n)+1)^{-1}$ 以及 $\sigma_n=\sigma_{n-1}(1-\delta_{n-1})+\delta_{n-1}$，即，

$$\sigma_n=\sigma_{n-1}\frac{2n+10}{2n+11}+\frac{1}{2n+11},\quad\sigma_1=25/13.$$

通过对 n 作归纳，可以证明该递归序列由以下规则给出

$$\sigma_n=\frac{693\sqrt{\pi}\Gamma(n+6)}{512\Gamma(n+13/2)}+1$$

并且 $\lim_n\sigma_n=1$（该公式本身是由 WolframAlpha 计算程序得出的）。或者，可以利用关系 $\sigma_n=(\sigma_{n-1}-\sigma_n)(2n+10)+1$ 以及事实 $\sigma_n>1$，得出 $\sigma_n\downarrow1$。于是，对于每个 $\varepsilon>1$，当 n 足够大时，我们有 $\sigma_n<\varepsilon$，并且

$$\varepsilon^{-1}\operatorname{abc}(S_\varepsilon)\subseteq\operatorname{ball}V^*\subseteq(6+n+1)\operatorname{abc}(S_{\sigma_n})\subseteq(6+n+1)\operatorname{abc}(S_\varepsilon)$$

由（4.2）可知。因此，对每个 $\varepsilon>1$，$\mathbf{ball}\,V\sim S_\varepsilon^\circ$。 □

推论 4.1. 设 (V,e) 是一个含单位元的 $*$-范数空间，其态空间为 $\varepsilon>1/\|e\|$。则 $\|v\|_\varepsilon=\vee|\langle v,S_\varepsilon\rangle|$，$v\in V$ 是 V 上的一个范数，且与 V 的原范数等价。

证明. 范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 是 S_ε° 的闵可夫斯基泛函。只需应用定理 4.1。 □

4.4. 含单位元的 $*$-范数空间的 ε-锥。如上，设 (V,e) 是一个含单位元的 $*$-范数空间，其厄米球为 V，单位元为 e。若 $\mathbf{ball}\,V$ 含单位元，则由引理 4.1，V 是 S_1 上的一个函数系统（在等价范数意义下）。若 $\mathbf{ball}\,V$ 不含单位元，则由定理 4.1，对每个$\varepsilon>1/\|e\|$，$\mathbf{ball}\ V\sim S_\varepsilon^\circ$。令 $\mathfrak{c}_\varepsilon$ 为满足 $\langle v,S_\varepsilon\rangle\geq0$ 的那些 $v\in V_h$ 的集合。

定理 4.2. 设 (V,e) 是一个含单位元的 $*$-范数空间，其态空间为 S。那么 $\mathfrak{c}_\varepsilon$ 是 V 中一个分离的、闭的、含单位元的锥，$S(\mathfrak{c}_\varepsilon)=S_\varepsilon$，且 $(V,\mathfrak{c}_\varepsilon)$ 是 S_ε 上的一个具体函数系统；对于每个 $\varepsilon>1/\|e\|$，其 ε-范数都与 V 的原范数等价。

证明. 考虑 S_ε 的绝对极S_ε°。证明 S_ε° 是一个含幺球，其态空间等于 $V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ}$。注意到 $S_\varepsilon=V_{he}^*\cap S_\varepsilon\subseteq V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ}\subseteq S_\varepsilon^{\circ\circ}$，这反过来意味着$S_\varepsilon^\circ=S_\varepsilon^{\circ\circ\circ}\subseteq(V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ})^\circ\subseteq S_\varepsilon^\circ$。因此 $S_\varepsilon^\circ=(S_\varepsilon^{\circ\circ}\cap V_{he}^*)^\circ$，也就是说，球 S_ε°是其态空间 $S_\varepsilon^{\circ\circ}\cap V_{he}^*$ 的极集。这意味着 S_ε°是一个含幺球。因此，将 V赋予 S_ε° 的闵可夫斯基泛函后，便成为一个函数系统。由于 $S_\varepsilon\subseteq\varepsilon$ 球V^*，可得 $\mathbf{abc}(S_\varepsilon)^{-w^*}\subseteq\varepsilon$ 球 V^*，并且

$$S_\varepsilon\subseteq V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ}=V_{he}^*\cap\operatorname{abc}(S_\varepsilon)^{-w^*}\subseteq V_{he}^*\cap\varepsilon\operatorname{ball}V^*=S_\varepsilon,$$

也就是说，$S_\varepsilon=V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ}$最终成为含幺球 S_ε°的态空间。特别地，$\mathfrak{c}_\varepsilon=\{v\in V_h:\ \langle v,V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ}\rangle\geq0\}$。根据引理 4.1，$\mathfrak{c}_\varepsilon$ 是 V中的一个分离的、闭的含单位元锥，并且 $S(\mathfrak{c}_\varepsilon)=V_{he}^*\cap S_\varepsilon^{\circ\circ}=S_\varepsilon$。因此，$(V,\mathfrak{c}_\varepsilon)$ 最终成为定义在 S_ε上的一个具体函数系统。根据推论 4.1，该函数系统的范数 $\|v\|_\varepsilon=\vee|\langle v,S_\varepsilon\rangle|$, $v\in V$与原范数等价。□

因此，每个含幺的 $*$-范数空间 V 最终都是一个配备锥 $\mathfrak{c}_\varepsilon$, $\varepsilon > 1/\|e\|$ 的函数系统。在这种情况下，我们称含幺的 $*$-范数空间 V 可配备射影正性。下面以二维 ℓ^p 空间为例说明射影正性。首先考虑带有单位元 $e=(1,1)$ 的算子 ℓ^∞-系统 $V=\mathbb{C}\overset{\infty}{\oplus}\mathbb{C}$。在这种情况下，$V^*=\mathbb{C}\overset{1}{\oplus}\mathbb{C}$, 球 $V^*=\{w=(w_0,w_1)\in\mathbb{C}^2:\ |w_0|+|w_1|\leq 1\}$ 并且

$$\langle z,w^*\rangle=\langle z^*,w\rangle^*=(z_0^*w_0+z_1^*w_1)^*=z_0w_0^*+z_1w_1^*$$

对所有 $z=(z_0,z_1)\in V$ 和 $w=(w_0,w_1)\in V^*$，这意味着 $w^*=(w_0^*,w_1^*)$。特别地，$V_h^*=\mathbb{R}\overset{1}{\oplus}\mathbb{R}$, $V_{he}^*=\{s=(s_0,s_1)\in\mathbb{R}^2:\ s_0+s_1=1\}$ 和

$$S_1=V_{he}^*\cap\operatorname{ball}\left(\mathbb{R}\overset{1}{\oplus}\mathbb{R}\right)=\left\{s=(s_0,s_1)\in\mathbb{R}^2:s_0+s_1=1,s_j\geq 0\right\}$$

是连接 $\mathbb{R}^2$ 中的 (0, 1) 和 (1, 0) 的线段。特别地，对于 $z\in V$，我们有

$$\|z\|_e=\vee\,|\langle z,S_1\rangle|=\vee\left\{|s_0z_0+s_1z_1|:s_0+s_1=1,s_j\geq 0\right\}=|z_0|\vee|z_1|=\|z\|_\infty,$$

也就是说，球 V 含单位元，且 V 是一个函数系统。对于 $r\in\mathbb{R}^2$，我们有 $\langle r,\ S_1\rangle\geq 0$ 当且仅当 $r_j\geq 0$。因此，$\mathfrak{c}_1=\mathbb{R}^2_+$，如同以往，其中 $\mathbb{R}_+=\{x\geq 0\}$。现在，对每个 $1\leq p<\infty$，考虑带单位元 $e_p=2^{-1/p}(1,1)$ 的 $*$-向量空间 $V=\mathbb{C}\overset{p}{\oplus}\mathbb{C}$。若 $z\in V$，则 $z^*=(z_0^*,z_1^*)$ 且 $\|z^*\|_p=(|z_0^*|^p+|z_1^*|^p)^{1/p}=\|z\|_p$，这意味着球 V 是一个厄米球。因此，(V,e_p) 是一个含单位元的 $*$-范数空间。在此情形下，$V_h^*=\mathbb{R}\overset{q}{\oplus}\mathbb{R}$，其共轭指数对为 (p,q)，且 $V_{he}^*=\left\{s=(s_0,s_1)\in\mathbb{R}^2:\ s_0+s_1=2^{1/p}\right\}$。特别地，

$$S_1=V_{he}^*\cap\operatorname{ball}\left(\mathbb{R}\overset{q}{\oplus}\mathbb{R}\right)=\left\{s=(s_0,s_1)\in\mathbb{R}^2:s_0^q+s_1^q\leq 1,s_0+s_1=2^{1/p}\right\}=\{e_q\},$$

对于 $s_0+s_1=2^{1/p}$，它是球 $\left(\mathbb{R}\overset{q}{\oplus}\mathbb{R}\right)$ 在 e_q 处的切线。因此，S_1° 不分离，球 V 也不含单位元。尽管如此，定理 4.2 表明，对于 $\varepsilon>1$ 的每个 S_ε 都能给出一个含幺球。

值得指出的是，对于 $\varepsilon=2^{1/p}$，S_ε 生成的恰好是同一个锥 $\mathbb{R}^2_+$。但在高维 $n\geq 3$ 中，不能期待出现同样的现象。原因在于相关态空间的几何形状是圆润的，它无法在 ℓ^p（n）中定义原来的锥。例如，在 $\ell^2(3)$ 的情形下，我们有 $e_2=3^{-1/2}(1,1,1)$、$S_\varepsilon=\ell^2(3)^*_{he}\cap\varepsilon$ 球（$\ell^2(3)_h$），也就是说，

$$S_1=\left\{s=(s_0,s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2:s_0^2+s_1^2+s_2^2\leq 1,s_0+s_1+s_2=3^{1/2}\right\}=\{e_2\},$$

并且 $S_\varepsilon=\left\{s=(s_0,\ s_1,\ s_2)\in\mathbb{R}^2:\ s_0^2+s_1^2+s_2^2\leq\varepsilon^2,\ s_0+s_1+s_2=3^{1/2}\right\}$ 是平面 $s_0+s_1+s_2=3^{1/2}$ 上以 e_2 为中心的圆盘。但该圆盘 S_ε 既可以内接于三角形 $\Delta=\left\{s_0+s_1+s_2=3^{1/2},s_j\geq 0,j=1,2,3\right\}$，也可以将其完全覆盖，这意味着相关的锥永远不会是 $\ell^2(3)$ 的原始锥。尽管如此，借助定理 4.2，$\ell^2(3)$ 的射影正性使得它能够在圆盘 S_ε 上实现为一个函数系统。

5. Projective positivity in L^p-spaces

本节分析局部紧、σ-紧的 Hausdorff 拓扑空间 $\mathcal{T}$ 上含单位元的 $*$-空间 $L^p_\mu(\mathcal{T})$ 中的射影正性，其中该空间配备了有限拉东测度 μ。众所周知，$L^p_\mu(\mathcal{T})_h$ 是一个巴拿赫格，其自然正性由锥 $L^p_\mu(\mathcal{T})_+$ 给出；该锥由 $L^p_\mu(\mathcal{T})$ 中几乎处处（相对于 μ）为正的函数组成。锥 $L^p_\mu(\mathcal{T})_+$ 与含单位元的 $*$-空间 $L^p_\mu(\mathcal{T})$ 中的射影正性有何关系？这正是本节的主要目标。

5.1. 含单位元的 $*$-空间 $L_\mu^p(\mathcal{T})$ 中的 ε-正性。设 $\mu\in M(\mathcal{T})_+$, $\|\mu\|=\vee\{\|\mu\|_K:\ K\subseteq\mathcal{T}\}=\mu(\mathcal{T})<\infty$, 其中 $K\subseteq\mathcal{T}$ 遍历所有紧子集, $\|\mu\|_K=\|\mu|C_K(\mathcal{T})\|$, 而 $C_K(\mathcal{T})\subseteq C_c(\mathcal{T})$ 是由支集包含于 K 的连续函数构成的 $*$-理想。注意, 相关的巴拿赫空间 $L_\mu^p(\mathcal{T})$, $1\leq p\leq\infty$ 是含单位元的 $*$-范数空间, 其单位元为 $e_p=\mu(\mathcal{T})^{-1/p}1$。对于 $p=\infty$, 我们得到带单位元 $e_\infty=1$ 的阿贝尔冯·诺依曼代数 $L_\mu^\infty(\mathcal{T})$。为简便起见, 我们省略记号 μ, 并考虑含单位的 $*$-范数空间 $(L^p(\mathcal{T})\ \ e_p)$, $1\leq p\leq\infty$。显然, $(L^\infty(\mathcal{T})\ \ e_\infty)$ 是一个算子系统, 事实上它还是一个函数系统（见命题 2.1）。特别地, ball $L^\infty(\mathcal{T})$ 含单位元。但其余的 ball $L^p(\mathcal{T})$, $1\leq p<\infty$ 并非如此（见下文引理 5.1）。

我们固定 $1\leq p<\infty$ 和 $\varepsilon\geq 1$, 并令 $S_\varepsilon^p=L^p(\mathcal{T})_{he}^*\cap\varepsilon$ 球 $L^q(\mathcal{T})$, 其中 (p,q) 是共轭指数对。回顾一下, $(L^p(\mathcal{T})\ \ L^q(\mathcal{T}))$ 是一对对偶 $*$, 其对偶性为 $\langle g,f\rangle=\int gf$, $g\in L^p(\mathcal{T})$,$f\in L^q(\mathcal{T})$, 其中 $\int$表示与 μ 相关的积分。特别地, $\langle e_p,f\rangle=\mu(\mathcal{T})^{-1/p}\int f$,$f\in L^q(\mathcal{T})$ 且 $\langle e_p,e_q\rangle=\mu(\mathcal{T})^{-1/p}\int e_q=1$。注意,

$$S_1^p=\left\{f\in L^q(\mathcal{T})_h:\|f\|_q\leq 1,\int f=\mu(\mathcal{T})^{1/p}\right\}\subseteq\partial\,\mathrm{ball}\,L^q(\mathcal{T})$$

