arXiv:2303.12553v1 [math.AG] 22 Mar 2023

具有丰正丛的子流形

MAYCOL FALLA LUZA、FRANK LORAY 和 JORGE VITÓRIO PEREIR A

摘要。我们构造了沿着维数为 n、具有丰沛法丛且没有非常数亚纯函数的射影子流形的维数为 m 的复流形芽，其中 $m \geq 2n$。我们还通过建立射影空间上叶状结构的代数性判据，证明当 $m < 2n$ 时，我们的方法无法构造类似的例子。该判据推广了 Van den Ven 的经典结果；该结果刻画了射影空间中切丛正合列分裂的子流形，指出它们只能是线性子空间。

目录

1. 引言 2. 1
延拓 3. 构造 3
4. 代数性 参考 5
文献 7
9

1. 引言

设 X 是一个（不一定紧致的）复流形，$Y \subset X$ 是其中一个紧致连通的子流形。我们关注沿 Y的亚纯函数芽构成的域 $\mathbb{C}(X,Y)$，即定义在包含 Y的 X 的任意小开子集上的亚纯函数的等价类。

当 Y在 X 中的法丛是充足的时，Andreotti 和 Hartshorne 的经典结果表明，$\mathbb{C}(X,Y)$在 $\mathbb{C}$ 上的超越次数不超过 X的维数。最近，在 [11], , 本文作者中的前两位证明了存在沿光滑紧曲线 C 的光滑曲面芽 S，该曲线与 $\mathbb{P}^1$ 同构且具有任意正自交数，而这些曲面芽上不存在非常值亚纯函数。

我们的第一个主要结果给出了一种更简单但更一般的构造，构造出没有非常值亚纯函数的复流形芽，并推广了 [11]的主要结果。

定理 A. 对于任意维数为 n 的复射影流形 Y，以及任意一对满足 $m \geq 2n$ 和 $\ell \leq m$ 的自然数 (ℓ, m)，存在一个维数为 m 且包含 Y 的复流形芽 X，使得其法丛

日期：2023年3月23日。

Y 在 X 中的法丛是丰沛的，并且 $\mathbb{C}(X,Y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的超越次数等于 ℓ。此外，当 $\ell = 0$ 时，我们还可以保证 X 不含维数至少为 $n+1$ 的不可约子簇，也不含任意非零维数/余维的叶状结构/网。

更通俗地说，若一个具有丰沛法丛的子流形 $Y \subset X$ 的维数小于其余维，那么除了上界 $\dim X$之外，对 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathbb{C}(X,Y)$ 的超越次数没有任何限制。

与此形成鲜明对比的是，当 Y是复流形 X上的一个具有丰沛法丛的光滑超曲面，且 $\dim Y \geq 2$时，Rossi 在 [21, 第 5 节定理3] 中证明，存在一个射影流形 $\overline{X}$ 及其一个包含Y的开子集 $U \subset X$，该开子集可以与 $\overline{X}$的一个开子集识别。

问题 1.1。设 X 是一个复流形，$Y \subset X$ 是一个具有丰沛法丛的紧子流形。$\dim X < 2\dim Y$（即 $\operatorname{codim} Y < \dim Y$）是否意味着 $\operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X,Y) = \dim X$？

定理 A 和问题 1.1 应与 Peternell 的一个猜想进行比较。该猜想预言，在含有一个具有丰沛法丛的子簇的紧 Kähler 流形上，亚纯函数的域 [20] which predicts that field $\mathbb{C}(X)$ of meromorphic functions on a compact Kähler manifold X admitting a subvariety Z with ample normal bundle satisfies $\operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X) \geq \dim Z + 1$。我们不知道能否构造一对 (X,Y)，使得 X 是紧 Kähler 流形，且 $\operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X,Y)$ 任意。Peternell 的猜想预言，情况并非如此。

