arXiv:2303.12565v1 [math.LO] 22 Mar 2023

使用虚拟模型迭代半适当迫迫

Obrad Kasum*，Boban Veli˘ckovi´c

2023年3月22日

摘要

所谓虚拟模型，是指在其传递闭包中为初等的集合论模型。Neeman 首先使用虚拟模型 [Nee14] 来迭代强迫。那篇论文研究的是适当迫迫。随后，Veli˘ckovi´c 调整了该方法，用以迭代半适当强迫的情形，并将其草拟于 [Vel14]之中。本文将梳理其中的细节，并进一步阐述 Veli˘ckovi´c 的方法。第一节汇集关于虚拟模型的事实，第二节介绍迭代，第三节则以获得NS_{ω_1} 的饱和性为例（大致沿用[Sch16]）。

目录

1 虚拟模型 **2**

1.1 可容许结构 .2 1.2 虚拟模型：定义 .2 1.3 初等秩初始段 .3 1.4 虚拟模型的约化 .41.5 α-同构 .5 1.6 比较虚拟模型 .5 1.7 虚拟模型的强迫扩张.6 1.8 半适当迫迫 .9 1.9 虚拟模型的迭代迫迫扩张 .10

2 半适当迭代 13

2.1 迭代的设定 .13 2.2 定义的递归步骤 .14 2.3 基本性质 .15 2.4 传递定理陈述 .17 2.5 传递定理的一些引理 .18 2.6 传递定理的证明.24 2.6.1 后继情形 .24 2.6.2 极限情形 .26 2.7 半适当性与链条件 .33

3 饱和NS_{ω_1} **36**

3.1 谨慎坍缩 .36 3.2 封闭的稠密集族 .39 3.3 封闭迭代 .40

*Obrad Kasum 先生由欧盟委员会通过 H2020-MSCA-COFUND-2019 计划资助，资助协议编号为 945332

1 虚拟模型

1.1 可容许结构

[1.1.1] **概要**。 我们考虑可容许结构的一个基本概念。它取决于参数 $\mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}$ 是一个包含 $\in$ 的递归可枚举一阶语言。语言 $\mathcal{L}$ 通常会保持隐含。

[1.1.2] **定义**。 语言 $\mathcal{L}$ 中的一个可容许结构 $\mathbb{A} := (A, \in, \dots)$ 是满足扩展语言中的 ZFC^- 的传递结构。

[1.1.3] **注**。 我们常说“A 是可容许的”，实际指的是“$\mathbb{A}$ 是可容许的”。

[1.1.4] **例**。 如果 A 是 ZFC^- 的传递模型，那么 $(A, \in)$ 是可容许的。

[1.1.5] **例**。 如果 A 是可容许的，并且 $U \subseteq A$ 可在 $(A, \in)$ 上用参数定义，那么 $(A, \in, U)$ 是可容许的。

[1.1.6] **例子**。 如果 $\theta > \omega$ 是正则的，那么每个结构 $(H_\theta, \in, \dots)$ 都是可容许的。

1.2 虚拟模型：定义

[1.2.1] **概要**。 现在我们引入可容许结构的一种推广，称为虚拟模型。这个概念将在主要构造中发挥关键作用。

[1.2.2] **定义**。 一个（语言 $\mathcal{L}$中的）虚拟模型 是一个结构 $(M, \in, \dots)$，满足存在一个可容许的 $\mathbb{A}$，使得

$$(M, \in, \dots) \prec \mathbb{A}.$$

[1.2.3] **例子**。 每个可容许结构也是一个虚拟模型。

[1.2.4] **注**。 如果 $M \prec \mathbb{A}$，其中 $\mathbb{A}$ 是可容许的，那么 M 上的结构由结构 $\mathbb{A}$唯一确定。

$\frown$[1.2.5] **目标**。 现在我们将证明，给定虚拟模型 M，存在唯一的极小结构 M，它见证了 M 是一个虚拟模型这一事实。

[1.2.6] **引理**。 设 A 可容许，且 $B \subseteq A$ 传递。则 $B \prec_0 A$。

[1.2.7] **引理**。 设 A 可容许，且 $M \prec_0 A$ 满足 $\mathrm{trcl}(M) = A$。则 $M \prec A$.

[1.2.8] **注**。 我们将函数符号视为关系符号。特别地，如果 A 可容许，且 $M \subseteq A$ 包含所有常元，那么 M 从 A 继承结构。在这种情况下，继承结构就是 M 上的默认结构。

[1.2.9] **引理**。 设 A 可容许，且 $M \prec A$。则 $\mathrm{trcl}(M)$ 可容许，并且

$$M \prec \mathrm{trcl}(M) \prec A.$$

$\frown$[1.2.10] **命题**。 设 M 是一个虚拟模型。则在 $\mathrm{trcl}(M)$ 上存在唯一结构 $M^\frown$，满足 $M \prec M$。此外，对于每个可容许的 A，当且仅当 $\frown M \prec A$ 时，$M \prec A$ 成立。

证明。存在性由前一个引理得出。为验证唯一性，考虑一个结构为 M 的关系 R，并注意到

$$R^{\widehat{M}} = \bigcup_{\xi < \mathsf{Ord} \cap \widehat{M}} (R^{\widehat{M}} \cap (\widehat{M} \restriction \xi)) = \bigcup_{\xi < \mathsf{Ord} \cap M} (R^{\widehat{M}} \cap (\widehat{M} \restriction \xi)) = \bigcup_{\xi < \mathsf{Ord} \cap M} (R \cap V_\xi)^M$$

它仅取决于 M。 □

1.3 初等秩初始段

[1.3.1] **定义**。 设 A 为可容许的。那么 $\mathscr{E}_A := \{\alpha < \text{序数类}^A : A \restriction \alpha \prec A\}$。

[1.3.2] **注**。 集合 $\mathscr{E}_A$ 在 Ord^A中是闭的。若 $A = V_\kappa$，其中 κ 是不可达基数，则 $\mathscr{E}_A$ 是 κ中的闭无界集。

[1.3.3] **命题**。 设 A, B 可容许，并设 $\alpha \in \mathscr{E}_A \cap \mathscr{E}_B$。假设 $A \restriction \alpha = B \restriction \alpha$。那么

$$\mathscr{E}_A \cap [0, \alpha] = \mathscr{E}_B \cap [0, \alpha] \in A \cap B.$$

[1.3.4] **定义**。 设 M 是一个虚拟模型。那么 $\mathscr{E}_M := \{\alpha \in \mathrm{Ord} \cap M : M \cap V_\alpha \prec M\}$.

[1.3.5] **注**。 每个可容许结构也是一个虚拟模型。在这种情况下，这两个定义一致。

[1.3.6] **命题**。 设 M 是一个虚拟模型。那么 $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_{\widehat{M}} \cap M$。

[1.3.7] **推论**。 设 M 是一个虚拟模型，且 γ 是 $\mathscr{E}_M$的极限点。那么 $\gamma \in \mathscr{E}_{\widehat{M}}$。

Proof. Follows from the fact that $\mathscr{E}_M \subseteq \mathscr{E}_{\widehat{M}}$ and the fact that $\mathscr{E}_{\widehat{M}}$ is closed. □

[1.3.8] **引理**。 设 M是一个虚拟模型，且 $\alpha \in \mathscr{E}_{\widehat{M}}$。假设 $\beta := \min(M \cap [\alpha, \infty))$. 那么$\beta \in \mathscr{E}_M$。

证明。

1° 我们应用塔斯基–沃特检验。假设 $a \in M \cap V_\beta$ 和 $M \models \exists y \phi(a, y)$。我们要找到$b \in M \cap V_\beta$ 使得 $M \models \phi[a, b]$。

$\frown$ $\backsim 2^\circ$ 根据初等性，$M \models \exists y \phi(a, y)$。我们还有 $a \in M \cap V_\beta \subseteq M \cap V_\alpha \subseteq M \restriction \alpha$。

$\frown$ $\backsim 3^\circ$ 由于 $\alpha \in \mathscr{E}_{\widehat{M}}$，存在 $y \in M \restriction \alpha$ 使得 $M \models \phi[a, y]$。

4° 由于 $\alpha \leq \beta$，我们有

$$\widehat{M} \models (\exists y \in V_\beta) \phi(a, y).$$

根据初等性，

$$M \models (\exists y \in V_\beta) \phi(a, y).$$

5° 因此，存在 $b \in M \cap V_\beta$ 使得 $M \models \phi[a, b]$。

□

[1.3.9] **命题**。 设 M 是一个虚拟模型。假设 γ 是 $\mathscr{E}_{\widehat{M}}$ 的极限点，也是 $M \cap$ 自然数集的极限点。那么 γ 是 $\mathscr{E}_M$ 的极限点。

证明。

1° 令 $\alpha < \gamma$ 为任意的。我们要找到 $\beta \in \mathscr{E}_M \cap \gamma$，使得 $\alpha < \beta$。2° 存在 $\alpha' \in \mathscr{E}_{\widehat{M}} \cap \gamma$，使得 $\alpha < \alpha'$。3° 存在 $\alpha'' \in M \cap \gamma$，使得 $\alpha' < \alpha''$。4° 由 [1.3.8],，我们有 $\beta := \min(M \cap [\alpha', \infty)) \in \mathscr{E}_M$。$5^\circ$ 由 3°，我们有 $\beta \in [\alpha', \alpha''] \subseteq (\alpha, \gamma)$。

□

1.4 虚拟模型的约化

[1.4.1] **总结。** 我们介绍一种基本构造，用于减少虚拟模型所捕获的信息量。

[1.4.2] 定义。 </style>设 M 是一个虚拟模型， X 是任意集合。我们定义

$$\mathrm{Hull}(M,X) := \{f(x) : f : d \to r,\ f \in M,\ x \in X^{<\omega} \cap d\}.$$

[1.4.3] **命题。** M 是一个虚拟模型，令 $\alpha := \sup(\text{序数类} \cap M)$，并令 X 为任意集合。以下以下内容成立。

a. $M \prec \text{包}(M,X) \prec M$ b. $\text{包}(M,X) = M$ c. $X \cap M \subseteq \text{包}(M,X)$

d. $\text{包}(M,X) = \text{包}(M, X \cap M)$ e. 对于每个满足 $M \prec N$ 和 $X \cap M \subseteq N$ 的虚拟模型 N，都有 $\text{包}(M,X) \prec N$。 f. $|\text{包}(M,X)| \leq |M| + |X|$

□

[1.4.4] **定义。** 虚拟模型 α-约化 $M \downarrow \alpha$ 定义如下：令 $\pi : \text{包}(M, V_\alpha) \to N$ 为传递塌缩，并令 $M \downarrow \alpha := \pi[M]$。

[1.4.5] **注。** 我们不要求 $V_\alpha \subseteq M$，甚至不要求 $\delta := \sup(\text{序数类} \cap M) \geq \alpha$。我们所做的只是塌缩 M，同时“冻结”其秩低于 α 的部分。特别地，如果 $\delta \leq \alpha$，这意味着 $M \subseteq V_\alpha$ and $\text{包}(M, V_\alpha) = M$，即 $M \downarrow \alpha = M$。

[1.4.6] **练习。** 设 M 是一个虚拟模型， α 是一个序数。那么 $M \downarrow \alpha$ 是 $\mathrm{Hull}(M, V_\alpha)$ 的传递塌缩。

[1.4.7] **定义。** 若虚拟模型 M 满足 $M = \mathrm{Hull}(M, V_\alpha)$，则称其为 α-生成的。

[1.4.8] **引理。** 设 N 是一个虚拟模型，且 $\pi : N \to N$ 是其传递塌缩。那么对于每个Σ_0 公式 $\phi(x)$，我们有

$$(\forall \overline{x} \in N^{<\omega})(\phi(\overline{x}) \iff \phi(\pi(\overline{x}))).$$

证明。

$$\begin{aligned} \phi(\overline{x}) &\iff \widehat{N} \models \phi(\overline{x}) && (1)\\ &\iff N \models \phi(\overline{x}) && (2)\\ &\iff \overline{N} \models \phi(\pi(\overline{x})) && (3)\\ &\iff \phi(\pi(\overline{x})), && (4) \end{aligned}$$

其中：

(1) 由 Σ_0-绝对性得出；(2) 由初等性得出；(3) 因为 π 是一个同构得出；(4) 由 Σ_0-绝对性得出。

□

[1.4.9] **命题。** 设 M 是一个虚拟模型。那么 $M \downarrow \alpha$ 是 α-生成的。

[1.4.10] **命题。** 设 M 是一个虚拟模型，并设 $\beta \leq \alpha$。那么 $(M \downarrow \alpha) \downarrow \beta = M \downarrow \beta$。

证明。 这是一个直接的计算；使用 [1.4.8] 来证明坍缩与 包的计算结果一致。

□

1.5 α-同构

[1.5.1] **总结。** 本部分引入的关系旨在捕捉这样一种思想：两个虚拟模型携带相同的信息，直到 α。

[1.5.2] **定义。** 设 M, N 为虚拟模型。我们定义：若存在同构f: $\mathsf{Hull}(M, V_\alpha) \cong \mathsf{Hull}(N, V_\alpha)$ 满足 $f[M] = N$，则 $M \cong_\alpha N$ 成立。

[1.5.3] **命题。** 设 M 为虚拟模型，则 $M \cong_\alpha M \downarrow \alpha$。

[1.5.4] **命题。** 设 M, N为由 α生成的虚拟模型。若 $M \cong_\alpha N$，则 $M = N$。

[1.5.5] **命题。** 设 M, N 为虚拟模型。当且仅当 $M \downarrow \alpha = N \downarrow \alpha$时， $M \cong_\alpha N$。

[1.5.6] **推论。** $\cong_\alpha$ 是虚拟模型之间的等价关系。

1.6 比较虚拟模型

[1.6.1] **总结。**

[1.6.2] **定义。** 设 M, N是可数虚拟模型。于是，我们定义：若存在$M' \in N$使得 M'在继承结构下是一个虚拟模型，并且 $M \cong_\alpha M'$，则 $M \lhd_\alpha N$成立。

[1.6.3] **定义。** 若虚拟模型 M 满足 $V_\xi \subseteq M$，则称其为 ξ-强 虚拟模型。

[1.6.4] **引理。** 设 M 是一个（$\omega + 1$）-强虚拟模型，且设 $N \in M$ 是一个可数虚拟模型。那么 $|N|^M = \omega$。

证明。

1° 设 $\pi : M \to \overline{M}$ 是（M, $\in$）的传递塌缩。我们有 $M \in H_{\omega_1}$，并且存在一个满射 $f : \omega \to Y$。2° 我们有 $f \in H_{\omega_1} \subseteq N$。$3^\circ$ 因此， $N \models$（M 是可数的）。4° 根据传递塌缩的绝对性， $N \models$ （M, $\in$） $\cong$ （M, $\in$）。5°因此， $N \models |M| = |M| = \omega$，进而 $N \models |M| = \omega$。