且 $e_q\in S_1^p$（见小节 4.1）。所有 μ-可测子集 $E\subseteq\mathcal{T}$ 构成的类记为 $\mathfrak{M}_\mu$。

引理 5.1. 等式 $S_1^p=\{e_q\}$ 成立, 也就是说, 对于所有 $1\leq p<\infty$, 球 $L^p(\mathcal{T})$ 都不含单位元。

证明。首先证明 $S_1^p\subseteq L^q(\mathcal{T})_+$。若 $f\in S_1^p$ 且 $K\subseteq\{f\leq -n^{-1}\}$ 是一个紧集, 则 $nf[K]+[K]\leq 0$ 且 $n\int f-n\int f[\mathcal{T}\backslash K]+\mu(K)\leq 0$。由此可得

$$n\mu(\mathcal{T})^{1/p}+\mu(K)\leq n\int f[\mathcal{T}\backslash K]\leq n\|f\|_q\|[\mathcal{T}\backslash K]\|_p\leq n\mu(\mathcal{T}\backslash K)^{1/p}.$$

但是 $\mu(\mathcal{T})\geq\mu(\mathcal{T}\backslash K)$, 且 $n\left(\mu(\mathcal{T})^{1/p}-\mu(\mathcal{T}\backslash K)^{1/p}\right)+\mu(K)\leq 0$, 因此 $\mu(K)=0$。于是$\mu\{f\leq 0\}=0$ 或 $f\in L^q(\mathcal{T})_+$。

现在假设 $p=1$ 且 $f\in S_1^p$。若 $0<r<1$ 且 $K\subseteq\{f\leq r\}$ 是一个紧子集, 则$f[K]\leq r[K]$、$\int f=\mu(\mathcal{T})$ 且 $\mu(\mathcal{T})-\int f[\mathcal{T}\backslash K]\leq r\mu(K)$。由此可得

$$\mu(\mathcal{T})-r\mu(K)\leq\int f[\mathcal{T}\backslash K]\leq\|f\|_\infty\mu(\mathcal{T}\backslash K)\leq\mu(\mathcal{T}\backslash K)=\mu(\mathcal{T})-\mu(K),$$

即, $\mu(K)=0$。因此, $f\geq 1$属于 $L^\infty(\mathcal{T})_h$ 且 $\|f\|_\infty=1$。但是 $\wedge\{r\in\mathbb{R}:\ \mu\{f>r\}=0\}=\|f\|_\infty=1$, 这意味着对每个 $r>1$, 都有 $\mu\{f>r\}=0$。因此 $f=e_\infty$。

最后, 考虑 $p>1$的情形。由于 $S_1^p\subseteq\partial$球 $L^q(\mathcal{T})_+$ 是一个凸子集, 且 $e_q\in S_1^p$, 因此当 $f\in S_1^p$时, $2^{-1}(f+e_q)\in S_1^p$。特别地, $\|2^{-1}(f+e_q)\|_q=\|f\|_q=\|e_q\|_q=1$。根据球 $L^q(\mathcal{T})$具有一致凸集这一性质（见[11]）所体现的几何特征, 我们得到: 对每个 $\varepsilon>0$, 都存在相应的 $\delta>0$, 使得 g, $h\in$球 $L^q(\mathcal{T})$, 并且$\|g+h\|_q>2-\delta$ 蕴含 $\|g-h\|<\varepsilon$。由于 $\|f+e_q\|_q=2$, 我们得到 $\|f-e_q\|_q<\varepsilon$。由此可得 $f=e_q$。也可以在 $L^q(\mathcal{T})$中使用克拉克森不等式。□

因此, S_1^p 不可能是 $L^p(\mathcal{T})$中某个合理的含幺锥的态空间。

5.2. 锥的比较。根据定理 4.2, 含单位元的 $*$-范数空间 $L^p(\mathcal{T})$ 具有由分离的、闭的、含单位元锥 $L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 所给出的射影正性, 其态空间为 S_ε^p（对于 $\varepsilon>1$）。事实证明, 巴拿赫格 $L^p(\mathcal{T})_h$ 的原锥 $L^p(\mathcal{T})_+$ 与 $L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ （对于 $1\leq p<\infty$ ）是截然不同的锥; 除非 supp (μ) 有限, 否则二者不可比较。这是本节的主要结果, 我们将分几个步骤加以证明。

引理 5.2。设 $\mathfrak{c} \subseteq L^p(\mathcal{T})_h$ 是一个范数闭锥。那么，当且仅当对于每个满足 $\mu(K) > 0$ 的紧集 $K \subseteq \mathcal{T}$，都有 $[K] \in \mathfrak{c}$，才有 $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq \mathfrak{c}$。

证明。由于对每个 K，$[K] \in L^p(\mathcal{T})_+$，因此一个方向的蕴含显而易见。反过来，假设 $\{[K]: K \subseteq \mathcal{T}\} \subseteq \mathfrak{c}$。取 $E \in \mathfrak{M}_\mu$。由于 $\mu(E) = \vee\{\mu(K): K \subseteq \mathcal{T}\}$，可知对于某个由紧子集组成的序列 $\{K_n\}$，$\mu(K_n) \uparrow \mu(E)$，其中这些紧子集属于 E。但是 $\|[E] - [K]\|_p = \left(\int [E \backslash K_n]\right)^{1/p} = \mu(E \backslash K_n)^{1/p} \to 0$，因此 $[E] \in \mathfrak{c}$ 是一个闭锥。特别地，所有正的 μ-阶梯函数都属于 $\mathfrak{c}$。若 $f \in L^p(\mathcal{T})_+$，则存在一个由阶梯函数组成的序列 $\{f_n\} \subseteq L^p(\mathcal{T})_+$。于是 $(f - f_n) \downarrow 0$ 且 $(f - f_n)^p \leq f^p - f_n^p \leq f^p$，其中 $\int f^p < \infty$。根据勒贝格收敛定理，$\int (f - f_n)^p \downarrow 0$。考虑到 $\{f_n\} \subseteq \mathfrak{c}$，我们得出 $f \in \mathfrak{c}$ 也成立。□

引理 5.3。 包含关系 $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 对某个 $\varepsilon > 1$ 成立，当且仅当 $S_\varepsilon^p \subseteq L^q(\mathcal{T})_+$.

证明。设 $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$。若 $f \in S_\varepsilon^p$，则 $\left\langle L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+, f \right\rangle \geq 0$，因而 $\langle [K], f\rangle \geq 0$。与引理 5.1 的证明相同，对于紧集 $K \subseteq \{f \leq -n^{-1}\}$，有 $nf[K] + [K] \leq 0$且 $n\langle [K], f\rangle + \mu(K) \leq 0$，这意味着 $\mu(K) = 0$。因此 $f \in L^q(\mathcal{T})_+$。

反之，设 $S_\varepsilon^p \subseteq L^q(\mathcal{T})_+$。那么，对每个紧集 K，都有 $\langle [K], S_\varepsilon^p\rangle = \int_K S_\varepsilon^p \geq 0$。根据定理 4.2，有 $S_\varepsilon^p = S\left(L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+\right)$，这意味着 $[K] \in L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$。但是 $L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 是一个闭锥，且 $\{[K]: K \subseteq \mathcal{T}\} \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$。根据引理 5.2， $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 成立。□

现在考虑集合 $E \in \mathfrak{M}_\mu$ with $\mu(E) > 0$，并令 $r_\mu = \wedge\{\mu(E): E \in \mathfrak{M}_\mu, \mu(E) > 0\}$。

引理 5.4. 若对于某个 $\varepsilon > 1$， $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$，则 $r_\mu > 0$。

证明. 假设对于某个 $\varepsilon > 1$，包含关系 $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$ 成立，而 $r_\mu = 0$。因此，可以选取紧集 K，使 $\mu(K)$ 足够小。首先考虑 $p = 1$ 的情形。取一个较小的实数 $0 < a < 1$ 和一个紧 K，使得 $0 < \mu(K)/\mu(\mathcal{T}) \leq (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + a)$。由于有理函数 $y = \dfrac{x-1}{x+a}$, $1 \leq x \leq \varepsilon$ 是递增连续函数，因此对于某个 $1 < b \leq \varepsilon$，有 $\mu(K)/\mu(\mathcal{T}) = (b-1)/(b+a)$。于是 $f = b[\mathcal{T}\backslash K] - a[K] \in L^\infty(\mathcal{T})_h \backslash L^\infty(\mathcal{T})_+$，其中

$$\begin{aligned} &\langle e_1, f\rangle = \mu(\mathcal{T})^{-1} \int f = \mu(\mathcal{T})^{-1}(b\mu(\mathcal{T}\backslash K) - a\mu(K)) = 1, \text{ and} \\ &\|f\|_\infty = b \vee a \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

这意味着 $f \in S_\varepsilon^1 \backslash L^\infty(\mathcal{T})_+$，这与引理 5.3 矛盾。

现在假设 $1 < p < \infty$。如上所述，令 $0 < a < 1$ and $b = \dfrac{a\mu(K) + \mu(\mathcal{T})^{1/p}}{\mu(\mathcal{T}\backslash K)}$。通过选取足够小的 $\mu(K) > 0$，我们可知

$$b^{q-1}\mu(\mathcal{T})^{1/p} = \left(\frac{a\mu(K) + \mu(\mathcal{T})^{1/p}}{\mu(\mathcal{T}\backslash K)}\right)^{q-1} \mu(\mathcal{T})^{1/p} \sim \left(\frac{\mu(\mathcal{T})^{1/p}}{\mu(\mathcal{T})}\right)^{q-1} \mu(\mathcal{T})^{1/p} = 1 < \varepsilon^q,$$

也就是说，对于某个足够小的紧 K，有 $b^{q-1}\mu(\mathcal{T})^{1/p}<\varepsilon^q$，且 $\mu(K)>0$。此外，通过缩小 a，我们还可以假设 $b^{q-1}\mu(\mathcal{T})^{1/p}+(b^{q-1}+a^{q-1})\,a\mu(K)\le\varepsilon^q$。如果 $f=b[\mathcal{T}\backslash K]-a[K]$，那么

$$\begin{aligned}\langle e_p,f\rangle&=\mu(\mathcal{T})^{-1/p}\int f=\mu(\mathcal{T})^{-1/p}\left(b\mu(\mathcal{T}\backslash K)-a\mu(K)\right)=1,\text{ and}\\ \|f\|_q^q&=\int|f|^q=b^q\mu(\mathcal{T}\backslash K)+a^q\mu(K)=b^{q-1}\left(a\mu(K)+\mu(\mathcal{T})^{1/p}\right)+a^q\mu(K)\\ &=b^{q-1}\mu(\mathcal{T})^{1/p}+\left(b^{q-1}+a^{q-1}\right)a\mu(K)\le\varepsilon^q,\end{aligned}$$

这意味着 $f\in L^p(\mathcal{T})^*_{he}\cap\varepsilon$ 球 $L^q(\mathcal{T})=S^p_\varepsilon$。但是 $f\notin L^q(\mathcal{T})_+$，这再次与引理 5.3 矛盾。□

回顾一下，在 $\mathcal{T}$中，对于 μ，原子是指一个可测子集 $A\subseteq\mathcal{T}$, $\mu(A)>0$，使得对于每个满足 $\mu(B)<\mu(A)$ 的可测子集 $B\subseteq A$，都有 $\mu(B)=0$。局部可求和序列 $\{c_t:t\in S\}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 中定义了一个原子测度 $\lambda=\sum_t c_t\delta_t\in M(\mathcal{T})_+$，使得 supp (λ) 是其原子 $S=\{t\in\mathcal{T}:\,c_t>0\}$的闭包。在这种情况下，$\lambda=[S]\lambda$和$\|\lambda\|=\sum_{t\in S}c_t$。闭子空间 $I^\delta(\mathcal{T})_h$ 在 $M(\mathcal{T})_h$ 中由 $\{\delta_t:\,t\in\mathcal{T}\}$ 生成，是完备格 $M(\mathcal{T})_h$的闭理想。事实证明，$I^\delta(\mathcal{T})$恰好是所有定义在$\mathcal{T}$上的实原子电荷的集合。此外，闭理想存在如下分解：$M(\mathcal{T})_h=I^\delta(\mathcal{T})_h\oplus I^\delta(\mathcal{T})_h^\perp$，其中理想补 $I^\delta(\mathcal{T})_h^\perp$ 由所有定义在 $\mathcal{T}$上的实散布测度组成。特别地，存在唯一分解 $\mu=\lambda+\varphi$，其中包含一个正原子 λ和一个正散布 φ，使得 $\|\mu\|=\|\lambda\|+\|\varphi\|$。在这种情况下，存在互不相交的 $S,T\in\mathfrak{M}_\mu$，使得 $[S]\lambda=\lambda$和$[T]\varphi=\varphi$（详细内容见 [1, 5.5]）