我们证明定理 A 的主要工具之一，是一个古老的技巧，通常归功于 Haefliger，并由 Loeb-Nicolau、López de Medrano-Verjovsky 和 Meersseman 加以研究，参见 [17, 引言] 及其中的参考文献。为了构造复流形，只需构造与全纯叶状结构横截的光滑可微流形。证明定理 A 所用的另一个关键工具，是上文提到的 Andreotti 和 Hartshorne 的同一批结果，它们也为本研究提供了动机。

虽然我们无法回答问题 1.1，但我们的第二个主要结果表明，定理 A 的证明方法无法用于构造该问题的反例。

定理 B. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上余维为 q 的叶状结构，且 $Z \subset \mathbb{P}^n$ 是与 $\operatorname{sing}(\mathcal{F})$ 不相交的子流形。若 $q < 2\dim Z$，并且对每个 $z \in Z$，$\mathcal{F}$ 与 Z 在 z 处的切空间交集具有预期维数 $\max\{0, \dim Z + \dim \mathcal{F} - n\}$，则 $\mathcal{F}$ 是代数可积的。

正如我们将在第4节中解释的，定理 B 与 Van de Ven 的一项经典结果密切相关，该结果刻画了射影空间中的线性子空间 [23]。我们还要指出，最优表述应当是什么尚不清楚。可以设想，在定理 B 的假设下，叶状结构 $\mathcal{F}$ 必须由线性投影定义（即 $\mathcal{F}$ 的次数为零）。事实上，当 $\mathcal{F}$ 是曲线叶状结构时，我们证明了这一点，见定理 4.4。

1.1. 致谢。作者感谢巴西—法国数学网络以及 CAPES/COFECUB项目Ma 932/19“全纯叶状结构

与几何的相互作用”。Falla Luza 感谢 CNPq 的资助（资助编号 402936/2021-3）。Loray 获得法国国家科学研究中心和 Henri Lebesgue 中心的支持，项目编号为 ANR-11-LABX-0020-0。Pereira 感谢 CNPq 的资助（资助编号 301683/2019-0）以及里约热内卢州研究支持基金会的资助（资助编号 E-26/200.550/2023）。

2. 延拓

2.1. 约定。尽管我们主要关注复流形中的子流形，但也需要考虑 Grauert 意义下更一般的复解析空间概念，例如参见 [13, 附录 B]。具体而言，子簇是其结构层中不含幂零元的闭复解析子空间，而子流形则是光滑子簇。

2.2. 无穷小邻域。设 X 为一个复流形，$Y \subset X$为一个闭连通复解析子空间。若 $\mathcal{I}$ 是 Y的定义理想层，则 Y的 n 阶无穷小邻域是复解析空间$Y(n)$，其底层拓扑空间等于 Y，结构层等于

$$\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}^{n+1}}.$$

由自然限制态射可得到 Y的无穷小邻域之间的自然嵌入 $Y(n) \hookrightarrow Y(n+1)$

$$\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}^{n+2}} \to \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}^{n+1}}.$$

X 沿 Y的形式完备化，在此记作 $Y(\infty)$，是将 n 趋于 ∞时 $Y(n)$的归纳极限所得到的形式解析空间，即

$$Y(\infty) = \varinjlim Y(n).$$

换言之，$Y(\infty)$是一个环化空间，其底层拓扑空间为 Y，结构层为逆极限

$$\mathcal{O}_{Y(\infty)} = \varprojlim \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}^{n+1}} = \varprojlim \mathcal{O}_{Y(n)}.$$

2.3. 形式亚纯函数域。沿用 [14], 的定义，我们将 $\mathcal{M}_{Y(\infty)}$ 定义为 $Y(\infty)$上的（形式）亚纯函数层，它是由如下预层所关联的层：对开子集 $U \subset Y$，其截面等于$\mathcal{O}_{Y(\infty)}(U)$的全分式环。我们将$\mathcal{M}_{Y(\infty)}$ 的整体截面记作$\mathbb{C}(Y(\infty))$。

由于我们假设 Y是连通的，$\mathbb{C}(Y(\infty))$是一个域，参见 [5, 命题 9.2]。此外，我们有单射限制态射

$$\mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(X,Y) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y(\infty)). \tag{2.1}$$