□

[1.6.5] **命题序。** 假设 $\alpha > \omega$。那么关系 $\lhd_\alpha$是可数（$\omega + 1$之间的一个偏序)-强 虚拟模型。

证明。

1°假设 M, N, P是可数的（$\omega + 1$）-强虚拟模型，且满足 $M \lhd_\alpha N \lhd_\alpha P$。$2^\circ$存在一个虚拟模型 $M' \in N$，一个同构

$$f : \mathsf{Hull}(M, V_\alpha) \cong \mathsf{Hull}(M', V_\alpha)$$

使得 $f[M] = M'$，一个虚拟模型 $N' \in P$，以及一个同构

$$g : \mathsf{Hull}(N, V_\alpha) \cong \mathsf{Hull}(N', V_\alpha)$$

使得 $g[N] = N'$。

3°根据 [1.6.4],我们有 $M' \subseteq N$和 $g(M') = g[M']$。

4°对于 $h \in N'$和 $x \in$定义域$(f) \cap V_\alpha^{<\omega}$，我们有

$$g(h(x)) = g(h)(g(x)) = g(h)(x).$$

我们得出结论

$$g[\mathsf{Hull}(M', V_\alpha)] = \mathsf{Hull}(g[M'], V_\alpha) = \mathsf{Hull}(g(M'), V_\alpha).$$

5° 因此， $g(M') \in P$并且

$$g \circ f : \mathsf{Hull}(M, V_\alpha) \cong \mathsf{Hull}(g(M'), V_\alpha).$$

6° 我们还验证

$$(g \circ f)[M] = g[f[M]] = g[M'] = g(M'),$$

由此得出结论 $M \lhd_\alpha P$。

□

[1.6.6] **命题**。 假设 M, M', N, N'是可数虚拟模型，满足 $M \cong_\alpha M'$且$N \cong_\alpha N'$。那么 $M \lhd_\alpha N$当且仅当 $M' \lhd_\alpha N'$。 □

[1.6.7] **命题**。 假设 M, N是可数虚拟模型，且 $M \in N$。那么 $M \lhd_\alpha N$。 □

[1.6.8] **命题**。 设 α 是一个序数，且 M, N 是可数虚拟模型。假设$M, \alpha \in N$， M是 α-生成的，并且 $M \lhd_\alpha N$。那么 $M \in N$。

证明。

1°存在一个虚拟模型 $M' \in N$，使得 $M \cong_\alpha M'$。2° 由于 M 是由 α 生成的，我们有 $M = M' \downarrow \alpha \in N$。

□

[1.6.9] **命题**。 设 α 是一个 beth 不动点，并设 M, N 是可数的 α-强虚拟模型，且满足 $M \lhd_\alpha N$。设 $\theta \in M \cap V_\alpha$ 是正则不可数的。那么 $M \cap H_\theta \in N \cap H_\theta$。

证明。 由于 N 是 α-强的，且 $\theta < \alpha$，我们有 $H_\theta = H_\theta^N \in N$。设 $M' \in N$ 满足 $M \cong_\alpha M'$。我们有 $M \cap H_\theta = M' \cap H_\theta \in N$。另一方面，由于 $M \cap H_\theta \in [H_\theta]^\omega$，我们得出 $M \cap H_\theta \in H_\theta$。 □

1.7 虚拟模型的迫迫扩张

[1.7.1] **定义**。 设 A 是可容许的， $\mathbb{P} \in A$ 是一个偏序集，且 $M \prec A$ 满足 $\mathbb{P} \in M$。对于 $G \rightsquigarrow A^{\mathbb{P}}$, we d定义

$$M[G] := \{\tau^G : \tau \in M^{\mathbb{P}} = A^{\mathbb{P}} \cap M\}, \quad M^G := M[G] \cap A.$$

[1.7.2] **命题**。 设 A 是可容许的， $\mathbb{P} \in A$ 是一个偏序集，设 $M \prec A$ 满足 $\mathbb{P} \in M$，且 $G \rightsquigarrow A^{\mathbb{P}}$。则有以下结论。

a. $(M[G], \in, M^G, \mathbb{P}, G) \prec (A[G], \in, A, \mathbb{P}, G)$ b. $M[G] = M[G]$ c. $M \prec M^G \prec A$ d. $M^G[G] = M[G]$ e. $(M^G)^G = M^G$。

□

[1.7.3] **命题**。 设 M 是一个 α-强虚拟模型，设 α 满足 $M \restriction \alpha \models \mathsf{ZFC}^-$，设$\mathbb{P} \in M \cap V_\alpha$，并设 $G \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}}$。则 $(\widehat{M} \restriction \alpha)[G] \subseteq \widehat{M[G]}$。 □

[1.7.4] **引理**。 设 M 是一个虚拟模型，设 $\alpha \in M$ 满足 $M \restriction \alpha \models \mathsf{ZFC}^-$，设 $\mathbb{P} \in M \cap V_\alpha$，并设$G \in V$满足 $G \rightsquigarrow \widehat{M}^{\mathbb{P}}$。则 $\mathsf{Hull}(M[G], V_\alpha) = \mathsf{Hull}(M, V_\alpha)[G]$。

证明。

1° 我们首先考虑包含（$\supseteq$）。

1′设 $\dot{y} \in \mathsf{Hull}(M, V_\alpha)$，并验证 $\dot{y}^G \in \mathsf{Hull}(M[G], V_\alpha)$。

$2'$ 对于函数 $f \in M$ 和 $x \in V_\alpha \cap \mathrm{dom}(f)$，有 $y = f(x)$。我们可以选择 f，使得 $\mathrm{im}(f) \subseteq \widehat{M}^{\mathbb{P}}$.$3'$ 设 $g \in M[G]$ 为满足 $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f)$ 且 $g(u) := f(u)^G$ 的函数。我们有 $g \in M[G]$，且 $x \in \mathrm{dom}(g) \cap V_\alpha$。

$4'$ 因此，$\dot{y}^G = f(x)^G = g(x) \in$ 包$(M[G],\ V_\alpha)$。

2° 现在考虑包含关系 $(\subseteq)$

$1'$ 考虑 $x_0 \in$ 包$(M[G],\ V_\alpha)$，并证明 $x_0 \in$ 包$(M,\ V_\alpha)[G]$。$2'$ 存在一个函数 $f \in M[G]$，以及 $x \in V_\alpha \cap$的定义域(f)，使得 $x_0 = f(x)$。. $3'$ 存在 $\mathbb{P}$-名称 $f,\ d$，使得

$$\widehat{M}^{\mathbb{P}} \models (\dot{f} \text{ is a function on } \dot{d})$$

以及 $\dot{f}^G = f$。

$4'$ 注意到

$$x \in \widehat{M[G]} \restriction \alpha = \widehat{M}[G] \restriction \alpha = (\widehat{M} \restriction \alpha)[G],$$

因此存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x} \in \widehat{M} \restriction \alpha$，使得 $\dot{x}^G = x$。

$5'$ 设 $\xi \in M$满足 $\xi > \alpha$，并设 $e := \{\dot{y} \in V_\xi^M \colon \dot{y}$是一个 $\mathbb{P}$-名称$\} \in M$。

$6'$ 存在一个函数 g，使得 $\mathrm{dom}(g) = e$，且

$$(\forall \dot{y} \in e)(\forall p \in \mathbb{P})(p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\widehat{M}} \dot{y} \in \dot{d} \implies p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\widehat{M}} \dot{f}(\dot{y}) = \ulcorner g(\dot{y}) \urcorner).$$

由初等性，函数 g 可以在 M中选取。

$7'$ 我们有 $\dot{z} := g(\dot{x}) \in$ 包(M, V_α)，且 $\dot{z}^G \in$ 包$(M, V_\alpha)[G]$。

$8'$ 设 $p \in G$ 使得 $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\widehat{M}} \dot{x} \in \dot{d}$。由于 $\dot{x} \in e$，我们有 $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\widehat{M}} \dot{f}(\dot{x}) = \dot{z}$，因而$\dot{f}^G(\dot{x}^G) = \dot{z}^G$。

$9'$ 因此，$x_0 = f(x) = \dot{f}^G(\dot{x}^G) = \dot{z}^G \in$ 包$(M,\ V_\alpha)[G]$.

□

﹀ ﹀[1.7.5] **命题**。设 $M,\ N$为虚拟模型，并设 $\alpha \in M \cap N$。假设

$$\widehat{M} \restriction \alpha = \widehat{N} \restriction \alpha \models \mathsf{ZFC}^-$$

并且 $M \cong_\alpha N$。设 $\mathbb{P} \in M \cap V_\alpha$，并设 $G \in V$满足 $G \rightsquigarrow \widehat{M}^{\mathbb{P}}$。那么

$$\mathbb{P} \in N \cap V_\alpha, \quad G \rightsquigarrow \widehat{N}^{\mathbb{P}}, \quad M[G] \cong_\alpha N[G], \quad M^G \cong_\alpha N^G.$$

此外，见证 $M[G] \cong_\alpha N[G]$ 的同构扩展了见证$M^G \cong_\alpha N^G$ 的同构，而后者又扩展了见证 $M \cong_\alpha N$ 的同构。

证明。

1° $M \cong_\alpha N$蕴含 $M \cap V_\alpha = N \cap V_\alpha$，因此 $\mathbb{P} \in N \cap V_\alpha$。$G \rightsquigarrow \widehat{N}^{\mathbb{P}}$ 显然 s.

2°我们将在下文验证 $M[G] \cong_\alpha N[G]$，并且见证这一事实的同构扩展了见证 $M \cong_\alpha N$ 的同构。由于 M^G 和 N^G 是作为相应的基模型计算得到的，我们便可通过受限同构立即得到 $M^G \cong_\alpha N^G$。

3°设 $F \colon$ 包$(M,\ V_\alpha) \cong$包$(N,\ V_\alpha)$ 满足 $F[M] = N$。

4°根据 [1.7, 4], 中的每个元素 包$(M[G],\ V_\alpha)$ 都具有如下形式：$\dot{x}^G$其中 $\dot{x} \in$包$(M,\ V_\alpha)^{\mathbb{P}}$。此外，$\dot{y}^G \in$包$(N[G],\ V_\alpha)$ 对每个 $\dot{y} \in$包$(N,\ V_\alpha)^{\mathbb{P}}$。

5°因此，我们可以通过令 $F[G](\dot{x}^G) := F(\dot{x})^G$（对 $\dot{x} \in$包$(M,\ V_\alpha)^{\mathbb{P}}$）来定义 $F[G] \colon$ 包$(M[G],\ V_\alpha) \to$包$(N[G],\ V_\alpha)$。我们要证明 $F[G]$ 是一个同构，$(F[G])[M[G]] = N[G]$，并且 $F[G] \restriction$包$(M,\ V_\alpha) = F$。

6°**断言**。对于 $* \in \{\in, =\}$和 $\dot{x}_0,\ \dot{x}_1 \in$包$(M,\ V_\alpha)^{\mathbb{P}}$，我们有

$$\dot{x}_0^G * \dot{x}_1^G \iff F(\dot{x}_0)^G * F(\dot{x}_1)^G.$$

证明。

$$\dot{x}_0^G * \dot{x}_1^G \iff (\exists p \in G)\mathsf{Hull}(M, V_\alpha) \models (p \Vdash \dot{x}_0 * \dot{x}_1) \tag{5}$$
$$\iff (\exists p \in G)\mathsf{Hull}(N, V_\alpha) \models (p \Vdash F(\dot{x}_0) * F(\dot{x}_1)) \tag{6}$$
$$\iff F(\dot{x}_0)^G * F(\dot{x}_1)^G, \tag{7}$$

其中（6）由 $F \restriction V_\alpha = \mathsf{id}$ 和 $\mathbb{P} \in V_\alpha$得出。 □

7° 因此， $F[G]$ 是定义良好的单射，且与 $\in$一致。

8° 类似地，我们有单射

$$F^{-1}[G] : \mathsf{Hull}(N[G], V_\alpha) \to \mathsf{Hull}(M[G], V_\alpha)$$

与 $\in$一致。

9° 显然， $F[G] \circ F^{-1}[G] = \mathsf{id}$ 和 $F^{-1}[G] \circ F[G] = \mathsf{id}$，由此得出结论：

$$F[G] : \mathsf{Hull}(M[G], V_\alpha) \cong \mathsf{Hull}(N[G], V_\alpha).$$

10° 对于 $x \in$ 包$(M,\ V_\alpha)$，我们有

$$F[G](x) = F[G](\check{x}^G) = F(\check{x})^G = ((F(x))\check{}\,)^G = F(x).$$

11°因此，仍需证明（$F[G]$）$[M[G]] = N[G]$，即（$F[G]$）$[M[G]] \subseteq N[G]$和（$F^{-1}[G]$）$[N[G]] \subseteq M[G]$。

12° 这里我们只考虑第一个合取项。设 $y \in M[G]$ 任意。

13°根据 $M[G]$的定义，我们有 $y = \dot{x}^G$，其中某个 $x \in M^{\mathbb{P}} \subseteq \mathsf{Hull}(M,\ V_\alpha)^{\mathbb{P}}$。

14°根据 $F[G]$的定义，我们有 $F[G]\ (y)\ = F\ (\dot{x})\ ^G$。

15° 由于 $\dot{x} \in M$ 和 $F[M] = N$，我们有 $F\ (\dot{x})\ \in N^{\mathbb{P}}$，因此 $F[G]\ (y)\ = F\ (\dot{x})\ ^G \in N[G\quad]$.