引理 5.5. 具有 $r_\mu>0$ 的有界正拉东测度 $\mu\in M(\mathcal{T})$ 是支撑集 supp (μ) 有限的原子测度。

证明. 首先注意，对 μ而言，任意满足 $r_\mu\le\mu(A)<2r_\mu$ 的 $A\in\mathfrak{M}_\mu$ 都是一个原子。事实上，若 $B\in\mathfrak{M}_\mu$ 满足 $B\subseteq A$，且 $\mu(B)<\mu(A)$，则当 $\mu(B)>0$时，我们有 $\mu(B)\ge r_\mu$。然而，$\mu(A/B)=\mu(A)-\mu(B)>0$ 也成立，因此 $\mu(A/B)\ge r_\mu$。由此可得 $\mu(A)=\mu(B)+\mu(A/B)\ge 2r_\mu$，这与假设矛盾。反过来，对于 μ的每个原子 A，显然有 $\mu(A)\ge r_\mu$，并且根据命题 11], 存在某个 $t\in A$ 使得 $\mu(A)$ =$\mu(\{t\})$。特别地，在展开 $I^\delta(\mathcal{T})_h\oplus I^\delta(\mathcal{T})_h^\perp$ 中，μ 的原子部分非平凡。令 $\mu=\lambda+\varphi$ 具有一个原子 λ 和一个散布的 φ，它们分别支撑在互不相交的 S 和 T 上。对于每个 $t\in S$，我们有 $\mu(\{t\})=\lambda(\{t\})=c_t>0$。特别地，$\wedge\{c_t:\,t\in S\}\ge r_\mu>0$。但$\sum_{t\in S}c_t<\infty$，因此 S 是有限集。

若 $\varphi\neq 0$，则对于某个 $E\in\mathfrak{M}_\mu$，有 $\varphi(E)>0$。由于 $[T]\varphi=\varphi$，我们可以假设 $E\subseteq T$和$\mu(E)=\lambda(E)+\varphi(E)=\varphi(E)\ge r_\mu$。特别地，$r_\varphi=\wedge\{\varphi(E):\,E\in\mathfrak{M}_\varphi,\varphi(E)>0\}\ge r_\mu>0$。若 $r_\varphi\le\varphi(A)<2r_\varphi$，则 A是 φ的一个原子。如上所述，$\varphi(A)=\varphi(\{t\})$，并考虑到 φ 是散布的，我们推得 $\varphi(\{t\})=0$。因此 $r_\varphi=0$，矛盾。于是$\mu=\lambda\in I^\delta(\mathcal{T})_h$，且其支撑为有限集 S。□

现在我们可以证明以下关键结果。为明确起见，我们称向量空间中的两个锥 $\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{k}$ 可比较，当且仅当 $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{k}$或 $\mathfrak{k}\subseteq\mathfrak{c}$。

定理 5.1. 对于某个 $\varepsilon>1$，锥 $L^p(\mathcal{T})_+$和 $L^p(\mathcal{T})^+_\varepsilon$ 可比较，当且仅当 supp(μ) 是有限的。

证明。首先假设 supp (μ) 是有限的，也就是说，$\mu=\sum_{t\in S}c_t\delta_t$ 对于某个有限子集 $S\subseteq\mathcal{T}$且 $c_t>0$。于是，对于有限序列 $c=\{c_j:\,1\le j\le n\}$、$c_j>0$，有 $L^p(\mathcal{T})=\ell^p(c)$，并且对每个 $x\in\ell^p(c)$，$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^p\,c_j\right)^{1/p}$。这对 ($\ell^p(c)$ $\ell^q(c)$) 的对偶性由 $\langle x、\ y\rangle=$给出

$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j c_j$。此外，$y \in S_\varepsilon^p$对于 $\varepsilon > 1$ 成立，当且仅当 $\|y\|_q \leq 1$ 且 $\sum_j y_j c_j = \int y = \mu(\mathcal{T})^{1/p} = \left(\sum_j c_j\right)^{1/p}$。令

$$r_c = \wedge \left\{ \left(\frac{\sum_j c_j}{\sum_{j \neq k} c_j} \right)^{1/p} : 1 \leq k \leq n \right\} > 1$$

并固定 ε，使得 $1 < \varepsilon \leq r_c$。若 $y \in S_\varepsilon^p$，则对所有 k，都有 $y_k \geq 0$。事实上，在某个 k 满足 $y_k < 0$ 的情况下，我们可以推出

$$\left(\sum_j c_j\right)^{1/p} = \sum_j y_j c_j < \sum_{j \neq k} y_j c_j \leq \sum_{j \neq k} |y_j| \, c_j^{1/q} c_j^{1/p} \leq \left(\sum_{j \neq k} |y_j|^q c_j\right)^{1/q} \left(\sum_{j \neq k} c_j\right)^{1/p}$$

$$\leq \|y\|_q \left(\sum_{j \neq k} c_j\right)^{1/p} \leq \varepsilon \left(\sum_{j \neq k} c_j\right)^{1/p},$$

这意味着 $\varepsilon > \left(\frac{\sum_j c_j}{\sum_{j \neq k} c_j} \right)^{1/p} \geq r_c$，矛盾。因此 $S_\varepsilon^p \subseteq \ell^q(c)_+$，进而根据引理 5.3 可得 $\ell^p(c)_+ \subseteq \ell^p(c)_\varepsilon^+$。

反过来，若某个 $\varepsilon > 1$ 满足 $L^p(\mathcal{T})_+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+$，则根据引理 5.4，$r_\mu > 0$。因此，根据引理 5.5，supp($\mu$) 是有限集。

若 $L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_+$，则显然 $L^p(\mathcal{T})_+$ 是含单位元的；除非 supp (μ) 有限，否则情况并非如此。巴拿赫格理论中已知这一事实 [14, 第 2] 章指出，L^p- 空间没有强序单位，只有弱序单位。在当前情形下，我们可以仿照引理 5.4 的证明给出一个独立论证来解决这一问题。具体而言，假设某个 $\varepsilon > 1$ 满足 $L^p(\mathcal{T})_\varepsilon^+ \subseteq L^p(\mathcal{T})_+$。那么 $S^p \subseteq S_\varepsilon^p$，其中 S^p 是锥 $L^p(\mathcal{T})_+$ 的态空间。但 S^p 由那些满足 $\int f = \mu(\mathcal{T})^{1/p}$ 的 $f \in L^q(\mathcal{T})_+$ 构成，其中

$$\left\langle L^p(\mathcal{T})_+, f \right\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle [K], f \rangle \geq 0, \, K \subseteq \mathcal{T} \Leftrightarrow f \in L^q(\mathcal{T})_+$$

（见引理 5.2）。根据引理 5.5，只需证明 $r_\mu > 0$。如果 $r_\mu = 0$ 存在紧集 K，使得 $\mu(K)$ 足够小，那么如上所述，固定

$$0 < a < \mu(\mathcal{T})^{-1/q}, \quad b = \frac{\mu(\mathcal{T})^{1/p} - a\mu(\mathcal{T} \backslash K)}{\mu(K)} > 1$$

对于 $p > 1$。那么 $\mu(\mathcal{T})^{1/p} - a\mu(\mathcal{T}) > 0$ 并且

$$b^q \mu(K) = \frac{\left(\mu(\mathcal{T})^{1/p} - a\mu(\mathcal{T} \backslash K)\right)^q}{\mu(K)^{q-1}} > \varepsilon^q$$

对于较小的 $\mu(K) > 0$。令 $f = a[\mathcal{T} \backslash K] + b[K] \in L^q(\mathcal{T})_+$。则 $\|f\|_q^q = \int f^q = a^q \mu(\mathcal{T} \backslash K) + b^q \mu(K) > \varepsilon^q$ 且 $\int f = a\mu(\mathcal{T} \backslash K) + b\mu(K) = \mu(\mathcal{T})^{1/p}$，这意味着 $f \in S^p \backslash S_\varepsilon^p$，矛盾。若 $p = 1$ 我们固定 $b > \varepsilon$ 和 $K \subseteq \mathcal{T}$，使得 $0 < \mu(K)/\mu(\mathcal{T}) < 1/b$。有理函数 $y = \frac{1-x}{b-x}$, $0 \leq x \leq 1$ 是连续递减函数，因此对于某个 $0 < a < 1$，有 $\mu(K)/\mu(\mathcal{T}) = \frac{1-a}{b-a}$。令 $f = a[\mathcal{T} \backslash K] + b[K] \in L^\infty(\mathcal{T})_+$，其中 $\|f\|_\infty = a \vee b = b > \varepsilon$。由于 $\int f = b\mu(\mathcal{T} \backslash K) + a\mu(K) = \mu(\mathcal{T})$，可知 $f \in S^1 \backslash S_\varepsilon^1$，矛盾。□

如上所述，等式 $\ell^p(c) = \ell^p(c)_\varepsilon^+$ 仅在维数为 2 时成立。我们也可以在下文将要处理的非交换情形中观察到同样的现象。

6. Projective positivity in L^p-spaces of a finite von Neumann algebra

本节我们研究　　有限冯·诺依曼代数的 L^p-空间中的射影锥　　.

6.1. 矩阵代数中的投影正性。我们分析全矩阵代数的情形。考虑由所有复 $n\times n$-矩阵组成的 $*$-向量空间 $\mathbb{M}_n$，其中 $n>1$。$\mathbb{M}_n$中的单位矩阵记为 e。对每个 $1\le p\le\infty$，我们在 $\mathbb{M}_n$ 上定义 Schatten p-范数：$\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{1/p}$,$x\in\mathbb{M}_n$，其中 τ 是 $\mathbb{M}_n$上的标准迹。赋范向量空间 $\left(\mathbb{M}_n,\|\cdot\|_p\right)$ 记为$\mathfrak{S}_p$。对于极端值 $p=1,\infty$，我们也使用记号 $T_n=\mathfrak{S}_1$ 和 $M_n=\mathfrak{S}_\infty$。回顾一下，当 (p,q) 是共轭指数对时，$\mathfrak{S}_p$和 $\mathfrak{S}_q$通过配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：$\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q\to\mathbb{C}$, $\langle x,y\rangle=\tau(xy)$ 构成典范对偶。因此，$\mathfrak{S}_p^*=\mathfrak{S}_q$可通过 τ给出的等距同构得到。特别地，$M_n^*=T_n$，而 M_n^+是 C^*-代数M_n 中正元素的标准含幺锥，其态空间

$$S_\tau=\{y\in T_n: y\ge 0,\tau(y)=1\}$$

是 $\mathbb{M}_n$ 中所有密度矩阵构成的凸集。因此

$$S\left(M_n^+\right)=S_\tau=\operatorname{co}\{\zeta\odot\zeta:\|\zeta\|=1\} \tag{6.1}$$

是秩一投影的凸包 $(\zeta\odot\zeta)(\eta)=(\eta,\zeta)\zeta$, $\zeta,\eta\in\ell^2(n)$。结合锥 M_n^+，可以生成其在第 3 节中讨论过的变形版本 $M_{n,\varepsilon}^+$, $\varepsilon\ge 1$。也就是说，$x\in M_{n,\varepsilon}^+$当且仅当 $x\ge\|x\|\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e$属于 M_n。因此，$x\in M_{n,\varepsilon}^+$意味着 $x\ge 0$且 $\wedge\sigma(x)\ge\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}(\vee\sigma(x))$，其中 $\sigma(x)$ 表示 x 的谱。特别地，每个非零的 $x\in M_{n,\varepsilon}^+$自动可逆。根据引理 3.1，关系

$$S\left(M_{n,\varepsilon}^+\right)=\left\{(1+r)z-rw: z,w\in S_\tau, 0\le r\le 2^{-1}(\varepsilon-1)\right\}$$

给出了锥 $M_{n,\varepsilon}^+$的态空间的详细描述。

所有希尔伯特–施密特矩阵构成的类记作 HS_n，即 $HS_n=\mathfrak{S}_2$。回忆一下，HS_n最终成为一个带有内积 $(x,y)=\tau(xy^*)$ 的希尔伯特连续函数空间 $*$，且每个 $x\in HS_n$ 都有唯一的正交归一展开 $x=x_0+(x,e_2)e_2$，$(x_0,e_2)=0$，其中 $e_2=n^{-1/2}e$ 是 HS_n的单位向量。可以定义如下的锥

$$HS_n^+=\left\{x\in HS_{n,h}:\|x\|_2\le\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}(x,e_2)\right\} \tag{6.2}$$

在含单位元的希尔伯特连续函数空间 $*(HS_n,e_2)$ 中。这个锥是 [7] 中所讨论的含单位元希尔伯特连续函数空间 $*$ 的标准锥的一种变形。实际上，通过对态空间作适当变换，常数 $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{1/2}$ 可以降至 $\sqrt{2}$，而 HS_n^+ 定义了射影正性（参见下文对接下来命题的证明）。

定理 6.1。所有 $\mathfrak{S}_p$ 都是含幺 $*$-范数空间，且具有共同的单位元 e。因此，$\mathfrak{S}_p$ 是一个函数系统，配备的锥 $\mathfrak{S}_p^+$由 $\varepsilon=1>1/\|e\|_p$ 给出，使得

$$M_{n,\varepsilon}^+\subseteq\mathfrak{S}_1^+\subseteq\mathfrak{S}_p^+\subseteq\mathfrak{S}_\infty^+=M_n^+,\quad\varepsilon\ge n$$

是含幺锥的递增族，其中 $S(M_n^+) = S_\tau$，并且

$$S\left(\mathfrak{S}_p^+\right) = \left\{(1+r)\,z - rw : z, w \in S_\tau, zw = 0, \left\|(1+r)\,z + rw\right\|_q \leq 1\right\}$$