当 Y是 n维射影流形 X上的一点时，$\mathbb{C}(X,Y)$ 是收敛幂级数环 $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ 的商域，而 $\mathbb{C}(Y(\infty))$ 是形式幂级数环 $\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]$的商域。因此，一般而言，这两个包含的超越次数都可能是无限的。

与此形成鲜明对比的是，Hironaka 和 Matsumura [14, 定理 3.3] 证明了射影空间子簇的以下结果。

定理 2.1。设 Y 是 $\mathbb{P}^n$中的一个闭连通复解析子空间，$n \geq 2$。若 $\dim\ Y \geq 1$，则 $\mathbb{C}(Y(\infty)) = \mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$。

关于定理 2.1 的解析版本，即通过 Hartog 定理且不使用形式几何来证明等式 $\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$，请参见 [22,定理 3]。

当 $\dim Y > 0$ 且 Y的法丛是充足的时，我们可以将 Hartshorne 的一个结果（ [12, 定理 6.7 和推论 6.8] ）改述为适用于我们情形的形式如下。

定理 2.2。设 Y 是复流形 X中的一个连通紧致复解析子空间。若 Y 是维数至少为一的局部完全交，且法丛 $N_{Y/X}$ 是充足的，则 $\mathbb{C}(Y(\infty))$在 $\mathbb{C}$上的超越次数不超过 X的维数。此外，若 $\text{tr deg}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(Y(\infty)) = \dim X$，则 $\mathbb{C}(Y(\infty))$是 $\mathbb{C}$的有限生成扩张。

尽管定理 2.2 最初是在代数范畴中陈述的，但 Hartshorne 的证明原封不动地适用于本文所讨论的复流形情形。

当环境流形 X 是射影的（或更一般地说，是 Moishezon 流形），且Y 具有丰沛法丛时，定理 2.2 表明，$\mathbb{C}(Y(\infty))$ 是 $\mathbb{C}(X)$ 的有限代数扩张。因此，在这种情况下，(2.1) 中的两个包含关系都是有限代数扩张。结合下述由 Badescu 和 Schneider 提出的命题（见 [6, 命题 3.5] 或 [5, 命题 10.17]），这一事实表明，在射影流形上具有丰沛法丛的子簇的形式邻域上定义的形式亚纯函数是收敛的。

命题 2.3. 设 X 是一个射影流形，$Y \subset X$ 是一个连通子簇。那么，$\mathbb{C}(X)$ 在 $\mathbb{C}(Y(\infty))$ 中的代数闭包包含于$\mathbb{C}(X,Y)$。

推论 2.4. 设 X 是一个射影流形，$Y \subset X$ 是一个具有丰沛法丛的连通子簇。那么 $\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(Y(\infty))$。

问题 2.5. 如果环境空间不是射影空间，而只是 Y的一个小欧几里得邻域，那么 N_Y 的丰沛性是否意味着形式亚纯函数收敛?

Rossi定理（[21]）在 Y 是维数至少为二的超曲面时给出了肯定答案。

2.4. 解析子簇的延拓。下一个结果由 Rossi 在 [22, 定理 3.2] 中证明，附加假设为 $\dim(V \cap Y) + n = \dim Y + \dim\ V$。下面的改进归功于 Chow，是定理 4] 的推论。由于并不知道 Chow 对 Rossi 结果的改进，本文作者之一在 [19,定理 C] 中给出了 Rossi-Chow 定理的另一种证明。

定理 2.6. 设 $Y \subset \mathbb{P}^n$ 为一个不可约子簇，且 $U \subset \mathbb{P}^n$ 为 Y 的一个欧几里得邻域。若 $V \subset U$ 是 U 的一个不可约子簇，满足 $\dim V + \dim Y > n$，并且与 Y 有非空交集，则存在一个射影子簇 $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n$，使得 V 是 $\overline{V} \cap U$ 的一个不可约分支。