□

[1.7.6] **推论**。 设 $M,\ N$为可数虚拟模型，并设 $\alpha \in M \cap N$。假设

$$\widehat{M} \restriction \alpha = \widehat{N} \restriction \alpha \models \mathsf{ZFC}^-$$

并且 $M \lhd_\alpha N$。令 $\mathbb{P} \in M \cap V_\alpha$，并令 $G \in V$满足 $G \rightsquigarrow \widehat{M}^{\mathbb{P}}$。那么 $M[G]$和 $N[G]$是可数的，并且 $M[G] \lhd_\alpha N[G]$。

证明。

1° $M,\ N$满射到 $M[G],\ N[G]$，因此 $M[G],\ N[G]$是可数的。2°令 $M' \in N$是 V中的一个虚拟模型，满足 $M \cong_\alpha M'$。3°由 [1.7。5],可得 $M[G] \cong_\alpha M'[G] \in N[G]$。4°因此， $M[G] \lhd_\alpha N[G]$。

□

[1.7.7] **引理**。 令 M 为一个虚拟模型，并令 $\alpha \in M$ 满足 $M \restriction \alpha \models \mathsf{ZFC}^-$。假设 M是由 α生成的。令 $\mathbb{P} \in M \cap V_\alpha$，并令 $G \in V$满足 $G \rightsquigarrow \widehat{M}^{\mathbb{P}}$。那么 $M[G]$和 M^G是由α生成的。

证明。 要看出 $M[G]$ 是由 α生成的，按如下方式计算：

$$\widehat{M[G]} = \widehat{M}[G] = \mathsf{Hull}(M, V_\alpha)[G] = \mathsf{Hull}(M[G], V_\alpha).$$

要看出 M^G是由 α生成的，回想一下 $M \prec M^G \prec \widehat{M}$。 □

[1.7.8] **命题**。 设 M是一个虚拟模型，并设 $\alpha \in M$满足 $M \restriction \alpha \models \mathsf{ZFC}^-$，令 $\mathbb{P} \in M \cap V_\alpha$，且令 $G \in V$满足 $G \rightsquigarrow \widehat{M}^{\mathbb{P}}$。那么 $(M \downarrow \alpha)[G] = M[G] \downarrow \alpha$且 $(M \downarrow \alpha)^G = M^G \downarrow \alpha$。

证明。 由于 $M \downarrow \alpha \cong_\alpha M$，我们有 $(M \downarrow \alpha)[G] \cong_\alpha M[G]$。由于 $M \downarrow \alpha$ 是由 α生成的，$(M \downarrow \alpha)$ $[G]$ 也如此，因此我们得到

$$(M \downarrow \alpha)[G] = M[G] \downarrow \alpha.$$

另一部分完全类似。 □

1.8 半适当迫迫

[1.8.1] **D** **定义**。设 $\mathbb{P}$ 是一个偏序集，$\theta > 2^{2^{|\mathrm{trcl}(\mathbb{P})|}}$ 是正则的，并且 $M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P})$ 是可数的 e.

a. 对于 $G \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}}$，我们称 G 是半$M^{\mathbb{P}}$泛型，如果 $M[G] \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$。
b. 对于 $p \in \mathbb{P}$，我们称 p 是半$M^{\mathbb{P}}$泛型，如果 $p \Vdash M[\dot{G}] \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$。

[1.8.2] **引理**。设 $\mathbb{P}$ 是一个偏序集，$\theta > 2^{2^{|\mathrm{trcl}(\mathbb{P})|}}$ 是正则的，且 $M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P})$ 是可数的。若$p \in \mathbb{P}$ 是半-$M^{\mathbb{P}}$-泛型，则 $p \Vdash \omega_1 = \omega_1^V$。

证明。

1° 设 $g \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}}$ 满足 $p \in g$。2° 由于 $M[g] \prec H_\theta^{V[g]}$，有“$\omega_1$ 是满足性质 $\sup(M[g] \cap \xi) < \xi$ 的最小序数 ξ”。3° 由于 $M[g] \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$ 且最后一个集合是一个序数，我们看到 ξ 的解恰好是 $\xi = \omega_1^V$。

□

[1.8.3] **定义**。设 $\mathbb{P}$ 是一个偏序集，且 $\theta > 2^{2^{|\mathrm{trcl}(\mathbb{P})|}}$ 是正则的。偏序集 $\mathbb{P}$ 是半适当的，如果对于每个可数 $M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P})$ 和每个 $p \in \mathbb{P} \cap M$，都存在一个半 -$M^{\mathbb{P}}$- 泛型的 $q \leq p$。

[1.8.4] **命题**。假设 $\mathbb{P}$ 是半适当的。那么：

a. $\mathbb{P} \Vdash \omega_1 = \omega_1^V$b. 对每个平稳的 $S \subseteq \omega_1$，都有 $\mathbb{P} \Vdash$ （S 是平稳的）。

证明。

1° 设 θ 是充分大的正则基数。

2° 根据 [1.8.2], 只需证明a 即可

$$D := \{p \in \mathbb{P} : (\exists M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P}))(|M| = \omega \wedge p \text{ is semi-} M^{\mathbb{P}}\text{-generic})\}$$

在 $\mathbb{P}$ 中稠密。

3° 令 $p_0 \in \mathbb{P}$ 任意，并令 $M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P}, p_0)$ 可数。4° 由于 $\mathbb{P}$ 是半适当的，因此存在 $p \leq p_0$，它是半-$M^{\mathbb{P}}$-泛型的。显然，$p \in D$。5° 对于 b，假设 S 在 ω_1 中是平稳的，且 $\Vdash f : \omega_1 \to \omega_1$，并令 $p \in \mathbb{P}$ 任意。我们想要找到 $q \leq p$ 和 $\xi \in S$，使得 $q \Vdash f[\xi] \subseteq \xi$。$6^\circ$ 所有可数 $M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P}, p, f)$ 构成 $[H_\theta]^\omega$ 中的闭无界集。7° 由于 $S \subseteq \omega_1$ 在 ω_1 中是平稳的，存在一个可数的 $M \prec (H_\theta, \in, \mathbb{P}, p, f)$，满足$\xi := M \cap \omega_1 \in S$。$8^\circ$ 存在 $q \leq p$，它是半-$M^{\mathbb{P}}$-泛型的。9° 对于每个满足 $q \in g$ 的 $g \rightsquigarrow M^{\mathbb{P}}$，我们有 $\xi = M[g] \cap \omega_1$ 和 $M[g] \models \dot{f}^g : \omega_1 \to \omega_1$。由此得出 $f^g[\xi] \subseteq \xi$。

□

[1.8.5] **定义**。设 α 是一个 beth 不动点，M 是一个可数的 α-强虚拟模型，且$\mathbb{P} \in V_\alpha \cap M$ 是一个偏序集。

a. 对于 $G \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}}$，我们称 G 是半$M^{\mathbb{P}}$泛型的，如果 $M[G] \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$。
b. 对于 $p \in \mathbb{P}$，我们称 p 是半$M^{\mathbb{P}}$泛型的，如果 $p \Vdash M[\dot{G}] \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$。

[1.8.6] **命题**。 设 α 是一个 beth 不动点，设 M 是一个可数 α-强虚拟模型，设$\mathbb{P} \in V_\alpha \cap M$ 是一个偏序集，并设 $\theta > 2^{2^{|\mathrm{trcl}(\mathbb{P})|}}$ 是满足条件 $\theta < \alpha$的正则基数。对于每个 $G \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}}$，都有 G按照 $M^{\mathbb{P}}$.8. [1的含义是半5] 泛型的，当且仅当它按照 $H_\theta \cap M)^{\mathbb{P}}$.8. [1的含义是半泛型的1]。

□

[1.8.7] **命题**。 设 γ 满足 $V_\gamma \models \mathrm{ZFC}^-$，设 M, N 是可数的 γ-强虚拟模型，设$\mathbb{P} \in M \cap V_\gamma$，并设 $G \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}}$。假设 $M \cong_\gamma N$。那么 G是半-$M^{\mathbb{P}}$-泛型的，当且仅当它是半-$N^{\mathbb{P}}$-泛型的。

证明。 我们有 $M[G] \cong_\gamma N[G]$，因此

$$M[G] \cap \omega_1^V = N[G] \cap \omega_1^V.$$

□

[1.8.8] **推论**。 设 γ 满足 $V_\gamma \models \mathrm{ZFC}^-$，设 M 是一个可数的 γ-强虚拟模型，设 $\mathbb{P} \in M \cap V_\gamma$，并设 $p \in \mathbb{P}$。那么 p 是半 -$M^{\mathbb{P}}$- 泛型的，当且仅当它是半 -$(M \downarrow \gamma)^{\mathbb{P}}$- 泛型的。 □

1.9 虚拟模型的强迫迭代扩张

[1.9.1] **定义**。 一个强迫迭代（采用支撑 E）是一个族 $\vec{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}_\alpha : \alpha \in E)$，其中 :

a. $E \subseteq$序数类和 $E \neq \emptyset$; b. 对所有 α， $\mathbb{P}_\alpha$ 都是一个偏序集; c. 对所有 E中的 $\alpha \leq \beta$， $\mathbb{P}_\alpha$ 都是 $\mathbb{P}_\beta$ 的完全子偏序集。

[1.9.2] **命题**。 设 $\vec{\mathbb{P}}$ 是一个支撑为 E 的迭代，且 $\mathbb{Q} := \cup\{\mathbb{P}_\alpha : \alpha \in E\}$。那么 $\vec{\mathbb{P}}^\frown \mathbb{Q}$ 是一个支撑为 $E \cup \{\sup\{\xi + 1 : \xi \in E\}\}$的迭代。

[1.9.3]**定义**。 设 $\vec{\mathbb{P}}$是一个支撑为 E的强迫迭代，设 $\delta \in E$，设 $\alpha \in E \cap \delta$，并设 $G_\delta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\delta}$。那么泛型 α的限制 G_δ 定义为 $G_\alpha := G_\delta \cap \mathbb{P}_\alpha$。

[1.9.4] **注**。 成立的是 $G_\alpha \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。

[1.9.5] **定义**。 设 A 为可容许的，并设 $\vec{\mathbb{P}}$ 为一个支撑为 E的强迫迭代。若迭代 $\vec{\mathbb{P}}$ 满足¬，则称其在 A 上是逐点可定义的： $\mathbb{P} \subseteq A$ ，且对每个 $\alpha \in E$，常数 $\mathbb{P}_\alpha$ 都可由参数 α在A 上定义。

[1.9.6] **定义**。 设 A 为可容许的，并设 $\vec{\mathbb{P}}$ 为一个支撑为 E的迭代。假设 $\vec{\mathbb{P}}$ 在 A上逐点可定义。设 $M \prec A$，设 $\delta \in E$，并设 $G_\delta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\delta}$。 A 的初等子模型$M_{<\alpha}^{G_\delta}$ 和 $M_\alpha^{G_\delta}$，以及（在 $V[G_\alpha]$内） $A[G_\alpha]$ 的初等子模型 $M_\alpha[G_\delta]$ ，通过对 $\alpha \in E \cap [0, \delta]$进行递归来定义如下。

a. $M_{<\alpha}^{G_\delta} := M \cup \bigcup_{\xi \in E \cap \alpha} M_\xi^{G_\delta}$

b. 若 $\alpha \in M_{<\alpha}^{G_\delta}$，我们定义 $M_\alpha[G_\delta] := M_{<\alpha}^{G_\delta}[G_\alpha]$和 $M_\alpha^{G_\delta} := (M_{<\alpha}^{G_\delta})^{G_\alpha} = M_\alpha[G_\delta] \cap A$;

c. 若 $\alpha \notin M_{<\alpha}^{G_\delta}$，我们定义 $M_\alpha^{G_\delta} := M_{<\alpha}^{G_\delta}$，并将 $M_\alpha[G_\delta]$ 留空未定义。

[1.9.7] **命题**。 前面的定义是正确的，并且对于所有 $\alpha, \beta \in E$，我们有：

a. $M_{<\alpha}^{G_\delta} \prec M_\alpha^{G_\delta} \prec A$b. $M_\alpha^{G_\delta} \prec M_{<\beta}^{G_\delta}$ 当 $\alpha < \beta$ 时; c. $M_\alpha[G_\delta] \prec A[G_\alpha]$ 当 $\alpha \in M_{<\alpha}^{G_\delta}$ 时。

□

[1.9.8] **命题**。 设 A 可容许，设 $\vec{\mathbb{P}}$ 是一个支撑为 E 且在 A上逐点可定义的迭代，设 $M \prec A$，设 $\delta_1, \delta_2 \in E$且 $\delta_1 \leq \delta_2$，设 $G_{\delta_2} \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_{\delta_2}}$。那么对所有 $\alpha \in E \cap [0, \delta_1]$，都有：

a. $M_{<\alpha}^{G_{\delta_1}} = M_{<\alpha}^{G_{\delta_2}}$b. $M_{\alpha}^{G_{\delta_1}} = M_{\alpha}^{G_{\delta_2}}$c. $M_\alpha[G_{\delta_1}] = M_\alpha[G_{\delta_2}]$
只要其中任意一个有定义。

□

[1.9.9] **命题**。设 A 是可容许的，设 $\vec{\mathbb{P}}$ 是一个支撑为 E 且在 A上逐点可定义的迭代，设 $M \prec A$，设 $\delta \in E$，设 $G_\delta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\delta}$，并设 $\alpha \in E \cap [0, \delta]$。假设 $\alpha \in M$。那么

$$M_\alpha^{G_\delta} = M^{G_\alpha}, \quad M_\alpha[G_\delta] = M[G_\alpha].$$

证明。

1° 只需证明 $M_\alpha[G_\delta] = M[G_\alpha]$。

2° 我们有 $M \subseteq M_{<\alpha}^{G_\delta}$，因此得出

$$M[G_\alpha] \subseteq M_{<\alpha}^{G_\delta}[G_\alpha] = M_\alpha[G_\delta].$$

3° 现在考虑另一个包含关系。我们先验证

$$M_{<\alpha}^{G_\delta} \subseteq M[G_\alpha].$$

4° 这可以通过归纳证明

$$M_\xi^{G_\delta} \subseteq M[G_\alpha]$$

对所有 $\xi \in E \cap \alpha$。

5° 假设该命题对所有 $\eta \in E \cap \xi$ 均成立，下面验证它对 ξ也成立。6° 根据假设，

$$M_{<\xi}^{G_\delta} = \bigcup_{\eta \in E \cap \xi} M_\eta^{G_\delta} \subseteq M[G_\alpha].$$

7° 若 $\xi \notin M_{<\xi}^{G_\delta}$，则

$$M_\xi^{G_\delta} = M_{<\xi}^{G_\delta} \subseteq M[G_\alpha].$$

因此，设 $\xi \in M_{<\xi}^{G_\delta}$

8° 任取 $x \in M_\xi^{G_\delta}$。那么存在 $\dot{x} \in M_{<\xi}^{G_\delta} \cap V^{\mathbb{P}_\xi}$，使得 $x = \dot{x}^{G_\xi}$。

9° 根据 6°，我们有 $\dot{x},\ \xi \in M[G_\alpha]$。

10° 由于还有 $G_\alpha \in M[G_\alpha]$，我们得出 $G_\xi \in M[G_\alpha]$。

11° 因此，$x = \dot{x}^{G_\xi} \in M[G_\alpha]$。

12° 归纳证明至此完成。现在回到重点，也就是 $M_\alpha[G_\delta] \subseteq M[G_\alpha]$.