对于所有共轭指数对（p, q）均成立。此外，$\mathfrak{S}_2^+ = HS_n^+$。

证明。取 $x \in \mathfrak{S}_p$ 及其极分解 $x = u\,|x|$。考虑到 $|x^*| = u\,|x|\,u^*$，我们推得 $\|x^*\|_p = \tau\left(|x^*|^p\right)^{1/p} = \tau\left(u\,|x|^p\,u^*\right)^{1/p} = \tau\left(|x|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p$，这意味着 $\mathfrak{S}_p$ 是一个 $*$-范数空间。证明 e 是 $\mathfrak{S}_p$ 的单位元（参见小节 4.1）。注意$\mathfrak{S}_{p,\ he}^* = \{y \in \mathfrak{S}_{q,h} :\ \tau(y) = 1\}$，球$\mathfrak{S}_p^* =$球$\mathfrak{S}_q$，且 $S_1^p = \mathfrak{S}_{p,\ he}^* \cap$球$\mathfrak{S}_q$是相关的凸集。需要找出 S_1^p 的描述，并证明 $S_1^p \neq \varnothing$。

配备 q-范数 $\|\mathbf{x}\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q}$ 的实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 记作 $\mathbb{R}_q^n$，即 $\mathbb{R}_q^n = \ell^q(n)_h$。令 $\Pi_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中法向量为 $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$ 的超平面。注意，$\Pi_n \cap$球$\mathbb{R}_1^n = S_+$，其中 $S_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中四面体的正单纯形面。此外，

$$S_+ \subseteq \Pi_n \cap \operatorname{ball}\mathbb{R}_q^n \subseteq \Pi_n \cap \operatorname{ball}\mathbb{R}_\infty^n$$

是从 Π_n 出发的一族递增的超平面区域。取 $\mathbf{x} \in \Pi_n \cap$球$\mathbb{R}_q^n$，并令 $x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \in \mathbb{M}_n$ 为相应的对角矩阵。于是 $\tau(x) = 1$ 且 $\|x\|_q = \|\mathbf{x}\|_q \leq 1$，也就是说，$x \in \mathfrak{S}_{p,\ he}^* \cap$球 $\mathfrak{S}_q = S_1^p$。因此，在典范同一化意义下，$\Pi_n \cap$球 $\mathbb{R}_q^n \subseteq S_1^p$。反之，若 $y \in S_1^p$，则存在酉算子 $u \in \mathbb{M}_n$，使得对于某个对角矩阵 $x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$，有 $y = u^* x u$，其中 $\sigma(y) = \{x_i\} \subseteq \mathbb{R}$ 或 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$。但是 $|y|^q = u^*\,|x|^q\,u$ 且 $|x| = |x_1| \oplus \cdots \oplus |x_n|$，并且

$$\|\mathbf{x}\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} = \tau\left(|x|^q\right)^{1/q} = \tau\left(u^*\,|x|^q\,u\right)^{1/q} = \tau\left(|y|^q\right)^{1/q} = \|y\|_q \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \tau(x) = \tau(u^* x u) = \tau(y) = 1,$$

这意味着 $\mathbf{x} \in \Pi_n \cap$球$\mathbb{R}_q^n$。因此，我们得到

$$S_1^p = \cup\left\{u^*\left(\Pi_n \cap \operatorname{ball}\mathbb{R}_q^n\right)u : u \in \mathbb{M}_n, u^*u = e\right\}. \tag{6.3}$$

特别地，$S_1^p \neq \varnothing$ 和 e 对于每个满足 $\|e\|_p = n^{1/p} > 1$的 $\mathfrak{S}_p$ 都成为一个单位元。

此外，令 $\mathfrak{S}_p^+$为满足 $\langle x、\ S_1^p\rangle = \tau(xS_1^p) \geq 0$的那些$x \in \mathfrak{S}_{p,h}$的集合。如果 $p = \infty$，那么 $\|e\|_\infty = 1$ 且

$$\begin{aligned} S_1^\infty &= \cup\left\{u^*\left(\Pi_n \cap \operatorname{ball}\mathbb{R}_1^n\right)u : u \in \mathbb{M}_n, u^*u = e\right\} = \cup\left\{u^* S_+ u : u \in \mathbb{M}_n, u^*u = e\right\} \\ &= \{y \in T_n : y \geq 0, \tau(y) = 1\} = S_\tau. \end{aligned}$$

在这个特殊情形下，我们有 $\mathfrak{S}_\infty^+ = M_n^+$。事实上，对于每个单位向量 $\zeta \in \ell^2(n)$，$x \in \mathfrak{S}_\infty^+$当且仅当$(x\zeta, \zeta) = \tau(x(\zeta \odot \zeta)) \geq 0$（见（6.1））。如果 $p < \infty$，那么 $\varepsilon = 1 > 1/\|e\|_p$，并且根据定理 4.2，$\mathfrak{S}_p^+$ 是 $\mathfrak{S}_p$ 中的一个分离、闭、含单位元的锥。因此，$\left(\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_p^+\right)$ 是 S_1^p 上的一个函数系统，使得$S\left(\mathfrak{S}_p^+\right) = S_1^p$。特别地，对于 $p_1 < p_2$，我们得到 $q_2 < q_1$, $S_1^{p_2} \subseteq S_1^{p_1}$（见（6.3）），进而可得 $\mathfrak{S}_{p_1}^+ \subseteq \mathfrak{S}_{p_2}^+$。

现在来考察锥 $\mathfrak{S}_2^+$。在这种情况下，范数对偶空间 HS_n^* 与共轭空间 $\overline{HS_n}$ 可典范地等同；对于每个 $y \in \mathfrak{S}_{2,\ he}^*$，我们都有正交展开 $y = y_0 + (1/n)\,e$，其中 $y_0 \perp e$（或 $\tau(y_0) = 0$）。于是 $\|y\|_2^2 = \|y_0\|_2^2 + 1/n$，且当且仅当 $\|y_0\|_2 \leq$时 $y \in S_1^2$

$((n-1)/n)^{1/2}$。因此

$$S_1^2=((n-1)/n)^{1/2}\operatorname{ball}HS_{n,h}^e+(1/n)\,e=n^{-1/2}\left((n-1)^{1/2}\operatorname{ball}HS_{n,h}^e+e_2\right),$$

其中 $HS_{n,\ h}^e=\{w\in HS_{n,h}:\ \tau(w)=0\}$ 是 $\overline{HS_n}$ 中与 e正交的实向量子空间，而 $e_2=n^{-1/2}e$ 是 HS_n的单位向量。因此，$x\in\mathfrak{S}_2^+$ 及其正交归一展开$x=x_0+(x,e_2)\ e_2$当且仅当 $\left(x,(n-1)^{1/2}\text{球}HS_{n,\ h}^e+e_2\right)\geq 0$，这又等价于

$$(n-1)^{1/2}\left\|x_0\right\|_2=(n-1)^{1/2}\vee\left|\left(x_0,\operatorname{ball}HS_{n,h}^e\right)\right|\leq(x,e_2)\ \text{ or }\ \left\|x_0\right\|_2\leq(n-1)^{-1/2}(x,e_2).$$

因此，$\mathfrak{S}_2^+$化简为(6.2)中的锥 HS_n^+。若我们为 $\varepsilon=\sqrt{2/n}>1/\sqrt{n}$选择 S_ε^2（注意 $\|e\|_2=\sqrt{n}$），而不是 S_1^2，那么根据定理 4.2，射影正性恰好化简为 [7]中的一个。也就是说，$y=y_0+(1/n)\ e\in S_\varepsilon^2$当且仅当 $\|y\|_2^2=\|y_0\|_2^2+1/n\leq\varepsilon^2=2/n$或 $\|y_0\|_2\leq 1/\sqrt{n}$。因此，$S_\varepsilon^2=n^{-1/2}\left(\text{球}HS_{n,\ h}^e+e_2\right)$，而对于 $x\in HS_n$，我们有$(x,S_\varepsilon^2)\geq 0$当且仅当$\|x\|_2\leq\sqrt{2}\,(x,e_2)$。

最后，我们来证明态空间之间的等式 $S\left(\mathfrak{S}_p^+\right)$。设厄米矩阵$y$可展开为 $y=(1+r)\ z-rw$，其中 $z,w\in S_\tau$, $zw=0$和 $\|z+r(z+w)\|_q\leq 1$。那么 $\tau(y)=(1+r)\,\tau(z)-r\tau(w)=1+r-r=1$, $|y|=(1+r)\,z+rw$并且 $\|y\|_q=\||y|\|_q=\|(1+r)\ z+rw\|_q\leq 1$，也就是说，$y\in\mathfrak{S}_{p,he}^*\cap$球$\mathfrak{S}_q=S_1^p=S\left(\mathfrak{S}_p^+\right)$。反过来，取 $y\in S_1^p$。利用 y的谱分解，我们可推出 $y=y_+-y_-=\tau(y_+)\,z-\tau(y_-)\ w$，其中$z,w\in S_\tau$和 $\tau(y_+)-\tau(y_-)=1$。若 $r=\tau(y_-)$，则 $y=(1+r)\ z-rw$，其中 $z,w\in S_\tau$,$zw=0$和 $\|(1+r)\ z+rw\|_q=\||y|\|_q=\|y\|_q\leq 1$。因此，$S\left(\mathfrak{S}_p^+\right)$由满足 $z,w\in S_\tau$, $zw=0$且 $\|(1+r)\ z+rw\|_q\leq 1$的那些$(1+r)\ z-rw$组成。特别地，$S\left(\mathfrak{S}_1^+\right)$由满足 $z,w\in S_\tau$, $zw=0$且 $\|(1+r)\ z+rw\|_\infty\leq 1$的那些$y=(1+r)\ z-rw$组成。

取$y\in S\left(\mathfrak{S}_1^+\right)$，使得$(1+r)z+rw=|y|\leq e$。那么 $|y|^p\leq e$、$p\geq 1$和 $1+2r=(1+r)\,\tau(z)+r\tau(w)=\tau(|y|)\leq\tau(e)=n$（或 $r\leq(n-1)/2$）。因此

$$S\left(\mathfrak{S}_p^+\right)\subseteq\left\{(1+r)\,z-rw:z,w\in S\left(M_n^+\right),0\leq r\leq(n-1)/2\right\}=S\left(M_{n,n}^+\right)\subseteq S\left(M_{n,\varepsilon}^+\right)$$

根据引理 3.1，对所有 $p\geq 1$ 和 $\varepsilon\geq n$ 均成立。特别地，$M_{n,\ \varepsilon}^+\subseteq\mathfrak{S}_1^+\subseteq\mathfrak{S}_p^+\subseteq M_n^+$是含幺锥的递增族。□

我们也用 T_n^+ 表示 $\mathfrak{S}_1^+$。根据定理 6.1，我们有

$$\begin{aligned}S_\tau\subseteq S\left(T_n^+\right)&=\{(1+r)\,z-rw:z,w\in S_\tau,zw=0,\|(1+r)\,z+rw\|_\infty\leq 1\}\\&\subseteq\{(1+r)\,z-rw:z,w\in S_\tau,0\leq r\leq(n-1)/2\}.\end{aligned}$$

此外，利用 (6.3)，我们得到

$$S\left(T_n^+\right)=S_1^1=\cup\left\{u^*\left(\Pi_n\cap\operatorname{ball}\mathbb{R}_\infty^n\right)u:u\in\mathbb{M}_n,u^*u=e\right\},$$

这为态空间 $S(T_n^+)$ 提供了一种几何解释。注意，等式$S_\tau=S(T_n^+)$ 仅当 $n=2$时成立。对于 $n=3$，矩阵 $(-1)\oplus 1\oplus 1$、$1\oplus(-1)\oplus 1$和$1\oplus 1\oplus(-1)$是 $S(T_n^+)$ 中的一些（极端）元素，取自 S_τ。

因此 $T_n^+=\{x\in T_{n,h}:\ \tau(xS(T_n^+))\geq 0\}$且$M_{n,\ \varepsilon}^+\subseteq T_n^+\subseteq M_n^+$对所有 $\varepsilon\geq n$均成立。对于 $n=3$和 $x=2\oplus 0\oplus 1$，我们有 $x\in M_3^+\backslash T_3^+$，其中 $\tau(x((-1)\oplus 1\oplus 1))=-1<0$。因此，来自 T_3^+的射影正矩阵的特征值必定是严格正的实数。

6.2. 有限冯·诺依曼代数中的射影正性。现在固定一个有限冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$，其单位元为 e，并配备忠实有限正规迹 τ。我们总可以假设 $\tau(e) > 1$。$\mathcal{M}$ 的非交换 L^p-空间 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 定义为在范数 $\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p}, x \in \mathcal{M}, 1 \le p \le \infty$ 下对 $\mathcal{M}$ 完备化得到的空间。如上所述，$L^p(\mathcal{M},\tau)$ 是一个含单位元的 $*$-向量空间，且 $\|e\|_p = \tau(e)^{1/p} > 1$；$S_\tau = \{y \in \mathcal{M}_+ : \tau(y) = 1\}$表示 $\mathcal{M}$ 中所有密度元构成的凸集。巴拿赫空间 $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 实际上是 $\mathcal{M}$ 的预对偶，因此可将 $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 视为 $\mathcal{M}^*$ 的闭子空间。在此情形下，$S_*(\mathcal{M}_+) = S(\mathcal{M}_+) \cap L^1(\mathcal{M},\tau)$ 是锥 $\mathcal{M}_+$ 的所有正规态的集合，而 $S_\tau^- = S_*(\mathcal{M}_+)$ 表示 S_τ 在 $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 中的范数闭包（见 [6, 命题 7.3]）。此外，我们有典范的连续包含关系

$$\mathcal{M} = L^\infty(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)$$

按降序排列。事实上，对于 $1 \le p < l < \infty$ 和 $r = l/p > 1$，有

$$\|y\|_p^p = \tau\left(|y|^{l/r} e\right) \le \tau\left(|y|^{rl/r}\right)^{1/r} \tau(e)^{1-1/r} = \|y\|_l^p \tau(e)^{1-p/l} \text{ or } \|y\|_p \le \|y\|_l \tau(e)^{(l-p)/lp}$$