Bost [4, 定理 3.5], Bogomolov-McQuillan [2], Campana-Paun [7,定理 1.1], Druel [10, 命题 8.4], 等人采用 Hartshorne 论证的变体，建立了射影簇上叶状结构的叶的代数性判据。另请参见 Chen [8, 定理 A]关于射影概形的形式子概形代数性判据的工作。这里指出，我们可以从定理 2.2 推导出定理 2.6 的一个变体。

命题 2.7. 设 X 是一个射影流形，设 $Y \subset X$ 是一个具有丰沛法丛的不可约局部完全交解析子空间/子概形，并设 $U \subset X$ 是 Y的一个小欧几里得邻域。若 $V \subset U$ 是 U 的一个闭不可约光滑子簇，且

(1) 维数 $V +$ 维数 $Y >$ 维数 X 且 (2) 维数($V \cap Y$) $+$ 维数 $X =$ 维数 $Y +$ 维数 V

那么存在一个射影子簇 $\overline{V} \subset X$，使得 V 是 $\overline{V} \cap U$的一个不可约分支。

证明。条件 (1) 蕴含 $\dim V \cap Y > 0$。条件 (2) 蕴含 $V \cap Y$在 V中的余维等于 Y在 X中的余维。因此，$V \cap Y$是 V的一个局部完全交解析子空间，具有丰沛法丛且维数为正。考虑 V 的扎里斯基闭包 $\overline{V} \subset X$，并注意到 $\operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\overline{V}) = \operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(V \cap Y(\infty))$。另一方面，我们可以对 $V \cap Y \subset V$应用定理 2.2, 得到 $\operatorname{tr\,deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(V \cap Y(\infty)) \leq \dim(V)$，从而得出结论。□

3. 构造

本节将完成定理 A 的证明。

3.1. 弱横截子流形。设 $\mathcal{F}$ 是复流形 W 上的奇异全纯叶状结构。若子流形 $Z \subset W$ 弱横截于 $\mathcal{F}$，则称

(1) $\mathcal{F}$ 的奇异集与 Z 不相交；且 (2) 对每个点 $z \in Z$，Z 在 z 处的切空间与 $\mathcal{F}$ 在 z 处的切空间仅交于 0。

下一个结果凸显了这一概念与我们讨论的相关性。

命题 3.1. 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 W 上的奇异全纯叶状结构。若 $Z \subset W$ 是弱横截于 $\mathcal{F}$ 的紧子流形，则存在 Z 的一个邻域 U；一个维数等于 $\dim W - \dim \mathcal{F}$ 的复流形 X；以及一个全纯浸没 $\pi\colon U \to X$，使得

(1) $\mathcal{F}\big|_U$ 的叶与 π的纤维重合；并且

(2) 态射 π 将 Z 同构地映到 X 的子流形 Y 上，其法丛同构于 $N_{Z/W}$ 除以其内部 $T_{\mathcal{F}}\big|_Z$的像所得的商；并且 (3) 亚纯函数芽域 $\mathbb{C}(X,Y)$ 经 π^* 同构地映到叶状结构芽 $\mathcal{F}\big|_{(W,Z)}$ 的亚纯第一积分芽域。

证明。令 U为 W中 Z的一个充分小的管状邻域。 $\mathcal{F}$与 Z之间的弱横截性意味着，$\mathcal{F}\big|_U$的叶是 U的闭子簇。因此， $\mathcal{F}\big|_U$的叶空间 $X = U/\mathcal{F}$是一个豪斯多夫复流形。商态射 $\pi\colon U \to X$具有所需的性质。

□

3.2. 形式亚纯函数与有理第一积分。命题 3.1 中构造的叶空间的亚纯函数域由下面的引理描述。

引理 3.2. 采用命题 3.1 中的记号和假设。进一步假设 $W = \mathbb{P}^m$。若 $Y(\infty) \subset X$ 是 X 中 $Y = \pi(Z)$ 的形式完备化，那么 $\mathbb{C}(Y(\infty))$ 与叶状结构 $\mathcal{F}$ 的有理第一积分域同构。