13° 任取 $x \in M_\alpha[G_\delta]$。那么存在 $\dot{x} \in M_{<\alpha}^{G_\delta} \cap V^{\mathbb{P}_\alpha}$，使得 $x = \dot{x}^{G_\alpha}$。

14° 根据刚才证明的结论，我们有 $\dot{x} \in M[G_\alpha]$。

15° 由于 $G_\alpha \in M[G_\alpha]$ 也成立，我们得出 $x = \dot{x}^{G_\alpha} \in M[G_\alpha]$。

□

[1.9.10] **记号**。设 A 为可容许的，设 $\vec{\mathbb{P}}$ 为一个支撑为 E 且在 A上逐点可定义的迭代，设 $M \prec A$，设 $\delta \in E$，设 $G_\delta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\delta}$，并设 $\alpha \in E \cap [0, \delta]$。下文我们将记作

$$M^{G_\alpha} := M_\alpha^{G_\delta}, \quad M[G_\alpha] := M_\alpha[G_\delta].$$

根据前两个命题，这种记号不会造成歧义。

[1.9.11] **命题**。设 A 可容许，设 $\vec{\mathbb{P}}$ 是一个支撑为 E 、在 A 上逐点可定义的迭代，设 $M \prec A$，设 α, $\delta \in E$且 $\alpha \leq \delta$，并设 $G_\delta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\delta}$。假设 $\delta \in M^{G_\alpha}$。那么

$$M[G_\delta] = M^{G_\alpha}[G_\delta] \text{ and } M^{G_\delta} = (M^{G_\alpha})^{G_\delta}.$$

证明。事实上这显然成立。也就是说，第二个等式仅仅表明，按照迭代（ M: M^{G_δ}）将 $\mathbb{P}_\xi$ 扩展到 $\xi \in E \cap [0, \delta]$，与按照（ M: M^{G_α}）将 $\mathbb{P}_\xi$ 扩展到 $\xi \in E \cap [0, \alpha]$，然后按照（ M^{G_α}: M^{G_α}) 将 $^{G_\delta}$ 扩展到（$\mathbb{P}_\xi$, $\xi \in E \cap$）α，是一样的。只有在 δ] 的情形下才需要补充说明，此时我们应用 e of [1.7.2]。对于第一个等式，我们现在有

$$M^{G_\alpha}[G_\delta] = (M^{G_\alpha})^{G_\delta}[G_\delta] = M^{G_\delta}[G_\delta] = (M^{G_\delta}_{<\delta})^{G_\delta}[G_\delta] = M^{G_\delta}_{<\delta}[G_\delta] = M[G_\delta],$$

其中，第一个等式由 [1.7.2]，得出，第二个等式由我们刚刚证明的结果得出，第三个根据定义得出，第四个同样由 [1.7.2]，得出，第五个则根据定义得出。 □

[1.9.12] **命题**。设 γ 使得 $V_\gamma \models \mathsf{ZFC}^-$，设 A 可容许，设 $M \prec A$ 是一个 γ-强虚拟模型，设 $\mathbb{P} \in V_\gamma$ 是一个支撑为 E 的迭代，且它在 A 上逐点可定义，设 $\alpha \in E$，并设 $G_\alpha \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。假设 $M[G_\alpha]$ 已定义。那么 $M[G_\alpha]$ 在 $V[G_\alpha]$ 中是 γ-强的。

证明。这立即由 [1.7.3] 得出。 □

[1.9.13] **命题**。设 γ 使得 $V_\gamma \models \mathsf{ZFC}^-$，设 A 可容许，设 M, $N \prec A$ 是 γ-强虚拟模型，设 $\mathbb{P} \in V_\gamma$ 是一个支撑为 E 且在 A上逐点可定义的迭代，设$\alpha \in E$，并设 $G_\alpha \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。假设 $M \cong_\gamma N$。那么 $M^{G_\alpha} \cong_\gamma N^{G_\alpha}$，且见证这一事实的同构扩展了见证 $M \cong_\gamma N$ 的同构。

证明。这由对 α 的归纳得出。为处理后继步骤，我们只需应用 [1.7.5]。由于这些同构彼此扩展，极限步骤只需取先前同构的并即可处理。

□

[1.9.14] **命题**。设 γ 使得 $V_\gamma \models \mathsf{ZFC}^-$，设 A 可容许，设 $M, N \prec A$ 是 γ-强虚拟模型，设 $\mathbb{P} \in V_\gamma$ 是一个支撑为 E 、在 A上逐点可定义的迭代，设 $\alpha \in E$，并设$G_\alpha \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。假设 $M[G_\alpha]$有定义。那么 $N[G_\alpha]$ 也有定义，且 $M[G_\alpha] \cong_\gamma N[G_\alpha]$。

证明。这由前一个命题和 [1.7.5] 得出。 □

2 半适当迭代

2.1 迭代的准备工作

[2.1.1] **定义**。 半适当迭代的 蓝图是一个有序对 $(\mathbb{V},\mathbf{Q})$，满足

a. $\mathbb{V}=(V_\kappa,\in,U)$, b. κ 是不可达基数，c. $U\subseteq V_\kappa$, d. $\mathbf{Q}:\ \kappa\times V_\kappa\to V_\kappa$ 在 $\mathbb{V}$上无需参数即可定义，e. 对所有 $\alpha<\kappa$ 和所有 $\mathbb{P}\in V_\kappa$，若 $\mathbb{P}$ 是偏序集，则$\mathbf{Q}(\alpha,\mathbb{P})\in V^{\mathbb{P}}$ 且 $\Vdash_{\mathbb{P}}$“$\mathbf{Q}(\alpha,\mathbb{Q})$是半适当的”。

[2.1.2] **声明**。 我们固定一个半适当迭代的蓝图$(\mathbb{V},\mathbf{Q})$，其中 $\mathbb{V}=(V_\kappa,\in,U)$。在本笔记余下部分，我们将假设虚拟模型的默认语言为 $\{\in,U\}$，其中 U是一元谓词。

[2.1.3] **记号**。

a. 对于 $\alpha<\kappa$，我们记 $\mathbb{V}_\alpha:=(V_\alpha,\in,U\cap V_\alpha)$。
b. 我们记 $\mathscr{E}:=\mathscr{E}_{\mathbb{V}}=\{\alpha<\kappa:\ \mathbb{V}_\alpha\prec\mathbb{V}\}$。c. $\mathscr{E}^+:=\{\alpha+1:\ \alpha\in\mathscr{E}\}$d. $\mathscr{E}^*:=\mathscr{E}\cup\mathscr{E}^+$。

[2.1.4] **定义**。

a. 对于 $\alpha\in\mathscr{E}$，我们称虚拟模型 M 是 α-正确的，如果 $\mathbb{V}_\alpha\prec M$。b. 对于 $\alpha\in\mathscr{E}$，我们定义集合

$$\mathcal{C}_\alpha:=\{M: M \text{ is countable, } \alpha\text{-correct, and } \alpha\text{-generated virtual model}\}.$$

c. 对于 $S\subseteq$序数类，我们定义

$$\mathcal{C}_S:=\bigcup_{\alpha\in S\cap\mathscr{E}}\mathcal{C}_\alpha.$$

[2.1.5] **注**。 传统上，强迫迭代按如下方式构造：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0 &:= \{1\}\\ \mathbb{P}_{\alpha+1} &:= \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha\\ \mathbb{P}_\lambda &\subseteq \{p:(\forall\alpha<\lambda)(p\restriction\alpha\in\mathbb{P}_\alpha)\}\end{aligned}$$

(λ 极限)。在极限步骤中，要求线程满足某种“支撑条件”。在我们的迭代中，我们将把步骤加倍：在添加偏序集 $\mathbb{Q}_\alpha$之后，还将增加一个添加“脚手架”的步骤。在极限阶段，线程将由该脚手架控制。

[2.1.6] **记号**。

a. 为方便起见，迭代将以 $\mathscr{E}^*$ 为索引，且初始偏序集 $\mathbb{P}_{\min\mathscr{E}}$ 不等于 $\{1\}$。尽管如此，偏序集 $\mathbb{P}_{\min\mathscr{E}}$ 仍将是平凡的。b. 阶段 $\alpha\in\mathscr{E}^+$ 对应于添加一个偏序集。c. 阶段 α，其中 α 是 $\mathscr{E}$ 的后继点，对应于添加一个脚手架的操作。d. $\mathscr{E}$ 的极限点是迭代的极限阶段。e. $\mathbb{P}_\alpha$-泛型的规范名称记作 G_α （对于 $\alpha\in\mathscr{E}^*$）。相应地，$\mathbb{P}_\alpha$-泛型记作 G_α；对于 $\beta\in\mathscr{E}^*\cap\alpha$，我们将写作 $G_\beta:=G_\alpha\cap\mathbb{P}_\beta$。

[2.1.7] **注**。 迭代（$\mathbb{P}_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{E}^*$）通过递归定义。定义的递归步骤将在下一小节中描述。

2.2 定义的递归步骤

[2.2.1] **声明**。

a. 设 $\delta\in\mathscr{E}$，并设 $\vec{\mathbb{P}}=(\mathbb{P}_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{E}^*\cap\delta)$ 是一个强迫迭代。 b. 假设 $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{V}$ 上逐点可定义。
c. 假设对于每个 $\alpha\in\mathscr{E}\cap\delta$ 和每个 $p\in\mathbb{P}_\alpha$，都有 $p=(w_p,\mathcal{M}_p)$，其中 w_p 是有限部分函数，且 $\mathscr{E}\cap\alpha\to V_\kappa$ 是某个有限 $\mathcal{M}_p\subseteq\mathcal{C}_{\leq\alpha}$。 d. 设 $(\dot{\mathbb{Q}}_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{E}\cap\delta)$ 是满足 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha\in V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 的名称序列，并且

$$\mathbb{P}_\alpha\Vdash\dot{\mathbb{Q}}_\alpha\text{ is a semi-proper poset}$$

对于每个 α。

[2.2.2] **定义**。假设 $\delta=\min\mathscr{E}$。那么偏序集 $\mathbb{P}_\delta$ 由所有形如 $p=(w_p,\mathcal{M}_p)$ 的对组成，其中 $w_p=\emptyset$，且 $\mathcal{M}_p$ 是 $\mathcal{C}_\delta$ 的有限子集。序关系 $q\leq p$ 在 $\mathbb{P}_\delta$ 中成立，当且仅当 $\mathcal{M}_q\supseteq\mathcal{M}_p$。

[2.2.3] **定义**。设 $M\in\mathcal{C}_{\geq\delta}$、设 $\alpha\in\mathscr{E}\cap\delta$，并设 $G_\alpha\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。若满足以下任一情形，我们称 M^{G_α} 在 δ 处活跃：

a. 在 $\mathscr{E}$ 和 $\gamma\in M^{G_\alpha}$ 中存在序数 δ 的一个前驱 γ；b. 序数 δ 是 $\mathscr{E}$ 的极限点，且 $\sup(M^{G_\alpha}\cap\mathscr{E}\cap\delta)=\delta$。

[2.2.4] **定义**。设 $\mathcal{M}\in\mathcal{C}_{[0,\kappa]}$、设 $\alpha\in\mathscr{E}\cap\delta$，并设 $G_\alpha\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。我们定义

$$\mathcal{M}^\delta[G_\alpha]:=\{M\downarrow\delta:M\in\mathcal{M},\ M^{G_\alpha}\text{ is active at }\delta\}.$$

[2.2.5] **定义**。设 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{C}_\delta$、设 $\alpha<\delta$，并设 $G_\alpha\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$。集合 $\mathcal{M}$ 是弱 $\lhd_\delta$-链，相对于 G_α，若对每个 M，$N\in\mathcal{M}$，均成立：

a. $\omega_1\cap M=\omega_1\cap N\implies M=N$;
b. $\omega_1\cap M<\omega_1\cap N\implies M\lhd_\delta N_\alpha^{G_\alpha}$.

[2.2.6] **注**。如果第二点中的模型 $N_\alpha^{G_\alpha}$被替换为 N，我们就得到通常意义上的$\lhd_\delta$-链。

[2.2.7] **注**。假设 $\alpha\leq\beta<\delta$，$G_\beta\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\beta}$，且 $\mathcal{M}$ 是相对于 G_α的弱 $\lhd_\delta$-链。那么，$\mathcal{M}$ 是相对于 G_β的弱 $\lhd_\delta$-链。

[2.2.8] **记号**。令 $p=(w_p,\ \mathcal{M}_p)$，其中 w_p是从 $\mathscr{E}$到 $\mathcal{M}_p\subseteq\mathcal{C}_{[0,\kappa]}$的偏函数，并令 $\alpha\in\mathscr{E}$。那么

$$\mathcal{M}_p\downarrow\alpha:=\{M\downarrow\alpha:M\in\mathcal{M}_p\},$$
$$p\restriction\alpha:=(w_p\restriction\alpha,\mathcal{M}_p\downarrow\alpha),$$
$$p\restriction(\alpha+1):=(w_p\restriction(\alpha+1),\mathcal{M}_p\downarrow\alpha).$$

[2.2.9] **定义**。假设 δ 在 $\mathscr{E}$内有一个前驱 γ。偏序集 $\mathbb{P}_\delta$ 由所有满足以下条件的有序对$p=(w_p,\ \mathcal{M}_p)$组成：

a. 对象 w_p 是一个有限部分函数 $\mathscr{E}\cap\delta\to V_\kappa$；b. 对象 $\mathcal{M}_p$ 是 $\mathcal{C}_{\leq\delta}$的一个有限子集；c. 对每个 $\alpha\in\mathscr{E}^*\cap\delta$都有 $p\restriction\alpha\in\mathbb{P}_\alpha$；
d. $p\restriction(\gamma+1)\Vdash_{\mathbb{P}_{\gamma+1}}$（$\mathcal{M}_p^\delta[\dot{G}_\gamma]$ 是相对于 $\dot{G}_{\gamma+1}$的弱 $\lhd_\delta$-链）；
e. 如果 $\gamma\in$属于定义域(w_p)，那么

$$p\restriction\gamma\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}(\forall M\in\mathcal{M}_p^\delta[\dot{G}_\gamma])(w_p(\gamma)\text{ is semi-}M[\dot{G}_\gamma]^{\dot{\mathbb{Q}}_\gamma}\text{-generic}).$$

当且仅当以下条件成立时，序关系 $q\leq p$ 在 $\mathbb{P}_\delta$ 成立：

f. $q\restriction\alpha\leq_{\mathbb{P}_\alpha}p\restriction\alpha$ 对每个 $\alpha\in\mathscr{E}^*\cap\delta$；

g. $\mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}_\delta \supseteq \mathcal{M}_p \cap \mathcal{C}_\delta$。

[2.2.10] **定义**。 假设 δ 是 $\mathscr{E}$的极限点。那么偏序集 $\mathbb{P}_\delta$ 由所有满足以下条件的对 $p = (w_p, \mathcal{M}_p)$构成：

a. 对象 w_p 是一个有限部分函数 $\mathscr{E} \cap \delta \to V_\kappa$；b. 对象 $\mathcal{M}_p$ 是 $\mathcal{C}_{\leq\delta}$的有限子集；c. $p \restriction \alpha \in \mathbb{P}_\alpha$ 对于每个 $\alpha \in \mathscr{E}^* \cap \delta$；d. 存在 $\delta_0 < \delta$，使得对于每个 $\alpha \in \mathscr{E} \cap (\delta_0, \delta)$，都有

$$p \restriction (\alpha+1) \Vdash_{\mathbb{P}_{\alpha+1}} (\mathcal{M}_p^\delta[\dot{G}_\alpha] \text{ is a weak } \lhd_\delta\text{-chain w.r.t. } \dot{G}_{\alpha+1}).$$