对于所有 $y \in \mathcal{M}$，均成立。这意味着 $L^l(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)$ 是一个有界嵌入，其范数为$\tau(e)^{(l-p)/lp}$，对于所有 $1 \le p < l < \infty$ 均成立。若 $l = \infty$，则对于所有 $y \in \mathcal{M}$，$\|y\|_p = \tau(|y|^p e)^{1/p} \le \|y\| \tau(e)^{1/p}$。因此

$$\text{ball}\, L^l(\mathcal{M},\tau) \subseteq \tau(e)^{(l-p)/lp} \,\text{ball}\, L^p(\mathcal{M},\tau) \tag{6.4}$$

对于所有 $1 \le p < l \le \infty$，均成立。如上所述，$L^2(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 Hilbert $*$-空间，其内积为 $(x,y) = \tau(xy^*)$，且每个 $x \in L^2(\mathcal{M},\tau)$ 都有唯一的正交归一展开 $x = x_0 + (x,e_2)\, e_2$、$(x_0,e_2) = 0$，其中 $e_2 = \tau(e)^{-1/2} e$。与 (6.2) 类似的锥定义如下

$$\mathfrak{c}_\tau = \left\{ x \in L^2(\mathcal{M},\tau)_h : \|x\|_2 \le \left(\frac{\tau(e)}{\tau(e)-1}\right)^{1/2} (x,e_2) \right\}$$

在含单位元的希尔伯特 $*$-空间 $(L^2(\mathcal{M},\tau) \quad e_2)$ 中。

命题 6.1. 所有 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 都是含单位元的 $*$-范数空间，其公共单位元为 e。因此，$L^p(\mathcal{M},\tau)$ 是配备锥 $L^p(\mathcal{M},\tau)_+$的函数系统，该锥由 $\varepsilon = 1 > 1/\|e\|_p$给出，并满足 $L^\infty(\mathcal{M},\tau)_+ = \mathcal{M}_+$、$L^2(\mathcal{M},\tau)_+ = \mathfrak{c}_\tau$以及 $\mathcal{M}_\varepsilon^+ \subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)_+ \cap \mathcal{M}$，对所有 $\varepsilon \ge \tau(e)$ 均成立。此外，

$$S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right) = \{(1+r)z - rw : z,w \in S_\tau, zw = 0, \|(1+r)z + rw\| \le 1\}.$$

证明。我们采用与定理 6.1 证明中类似的论证。取 $x \in \mathcal{M}$，其极分解为 $x = u|x|$。由于 $|x^*| = u|x|u^*$，可得 $\|x^*\|_p = \tau(|x^*|^p)^{1/p} = \tau(u|x|^p u^*)^{1/p} = \tau(|x|^p)^{1/p} = \|x\|_p$，进而推出 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 $*$-范数空间。证明 e 是 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 的单位元。对于 $p < \infty$，我们有 $L^p(\mathcal{M},\tau)_{he}^* = \{y \in L^q(\mathcal{M},\tau)_h : \tau(y) = 1\}$，且球 $L^p(\mathcal{M},\tau)^* =$球 $L^q(\mathcal{M},\tau)$，其中共轭指数对为 (p,q)。此外，基于 $L^q(\mathcal{M},\tau)$ 与 $L^q(\mathcal{M},\tau)$ 之间的对偶性，我们推得 τ 在 $L^q(\mathcal{M},\tau)$ 上定义了一个有界线性泛函，并且

$$1 < \tau(e)^{1/p} = \tau\left(\tau(e)^{-1/q} e\right) \le \vee\tau\left(\text{ball}\, L^q(\mathcal{M},\tau)_h\right) \le \vee\left|\tau\left(\text{ball}\, L^q(\mathcal{M},\tau)\right)\right| \le \tau(e)^{1/p},$$

也就是说，$1 < \tau(e)^{1/p} = \vee\tau($球 $L^q(\mathcal{M},\tau)_h)$。但是，$\tau($球 $L^q(\mathcal{M},\tau)_h) \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含原点的凸子集。因此，对于某个 $y \in$球 $L^q(\mathcal{M},\tau)_h$，有 $\tau(y) = 1$；也就是说，只要 $p < \infty$，就有 $S_1^p =$$L^p(\mathcal{M},\tau)_{he}^* \cap$球 $L^q(\mathcal{M},\tau) \neq \varnothing$。特别地，

$$S_1^1 = \mathcal{M}_{he} \cap \text{ball}\, \mathcal{M} = \{y \in \text{ball}\, \mathcal{M}_h : \tau(y) = 1\} \neq \varnothing.$$

对于 $p=\infty$，我们有 $\|e\|_\infty=1$ 和 $S_1^\infty=\mathcal{M}_{he}^*\cap$ 球 $\mathcal{M}^*$，也就是说，每个 $\varphi\in S_1^\infty$ 都定义了一个含单位元的压缩映射 $\varphi\colon \mathcal{M}\to\mathbb{C}$，满足 $1=\langle e,\varphi\rangle\leq\vee|\langle$球 $\mathcal{M},\varphi\rangle|=\|\varphi\|\leq 1$。根据引理 7.2，$\varphi$是一个正泛函。因此，$S_1^\infty=S(\mathcal{M}^+)$ 是锥 $\mathcal{M}^+$ 的态空间。于是，对于每个 $L^p(\mathcal{M},\tau)$，e 都是一个单位元，$1\leq p\leq\infty$。

现在令 $L^p(\mathcal{M},\tau)_+$为满足 $\langle x,S_1^p\rangle\geq 0$ 的那些 $x\in L^p(\mathcal{M},\tau)_h$ 的集合。若 $p=\infty$，则$L^\infty(\mathcal{M},\tau)_+=\{x\in\mathcal{M}_h\colon\ \langle x,S(\mathcal{M}_+)\rangle\geq 0\}=\mathcal{M}_+$（见 [6, 7.1]）。若 $p<\infty$，则 $\varepsilon=1>1/\|e\|_p$在 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 中定义了分离的、闭的、含单位元的锥 $L^p(\mathcal{M},\tau)_+$，$S\left(L^p(\mathcal{M},\tau)_+\right)=S_1^p$，并且$\left(L^p(\mathcal{M},\tau)\ \ L^p(\mathcal{M},\tau)_+\right)$是 S_1^p 上的一个函数系统，这归功于定理 4.2。

若 $p=2$，则范数对偶空间 $L^2(\mathcal{M},\tau)^*$ 与共轭空间$L^2(\mathcal{M},\tau)$在典范意义下等同；对每个 $y\in L^2(\mathcal{M},\tau)_{he}^*$，我们都有正交展开 $y=y_0+\tau(e)^{-1}e$，其中$y_0\perp e$（或 $\tau(y)=0$）。于是 $\|y\|_2^2=\|y_0\|_2^2+\tau(e)^{-1}$，并且 $y\in S_1^2$ 当且仅当 $\|y_0\|_2\leq((\tau(e)-1)/\tau(e))^{1/2}$。因此

$$\begin{aligned}S_1^2&=\left((\tau(e)-1)/\tau(e)\right)^{1/2}\operatorname{ball}L^2(\mathcal{M},\tau)_h^e+\tau(e)^{-1}e\\&=\tau(e)^{-1/2}\left((\tau(e)-1)^{1/2}\operatorname{ball}L^2(\mathcal{M},\tau)_h^e+e_2\right),\end{aligned}$$

其中 $L^2(\mathcal{M},\tau)_h^e=\{w\in L^2(\mathcal{M},\tau)_h\colon\ \tau(w)=0\}$是 $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 中与 e 正交的实向量子空间，而 $e_2=\tau(e)^{-1/2}e$是 $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 的单位向量。因此，$x\in L^2(\mathcal{M},\tau)_+$具有正交归一展开 $x=x_0+(x,e_2)\ e_2$当且仅当 $\left(x,(\tau(e)-1)^{1/2}\text{球 }L^2(\mathcal{M},\tau)_h^e+e_2\right)\geq 0$，这等价于

$$\begin{aligned}&(\tau(e)-1)^{1/2}\|x_0\|_2=(\tau(e)-1)^{1/2}\left(\vee\left|\left(x_0,\operatorname{ball}L^2(\mathcal{M},\tau)_h^e\right)\right|\right)\leq(x,e_2)\\&\quad\text{or }\ \|x_0\|_2\leq(\tau(e)-1)^{-1/2}(x,e_2).\end{aligned}$$

因此 $L^2(\mathcal{M},\tau)_+=\mathfrak{C}_\tau$。如果我们在 $\varepsilon=(2/\tau(e))^{1/2}>1/\sqrt{\tau(e)}$ 中选择 S_ε^2而不是 S_1^2，那么如定理 4.2 的证明所示，射影正性恰好可归结为来自含单位元的希尔伯特 $*$-空间 $(L^2(\mathcal{M},\tau)\ \ e_2)$ 的情形。

最后，我们证明态空间 $S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)$的等式，它是$\mathcal{M}_h$的一个凸子集。假设 $y\in\mathcal{M}_h$ 可展开为 $y=(1+r)\ z-rw$，其中 $z,w\in S_\tau$, $zw=0$和$\|z+r(z+w)\|\leq 1$。那么 $\tau(y)=(1+r)\ \tau(z)-r\tau(w)=1+r-r=1$, $|y|=(1+r)z+rw$和$\|y\|=\||y|\|=\|z+r(z+w)\|\leq 1$，也就是说，$y\in S_1^1$。反过来，取 $y\in S_1^1$。利用 y在 $\mathcal{M}$中的谱分解，我们可推出 $y=y_+-y_-=\tau(y_+)z-\tau(y_-)w$，其中 $z,w\in S_\tau$且 $\tau(y_+)-\tau(y_-)=1$。若 $r=\tau(y_-)$，则 $y=(1+r)\ z-rw$，其中 z, $w\in S_\tau$, $zw=0$和$\|z+r(z+w)\|=\||y|\|=\|y\|\leq 1$。因此

$$S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)=\{(1+r)z-rw:z,w\in S_\tau,zw=0,\|z+r(z+w)\|\leq 1\}.$$

取 $y\in S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)$，使得 $(1+r)\ z+rw=|y|\leq e$。于是 $1+2r=(1+r)\ \tau(z)+r\tau(w)=\tau(|y|)\leq\tau(e)$，或者 $r\leq(\tau(e)-1)/2$。考虑到典范嵌入 $L^1(\mathcal{M},\tau)\subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)^{**}=\mathcal{M}^*$和 $S_\tau\subseteq S_*(\mathcal{M}_+)\subseteq S(\mathcal{M}_+)\subseteq\mathcal{M}^*$，我们可推出

$$\begin{aligned}S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)&\subseteq\{(1+r)z-rw:z,w\in S_\tau,0\leq r\leq(\tau(e)-1)/2\}\\&\subseteq\{(1+r)\phi-r\psi:\phi,\psi\in S(\mathcal{M}_+),0\leq r\leq(\tau(e)-1)/2\}\\&=S\left(\mathcal{M}_{\tau(e)}^+\right)\subseteq S\left(\mathcal{M}_\varepsilon^+\right)\end{aligned}$$

根据引理 3.1，对所有 $\varepsilon \geq \tau(e)$ 均成立。特别地，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+} &= \left\{x \in \mathcal{M}_h : \left\langle x, S\left(\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+}\right)\right\rangle \geq 0\right\} \subseteq \left\{x \in \mathcal{M}_h : \left\langle x, S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)\right\rangle \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{M}_h : \tau\left(xS\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)\right) \geq 0\right\} = L^1(\mathcal{M},\tau)_+ \cap \mathcal{M},\end{aligned}$$

也就是说，对于所有 $\varepsilon \geq \tau(e)$，$\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)_+ \cap \mathcal{M}$。 □

注 6.1. 注意，每个态 $y = (1+r)\, z - rw \in S\left(L^1(\mathcal{M},\tau)_+\right)$的谱都可以用密度元 $z, w \in S_{\tau}$，$zw = 0$和 $\|z + r(z+w)\| \leq 1$来描述。由于 $wz = (zw)^* = 0 = zw$，可以使用联合谱映射定理 [20]。即，$\sigma(y) = \{(1+r)\lambda - r\mu : (\lambda,\mu) \in \sigma(z,w)\}$，其中 $\sigma(z,w)$ 是对易元素 z 和 w的联合泰勒谱；在矩阵代数 $\mathcal{M} = M_n$ 的情况下，它退化为联合点谱 [3] （见定理 6.1）。但是 $\{0\} = \sigma(zw) = \{\lambda\mu : (\lambda,\mu) \in \sigma(z,w)\}$，因此对每个非零的 $\lambda \in \sigma(z)$，都有 $(\lambda, 0) \in \sigma(z,w)$，且 $(1+r)\lambda = (1+r)\lambda - r0 \in \sigma(y)$。类似地，对每个非零的 $\mu \in \sigma(w)$，都有 $-r\mu \in \sigma(y)$。因此 $\sigma(y) = (1+r)\sigma(z) \cup (-r)\sigma(w)$，并且$\sigma(|y|) = (1+r)\sigma(z) \cup r\sigma(w)$。

定理 6.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限冯·诺依曼代数，其单位元为 e，并带有忠实有限正规迹 τ，使得 $\tau(e) > 1$。若 $1 \leq p < l \leq \infty$，则对所有 $\varepsilon \geq \tau(e)^{(l-p)/lp}$，有 $L^l(\mathcal{M},\tau)_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_+$。因此

$$\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_r^{+} \subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)_+, \quad \varepsilon\tau(e)^{-1/p} \geq r \geq \tau(e)^{1/q}.$$

特别地，只要 $\varepsilon \geq \tau(e)^{1/p}$，就有 $\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_+$。