证明。由第 2.3 小节讨论的 Hironaka-Matsumura 结果可直接得出。事实上， π 下 $\mathbb{C}(Y(\infty))$ 的拉回，是由 $\mathcal{F}\big|_{Z(\infty)}$ 的形式亚纯第一积分构成的 $\mathbb{C}(Z(\infty))$ 的子域。根据 Hartshorne 的结果，$\mathbb{C}(Z(\infty))$ 与域 $\mathbb{C}(W) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^m)$ 上的有理函数域 W 相同。因此，我们得到 $\mathbb{C}(Y(\infty))$ 与 $\mathcal{F}$ 的有理第一积分域之间的同构。□

注 3.3。同样，当 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的整体叶状结构时，存在于 $\mathcal{F}\big|_U$ 叶空间中的叶状结构/网，对应于由 $\mathcal{F}$ 不变的整体叶状结构/整体网。这同样是 Hartshorne 结果的推论。

叶空间的子簇情况略有不同，其在商态射下的原像并不总是能够整体化。

引理 3.4. 记号和假设同命题 3.1。进一步假设 $W = \mathbb{P}^m$。若 $S \subset X = U/\mathcal{F}$ 是与 $Y = \pi(Z)$ 相交的子簇，且 $\dim S + \dim Y > \dim X$，则 $\pi^{-1}(S)$ 包含于 $\mathbb{P}^m$ 的一个 $\mathcal{F}$-不变子簇 $\overline{S}$ 中，其中 $\dim \overline{S} = \dim S + \dim \mathcal{F}$。

证明. 这是定理 2.6 的直接推论。 □

3.3. 弱横截子流形的存在性。如下所示，在适当的数值假设下，弱横截子流形的存在性是 Kleiman 横截性的一般平移的直接推论。

引理 3.5. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^{m+1}$ 上具有孤立奇点的曲线叶状结构。设 $Y \subset \mathbb{P}^{m+1}$ 是维数为 n 的射影子流形。若 $m \geq 2n$，则对于任意一般的 $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{m+1})$， Y 与 $g^*\mathcal{F}$ 弱横截。

证明. 证明是对一般平移的 Kleiman 横截性 [15, 定理 2] 的简单应用。事实上，我们可以将 Y 的切丛的射影化 $\mathbb{P}(T_Y)$（T_Y 上的直线空间）识别为 $\mathbb{P}T_{\mathbb{P}^{m+1}}$ 中维数为 $2n-1$ 的子流形 $\tau(Y)$。同样，我们将 $\tau(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^{m+1}})$ 视为 $\mathcal{F}\big|_{\mathbb{P}^{m+1}-\text{奇点 }(\mathcal{F})}$ 的切线的扎里斯基闭包。因此，$\tau(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^{m+1}})$ 是一个维数为 $m+1$ 的子簇。根据假设

$$\dim \tau(Y) + \dim \tau(\mathcal{F}) < \dim \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^n}) .$$

由于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{m+1})$ 在 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^{m+1}})$ 上的自然作用是传递的，我们可以应用 [15,定理 2] 来保证，对于一般的 $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{m+1})$，$g^*\tau(\mathcal{F}) = \tau(g^*\mathcal{F})$ 与 $\tau(y)$ 不相交。引理得证。□

3.4. 射影流形上叶状结构的有理第一积分域。设$\mathcal{F}$ X是射影流形上的一个叶状结构。根据 [3], , 存在唯一的代数叶叶状结构 $\mathcal{G}$ 包含 $\mathcal{F}$，且满足 $\mathbb{C}(\mathcal{F}) = \mathbb{C}(\mathcal{G})$。

例3.6. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$ 为复数，并考虑 $\mathbb{C}^{m+1}$上的以下向量场

$$v = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

$\mathbb{P}^{m+1}$ 上由 v 定义的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的扎里斯基闭包 $\mathcal{G}$ 的维数，等于由 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$ 生成的 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{Q}$- 向量子空间的维数。特别地，适当选取复数 λ，我们便可在 $\mathbb{P}^{m+1}$ 上得到一维叶状结构，其有理第一积分域的超越次数可取介于0和 m之间的任意值。