偏序 $q \leq p$ 在 $\mathbb{P}_\delta$ 中成立，当且仅当：

e. $q \restriction \alpha \leq_{\mathbb{P}_\alpha} p \restriction \alpha$ 对于每个 $\alpha \in \mathscr{E}^* \cap \delta$；

f. $\mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}_\delta \supseteq \mathcal{M}_p \cap \mathcal{C}_\delta$。

[2.2.11] **定义**。 $\mathbb{Q}_\delta :=\mathbf{Q}(\delta, \mathbb{P}_\delta)$

[2.2.12] **定义**。 偏序集 $\mathbb{P}_{\delta+1}$ 由满足以下条件的所有有序对（$w_p, \mathcal{M}_p$）组成：

a. 对象 w_p 是类型为 $\mathscr{E} \cap (\delta+1) \to V_\kappa$的有限部分函数；b. 对象 $\mathcal{M}_p$ 是 $\mathcal{C}_{\leq\delta}$的有限子集；c. $p \restriction \delta \in \mathbb{P}_\delta$d. 若 $\delta \in \mathrm{dom}(w_p)$，则 $w_p(\delta)$ 是一个元素 $\mathbb{Q}_\delta$的规范 $\mathbb{P}_\delta$-名称。

序关系 $q \leq p$ 在 $\mathbb{P}_{\delta+1}$ 中成立，当且仅当：

e. $q \restriction \delta \leq_{\mathbb{P}_\delta} p \restriction \delta$f. 若 $\delta \in \mathrm{dom}(w_p)$，则 $\delta \in \mathrm{dom}(w_q)$ 且 $q \restriction \delta \Vdash_{\mathbb{P}_\delta} w_q(\delta) \leq w_p(\delta)$。

2.3 基本性质

[2.3.1] **定义**。 由蓝图 ($\mathbb{V}$,**Q**) 给出的半适当迭代，是通过递归迭代第 2.2 小节的构造得到的。

[2.3.2] **定义**。 设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是偏序集，且 $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{P}$。假设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{Q}$的子序。那么，若满足以下条件，称 π为条件限制：

a. $(\forall p \in \mathbb{P})(\pi(p) = p)$, b. $(\forall p, q \in \mathbb{Q})(p \leq q \implies \pi(p) \leq \pi(q))$, c. $(\forall p \in \mathbb{P})(\forall q \in \mathbb{Q})(p \leq \pi(q) \implies p \parallel q)$.

[2.3.3] **命题**。 $(\mathbb{P}_\alpha : \alpha \in \mathscr{E}^*)$ 是定义良好的强迫迭代。对于 $\mathscr{E}^*$中的元素 $\alpha \leq \delta$，映射 $\mathbb{P}_\delta \to \mathbb{P}_\alpha : p \mapsto p \restriction \alpha$ 是条件限制。

证明。

1° 令 $\delta \in \mathscr{E}$，并递归地假设 $(\mathbb{P}_\alpha : \alpha \in \mathscr{E}^* \cap \delta)$ 已被正确地定义，且它是一个迭代。2° 现在我们可以定义偏序集 $\mathbb{P}_\delta$。我们需要验证，对于每个 $\alpha \in \mathscr{E}^* \cap \delta$，$\mathbb{P}_\alpha$ 都是 $\mathbb{P}_\delta$ 的完全子偏序集。3° 根据定义，显然 $\mathbb{P}_\alpha$ 是 $\mathbb{P}_\delta$的子序。为得到结论，只需验证映射 $\mathbb{P}_\delta \to \mathbb{P}_\alpha : p \mapsto p \restriction \alpha$ 是条件限制，这一点也显而易见。4° 现在我们可以定义偏序集 $\mathbb{P}_{\delta+1}$。5° 显然，$\mathbb{P}_\delta$ 是 $\mathbb{P}_{\delta+1}$ 的子序；验证映射 $\mathbb{P}_{\delta+1} \to \mathbb{P}_\delta : p \mapsto p \restriction \delta$ 是条件限制只是例行工作。因此，$\mathbb{P}_\delta$ 是 $\mathbb{P}_{\delta+1}$的完全子偏序集。

□

[2.3.4] **定义**。 $\mathbb{P}_\kappa := \bigcup_{\alpha\in\mathscr{E}^*}\mathbb{P}_\alpha$

[2.3.5] **命题**。 $(\mathbb{P}_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{E}^*\cup\{\kappa\})$ 是一个强迫迭代。映射 $\mathbb{P}_\kappa\to\mathbb{P}_\alpha:\ p\mapsto p\restriction\alpha$ 对所有 $\alpha\in\mathscr{E}^*$ 都是条件限制。

□

[2.3.6] **命题**。 令 $\delta\in\mathscr{E}$。

- 令 $p=(w_p,\mathcal{M}_p)$。那么 $p\in\mathbb{P}_\delta$ 当且仅当满足以下条件：a. w_p 是从 $\mathscr{E}\cap\delta$ 到 V_κ 的有限部分函数；b. $\mathcal{M}_p\in[\mathcal{C}_{\leq\delta}]^{<\omega}$ c. 对所有 $\gamma\in$ （$\min\mathscr{E},\delta]$，都存在 $\beta\in\mathscr{E}\cap\gamma$，使得对所有 $\alpha\in\mathscr{E}\cap[\beta,\gamma)$，

$$p\restriction(\alpha+1)\Vdash_{\mathbb{P}_{\alpha+1}}(\mathcal{M}_p^\gamma[\dot{G}_\alpha]\text{ is a weak }\lhd_\gamma\text{-chain w.r.t. }\dot{G}_{\alpha+1});$$

d. 对所有 $\beta\in\mathscr{E}\cap\delta$，以及 γ 是 $\mathscr{E}$ 中 β 的后继的情形，

$$\beta\in\mathrm{dom}(w_p)\implies p\restriction\beta\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}(\forall M\in\mathcal{M}_p^\gamma[\dot{G}_\beta])(w_p(\beta)\text{ is semi-}M[\dot{G}_\beta]^{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\text{-generic}).$$

- 令 $p,q\in\mathbb{P}_\delta$。那么 $p\leq_{\mathbb{P}_\delta}q$ 当且仅当：
  e. 定义域(w_p) $\supseteq$定义域(w_q)
  f. 对所有 $\alpha\in$dom(w_q),
  $$p\restriction\alpha\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}w_p(\alpha)\leq_{\mathbb{Q}_\alpha}w_q(\alpha);$$
  ^g. 对所有 $N\in\mathcal{M}_q$，并且对于 $\gamma:=\sup\{\beta:\ V_\beta\subseteq N\}$，存在 $M\in\mathcal{M}_q$ 使得 $N=M\downarrow\gamma$。

[2.3.7] **命题**。 迭代 $(\mathbb{P}_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{E}^*)$ 在 $\mathbb{V}$ 上是逐点可定义的。 □

[2.3.8] **命题**。 $\mathbb{P}_\alpha$ 的基数严格小于 β，对于 $\alpha\in\mathscr{E}^*$ 和 $\beta=\min(\mathscr{E}-(\alpha+1))$. □

[2.3.9] **命题**。 $\mathbb{P}_{\delta+1}$ 对每个 $\delta\in\mathscr{E}$ 都与 $\mathbb{P}_\delta*\mathbb{Q}_\delta$ 强迫等价。 □

[2.3.10] **注**。 前述等价是规范的。

[2.3.11] **注**。 设 $\beta<\gamma$ 是 $\mathscr{E}^*$ 的元素。回忆一下，我们有一个规范名称 $\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta\in V^{\mathbb{P}_\beta}$，满足

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta=\{q\in\mathbb{P}_\gamma:q\restriction\beta\in\dot{G}_\beta\}.$$

这是一个偏序集的名称，且可以验证如下性质。

a. $\mathbb{P}_\beta*(\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta)$ 与 $\mathbb{P}_\gamma$ 强迫等价。b. 对于偏序集 $\mathbb{P}_\gamma$ 的每个稠密子集 D，集合 $\{q\in D:\ q\restriction\beta\in G_{\mathbb{P}_\beta}\}$ 在宇宙 $V^{\mathbb{P}_\beta}$ 内的偏序集 $\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta$ 中稠密。c. 如果 $G_\beta\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\beta}$ 且 $H\rightsquigarrow V[G_\beta]^{(\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta)^{G_\beta}}$，那么 H 也是 $\mathbb{P}_\gamma$ 中的一个滤子。若我们想将其视为滤子，则记作 $G_\beta\cdot H$。注意，在等价关系 $\mathbb{P}_\gamma\simeq\mathbb{P}_\beta*(\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta)$ 下，$G_\beta\cdot H$ 对应于 $G_\beta*H$。特别地，$G_\beta\cdot H\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\gamma}$ 且 $G_\beta\subseteq G_\beta\cdot H$。

[2.3.12] **定义**。 设 $\alpha\leq\beta$ 是 $\mathscr{E}^*$ 的元素，设 $p\in\mathbb{P}_\alpha$，并设 $q\in\mathbb{P}_\beta$。假设 $p\leq q\restriction\alpha$。那么我们如下定义 $pq=(w,\mathcal{M})$:

$$w:=w_p\cup(w_q\restriction(\alpha,\beta]),\quad\mathcal{M}:=\mathcal{M}_p\cup\mathcal{M}_q.$$

[2.3.13] **命题**。 设 $\alpha\leq\beta$ 是 $\mathscr{E}^*$ 的元素，设 $p\in\mathbb{P}_\alpha$，并设 $q\in\mathbb{P}_\beta$。假设 $p\leq q\restriction\alpha$。那么 $pq\in\mathbb{P}_\beta$，它满足 $pq\leq p$，q 和 $pq\restriction\alpha=p$，并且

$$(\forall r\in\mathbb{P}_\beta)(r\leq p,q\iff r\leq pq).$$

□

2.4 传递定理陈述

[2.4.1] **定义**。设

a. M ： 虚拟模型， b. $(\mathbb{S}_\alpha : \alpha \in E)$ ： 在 M上逐点可定义的强迫迭代， c. $\gamma \in E$， d. $p \in \mathbb{S}_\gamma$。

假设存在一个 beth 不动点 α ，使得 $\mathbb{S} \in V_\alpha \subseteq M$。

那么，如果 p 是局部 $M^{\mathbb{S}_\gamma}$-泛型的，则

$$p \Vdash^V_{\mathbb{S}_\gamma} M^{\dot{G}_\gamma} = M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}.$$

[2.4.2] **注**。如果 $E = \{0\}$，那么 p 是局部 $M^{\mathbb{S}_0}$-泛型的，当且仅当 p 是 $M^{\mathbb{S}_0}$-泛型的[1]。一般来说，“$M^{\mathbb{S}_\gamma}$-泛型”蕴含“局部 $M^{\mathbb{S}_\gamma}$-泛型”，但我们将在此使用这一概念，以便在迭代过程中传递半泛型性。

[2.4.3] **传递定理**。设 $\gamma \in \mathscr{E}$。假设对所有 $\alpha \in \mathscr{E} \cap \gamma$、所有 $M \in \mathcal{C}_{>\alpha}$以及所有满足 $M \downarrow \alpha \in \mathcal{M}_p$的 $p \in \mathbb{P}_\alpha$，都有 $p \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} M^{\dot{G}_\alpha} \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$。那么，对所有 $M \in \mathcal{C}_{>\gamma}$，每个满足 $M \downarrow \gamma \in \mathcal{M}_p$的条件 $p \in \mathbb{P}_\gamma$都是局部 $M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的。

证明。 情形 $\gamma =$ 最小值 $\mathscr{E}$很明显，因为偏序集 $\mathbb{P}_\gamma$ 是平凡的。若 γ 是 $\mathscr{E}$ 的后继点，则该情形在小节 2.6.1中得到证明；若 γ 是 $\mathscr{E}$ 的极限点，则该情形在小节 2.6.2中得到证明。 □

[2.4.4] **局部泛型性判据**。

Let

- $(\mathbb{S}_\alpha : \alpha \in E)$: 强迫迭代,
- M ： 虚拟模型,
- $\gamma \in E$,
- $p \in \mathbb{S}_\gamma$。

假设

1. 存在一个 beth 不动点 α 使得 $\mathbb{S} \in V_\alpha \subseteq M$， 2. 对所有 $q \leq_{\mathbb{S}_\gamma} p$，对于 $\mathbb{S}_\gamma$ 中满足 $q \Vdash_{\mathbb{S}_\gamma} D \in M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}$的所有稠密开子集 D ，存在$r \in D$ 和 $s \leq_{\mathbb{S}_\gamma} q$， r 使得

$$s \Vdash_{\mathbb{S}_\gamma} \gamma \notin M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma} \vee r \in M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}.$$

那么 p 是局部 $M^{\mathbb{S}_\gamma}$-泛型的。

证明。

1° 任取 $p_0 \leq p$ ，我们来证明存在 $p_1 \leq p_0$ 使得

$$q \Vdash M^{\dot{G}_\gamma} = M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}.$$

2° 如果 $p_0 \Vdash \gamma \notin M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}$，则结论由定义可得。设 $p_0 \nVdash \gamma \notin M^{\dot{G}}$

$^{\gamma}_{<\gamma}$.

3° 于是存在 $p_1 \leq p_0$ ，使得 $p_1 \Vdash \gamma \in M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}$。我们断言， p_1 正是所需的。4° 设 $\dot{\tau} \in V^{\mathbb{S}_\gamma}$ 满足 $p_1 \Vdash \dot{\tau} \in (M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma})^{\mathbb{S}_\gamma}$。我们要证明 $p_1 \Vdash \dot{\tau}^{\dot{G}_\gamma} \in M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}$。5° 任取 $p_2 \leq p_1$。我们要找到 $s \leq p_2$ ，使得 $s \Vdash \dot{\tau}^{\dot{G}_\gamma} \in M^{\dot{G}_\gamma}_{<\gamma}$。

[1]按照 [Kas22a]中的备注 1.2-XI.f.