证明. 固定 $1 \leq p < l \leq \infty$ 以及相关的共轭指数对 (p,q) 和 (l,m)，其中 $1 \leq m < q \leq \infty$。由命题 6.1 可知，每个 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 都是一个配有锥$L^p(\mathcal{M},\tau)_+$（对应于 $\varepsilon = 1 > 1/\|e\|_p$）的函数系统。利用 (6.4)，我们推得球 $L^q(\mathcal{M},\tau) \subseteq \tau(e)^{(q-m)/qm}$球 $L^m(\mathcal{M},\tau)$，$L^l(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)$，并且

$$S_1^p = L^p(\mathcal{M},\tau)_{he}^{*} \cap \operatorname{ball} L^q(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^l(\mathcal{M},\tau)_{he}^{*} \cap \varepsilon \operatorname{ball} L^m(\mathcal{M},\tau) = S_{\varepsilon}^l$$

对所有 $\varepsilon \geq \tau(e)^{(q-m)/qm} = \tau(e)^{(l-p)/lp} \geq 1$ 均成立。因此，对所有$\varepsilon \geq \tau(e)^{(l-p)/lp}$，有 $L^l(\mathcal{M},\tau)_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_+$。若 $l = \infty$，则由命题 6.1 得 $L^{\infty}(\mathcal{M},\tau)_{\varepsilon}^{+} = \mathcal{M}_{\varepsilon}^{+}$，且 $(l-p)/lp = 1/p$。特别地，对所有 $\varepsilon \geq \tau(e)^{1/p}$，有 $\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_+$。

最后，对每个 $\varepsilon \geq \tau(e)$，取满足 $\varepsilon\tau(e)^{-1/p} \geq r \geq \tau(e)^{1/q}$ 的 r。再次利用 (6.4)，可推出球 $L^{\infty}(\mathcal{M},\tau) \subseteq \tau(e)^{1/q}$球 $L^q(\mathcal{M},\tau)$，球 $L^q(\mathcal{M},\tau) \subseteq \tau(e)^{(q-1)/q}$球 $L^1(\mathcal{M},\tau)$，且 $L^{\infty}(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)$。因此

$$\begin{aligned}S_1^1 &= L^1(\mathcal{M},\tau)_{he}^{*} \cap \operatorname{ball} L^{\infty}(\mathcal{M},\tau) \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_{he}^{*} \cap r \operatorname{ball} L^q(\mathcal{M},\tau) = S_r^p \\ &\subseteq L^{\infty}(\mathcal{M},\tau)_{he}^{*} \cap r\tau(e)^{1/p} \operatorname{ball} L^1(\mathcal{M},\tau) \subseteq \mathcal{M}_{he}^{*} \cap \varepsilon \operatorname{ball} L^1(\mathcal{M},\tau) \\ &\subseteq \mathcal{M}_{he}^{*} \cap \varepsilon \operatorname{ball} \mathcal{M}^{*} = S_{\varepsilon}^{\infty},\end{aligned}$$

进而可推出 $\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+} \subseteq L^p(\mathcal{M},\tau)_r^{+} \subseteq L^1(\mathcal{M},\tau)_+$。 □

6.3. 总结性评论。1. 正如我们在上文第 5 节所见，除了有限维情形外，（交换）连续函数空间的射影 L^p锥与原始锥不可比较。有限冯·诺依曼代数的情形也是如此。注意，包含关系 $L^1(\mathcal{M},\tau)_+ \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_+$ 可能并不成立（见定理 5.1）。下面的具体例子很有意思。设 $\mathcal{M} = L^{\infty}[0,2]$ 是

配备迹 $\tau(x)=\int_0^2 x(t)\ dt$的紧区间 $[0,2]$ 上的勒贝格测度 dt。注意， $e=1\in L^1[0,2]$、$\|e\|_1=\int dt=2>1$，以及

$$S_\varepsilon^1=\left\{y\in\varepsilon\,\mathrm{ball}\,L^\infty[0,2]_h:\int ydt=1\right\}$$

对 $\varepsilon\geq 1$。对于每个 $0<r\leq -2^{-1}+\sqrt{1/\varepsilon+1/4}$，定义 $x=-r[0,r]+[r,2]\in L^1[0,2]$。如果 $y\in S_\varepsilon^1$，那么对于几乎所有 t， $|y(t)|\leq\varepsilon$，并且

$$\begin{aligned}\tau(xy)&=-r\int_0^r ydt+\int_r^2 ydt=-r\int_0^r ydt+1-\int_0^r ydt=1-(1+r)\int_0^r ydt\\&\geq 1-(1+r)\int_0^r\varepsilon dt=1-\varepsilon r-\varepsilon r^2\geq 0.\end{aligned}$$

因此 $x\in L^1[0,2]_+\cap L^\infty[0,2]$，而 $x\notin L^\infty[0,2]_+$。因此，本质有界的 $L^1[0,2]_+$-正函数可能在一个正测度集合上取负值。

2. 射影正性使我们能够定义算子系统和以及算子系统的射影张量积。

7. Appendix: Functionals on operator systems

本节为本文补充有关算子系统的材料。

7.1. 算子系统上的正泛函。设 V 是希尔伯特空间 H 上的算子系统 V。令 $V_h^2=V_h\times V_h$，其子集为 $V_+^2=V_+\times V_+$。对于 $a\in V_h^2$、 $b\in V$ 和 $\varepsilon>0$，我们定义 $a+\varepsilon=(a_1+\varepsilon e,a_2+\varepsilon e)\in V_h^2$，并且

$$x(a,b)=\begin{bmatrix}a_1 & b\\ b^* & a_2\end{bmatrix}\in M_2(V)_h\subseteq\mathcal{B}\left(H^2\right).$$

若 $a\in V_+^2$，我们采用记号 $x_{a,\ \varepsilon,\ b}=(a_1+\varepsilon e)^{-1/2}b(a_2+\varepsilon e)^{-1/2}\in\mathcal{B}(H)$。以下 Paulsen技巧广为人知。

引理 7.1. 矩阵 $x(a,b)$ 为正，当且仅当 $a\in V_+^2$ 且 $x_{a,\ \varepsilon,\ b}\in$ 球 $\mathcal{B}(H)$ 对所有 $\varepsilon>0$ 都成立。

证明。若 $x(a,b)\in M_2(V)_+$，则 $a_i=\epsilon_i x(a,b)\epsilon_i^*\in V_+$，并且对所有 $\varepsilon>0$ 均有 $a+\varepsilon\in V_+^2$，其中$\epsilon_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$、 $\epsilon_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$。特别地， $x\left((a+\varepsilon)^{-1/2},\ 0\right)=(a_1+\varepsilon e)^{-1/2}\oplus(a_2+\varepsilon e)^{-1/2}\geq 0$，并且 $x(a+\varepsilon,b)=x(a,b)+\varepsilon(e\oplus e)\geq 0$。由此可得

$$\begin{bmatrix}e & x_{a,\varepsilon,b}\\ x_{a,\varepsilon,b}^* & e\end{bmatrix}=x\left((a+\varepsilon)^{-1/2},0\right)x(a+\varepsilon,b)\,x\left((a+\varepsilon)^{-1/2},0\right)\geq 0,$$

这意味着 $\|x_{a,\ \varepsilon,\ b}\|\leq 1$ （见 [8, 1.3.2]）。反过来，如果 $a\in(V_+)^2$ 且 $x_{a,\ \varepsilon,\ b}\in$ 球 $\mathcal{B}(H)$，那么如上所述

$$x(a+\varepsilon,b)=x\left((a+\varepsilon)^{1/2},0\right)\begin{bmatrix}e & x_{a,\varepsilon,b}\\ x_{a,\varepsilon,b}^* & e\end{bmatrix}x\left((a+\varepsilon)^{1/2},0\right)\geq 0$$

对所有 $\varepsilon>0$ 均成立。通过连续性论证，我们推出 $x(a,b)\geq 0$。 □

推论 7.1. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ 和 $\beta\in\mathbb{C}$。那么

$$x(\alpha,\beta)\in M_{2,+}\Longleftrightarrow\alpha\in\mathbb{R}_+^2\ and\ |\beta|\leq\alpha_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}.$$

证明。根据引理 7.1， $x(\alpha,\beta)\in M_{2,\ +}$ 当且仅当 $\alpha\in\mathbb{R}^2_+$ 和 $|x_{\alpha,\ \varepsilon,\ \beta}|\leq 1$ 对所有 $\varepsilon>0$ 成立。后者意味着，对所有 $\varepsilon>0$， $|\beta|\leq(\alpha_1+\varepsilon 1)^{1/2}(\alpha_2+\varepsilon 1)^{1/2}$。因此 $|\beta|\leq\alpha_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}$。□

根据推论 7.1，我们可以给出柯西-施瓦茨不等式一个更简洁的证明。

推论 7.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元的 C^*代数，且 $\mu\colon\ \mathcal{A}\to\mathbb{C}$ 是一个正泛函。则

$$|\mu(a_1^*a_2)|\leq\mu(a_1^*a_1)^{1/2}\,\mu(a_2^*a_2)^{1/2}$$

对所有 a_1、 $a_2\in\mathcal{A}$均成立。

证明. 令 $\alpha=(\mu(a_1^*a_1)\ \ \mu(a_2^*a_2))\in\mathbb{R}^2_+$ 且 $\beta=\mu(a_1^*a_2)$。则 $x(\alpha,\beta)\in M_2=\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$，并且

$$(x(\alpha,\beta)\zeta,\zeta)=\sum_{i,j}\mu(a_i^*a_j)\,\zeta_i^*\zeta_j=\mu\left((a_1\zeta_1+a_2\zeta_2)^*(a_1\zeta_1+a_2\zeta_2)\right)\geq 0$$

对所有 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbb{C}^2$。因此 $x(\alpha,\beta)\in M_{2,\ +}$。利用推论 7.1，我们得出 $|\mu(a_1^*a_2)|=|\beta|\leq\alpha_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}=\mu(a_1^*a_1)^{1/2}\,\mu(a_2^*a_2)^{1/2}$。□

现在考虑定义了正泛函的算子系统的情形。

引理 7.2。设 $\mu\colon\ V\to\mathbb{C}$ 为一个线性泛函。那么 μ 为正当且仅当 $\|\mu\|=\langle e,\mu\rangle$。

证明。假设 μ 为正。由于 $-e\leq$球 $V_h\leq e$，可知 $\|\mu\|=\vee|\langle$球 $V_h,\mu\rangle|\leq\langle e,\mu\rangle\leq\|\mu\|$，由 (2.1) 得。故 $\|\mu\|=\langle e,\mu\rangle$。

反过来，设 $\|\mu\|=\langle e,\mu\rangle\neq 0$。取 $x\in V_h$。考虑到只要 $-r\leq\gamma\leq r$，就有 $|\gamma-it|\leq\sqrt{r^2+t^2}$, $t\in\mathbb{R}$，我们便得出 $\|x+ine\|^2\leq\|x\|^2+n^2$（只需利用由 x 生成的含单位元的 C^*-代数到谱 $\sigma(x)$ 上的 C^*-代数 $C(\sigma(x))$ 的局部同构）。于是

$$\begin{aligned}
2n\,|\mathrm{Im}\,\langle x,\mu\rangle| &= 2n\,\|\mu\|\,|\mathrm{Im}\,\langle x,\mu\rangle|\,\|\mu\|^{-1}\leq\left(|\langle x,\mu\rangle|^2+2n\,\|\mu\|\,|\mathrm{Im}\,\langle x,\mu\rangle|\right)\|\mu\|^{-1}\\
&=\left((\mathrm{Re}\,\langle x,\mu\rangle)^2+(\mathrm{Im}\,\langle x,\mu\rangle+n\,\|\mu\|)^2-n^2\,\|\mu\|^2\right)\|\mu\|^{-1}\\
&=|\langle x,\mu\rangle+in\,\|\mu\||^2\,\|\mu\|^{-1}-n^2\,\|\mu\|=|\langle x,\mu\rangle+in\,\langle e,\mu\rangle|^2\,\|\mu\|^{-1}-n^2\,\|\mu\|\\
&=|\langle x+ine,\mu\rangle|^2\,\|\mu\|^{-1}-n^2\,\|\mu\|\\
&\leq\|x+ine\|^2\,\|\mu\|-n^2\,\|\mu\|\leq\left(\|x\|^2+n^2\right)\|\mu\|-n^2\,\|\mu\|=\|x\|^2\,\|\mu\|,
\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{Im}\ \langle x,\mu\rangle=0$。因此 $\langle V_h,\mu\rangle\subseteq\mathbb{R}$，也就是说，只要 $x\in V_h$且 $-e\leq x\leq e$，就有 $\mu=\mu^*$和 $-\langle e,\mu\rangle\leq\langle x,\mu\rangle\leq\langle e,\mu\rangle$。取 $y\in V_+$, $0\leq y\leq e$。于是对 $x=2y-e\in V_h$，有 $-e\leq x\leq e$，进而推出 $\langle y,\mu\rangle=2^{-1}(\langle x,\mu\rangle+\langle e,\mu\rangle)\geq 0$，也就是说， μ 是正的。□

7.2. 厄米泛函的正交展开。对于紧豪斯多夫拓扑空间 $\mathcal{T}$ 上的 $V=C(\mathcal{T})$，我们有 $V^*=M(\mathcal{T})$是 $\mathcal{T}$ 上所有拉东电荷构成的空间。实向量空间 $M(\mathcal{T})_h$ 实际上是一个完备格 [21, 4。2 定理 18]。特别地，每个 $\mu\in M(\mathcal{T})_h$ 都有正交（唯一）展开 $\mu=\mu_+-\mu_-$，可表示为拉东测度之差 $\mu_+,\mu_-\in M(\mathcal{T})_+$，满足 $\mu_+\wedge\mu_-=0$ 和 $\|\mu\|=\|\mu_+\|+\|\mu_-\|$。对于算子系统 V 和 $\mu\in V_h^*$，若存在某些 $\mu_1,\mu_2\in V_+^*$ 使得 $\|\mu\|=\|\mu_1\|+\|\mu_2\|$，我们就称 μ 有正交展开。下文将证明此类展开的存在性。