3.5. 定理 A 的证明。设 $\mathcal{F}$ 是一个一维叶状结构 $\mathbb{P}^{m+1}$，其有理第一积分域在 $\mathbb{C}$ 上的超越次数为 ℓ。例如，我们可以取例3.6中的叶状结构 $\mathcal{F}$。将 Y 嵌入 $\mathbb{P}^{m+1}$中。根据引理 3.5，我们可以假设 Y 与 $\mathcal{F}$弱横截。命题 3.1 表明，存在一个包含 Y的欧几里得开子集 $U \subset \mathbb{P}^{m+1}$，使得叶空间 $X = U/\mathcal{F}\big|_U$上的 $\mathbb{C}(X)$ 等于 $\mathbb{C}(\mathcal{F}\big|_U)$。引理 3.2 表明，$\mathbb{C}(X)$ 等于 $\mathbb{C}(\mathcal{F})$。这说明叶空间 $X = U/\mathcal{F}\big|_U$是一个维数为 m、包含 Y的复流形，并且 $\mathrm{tr\ deg}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(X, Y) = \ell$，正如所声称的那样。

关于存在具有 $\ell = 0$ 的流形的最后一项结论，可由注 3.3 和引理 3.4 结合 [18, 定理 1] 得出。该定理保证，在 $\mathbb{P}^{m+1}$ 上次数至少为二的非常一般的一维叶状结构，不与任何其他叶状结构或网相切，也不保留任何代数子簇不变。□

4. 代数性

本节将给出引言中定理 B 的证明。事实上，定理 B 是下文定理 4.1 和定理 4.4 的组合。

4.1. 与叶状结构横截的子流形。我们首先讨论与叶状结构横截的子流形。

定理 4.1. 设 $\mathcal{F}$ 是射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上的余维为 q 的叶状结构。若 $Z \subset \mathbb{P}^n$ 是一个与 sing($\mathcal{F}$) 不相交且与 $\mathcal{F}$ 横截的子流形，则 dim $Z = q$, Z 是一个线性子空间，且叶状结构 $\mathcal{F}$ 的次数为零。

证明. 设 $i\colon Z \to \mathbb{P}^n$ 为自然嵌入，并令 $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n} \otimes \det N_{\mathcal{F}})$ 为定义 $\mathcal{F}$ 的一个 q-形式。由横截性的定义可知，dim $Z \geq q = \operatorname{codim} \mathcal{F}$。此外，$i^*\omega \in H^0(Z, \Omega^q_Z \otimes \det N_{\mathcal{F}}\big|_Z)$ 是 Z 上的处处非零扭曲 q-形式。若 dim $Z \geq q+1$，则 $i^*\omega$ 在正维度的 Z 上定义了一个光滑叶状结构。Bott 消失定理意味着 $(\det N_{\mathcal{F}}\big|_Z)^{q+1} = 0$。但 $\det N_{\mathcal{F}}\big|_Z$ 是一个充足线丛，且 $q+1 \leq \dim Z$，因此 $(\det N_{\mathcal{F}}\big|_Z)^{q+1} \neq 0$。由此得到矛盾，进而可知 $\dim Z = q$。因此，$i^*\omega$ 不消失意味着典范层 Ω^q_Z 同构于 $\det N^*_{\mathcal{F}}\big|_Z = \mathcal{O}_Z(-\deg(\mathcal{F}) - q - 1)$。Kobayashi-Ochiai 定理 [16, 定理 1.1] 的推论意味着 $Z = \mathbb{P}^q$，$\deg(\mathcal{F}) = 0$ 且 $\deg(Z) = 1$。□

注 4.2. 设 $\mathcal{F}$ 是射影流形 X 上的余维为 q 的叶状结构。若 $Z \subset X$ 是一个法丛丰沛、与 sing($\mathcal{F}$) 不相交且横截于 $\mathcal{F}$ 的子流形，则定理 4.1 的证明表明 dim $Z = q$。因此，$T_{\mathcal{F}}\big|_Z \simeq N_Z$ 是丰沛的，我们可以应用 [4, 定理 3.5] 或 [2]，从而保证每个经过 Z 中各点的 $\mathcal{F}$ 的叶都是代数的。由维数原因，$\mathcal{F}$ 的每个叶都是代数的，且 $\mathcal{F}$ 是代数可积的。