6° 注意到 $p_2 \Vdash \dot\tau \in V^{\mathbb{S}_\gamma}$。这意味着存在 $p_3 \le p_2$ 以及某个 $\sigma \in V^{\mathbb{S}_\gamma}$，使得$p_3 \Vdash \dot\tau = \check\sigma$。

7° 令 D 为 $\mathbb{S}_\gamma$ 中所有决定 σ 的值的条件所构成的集合。集合 D 在 $\mathbb{S}_\gamma$ 中是稠密开集。对于 $r \in D$, 令 x_r 为由 r 决定的 σ 的值。我们有

$$p_3 \Vdash D, (x_r : r \in D) \in M[G_\gamma]_{<\gamma}.$$

8° 存在 $r \in D$ 和 $s \le p_3$, r，使得

$$s \Vdash r \in M[G_\gamma]_{<\gamma}.$$

9° 于是

$$s \Vdash \dot\tau^{\dot G_\gamma} = \check\sigma^{\dot G_\gamma} = x_s = x_r \in M[G_\gamma]_{<\gamma},$$

最后一个事实是由 $s \Vdash (x_r)_{r\in D}$, $r \in M[G_\gamma]_{<\gamma}$ 得出的。

□

[2.4.5] **注**。在 $E = \{\emptyset\}$ 的情形下，上述判据简化为通常的泛性判据（例如，参见 [Kas22b]中的引理 1.2-IV）。

2.5 传递定理的一些引理

[2.5.1] **引理**。设 $\beta \in \mathscr{E}$，设 $N \in \mathcal{C}_{\ge\beta}$，并设 $p \in \mathbb{P}_\beta \cap N$。那么存在 $q \le_{\mathbb{P}_\beta} p$，使得 $\mathrm{dom}(w_q) = \mathrm{dom}(w_p)$ 且 $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_p \cup \{N \downarrow \beta\}$。

证明。

1° 设 $\mathcal{M}_q := \mathcal{M}_p \cup \{N \downarrow \beta\}$。我们需要以一种确保 $q := (w_q, \mathcal{M}_q) \in \mathbb{P}_\beta$且 $q \le p$ 的方式定义 w_q。

2° 注意，对所有 $P \in \mathcal{M}_p$，都有 $P \cap \omega_1^V < N \cap \omega_1^V$且 $P \lhd_\beta N$。因此，只要我们构造出满足以下条件的 w_q，论证就完成了：

a. 定义域(w_q) = 定义域(w_p) =: d

b. $q \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{R}} w_q(\alpha) \le w_p(\alpha)$ 对所有 $\alpha \in d$;

c. $q \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \left(\alpha \in N^{\dot G_\alpha} \Longrightarrow (w_p(\alpha)$ 是半-$N[\dot G_\alpha]^{\mathbb{Q}_\alpha}$-泛型$)\right)$ 对所有 $\alpha \in d$。

(Cf. 命题 [2.3.6].)

3° $w_q(\alpha)$ 由关于 $\alpha \in d$ 的递归定义。假设 $w_q \restriction \alpha$ 已经定义，现在定义 $w_q(\alpha)$。

4° 令 $G_\alpha \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 为一个任意的、包含 $q \restriction \alpha$ 的泛型。

5°假设 $\alpha \in N^{G_\alpha}$。那么 $N[G_\alpha]$有定义。

6°由于 $\mathbb{Q}_\alpha := \dot{\mathbb{Q}}_\alpha^{G_\alpha} \in N[G_\alpha]$是半适当的，且 $w_p(\alpha)^{G_\alpha} \in N[G_\alpha]$，因此存在一个 $w \le_{\mathbb{Q}_\alpha} w_p(\alpha)^{G_\alpha}$，它是半-$N[G_\alpha]^{\mathbb{Q}_\alpha}$-泛型的。

7° 由于 G_α 是任意一个包含 $q \restriction \alpha$的集合，我们可以找到一个名称 $\dot w \in V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 使得

$$q \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \dot w \le_{\dot{\mathbb{Q}}_\alpha} w_p(\alpha) \wedge \left(\alpha \in N^{\dot G_\alpha} \implies (\dot w \text{ is semi-} N^{G_\alpha}\text{-generic})\right).$$

8° 现在我们可以设 $w_q(\alpha) := \dot w$。

□

[2.5.2] **引理**。设 ___

- μ, $\nu \in \mathscr{E}$: ν是 $\mathscr{E}$中 μ 的后继,
- $p \in \mathbb{P}_\nu$,
- $G_\mu \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\mu}$： $p \restriction \mu \in G_\mu$,

- $M \in \mathcal{M}_p^\nu[G_\mu]$,
- $\mathbb{Q}_\mu := \dot{\mathbb{Q}}_\mu^{G_\mu}$,
- $u \in \mathbb{Q}_\mu \cap M[G_\mu]$。

那么存在 $v \in \mathbb{Q}_\mu$，使得 $v \leq u$，并且对于所有满足 $N \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V$ 的 $N \in \mathcal{M}_p^\nu[G_\mu]$，都有 v 是半-$N[G_\mu]^{\mathbb{Q}_\mu}$-泛型的。

证明。

1° 令

- $\{M_i : i < n\} := \mathcal{M}_p^\nu[G_\mu]$：对于所有 $i < j < n$，$M_i \cap \omega_1^V < M_j \cap \omega_1^V$，
- $k < n$： $M_k = M$，
- $\lambda := |\mathbb{Q}_\mu|$。

2° 对所有的 $i < n$，我们都有 $\mathbb{Q}_\mu \in M_i[G_\mu]$，且 $\mathbb{Q}_\mu$ 是半适当的（这由活跃性推出）。

3° 不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{Q}_\mu = \lambda$。

4° 考虑 $i < n$。我们令 $N_i := M_i[G_\mu] \cap H((2^\lambda)^+) \prec H((2^\lambda)^+)$。注意，$w \in \mathbb{Q}_\mu$ 是半-$M_i[G_\mu]^{\mathbb{Q}_\mu}$-泛型的，当且仅当它是半-$N_i^{\mathbb{Q}_\mu}$-泛型的。

5° 因此，只需找到满足 $v \leq u$ 且对所有$i \in [k, n)$ 都是半-$N_i^{\mathbb{Q}_\mu}$-泛型的 $v \in \mathbb{Q}_\mu$。

6° 因为 $M_i \lhd_\nu M_j[G_\mu]$ 对所有 $i < j < n$，命题 [1.6.9] 蕴含 $N_i \in N_j$ 对所有 $i < j < n$。

7° 通过对 $i \in [k, n)$ 进行递归，我们构造一个序列 $(u_i : k \leq i < n)$，由满足以下条件的 $\mathbb{Q}_\mu$-条件组成 $u_k := u \in N_k$ 并且对所有 $i \in (k, n)$ 都满足：$u_i \in N_i$、$u_i \leq_{\mathbb{Q}_\mu} u_{i-1}$，且 u_i 是半-$N_{i-1}^{\mathbb{Q}_\mu}$-泛型的。

8° 存在 $v \leq u_{n-1}$，使得 v 是半-$N_{n-1}^{\mathbb{Q}_\mu}$-泛型的。

□

[2.5.3] **引理**。设

- μ，$\nu \in \mathscr{E}$：ν 是 $\mathscr{E}$ 中 μ 的后继，
- $p \in \mathbb{P}_\nu$，
- $M \in \mathcal{M}_p$： $p \restriction \mu \Vdash_{\mathbb{P}_\mu}$（$M^{\dot{G}_\mu}$ 在 ν处处于激活状态），
- $\dot{u} \in V^{\mathbb{P}_\mu}$： $p \restriction \mu \Vdash_{\mathbb{P}_\mu} \dot{u} \in \dot{\mathbb{Q}}_\mu \cap M[\dot{G}_\mu]$。

于是存在一个规范的 $\mathbb{P}_\mu$名称 $\dot{v}$，它表示 $\mathbb{Q}_\mu$中的某个元素，使得 $p \restriction \mu$迫使“$\dot{v} \leq \dot{u}$，并且对于所有满足 $N \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V$的 $N \in \mathcal{M}_p^\nu[\dot{G}_\mu]$，$\dot{v}$都是半-$N[\dot{G}_\mu]^{\dot{\mathbb{Q}}_\mu}$-泛型的。

证明。 这可由前一个引理立即得出。 □

[2.5.4] **引理**。设 $\gamma \in \mathscr{E}$，设 $p \in \mathbb{P}_\gamma$，并设 $\beta \in \mathscr{E} \cap \gamma$。那么存在 $p_\beta \leq_{\mathbb{P}_\gamma} p$，使得$\beta \in$ 定义域(w_{p_β})。

证明。

1° 不失一般性，我们可以假设 $(\beta, \gamma) \cap \mathscr{E} = \emptyset$。

2° 设 $G_\beta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\beta}$为任意包含 $p \restriction \beta$ 的对象，设 $M \in \mathcal{M}_p^\gamma[G_\beta]$ 满足 $M \cap \omega_1^V$ 最小，并设 $\mathbb{Q}_\beta := \dot{\mathbb{Q}}_\beta^{G_\beta}$。

3° 我们可以应用引理 [2.5。2] 到

a. $\mu := \beta$，$\nu := \gamma$，b. $p := p \restriction \beta$，c. $G_\mu := G_\beta$，d. $M := M$，

e. $\underset{\sim}{u}$:
$= 1_{\mathbb{Q}_\beta}$，由此得到

$$(\exists v \in \mathbb{Q}_\beta)(\forall N \in \mathcal{M}_p^\gamma[G_\beta])(v \text{ is semi-}N[G_\beta]^{\mathbb{Q}_\beta}\text{-generic}).$$

4° 由于 G_β 是任意的，我们可以找到一个规范的 $\mathbb{P}_\beta$ 名称 $\dot{v}$，它表示 $\mathbb{Q}_\beta$ 的一个元素，使得

$$p \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta}^V (\forall N \in \mathcal{M}_p^\gamma[\dot{G}_\beta])(\dot{v} \text{ is semi-}N[\dot{G}_\beta]^{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\text{-generic}).$$

5° 令 $w_{p_\beta} := w_p \cup \{(\beta,\ \dot{v})\}$, $\mathcal{M}_{p_\beta} := \mathcal{M}_p$，以及 $p_\beta := (w_{p_\beta},\ \mathcal{M}_{p_\beta})$。我们看到 p_β 满足要求 d.

□

[2.5.5] **引理**。设 $\beta \in \mathscr{E} - \{\min \mathscr{E}\}$ 且设 $\xi < \beta$。则 $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} |\xi| \leq \omega_1$。

证明。

1° 只需考虑 β 在 $\mathscr{E}$ 内有一个前驱 α 的情形。

2° 设 $\mathcal{M}$ 是一个满足以下条件的 $\mathbb{P}_\beta$-名称

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \dot{\mathcal{M}} = \bigcup_{p \in \dot{G}_\beta} \mathcal{M}_p^\beta[\dot{G}_\alpha].$$

3° 我们想要证明：

a. $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \xi \subseteq \bigcup \dot{\mathcal{M}}$

b. $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} |\dot{\mathcal{M}}| \leq \omega_1$.

这足以得出结论。

4° 我们先验证 3°a。令 $\eta < \xi$ 并令 $D : = \{p \in \mathbb{P}_\beta :\ (\exists M \in \mathcal{M}_p)\ (\eta,\ \alpha \in M)\}$。如果我们证明 D 在 $\mathbb{P}_\beta$ 中稠密，就完成了。

5° 任取 $p_0 \in \mathbb{P}_\beta$。那么存在 $N \prec \mathbb{V}$，使得 $\alpha,\ \beta,\ \eta,\ p_0 \in N$。

6° 由引理 [2.5.1], , 存在 $p \leq_{\mathbb{P}_\beta} p_0$，使得 $N \downarrow \beta \in \mathcal{M}_p$。

7° 由于 $\eta,\ \alpha \in N \downarrow \beta$，我们得出 $p \in D$。

8° 现在来验证 3°b。令 $G_\beta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\beta}$ 任意，并在 $V[G_\beta]$ 内进行讨论。

9° 令 $\mathcal{M} := \dot{\mathcal{M}}^{G_\beta} \subseteq \mathcal{C}_\beta$。只需证明该映射

$$\mathcal{M} \to \omega_1^V : M \mapsto M \cap \omega_1^V$$

是一个单射。

10° L et $M, N \in \mathcal{M}$ 任意，且满足 $M \cap \omega_1^V = N \cap \omega_1^V$。我们要证明 $M = N$。

11° W

我们有 $\alpha \in M \cap N$，并且存在 $p,\ q \in G_\beta$，使得 $M \in \mathcal{M}_p^\beta[G_\alpha]$ 且 $N \in \mathcal{M}_q^\beta[G_\alpha]$.

12° 由于 $p,\ q \in G_\beta$，存在 $r \in G_\beta$ 使得 $r \leq_{\mathbb{P}_\beta} p,\ q$。我们有 $M,\ N \in \mathcal{M}_r^\beta[G_\alpha]$。

13° 由于 $r \in G_\beta$，我们有 $\mathcal{M}_r^\beta[G_\alpha]$ 是关于 $G_{\alpha+1}$的弱 $\lhd_\alpha$-链。特别地，$M \cap \omega_1^V = N \cap \omega_1^V$这一事实意味着 $M = N$。

□

[2.5.6] **引理**。设 M为一个虚拟模型，设 δ为 M的一个不可达基数，设 $\mathbb{P} \in M \cap V_\delta$为一个偏序集，并设 $G \rightsquigarrow \widehat{M^{\mathbb{P}}}$。那么

$$\sup(M[G] \cap \delta) = \sup(M \cap \delta).$$

证明。

1° 设 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ 满足 $\tau_G < \delta$。我们要证明存在某个 $\beta \in M \cap \delta$ 满足 $\tau_G < \beta$。

2° 不失一般性，我们可以假设 $\Vdash^V_{\mathbb{P}} \tau < \delta$。

3° T存在 $A \in M$ $\mathbb{P}$ 的一个极大反链，使得对所有 $p \in A$，都存在 $\alpha_p < \delta$ s
hat $p \Vdash_{\mathbb{P}} \tau = \alpha_p$。 uch t

4°注意到 $(\alpha_p\colon\ p \in A) \in M$。由于 δ在 M中是不可达基数，我们得出 $\beta\colon = \sup^{p\in A} \alpha_p \in M \cap \delta$。

5° 现在显然， β 符合要求。

□

[2.5.7] **引理**。

Let

- $\gamma\colon$ $\mathscr{E}$的极限点，
- $M \in \mathcal{C}_{[0,\kappa]}$,
- $p \in \mathbb{P}_\gamma\colon\ M \downarrow \gamma \in \mathcal{M}_p$。

假设对所有的 $\alpha \in \mathscr{E} \cap \gamma$，条件 $p \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} M^{\dot{G}_\alpha} \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V$成立。

那么存在序数 $\beta < \gamma^* \leq \gamma$和一个条件 $q \leq_{\mathbb{P}_\gamma} p$，使得 $\mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}_\gamma = \mathcal{M}_p \cap \mathcal{C}_\gamma$并且

$$(\forall \alpha \in \mathscr{E} \cap (\beta, \gamma))(q \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \sup(M^{\dot{G}_\alpha} \cap \gamma) = \gamma^*).$$

证明。

1°如果 $M \cap$序数类 $\subseteq \gamma$，那么我们可以令 $\gamma^* :=$ sup($M \cap$序数类)， $\beta := 0$，以及 $q := p$。因此，假设存在满足 $\xi \geq \gamma$ 的 $\xi \in M$。