引理 7.3. 设 V是一个算子系统，并且令 $\mu\in V_h^*$、 $\mu=\mu_1-\mu_2$满足 μ_1、 $\mu_2\in V_+^*$。那么，$\mu=\mu_1-\mu_2$是正交展开，当且仅当对于每个 $\varepsilon>0$，都存在相应的 $y\in$球 V_+，使得$\langle e-y$、 $\mu_1\rangle<\varepsilon$以及 $\langle y$、 $\mu_2\rangle<\varepsilon$。

证明. 假设 $\mu=\mu_1-\mu_2$ 是正交展开。利用引理 7.2，我们可推得

$$\mu_1(e)+\mu_2(e)-\varepsilon=\|\mu_1\|+\|\mu_2\|-\varepsilon=\|\mu\|-\varepsilon\leq\mu_1(x)-\mu_2(x)$$

对于某个 $x\in$ 球V_h，即 $\mu_1(e-x)+\mu_2(e+x)\leq\varepsilon$。但是 $0\leq e-x\leq 2e$ 和 $0\leq e+x\leq 2e$，因此 $y=2^{-1}(e+x)\in$ 球 V_+，$e-y=2^{-1}(e-x)\in$ 球 V_+ 且 $0\leq\mu_1(e-y)+\mu_2(y)\leq 2^{-1}\varepsilon<\varepsilon$。

反过来，假设上述性质对展开 $\mu=\mu_1-\mu_2$成立。取 $\varepsilon>0$及相关的 $y\in$ 球V_+。由于 $-e\leq 2y-e\leq e$，由引理 7.2 可得

$$\begin{aligned}\|\mu_1\|+\|\mu_2\|&=\mu_1(e)+\mu_2(e)=\mu_1(2y-e)+2\mu_1(e-y)+\mu_2(e-2y)+2\mu_2(y)\\&<\mu_1(2y-e)+\mu_2(e-2y)+4\varepsilon=\mu(2y-e)+4\varepsilon\leq\|\mu\|+4\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\|\mu_1\|+\|\mu_2\|\leq\|\mu\|$，这意味着 $\mu=\mu_1-\mu_2$ 是一个正交展开。 □

推论 7.3. 设 $\mathcal{A}$ 是含单位元的 C^*-代数，且 $\mu\in\mathcal{A}_h^*$。μ 的正交展开是唯一的。

证明。设 $\mu=\mu_1-\mu_2=\tau_1-\tau_2$ 是 μ 的正交展开。由引理 7.3，对于 $\varepsilon>0$，存在一个 $y\in$ 球$\mathcal{A}_+$，使得 $\mu_1(e-y)<\varepsilon$ 且 $\mu_2(y)<\varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}\tau_1(y)&\geq\tau_1(y)-\tau_2(y)=\mu_1(y)-\mu_2(y)>\mu_1(e)-\varepsilon-\mu_2(y)>\mu_1(e)-2\varepsilon,\\\tau_2(e-y)&\geq\tau_2(e-y)-\tau_1(e-y)=\mu_2(e-y)-\mu_1(e-y)>\mu_2(e)-2\varepsilon.\end{aligned}$$

由引理 7.2，我们可推出

$$\begin{aligned}\tau_1(y)+\tau_2(e-y)&>\mu_1(e)+\mu_2(e)-4\varepsilon=\|\mu_1\|+\|\mu_2\|-4\varepsilon=\|\tau_1\|+\|\tau_2\|-4\varepsilon\\&=\tau_1(e)+\tau_2(e)-4\varepsilon,\end{aligned}$$

也就是说，$\tau_1(e-y)+\tau_2(y)<4\varepsilon$。因此，$\mu_1(e-y)<\varepsilon$、$\mu_2(y)<\varepsilon$、$\tau_1(e-y)<4\varepsilon$ 以及 $\tau_2(y)<4\varepsilon$。利用推论 7.2，我们可推出

$$\begin{aligned}|\mu_2(xy)|&\leq\mu_2(xx^*)^{1/2}\mu_2\left(y^2\right)^{1/2}\leq\|\mu_2\|^{1/2}\|x\|\mu_2(y)^{1/2}\leq\|\mu\|^{1/2}\varepsilon^{1/2},\\|\tau_2(xy)|&\leq\|\tau_2\|^{1/2}\|x\|\tau_2(y)^{1/2}\leq\|\mu\|^{1/2}2\varepsilon^{1/2},\\|\mu_1(x(e-y))|&\leq\|\mu_1\|^{1/2}\|x\|\mu_1(e-y)^{1/2}\leq\|\mu\|^{1/2}\varepsilon^{1/2},\\|\tau_1(x(e-y))|&\leq\|\tau_1\|^{1/2}\|x\|\tau_1(e-y)^{1/2}\leq\|\mu\|^{1/2}2\varepsilon^{1/2}\end{aligned}$$

对所有 $x\in$ 球$\mathcal{A}$ 均成立。但 $\mu_1-\tau_1=\mu_2-\tau_2$，因此

$$\begin{aligned}\mu_1(x)-\tau_1(x)&=\mu_1(xy)-\tau_1(xy)+\mu_1(x(e-y))-\tau_1(x(e-y))\\&=\mu_2(xy)-\tau_2(xy)+\mu_1(x(e-y))-\tau_1(x(e-y)).\end{aligned}$$

由此可得 $|\mu_1(x)-\tau_1(x)|\leq 6\|\mu\|^{1/2}\varepsilon^{1/2}$。因此 $\mu_1=\tau_1$ 和 $\mu_2=\tau_2$。 □

现在我们可以证明算子系统（或非交换）版本的正交展开结果，该结果针对算子系统上的厄米泛函。

定理 7.1. 设 V是一个算子系统，并设$\mu\in V_h^*$。那么 μ 有一个正交展开 $\mu=\mu_+-\mu_-$, $\mu_+,\mu_-\in V_+^*$，$\|\mu\|=\|\mu_+\|+\|\mu_-\|$，但该展开不一定唯一。若 $V=\mathcal{A}$是一个含单位元的 C^*-代数，则每个 $\mu\in\mathcal{A}_h^*$ 都有唯一的正交展开。

证明。设$\mu\in V_h^*$。由推论 2.1 和命题 2.1，μ 在等距映射意义下可视为 $\Phi(V,\|\cdot\|_e)$ 上的厄米泛函。由 Hahn-Banach 延拓定理，存在一个泛函 $\tau\in M(S(V_+))$，$\|\tau\|=\|\mu\|$ 使得 $\tau\Phi=\mu$。但是

$$\langle\Phi(x),\tau^*\rangle=\langle\Phi(x)^*,\tau\rangle^*=\langle\Phi(x^*),\tau\rangle^*=\langle x^*,\mu\rangle^*=\langle x,\mu^*\rangle=\langle x,\mu\rangle=\langle\Phi(x),\tau\rangle$$

对所有 $x \in V$ 均成立。因此，对所有 $x \in V$，有 $\langle \Phi(x),\ \mathrm{Re}\ \tau\rangle = \langle \Phi(x)\ \ \tau\rangle = \langle x,\ \ \mu\rangle$，并且由推论 2.1 可得 $\|\mu\| \le \|\mathrm{Re}\ \tau\| \le \|\tau\| = \|\mu\|$。因此，我们可以假设 $\tau \in M(S(V_+))_{h}$。但是 $\tau = \tau_+ - \tau_-$ 且 $\tau_+,\ \ \tau_- \in M(S(V_+))_+$ 并且 $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$。令 $\mu_+ = \tau_+\Phi$ 和 $\mu_- = \tau_-\Phi$。那么 $\mu_+,\ \ \mu_- \in V_+^*$ 且 $\mu = \tau\Phi = \tau_+\Phi - \tau_-\Phi = \mu_+ - \mu_-$。由引理 7.2，我们推得

$$\|\mu_+\| + \|\mu_-\| = \langle e, \mu_+\rangle + \langle e, \mu_-\rangle = \langle 1, \tau_+\rangle + \langle 1, \tau_-\rangle = \|\tau_+\| + \|\tau_-\| = \|\tau\| = \|\mu\|.$$

因此，μ 有正交展开 $\mu = \mu_+ - \mu_-$、$\|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\|$。

现在举例说明算子系统上一个厄米泛函的不同正交展开。设 $v_{a,\ b}^{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ b^* & \lambda \end{bmatrix}$ 是 2×2 上的 $\mathbb{C}$-矩阵。若 $b = a$，我们用 v_a^{λ} 代替 $v_{a,\ a}^{\lambda}$。注意，$v_a^{\lambda} = x(\lambda, a)$。令

$$v_{a,b}^{\lambda,\theta} = v_{a,b}^{\lambda} \oplus v_{a,b}^{\theta} = \begin{bmatrix} \lambda & a & 0 & 0 \\ b^* & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & a \\ 0 & 0 & b^* & \theta \end{bmatrix} \in M_4$$

并且 $V = \left\{ v^{\lambda,\ \theta}_{a\ b,\ b^{\theta^*},\ a} :\ \ \lambda、\ \theta、\ a、\ b \in \mathbb{C} \right\}$，它是 M_4 的含单位元子空间。注意，$\left(v_{a,b}^{\lambda,\theta}\right)^* = v^{\lambda^*,}_{\ b\ \ \theta^*,\ a} \in V$，也就是说，$V$ 是 $\mathbb{C}^4$ 上的一个算子系统。V 中所有厄米元素构成的实向量空间由矩阵 $v^{\lambda,\ \theta}_{\ a,\ a} = v_a^{\lambda} \oplus v_a^{\theta}$、$\lambda、\ \theta \in \mathbb{R}$ 组成。注意，根据推论 7.1，$v^{\lambda,\ \theta}_{\ a,\ a} \ge 0$ 当且仅当 $|a| \le \lambda$ 且 $|a| \le \theta$。定义以下正线性泛函

$$\mu_1, \mu_2 : V \to \mathbb{C}, \quad \left\langle v_{a,b}^{\lambda,\theta}, \mu_1 \right\rangle = \lambda, \quad \left\langle v_{a,b}^{\lambda,\theta}, \mu_2 \right\rangle = \theta,$$

并令 $\mu = \mu_1 - \mu_2$。注意，$\|\mu_i\| = \langle e, \mu_i\rangle = \left\langle v^{1,\ 1\,0},\ \ \mu_i \right\rangle = 1$ 以及 $\|\mu\| \le \|\mu_1\| + \|\mu_2\| = 2$。但是 $\left\langle v^{\lambda,\ a\ b^{\theta}_{,}},\ \ \mu \right\rangle = \lambda - \theta$ 以及 $2 = \left\langle v^{1,\ }_{\ 0}{}^{-1}, \mu \right\rangle \le \|\mu\| \left\| v^{1,\ }_{\ 0}{}^{-1} \right\| = \|\mu\|$。因此 $\|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$，这意味着 $\mu = \mu_1 - \mu_2$ 是 μ的正交展开。此外，定义以下线性泛函

$$\tau_1, \tau_2 : V \to \mathbb{C}, \quad \left\langle v_{a,b}^{\lambda,\theta}, \tau_1 \right\rangle = \lambda + a, \quad \left\langle v_{a,b}^{\lambda,\theta}, \tau_2 \right\rangle = \theta + a.$$

若 $v^{\lambda,\ \theta}_{\ a,\ a} \ge 0$，则 $\lambda + a \ge 0$ 且 $\theta + a \ge 0$，这意味着 τ_1 和 τ_2 是正泛函。特别地，$\|\tau_i\| = \langle e, \tau_i\rangle = \left\langle v^{1,\ }_{\ 1\,0},\ \ \tau_i \right\rangle = 1$。但是

$$\left\langle v_{a,b}^{\lambda,\theta}, \tau_1 - \tau_2 \right\rangle = (\lambda + a) - (\theta + a) = \lambda - \theta = \left\langle v_{a,b}^{\lambda,\theta}, \mu \right\rangle,$$

也就是说，$\mu = \tau_1 - \tau_2$ 是另一个正交展开。

最后，设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元的 C^*-代数，且 $\mu \in \mathcal{A}_h^*$。正如我们刚才所看到的，μ 有一个正交展开 $\mu = \mu_+ - \mu_-,\ \ \mu_+,\ \ \mu_- \in \mathcal{A}_+^*,\ \ \|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\|$。根据推论 7.3，此类展开的唯一性显而易见。□

7.3. 极点。回顾一下，向量空间 X 的凸子集 $\mathcal{C} \subseteq X$ 中的极点，是指 $\mathcal{C}$ 中不能表示为 $\mathcal{C}$ 中元素的非平凡凸组合的点。$\mathcal{C}$ 的所有极点构成的集合称为 $\mathcal{C}$ 的极端边界，记作 $\partial\mathcal{C}$。众所周知的克莱因-米尔曼定理（参见 [19, 2.5.4]）断言，对于配备了对偶对 (X, Y) 的弱拓扑 $\sigma(X, Y)$ 的向量空间 X 中的凸紧子集 $\mathcal{C}$，$\partial\mathcal{C}$ 的凸包 $\mathrm{co}\,(\partial\mathcal{C})$ 在 $\mathcal{C}$ 中弱稠密，即 $\mathcal{C} = \mathrm{co}\,(\partial\mathcal{C})^{-w}$。