下面我们给出 Van de Ven 的一个经典结果的证明。

推论 4.3. 设 X 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个子流形。若法丛正合列

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^n}\big|_X \to N_X \to 0$$

分裂，则 X 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个线性子空间。

证明. 设 q 是 X 的余维。分裂 $\varphi\colon N_X \to T_{\mathbb{P}^n}\big|_X$ 的存在性表明，对每个 $x \in X$，存在一个经过 x 的唯一线性 $\mathbb{P}^q$，其在 x 处的切空间等于 $\varphi(N_X(x))$。若 U 是 X 的一个足够小的邻域，则这一族 $\mathbb{P}^q$ 不会在 U 处相交，从而定义了 U 上的余维为 q 的叶状结构 $\mathcal{F}_U$。定理 2.2 表明，$\mathcal{F}_U$ 可延拓为 $\mathbb{P}^n$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$。根据构造，$\mathcal{F}$ 横截于 X。定理 4.1 即得所需结论。□

4.2. 弱横截于叶状结构的子流形。我们的最后一个结果讨论弱横截于叶状结构的子流形情形。

定理 4.4. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上余维为 q 的叶状结构。若 Z 是一个弱横截于 $\mathcal{F}$ 的子流形，且 $q < 2\dim Z$，则 $\mathcal{F}$ 是代数可积的。此外，若 dim $\mathcal{F} = 1$，则 $\deg(\mathcal{F}) = 0$。

证明。设 $U \subset \mathbb{P}^n$ 是 Z 的一个足够小的欧几里得邻域。令 $\pi\colon U \to U/\mathcal{F}$ 为 U 关于 $\mathcal{F}\big|_U$ 的商。注意到 $V = \pi^{-1}(\pi(Z))$ 是 U 的一个闭子簇，其维数为

$$\dim \mathcal{F} + \dim Z. \tag{4.1}$$

因此，我们的假设意味着 $\dim\ Z+\dim\ V=2\dim\ Z+\dim\mathcal{F}>n$。定理 2.6 表明，$\overline{V}$、$V$的扎里斯基闭包和 V具有相同的维数。由于 V在 $\mathcal{F}$作用下不变

$|_U$，$\overline{V}$也由 $\mathcal{F}$保持不变。

设 $\mathcal{G}$ 是包含 $\mathcal{F}$ 且满足 $\mathbb{C}(\mathcal{F})=\mathbb{C}(\mathcal{G})$由 [3]给出的唯一代数叶叶状结构。将 Z 替换为 gZ，其中 $g\in\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$是一个足够一般的自同构后，我们可以假设，经过 Z 中一般点 z 的 $\mathcal{F}$的一片叶的扎里斯基闭包与 $\mathcal{G}$的一片叶重合。因此

$$\dim\overline{V}=\dim\mathcal{G}+\dim Z. \tag{4.2}$$

由于 $\dim V=\dim\ \overline{V}$，我们可以结合方程（4.1）和（4.2），证明 $\mathcal{F}$的叶具有代数性，换言之，即 $\mathcal{F}=\mathcal{G}$。

在一维情形下，弱横截性意味着 $N_Z\otimes\omega_{\mathcal{F}}|_Z$存在处处非零截面，因而$c_{\mathrm{cod}(Z)}(N_Z\otimes\omega_{\mathcal{F}})=0$。

由于 N_Z 是丰向量丛，且根据 [1, 定理2.5], ，丰向量丛的陈类严格为正，我们推得 $\omega_{\mathcal{F}}$ 不是数值有效的。由于 $\omega_{\mathcal{F}}|_Z=\mathcal{O}_Z(\deg(\mathcal{F})-1)$，我们必有$\deg(\mathcal{F})=0$，如所断言。□