2° 令 η 为满足以下条件的最小序数 $\eta \geq \gamma$

$$(\exists \beta \in \mathscr{E}^* \cap \gamma)(\exists r \leq_{\mathbb{P}_\beta} p \restriction \beta)(r \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \eta \in M^{\dot{G}_\beta}).$$

3° 令 $\beta_0 \in \mathscr{E}^* \cap \gamma$ 为满足以下条件的最小序数

$$(\exists r \leq_{\mathbb{P}_{\beta_0}} p \restriction \beta_0)(r \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta_0}} \eta \in M^{\dot{G}_{\beta_0}}).$$

令 r 为最后一个公式的一个见证。

4° 根据引理 [1.3。8], 我们有 $\eta \in \mathscr{E}$。

5° **断言**。 $r \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta_0}} \beta_0 \in M^{\dot{G}_{\beta_0}}_{<\beta_0}$

证明。

1′ 反设不然。则存在 $r' \leq_{\mathbb{P}_{\beta_0}} r$ 使得 $r' \Vdash \beta_0 \notin M^{\dot{G}_{\beta_0}}_{<\beta_0}$。

2′ 这意味着 $r' \Vdash \eta \in M^{\dot{G}_{\beta_0}}_{<\beta_0}$。

3′ 因此，存在 $r'' \leq_{\mathbb{P}_{\beta_0}} r'$ 和 $\beta_1 \in \mathscr{E}^* \cap \beta_0$ 使得 $r'' \Vdash \eta \in M^{G_{\beta_1}}$。这与 β_0的极小性矛盾。

□

6° 因此， $r \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta_0}}$ （$M[G_{\beta_0}]$ 已定义）。

7° 设 $s \leq_{\mathbb{P}_{\beta_0}} r$，并设 $\lambda \in$ 自然数集为序数类，满足 $s \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta_0}}$ 余终数$^{M[\dot{G}_{\beta_0}]}(\eta) = \lambda$。

8° **断言**。 存在 $\beta \in \mathscr{E} \cap (\beta_0, \gamma)$ 和 $t \leq_{\mathbb{P}_\beta} s$，使得

$$t \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \beta \in M^{\dot{G}_\beta}_{<\beta} \wedge \mathrm{cof}^{M[G_\beta]}(\eta) \in \{\omega, \omega_1, \eta\}.$$

证明。

1′ 若 $\lambda = \eta$，只需取 $\beta :=$ min($\mathscr{E} - \beta_0$) 和 $t := s$。因此，设 $\lambda <$ η.

2′ 注意到 $s \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta_0}} \lambda \in M^{\dot{G}_{\beta_0}}$。由 η 的选取可知， $\lambda < \gamma$。

3′ 令 $G_{\beta_0} \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_{\beta_0}}$ 为一个包含 s 的任意泛型，并在 $V[G_{\beta_0}]$中进行讨论。

4′ 由于 $\eta \in \mathscr{E}$，事实 $\mathscr{E} \cap (\lambda, \eta) \neq \emptyset$ 可以表述为：存在 $\beta \in (\lambda, \eta)$ 使得 $M \restriction \beta \prec M \restriction \eta$。由于这是一个关于 M 的一阶事实，其参数来自 $M^{G_{\beta_0}} \prec \widehat{M}$，因此在 $M^{G_{\beta_0}}$中存在这样的序数 β。

5′ 根据 η的选取，我们有 $\beta \in \mathscr{E} \cap (\lambda, \gamma)$。

6′ 令 $G_\beta \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\beta}$ 扩展 G_{β_0}，并在 $V[G_\beta]$内部进行讨论。

7′ 我们有 $\beta \in M^{G_{\beta_0}} \subseteq M^{G_\beta}_{<\beta}$。

8′ 由引理 [2.5.5], 我们有 $|\lambda| \leq \omega_1$ 因此 余终数$^{M[G_\beta]}(\eta) \leq \omega_1$。

9′ 条件 t 现在由强迫定理得到。

□

9° 通过加强 t，我们可以假设存在 γ^*，使得 $t \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \gamma^* = \sup(M[G_\beta] \cap \gamma)$。令 $q := tp \in \mathbb{P}_\gamma$，并证明 β、 γ^* 和 q 满足要求。显然，$\mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}_\gamma = \mathcal{M}_p \cap \mathcal{C}_\gamma$。

10° 由于 $t \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \beta \in M[G_\beta] \cap \gamma \wedge \gamma^* = \sup(M[G_\beta] \cap \gamma)$，我们得出 $\beta < \gamma^* \leq \gamma$。

11° **断言**。 对于所有 $\alpha \in \mathscr{E} \cap (\beta, \gamma)$，都有 $q \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \sup(M^{\dot{G}_\alpha} \cap \gamma) = \gamma^*$.

证明。

1′ 令 $G_\alpha \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\alpha}$ 为一个包含 $q \restriction \alpha$ 的任意泛型，并在 $V[G_\alpha]$中进行讨论。根据 $\mathrm{cof}^{M[G_\beta]}(\eta) \leq \omega_1^{V[G_\beta]}$ 还是 $\mathrm{cof}^{M[G_\beta]}(\eta) = \eta$，我们分两种情形讨论。

2′ 首先假设 $\mathrm{cof}^{M[G_\beta]}(\eta) \leq \omega_1^{V[G_\beta]}$。那么存在 $f \in M[G_\beta]$ 使得

$$f : \omega_1^{V[G_\beta]} \to \eta$$

and

$$M[G_\beta] \models (f \text{ is cofinal in } \eta).$$

3′ 根据引理的假设，我们有

$$M[G_\beta] \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V.$$

特别地， $\omega_1^V \not\subseteq M[G_\beta]$，这意味着 ω_1^V在 $V[G_\beta]$中不是可数的。4′ 因此，$\omega_1^V = \omega_1^{V[G_\beta]}$ 和 $f : \omega_1^V \to \eta$ 满足

$$\sup(f[M \cap \omega_1^V]) = \sup(M^{G_\beta} \cap \eta).$$

5′ 这进一步意味着

$$\sup(f[M \cap \omega_1^V]) = \sup(M^{G_\beta} \cap \gamma) = \gamma^*.$$

6′注意， $M[G_\beta] \prec M[G_\beta]$， $M[G_\alpha]$ 是 $M[G_\beta]$的泛型扩张，并且$M[G_\alpha] \prec M[G_\alpha]$。这意味着

$$M[G_\alpha] \models (f : \omega_1^V \to \eta \text{ cofinally}).$$

7′ 现在我们可以如下计算：

$$\sup(M^{G_\alpha} \cap \gamma) = \sup(M^{G_\alpha} \cap \eta) = \sup(f[M^{G_\alpha} \cap \omega_1^V]) = \sup(f[M \cap \omega_1^V]) = \gamma^*,$$

其中，第一个等式由 η的选取得出，第二个等式由前一点得出，第三个等式由以下假设得出：

$$M^{G_\alpha} \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V,$$

而第四个来自 5′。

$8'$ 现在假设 余终数$^{M[G_\beta]}(\eta) = \eta$。

$9'$由于 $M[G_\beta] \cap \eta = M^{G_\beta} \cap \eta = M^{G_\beta} \cap \gamma$，我们看到 η是 $M[G_\beta]$中的一个强极限。因此 e,

$$M[G_\beta] \models (\eta \text{ is inaccessible}).$$

$10'$ 由于偏序集 $(\mathbb{P}_\xi : \xi \in \mathscr{E}^* \cap \gamma)$ 的秩为 $< \gamma \leq \eta$，引理[2.5.6]的迭代应用得出

$$\sup(M^{G_\xi} \cap \eta) = \sup(M^{G_\beta} \cap \eta),$$

对所有 $\xi \in \mathscr{E}^* \cap [\beta, \alpha]$ 都成立。

$11'$ 特别地，我们有 $\sup(M^{G_\alpha} \cap \eta) = \gamma^*$，这进一步意味着

$$\sup(M^{G_\alpha} \cap \gamma) = \gamma^*.$$

□

12° 这就完成了该引理的证明。

□

[2.5.8] **引理**。设

a. M：虚拟模型，b. $\gamma \in \mathscr{E}_M$： $\mathscr{E}_{\widehat{M}}$的极限点，c. $\gamma^* := \sup(M \cap \gamma)$，d. N：满足 $N \lhd_{\gamma^*} M$的虚拟模型。

那么，存在唯一的由 γ生成的模型 $N^+ \in M$，使得 $N \cong_{\gamma^*} N^+$。此外，若 $\widehat{M \restriction \gamma^*} \prec N$，则 $\widehat{M \restriction \gamma} \prec N^+$。

证明。

1° 为了证明这样的 N^+存在，注意到根据定义，存在 $P \in M$ 使得$N \cong_{\gamma^*} P$。于是，$N^+ := P \downarrow \gamma \in M$符合要求。

2°我们来验证唯一性。设 $N' \in M$是一个由 γ生成的虚拟模型，且满足 $N \cong_{\gamma^*} N'$。只需证明 $N' \cong_\gamma N^+$。

3° 令 $\alpha \in \mathscr{E}_M \cap \gamma$ 任意。于是 $\alpha < \gamma^*$，从而 $N' \cong_\alpha N \cong_\alpha N^+$。

4° 因此，

$$M \models (\forall \alpha < \gamma)(V_\alpha \prec (V_\gamma, \in, U \cap V_\gamma) \implies N' \cong_\alpha N^+).$$

5°由初等性，同一命题在 M 中也成立。这意味着对于所有 $\alpha \in \mathscr{E}_{\widehat{M}} \cap \gamma$，都有 $N' \cong_\alpha N^+$。

6°对于 $\alpha \in \mathscr{E}_{\widehat{M}} \cap \gamma$，令 $f_\alpha : \mathsf{Hull}(N', V_\alpha) \cong \mathsf{Hull}(N^+, V_\alpha)$ 为见证$N' \cong_\alpha N^+$的唯一同构。对于 $\alpha_0 < \alpha_1$，有 $f_{\alpha_0} \subseteq f_{\alpha_1}$。

7° 现在很容易看出

$$f_\gamma := \bigcup_{\alpha \in \mathscr{E}_{\widehat{M}} \cap \gamma} f_\alpha : \mathsf{Hull}(N', V_\gamma) \to \mathsf{Hull}(N^+, V_\gamma)$$

是 $\mathsf{Hull}(N', V_\gamma) \cong_\gamma \mathsf{Hull}(N^+, V_\gamma)$ 的见证。

8° 接下来证明 moreover 部分。任取 $\alpha \in \mathscr{E}_M \cap \gamma$。我们有 $\alpha < \gamma^*$。

9° 这意味着 $\widehat{M \restriction \alpha} \prec N$，进而 $\widehat{M \restriction \alpha} = \text{包}(N, V_{\gamma^*}) \cap V_\alpha \prec \text{包}(N, V_{\gamma^*})$。$10^\circ$ 由于 $N \cong_{\gamma^*} N^+$，我们得出

$$\widehat{M \restriction \alpha} = \mathsf{Hull}(N^+, V_{\gamma^*}) \cap V_\alpha \prec \mathsf{Hull}(N^+, V_{\gamma^*}) \prec \widehat{N^+}$$

进而 $M \models V_\alpha \prec N^+$。

11° 因此，

$$M \models (\forall \alpha < \gamma)(V_\alpha \prec (V_\gamma, \in, U \cap V_\gamma) \implies V_\alpha \prec \widehat{N^+}).$$

12°由于 $M \prec M$，我们得出，对于所有 $\alpha \in \mathscr{E}_{\widehat{M}} \cap \gamma$，都有 $\widehat{M \restriction \alpha} \prec N^+$。这足以得出结论。

□

2.6 传递定理的证明

2.6.1 后继情形

1° 设 $\gamma\in\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{E}$ 中某个 β 的后继。我们假设

$$(\forall N\in\mathcal{C}_{>\beta})(\forall q\in\mathbb{P}_\beta)(N\downarrow\beta\in\mathcal{M}_q\implies(q\text{ is semi-}N^{\mathbb{P}_\beta}\text{-generic})).\tag{8}$$

令 $M\in\mathcal{C}_{>\gamma}$，并令 $p\in\mathbb{P}_\gamma$ 满足 $M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}_p$。我们要证明 p 是局部 $M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的。

2° 我们将使用局部泛型性判据 [2.4。4]令 D 是 $\mathbb{P}_\gamma$ 的一个稠密开子集，并令 $q\leq_{\mathbb{P}_\gamma}p$是任意满足

$$q\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}D\in M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}.$$

我们要找到 $r\in D$ 和 $s\leq_{\mathbb{P}_\gamma}q$，$r$，使得

$$s\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\gamma\notin M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}\vee r\in M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}.$$

3° 通过加强 q，我们可以假设 $q\in D$。

4° 如果 $q\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\gamma\notin M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}$，我们可以取 $s:=r:=q$。因此，假设 $q\nVdash_{\mathbb{P}_\gamma}\gamma\notin M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}$。

5° 在加强 q 后，我们可以假设 $q\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\gamma\in M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}$。由于 β可由 γ 在 $\widehat{M}$ 上可定义，因此有 $q\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\beta\in M^{\dot G_\gamma}_{<\gamma}$。这意味着 $q\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}\beta\in M^{\dot G_\beta}$和$q\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}^\gamma_q[\dot G_\beta]$。

6° 由引理 [2.5.4], 我们可以加强 q 以确保 $\beta\in$定义域(w_q)。

7° **Claim.** $q\restriction(\beta+1)\Vdash_{\mathbb{P}_{\beta+1}}M^{\dot G_{\beta+1}}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V$

证明。

1′ 根据（8），我们有

$$q\restriction\beta\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}M^{\dot G_\beta}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V.$$

2′ 令 $G_{\beta+1}$ 为一个包含 $q\restriction(\beta+1)$ 的泛型，并验证 $M^{G_{\beta+1}}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V$。令 $\mathbb{Q}_\beta:=\dot{\mathbb{Q}}_\beta^{G_\beta}$。

3′由于 $\beta\in\mathrm{dom}(w_q)$ 且 $M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}^\gamma_q[G_\beta]$，我们有 $w_q(\beta)^{G_\beta}$在 $V[G_\beta]$中是半-$(M\downarrow\gamma)[G_\beta]^{\mathbb{Q}_\beta}$-泛型的。

4′ 因此，

$$(M\downarrow\gamma)[G_{\beta+1}]\cap\omega_1^{V[G_\beta]}=(M\downarrow\gamma)[G_\beta]\cap\omega_1^{V[G_\beta]}.$$

5′ 这表明

$$M^{G_{\beta+1}}\cap\omega_1^V=M^{G_\beta}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V.$$

□

8° 我们可以假设存在 $\mathcal{M}\in[\mathcal{C}_\gamma]^{<\omega}$，使得

$$q\restriction\beta\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}\mathcal{M}^\gamma_q[\dot G_\beta]=\mathcal{M}.$$