如上，设 $\mathcal{T}$ 为紧豪斯多夫拓扑空间。不难看出，$\mathrm{ball}\, C(\mathcal{T})$ 的极端边界由酉函数组成，也就是说，

$$\partial\, \mathrm{ball}\, C(\mathcal{T}) = \{f \in C_0(\mathcal{T}) : |f| = 1\}. \tag{7.1}$$

事实上，取 $f\in\text{ball }C(\mathcal{T})$。若 $|f(t_0)|<1$ 对某个 $t_0\in\mathcal{T}$ 成立，则 $\alpha=\sup|f(U)|<1$ 在 t_0 的某个紧邻域 U 上成立，并且我们可以选取 $h\in C(\mathcal{T})$，使得 $0\leq h\leq 1, h(t_0)=1$ 且 $\text{supp}\,h\subseteq U$（见 [19, 1.7.5]）。令 $g=(1-\alpha)h$。于是 $f\pm g\in\text{ball }C(\mathcal{T})$ 且 $f=\frac{1}{2}((f+g)+(f-g))$，也就是说，$f\notin\partial\text{ball}\,C(\mathcal{T})$。反过来，若 f 是酉函数，且对某个 g 有 $f=\frac{1}{2}(g+h)$，$h\in\text{ball }C(\mathcal{T})$，那么 $f(t)$ 是 $\mathbb{C}$ 中单位圆的极端点，因此 $g(t)=h(t)$，也就是说，$f\in\partial\text{ball }C(\mathcal{T})$。

现在考虑正函数构成的锥 $C(\mathcal{T})_+$。那么 ∂ 球 $C(\mathcal{T})_+$ 由连续函数空间 $C(\mathcal{T})$ 中的投影构成，即

$$\partial\,\text{ball}\,C(\mathcal{T})_+=\{[S]:S\subseteq\mathcal{T}\text{ is an open compact}\},\tag{7.2}$$

其中 $[S]$ 是子集 S 的特征函数。事实上，若对某个 g 有 $[S]=\frac{1}{2}(g+h)$，且 $h\in$ 属于连续函数空间 $C(\mathcal{T})_+$，那么对所有 $t\in\mathcal{T}-S$ 都有 $g(t)=h(t)=1$，并且 $0\leq g(t)=h(t)=0$，也就是说，$g=h=[S]$ 且 $[S]\in\partial$ 属于球 $C(\mathcal{T})_+$。反过来，取 $f\in\partial$ 球 $C(\mathcal{T})_+$。若对某个 $t_0\in\mathcal{T}$ 有 $0<f(t_0)<1$，那么如上所述，选取函数 $h\in$，使其属于球 $C(\mathcal{T})_+$，并取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $f(1\pm\varepsilon h)\in$ 属于球 $C(\mathcal{T})_+$。但是 $f=\frac{1}{2}(f(1+\varepsilon h)+f(1-\varepsilon h))$，这是不可能的。因此，$f$ 只能取值 0 或 1，也就是说，$f=[S]$ 是某个既开又闭子集 $S\subseteq\mathcal{T}$ 的特征函数。

对于一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$，我们有如下非平凡结果：∂ 球 $\mathcal{A}\neq\varnothing$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 含单位元。证明细节从略。

现在，设 $P(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{T}$ 上概率测度在 $M(\mathcal{T})$ 中的一个凸子集。回忆一下，$\mathcal{T}$ 上的拉东测度 $\mu\in M(\mathcal{T})$ 称为概率测度，如果 $\|\mu\|\leq 1$ 且 $\langle 1,\mu\rangle=1$。由引理 7.2，我们推得

$$P(\mathcal{T})=\{\mu\in\text{ball}\,M(\mathcal{T}):\|\mu\|=\langle 1,\mu\rangle=1\}=S\left(C(\mathcal{T})_+\right)$$

是锥 $C(\mathcal{T})_+$ 的态空间。特别地，$P(\mathcal{T})$ 是一个凸的、w^*-紧集，其中包含所有满足 $c_t\geq 0$ 且 $\sum_{t\in S}c_t=1$ 的原子测度 $\mu=\sum_{t\in S}c_t\delta_t$。注意，每个这样的 μ 都是 $\mathcal{T}$ 上具有有限支撑的正原子测度的范数极限。

命题 7.1. 等式 $\partial P(\mathcal{T})=\{\delta_t:t\in\mathcal{T}\}$ 成立。特别地，$P(\mathcal{T})$ 由那些 $\mu\in M(\mathcal{T})_+$ 构成，它们是满足 $c_t\geq 0,\sum_{t\in F}c_t=1$ 且 $F\subseteq\mathcal{T}$ 为有限子集的 $\sum_{t\in F}c_t\delta_t$ 的 w^*-极限。特别地，

$$P(\mathcal{T})=\text{co}\left(\{\delta_t:t\in\mathcal{T}\}\right)^{-w^*}\quad and\quad \text{ball}\,M(\mathcal{T})=\left(\text{abs}\left(\partial P(\mathcal{T})\right)\right)^{-w^*}.$$

证明。首先证明对每个 t，都有 $\delta_t\in\partial P(\mathcal{T})$。若对于某个 μ，有 $\delta_t=r\mu+(1-r)\tau$，且 $\tau\in P(\mathcal{T})$ 和 $0<r<1$，那么 $r|\langle f,\mu\rangle|\leq r\langle|f|,\mu\rangle=\langle|f|,r\mu\rangle\leq\langle|f|,\delta_t\rangle=|f(t)|$。由此可知，$\ker\delta_t\subseteq\ker\mu$，或者对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}$，有 $\mu=\lambda\delta_t$。但 $\lambda=\lambda\langle 1,\delta_t\rangle=\langle 1,\mu\rangle=1$，也就是说，$\mu=\delta_t$ 且 $\tau=\delta_t$。因此，δ_t 是 $P(\mathcal{T})$ 的极端点。

现在取 $\mu\in\partial P(\mathcal{T})$。证明 μ 是 C^*-代数 $C(\mathcal{T})$ 上的乘法泛函（或特征），也就是说，对所有 $f,g\in C(\mathcal{T})$，都有 $\langle fg,\mu\rangle=\langle f,\mu\rangle\langle g,\mu\rangle$。由于 $C(\mathcal{T})$ 是 $C(\mathcal{T})_+$ 的线性张成，因此可以假设 $0\leq f\leq 1$。令 $r=\langle f,\mu\rangle$，于是 $0\leq r\leq\langle 1,\mu\rangle=1$。注意，$|\langle fg,\mu\rangle|\leq\langle|fg|,\mu\rangle=\langle f|g|,\mu\rangle\leq\|g\|_\infty\langle f,\mu\rangle=r\|g\|_\infty$，并且 $|\langle(1-f)g,\mu\rangle|\leq\langle(1-f)|g|,\mu\rangle\leq\|g\|_\infty\langle(1-f)\mu\rangle=\|g\|_\infty(1-r)$。由此可知，当 $0<r<1$ 时，$\tau_1(g)=r^{-1}\langle fg,\mu\rangle$ 和 $\tau_2(g)=(1-r)^{-1}\langle(1-f)g,\mu\rangle$ 都是球 $M(\mathcal{T})$ 中的元素。实际上，它们是来自 $P(\mathcal{T})$ 的泛函，且 $\mu=r\tau_1+(1-r)\tau_2$。考虑到 $\mu\in\partial P(\mathcal{T})$，我们可推出 $\mu=\tau_1=\tau_2$。因此，当 $0<r<1$ 时，$\langle fg,\mu\rangle=\langle f,\mu\rangle\langle g,\mu\rangle$。但当 $r=0$ 时等式成立，因为 $|\langle fg,\mu\rangle|\leq r\|g\|_\infty$。由于 $|\langle(1-f)g,\mu\rangle|\leq(1-r)\|g\|_\infty$，等式对 $r=1$ 也成立。因此，μ 是一个乘法泛函。

众所周知（见 [19, 4.2.5]），C^*-代数 $C(\mathcal{T})$ 的盖尔范德变换是恒等映射。因此，对于某个 $t\in\mathcal{T}$，有 $\mu=\delta_t$。为完成证明，我们需要将克莱因-米尔曼定理应用于对偶对 $(M(\mathcal{T}),C(\mathcal{T}))$ 中的凸、w^*-紧集 $P(\mathcal{T})$。

最后，对于一个可能的 $\mu \in$球 $M(\mathcal{T}) \setminus (\text{abs}(\partial P(\mathcal{T})))^{-w^*}$，根据分离定理 [19, 2.4.7]，可以找到一个 w^*-连续线性泛函 $f\colon M(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$，使得 Re $\langle$abs $(\partial P(\mathcal{T}))\ f\rangle \leq r <$Re $\langle \mu, f\rangle$，其中某个实数 $r \geq 0$ 满足条件。但 $f \in C(\mathcal{T})$，且 Re $\langle \mu, f\rangle =$Re $\langle f, \mu\rangle \trianglelefteq |\langle f, \mu\rangle| \leq \|f\|_\infty \|\mu\| \leq \|f\|_\infty$。此外，若对于某个 $t \in \mathcal{T}$ 有 $f(t) \neq 0$，则利用等式$\partial P(\mathcal{T}) = \{\delta_t\colon t \in \mathcal{T}\}$，可推出 $|f(t)| = \theta f(t) = \langle \theta f, \delta_t\rangle =$Re $\langle \theta f, \delta_t\rangle =$Re $\langle \theta\delta_t, f\rangle \leq r$，其中某个 $\theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1$ 满足条件。因此 $\|f\|_\infty = \vee |f(\mathcal{T})| \leq r$，而 $r < \|f\|_\infty$，矛盾。□

特别是,

$$\begin{aligned}\operatorname{ball} C(\mathcal{T}) &= (\operatorname{ball} M(\mathcal{T}))^\circ = \left((\operatorname{abs}(P(\mathcal{T})))^{-w^*}\right)^\circ = (\operatorname{abs}(P(\mathcal{T})))^\circ = (P(\mathcal{T}))^\circ \\ &= S\left(C(\mathcal{T})_+\right)^\circ,\end{aligned}$$

这意味着 $\|f\|_\infty = \vee |\langle f,$ 球 $M(\mathcal{T})\rangle| = \vee \left|\left\langle f,\ S\left(C(\mathcal{T})_+\right)\right\rangle\right| = \|f\|_e$ 对每个 $f \in C(\mathcal{T})$ 都成立。因此，$\|\cdot\|_\infty$ 是态范数 $\|\cdot\|_e$。还需注意，$\|f\|_\infty = \vee |\langle f,\ \partial P(\mathcal{T})\rangle|$，$f \in C(\mathcal{T})$。

致谢。作者感谢有机会在由 A. Ya. Helemskii 和 A. Yu. Pirkovskii 主持的“分析中的代数”研讨会上分享本文的研究成果。本文没有获得任何资助，也不存在需要申报的相关财务或非财务利益冲突。

References

[1] 布尔巴基 N.，《数学原本：积分》，第 I-V 章，Nauka，莫斯科，1967 年。[2] Choi M. D., Effros E. G.,《单射性与算子空间》，J. Func. Anal.，24 (1977) 156-209。[3] Cho M., Takaguchi M.，《矩阵的联合谱》，Sci. Rep. Hirosaki Univ. 26 (1979), 15-19。[4] Dosi A. A.，《量子锥及其对偶性》，Houston J. Math. 39 (3) (2013) (853-887)。[5] Dosi A. A.，《量子系统与表示定理》，Positivity. 17 (3) (2013) 841-861。[6] Dosi A. A.,《量子空间的量子系统结构与纠缠破坏映射》，Sbornik Math.210 (7) (2019) 21-93。[7] Dosi A. A.，《算子希尔伯特系统》，Funct. Anal. Appl. 53 (2) (2019) 79–86。[8] Effros E.G., Ruan Z-.J.，《算子空间》，Clarendon Press，牛津 (2000)。[9] Helemskii A. Ya.，《量子泛函分析》，MCCME，莫斯科 (2009)。[10] HolevoA. S.,《量子系统、信道、信息：数学导论》，De Gruyter Stud. Math. Phys. (16) (2012)。[11] Hanche-Olsen H.,《关于连续函数空间的一致凸性》，Proc. AMS, 134 (8) (2006) 2359–2362。[12] Kavruk A., Paulsen V. I., Todorov I. G., Tomforde M.，《算子系统的张量积》，J. Func. Anal. 261 (2011) 267-299。[13] Kavruk A., Paulsen V. I., Todorov I. G., Tomforde M.，《算子系统范畴中的商、正合性与核性》，Adv. Math. 235 (2013) 321-360。[14] Meyer-Neiberg P.，《巴拿赫格》，Springer-Verlag (1991)。[15] Nemesh N. T.，《模 L_p 的相对投射性》，Math. Notes 111 (1) (2022) 103-114。[16] Paulsen V. I.，《完全有界映射与算子代数》，Cambridge Stud. Adv. Math. 78 (2002)。[17] Paulsen V. I., Tomforde M.，《带序单位元的向量空间》，Indiana Univ. Math. J., 58 (2009) 1319-1359。[18] Paulsen V. I., Todorov I. G., Tomforde M.，《有序空间上的算子系统结构》，Proc. London Math. Soc. (3) 102 (2011) 25-49。[19] Pederson G.，《分析学新论》，Graduate Text in Math. (1988)。[20] Taylor J. L.，《多个可交换算子的联合谱》，J. Funct.Anal.6 (1970), 172-191。[21] Schwartz L.，《数学分析》，Hermann (1967)。

(Dosi=Dosiev) Middle East Technical University NCC, Guzelyurt, KKTC, Mersin 10, Turkey电子邮箱: dosiev@yahoo.com, dosiev@metu.edu.tr 网址：http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?optionlang=eng&personid=23380