注 4.5. 我们认为，若将 $\mathbb{P}^n$ 替换为任意射影流形，并将 Z 替换为具有丰沛法丛的子流形，类似的结论也应成立。

参考文献

[1] Spencer Bloch 和 David Gieseker，《丰向量丛陈类的正性》，Invent. Math. 12（1971），112–117。[2] Fedor Bogomolov 和 Michael McQuillan，《带叶状结构的簇上的有理曲线》，《代数几何中的叶状结构理论》，Simons Symp.，施普林格出版社，Cham，2016，第21–51页。[3] Philippe Bonnet，《代数叶状结构的极小不变簇与第一积分》，Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 37（2006），第1期，1–17。[4] Jean-Benoît Bost，《数域上的代数叶状结构的代数叶》，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.（2001），第93期，161–221。[5] Lucian B˘adescu，《射影几何与形式几何》，波兰科学院数学研究所数学专著（新系列）[波兰科学院数学研究所数学专著（新系列）], 第65卷，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2004。[6] Lucian B˘adescu 和 Michael Schneider，《形式函数、连通性与齐性空间》，《代数几何》，de Gruyter，柏林，2002，第1–23页。[7] Frédéric Campana 和 Mihai P˘aun，《具有正斜率的叶状结构与轨形余切丛的双有理稳定性》，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 129（2019），1–49。[8] Huayi Chen，《形式簇的代数性与向量丛的正性》，《数学年刊》354（2012），第1期，171–192。[9] Wei Liang Chow，《关于代数簇的亚纯映射》，Ann. of Math. (2) 89（1969），391–403。[10] Stéphane Druel，《维数至多为五且典范类平凡的奇异空间的分解定理》，Invent. Math. 211（2018），第1期，245–296。[11] Maycol Falla Luza 和 Frank Loray，《没有函数的有理曲线邻域》，《数学年刊》382（2022），第3–4期，1047–1058。[12] Robin Hartshorne，《代数簇的上同调维数》，Ann. of Math. (2) 88（1968），403–450。

[13] ———，《代数几何》，《数学研究生教材》第52卷，施普林格出版社，纽约-海德堡，1977。[14] Heisuke Hironaka 和 Hideyuki Matsumura，《形式函数与形式嵌入》，日本数学会杂志20（1968），52–82。[15] Steven L. Kleiman，《一般平移的横截性》，《组合数学》28（1974），287–297。[16] Shoshichi Kobayashi 和 Takushiro Ochiai，《复射影空间与超二次曲面的刻画》，京都大学数学杂志13（1973），31–47。[17] Laurent Meersseman，《一种在任意维数构造紧复流形的新几何构造》，《数学年刊》317（2000），第1期，79–115。[18] Jorge Vitório Pereira，《一般叶状结构的特征簇》，《欧洲数学会杂志》14（2012），第1期，307–319。[19] ———，《维数至少为四的射影空间上非非临界叶状结构的代数分离曲线》，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学会A辑数学评论》113（2019），第4期，3921–3929。[20] Thomas Peternell，《具有丰正则丛的紧子簇、代数性与循环锥》，《密歇根数学杂志》61（2012），第4期，875–889。[21] Hugo Rossi，《沿伪凹边界将解析空间附着到解析空间上》，《复分析会议论文集》（明尼阿波利斯，1964），施普林格出版社，柏林，1965，第242–256页。[22] ———，《射影簇子簇的延拓》，《美国数学杂志》91（1969），565–575。[23] Antonious van de Ven，《复射影空间中代数簇的一种性质》，《全球微分几何学术讨论会》（布鲁塞尔，1958），比利时数学研究中心，鲁汶，1959，第151–152页。

弗卢米嫩塞联邦大学，Prof. Marcos Waldemar de Freitas Reis 街，无门牌号，尼泰罗伊，24210-201，里约热内卢，巴西

雷恩大学，法国国家科学研究中心，雷恩数学研究所 - UMR 6625，F-35000 雷恩，法国。

IMPA，多娜·卡斯托丽娜路 110 号，霍托区，22460-320，里约热内卢，巴西