也就是说，存在 $\bar q\leq_{\mathbb{P}_\beta}q\restriction\beta$，使得 $\bar q$决定了 $\mathcal{M}^\gamma_q[G_\beta]$。由于 $\mathcal{M}_{\bar qq}\cap\mathcal{C}_\gamma=\mathcal{M}_q\cap\mathcal{C}_\gamma$，我们可以用 $\bar qq$ 替换 q。

9° 注意，$M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}$ 并且

$$q\restriction(\beta+1)\Vdash_{\mathbb{P}_{\beta+1}}\mathcal{M}\text{ is a weak }\lhd_\gamma\text{-chain w.r.t. }\dot G_{\beta+1}.$$

10° **断言**。存在 $r\in D$ 和 $s_0\in\mathbb{P}_{\beta+1}$，使得

a. $\beta\in$定义域(w_r),

b. $\{N \in \mathcal{M}:\ N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V\} \subseteq \mathcal{M}_r$,
c. $s_0 \leq_{\mathbb{P}_{\beta+1}} q \restriction (\beta+1)\ \ r \restriction (\beta+1)$,
d. $s_0 \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta+1}} r \in M^{\dot{G}_{\beta+1}}$。

证明。

$1'$ 令 $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{M}:\ N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V\}$ 并令 $G_{\beta+1} \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_{\beta+1}}$ 为任意包含 $q \restriction (\beta+1)$ 的集合。$2'$ 对所有 $N \in \mathcal{N}$，我们有

$$N \lhd_\gamma (M \downarrow \gamma)^{G_{\beta+1}} \cong_\gamma M^{G_{\beta+1}},$$

由此得到 $P \in M^{G_{\beta+1}}$ 使得 $N = P \downarrow \gamma$；由于 $\gamma \in M^{G_{\beta+1}}$，我们得出 $N \in M^{G_{\beta+1}}$。因此，$\mathcal{N} \in M^{G_{\beta+1}}$。

$3'$ 令 $D^* := \{r \in D:\ r \restriction (\beta+1) \in G_{\beta+1},\ \ \beta \in \text{定义域}(w_r)\ \ \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_r\} \in M^{G_{\beta+1}}$。

$4'$ 注意到 $q \in D^*$。由初等性，$M^{G_{\beta+1}} \models D^* \neq \emptyset$。因此，存在 $r \in D \cap M^{G_{\beta+1}}$。

$5'$ 由强迫定理，存在 $s_0 \in G_{\beta+1}$ 使得

a. $s_0 \leq q \restriction (\beta+1), r \restriction (\beta+1)$,
b. $s_0 \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta+1}} r \in M^{\dot{G}_{\beta+1}}$.

条件 r，s_0 符合要求。

□

11° **断言**。存在 $s \in \mathbb{P}_\gamma$ 使得 $s \leq_{\mathbb{P}_\gamma} q$，$r$，$s_0$。

证明。

$1'$ 令 $w_s := w_{s_0}$, $\mathcal{M}_s := \mathcal{M}_{s_0} \cup \mathcal{M}_q \cup \mathcal{M}_r$, $s := (w_s,\ \mathcal{M}_s)$。只需证明$s \in \mathbb{P}_\gamma$即可。

$2'$ 我们有 $s \restriction (\beta+1) = s_0 \in \mathbb{P}_{\beta+1}$，因此还需验证

$$s \restriction (\beta+1) \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta+1}} (\mathcal{M}_s^\gamma[\dot{G}_\beta] \text{ is a weak } \lhd_\gamma\text{-chain w.r.t. } \dot{G}_{\beta+1}), \tag{9}$$

$$s \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} (\forall N \in \mathcal{M}_s^\gamma[\dot{G}_\beta])(w_s(\beta) \text{ is semi-}N[\dot{G}_\beta]^{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\text{-generic}). \tag{10}$$

$3'$ 任取包含 $s \restriction (\beta+1)$ 的 $G_{\beta+1} \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\beta}$。我们先验证 $\mathcal{M}_s^\gamma[G_\beta]$ 关于 $G_{\beta+1}$ 是一个弱 $\lhd_\gamma$-链。

$4'$ 令 $\mathcal{M}^* := \{N \in \mathcal{M}:\ N \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V\}$。由于 $\{N \in \mathcal{M}_q^\gamma[G_\beta]:\ N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V\} \subseteq \mathcal{M}_r$，我们有

$$\mathcal{M}_s^\gamma[G_\beta] = \mathcal{M}_q^\gamma[G_\beta] \cup \mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta] = \mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta] \cup \mathcal{M}^*.$$

$5'$ $\mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta]$ 和 $\mathcal{M}^*$ 关于 $G_{\beta+1}$ 都是弱 $\lhd_\gamma$-链，并且对于所有 $N \in \mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta]$ 和所有 $P \in \mathcal{M}^*$，我们有

$$N \cap \omega_1^V < M^{G_{\beta+1}} \cap \omega_1^V = M \cap \omega_1^V \leq P \cap \omega_1^V$$

（“<”由 $r \in M^{G_{\beta+1}}$ 推出，而“=”由断言 7°推出）。因此，只需验证对于所有$N \in \mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta]$ 以及所有 $P \in \mathcal{M}^*$，我们有 $N \lhd_\gamma P^{G_{\beta+1}}$。

$6'$ 由于 $r \in M^{G_{\beta+1}}$，我们有 $N \lhd_\gamma M^{G_{\beta+1}}$。

$7'$ 由于 $M \downarrow \gamma$，$P \in \mathcal{M}$ 且 $M \cap \omega_1^V \leq P \cap \omega_1^V$，我们有 $M \downarrow \gamma = P$ 或 $M \downarrow \gamma \lhd_\gamma P^{G_{\beta+1}}$。

$8'$ 因此，

$$N \lhd_\gamma (M \downarrow \gamma)^{G_\beta+1} \subseteq P^{G_{\beta+1}},$$

如所需。

$9'$ 现在来验证，对于每个 $N \in \mathcal{M}_s^\gamma[G_\beta]$，都有 $w_s(\beta)^{G_\beta}$ 是半-$N[G_\beta]^{\mathbb{Q}_\beta}$-泛型的。$10'$ 或者 $N \in \mathcal{M}_q^\gamma[G_\beta]$，或者 $N \in \mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta]$。

11′ 如果 $N \in \mathcal{M}_q^\gamma[G_\beta]$，则结论由此得出：

$$w_s(\beta)^{G_\beta} = w_{s_0}(\beta)^{G_\beta} \leq w_q(\beta)^{G_\beta};$$

若 $N \in \mathcal{M}_r^\gamma[G_\beta]$，结论由

$$w_s(\beta)^{G_\beta} = w_{s_0}(\beta)^{G_\beta} \leq w_r(\beta)^{G_\beta}.$$

12′ 由此完成了断言 11°的证明。

□

12° 显然， r 和 s 满足 2°中的要求。 □

2.6.2 极限情形

1° 我们假设 γ 是 $\mathscr{E}$ 的一个极限点，并且

$$(\forall \alpha \in \mathscr{E} \cap \gamma)(\forall N \in \mathcal{C}_{>\alpha})(\forall q \in \mathbb{P}_\alpha)(N \downarrow \alpha \in \mathcal{M}_q \implies q \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} N^{\dot{G}_\alpha} \cap \omega_1^V = N \cap \omega_1^V).$$

我们固定某个 $M \in \mathcal{C}_{>\gamma}$ 以及某个 $p \in \mathbb{P}_\gamma$，使得 $M \downarrow \gamma \in \mathcal{M}_p$。我们要证明 p 是局部 $M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的。

2° 我们使用局部泛型性判据 [2.4.4]。设 $q \leq_{\mathbb{P}_\gamma} p$ 是任意一个条件，并设 D 是 $\mathbb{P}_\gamma$ 的任意一个稠密开子集，且满足

$$q \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} D \in M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma}.$$

我们想要找到 $r \in D$ 和 $s \leq_{\mathbb{P}_\gamma} q$， r 使得

$$s \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \gamma \notin M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma} \vee r \in M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma}.$$

3° 由引理 [2.5.7],，不妨通过加强 q，假设存在 $\beta \in \mathscr{E} \cap \gamma$和 $\gamma^* \in (\beta,\ \gamma]$使得

$$(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap [\beta, \gamma))(q \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \sup(M^{\dot{G}_\xi} \cap \gamma) = \gamma^*).$$

若 $q \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \gamma \notin M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma}$，我们可以令 $r = s$ 为 D 中任意一个满足 $\leq q$的元素。因此，我们假设 $q \nVdash_{\mathbb{P}_\gamma} \gamma \notin M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma}$。通过加强 q，不妨假设 $q \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \gamma \in M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma}$。进一步加强并增大 β后，不妨假设 $q \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \gamma \in M_{<\beta}^{\dot{G}_\gamma}$，或者等价地

$$q \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \gamma \in M_{<\beta}^{\dot{G}_\beta}.$$

5° 经过强化 q 并增大 β 后，我们还可以假设

$$q \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} D \in M_{<\beta}^{\dot{G}_\beta}.$$

6° **断言**。 我们可以假设对于所有 $N \in \mathcal{M}_q$，要么

$$q \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \sup(N^{\dot{G}_\beta} \cap \gamma^*) = \gamma^*$$

or

$$(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap [\beta, \gamma^*))(q \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \sup(N^{\dot{G}_\xi} \cap \gamma^*) \leq \beta).$$

证明。

1′ Let $\mathcal{M}_q = \{N_i : i < k\}$, let $\eta_{-1} := \beta$, and let $t_{-1} := q \restriction \gamma^*$.

2′ 令 $i < k$。递归地假设某个序数 $\eta_{i-1} \in \mathscr{E} \cap [\beta, \gamma^*)$ 和一个条件 $t_{i-1} \leq_{\mathbb{P}_{\gamma^*}} q \restriction \gamma^*$ 满足

$$\mathcal{M}_{t_{i-1}} \cap \mathcal{C}_{\gamma^*} = \mathcal{M}_{q \restriction \gamma^*} \cap \mathcal{C}_{\gamma^*}$$

已经定义，并且对于所有 $j < i$，以下两者之一成立

$$t_{i-1} \restriction \eta_{i-1} \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta_{i-1}}} \sup(N_j^{\dot{G}_{\eta_{i-1}}} \cap \gamma^*) = \gamma^*$$

or

$$(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap [\eta_{i-1}, \gamma^*))(t_{i-1} \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \sup(N_j^{\dot{G}_\xi} \cap \gamma^*) \leq \eta_{i-1})).$$

3′ 我们想要定义一个序数 $\eta_i \in \mathscr{E} \cap [\eta_{i-1}, \gamma^*)$ 和一个条件 $t_i \leq_{\mathbb{P}_{\gamma^*}} t_{i-1}$，使其满足

$$\mathcal{M}_{t_i} \cap \mathcal{C}_{\gamma^*} = \mathcal{M}_{q \restriction \gamma^*} \cap \mathcal{C}_{\gamma^*}$$

使得对于所有 $j \leq i$，以下两者之一成立

$$t_i \restriction \eta_i \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta_i}} \sup(N_j^{\dot{G}_{\eta_i}} \cap \gamma^*) = \gamma^*$$

or

$$(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap [\eta_i, \gamma^*))(t_i \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \sup(N_j^{\dot{G}_\xi} \cap \gamma^*) \leq \eta_i)).$$

4′ 如果 $N_i \in \mathcal{C}_{<\gamma^*}$，那么令 η_i 为集合中的最小元素

$$\mathscr{E} \cap [\max\{\eta_{i-1}, \sup(N_i \cap \mathsf{Ord})\}, \gamma^*)$$

并令 $t_i := t_{i-1}$。

5′ 否则，我们有 $N_i \in \mathcal{C}_{\geq \gamma^*}$。然后我们可以应用引理 [2.5。7] 至

a. $\gamma := \gamma^*$，~
b. $M := N_i$，
c. $p := t_{i-1}$，~

并得到序数 $\mu < \nu \leq \gamma^*$ 和满足以下条件的条件 $t_i \leq_{\mathbb{P}_{\gamma^*}} t_{i-1}$

$$\mathcal{M}_{t_i} \cap \mathcal{C}_{\gamma^*} = \mathcal{M}_{t_{i-1}} \cap \mathcal{C}_{\gamma^*},$$

$$(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap [\mu, \gamma^*))(t_i \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \sup(N_i^{\dot{G}_\xi} \cap \gamma^*) = \nu).$$

6′ 若 $\nu = \gamma^*$，则令

$$\eta_i := \max\{\eta_{i-1}, \min(\mathscr{E} \cap [\mu, \gamma^*))\}.$$

若 $\nu < \gamma^*$，则令

$$\eta_i := \max\{\eta_{i-1}, \min(\mathscr{E} \cap [\mu, \gamma^*)), \nu\}.$$

7′ 由引理 [1.3。9]，我们有 $\nu \in \mathscr{E}$ 因此 $\eta_i \in \mathscr{E}$。

8′ 递归至此完成。注意到 $\mathcal{M}_{t_{k-1}} - \mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{C}_{<\gamma^*}$，因此存在 $\eta_k \in \mathscr{E} \cap [\eta_{k-1}, \gamma^*)$，使得对所有 $N \in \mathcal{M}_{t_{k-1}} - \mathcal{M}_q$ 以及所有 $\xi \in \mathscr{E} \cap [\eta_k, \gamma^*)$，

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \sup(N^{G_\xi} \cap \gamma^*) \leq \sup(N \cap \mathsf{Ord}) \leq \eta_k.$$

9′ 现在只需将 q 替换为 $t_{k-1} q$，并将 β 替换为 η_k，断言便得证。

□

7° 通过增大 β，不妨假设 $\mathrm{dom}(w_q) \cap \gamma^* \subseteq \beta$。

8° 对于所有 $\xi \in \mathscr{E} \cap [\beta, \gamma^*)$，条件 $q \restriction \xi$ 都能确定 $\mathcal{M}_q^{\gamma^*}[\dot{G}_\xi]$ 的值。通过增大 β，我们可以假设所有这些值都等于某个固定值 $\mathcal{M} \in [\mathcal{C}_{\gamma^*}]^{<\omega}$。因此，我们可以确保以下结论：

a. $(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap [\beta, \gamma^*))(q \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \mathcal{M}_q^{\gamma^*}[\dot{G}_\xi] = \mathcal{M})$,

b. $q\restriction\beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta}$ ($\mathcal{M}$ is a weak $\lhd_{\gamma^*}$ -chain w.r.t. $\dot{G}_\beta$),

c. $M\downarrow\gamma^*\in\mathcal{M}$.

9° 根据 3° 和引理 [1.3。9],我们有

$$q\restriction\beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \sup(\mathscr{E}\cap M^{\dot{G}_\beta}\cap\gamma)=\gamma^*>\beta.$$

这意味着我们可以加强 q 并增大 β，以确保

$$q\restriction\beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \beta\in M^{\dot{G}_\beta}_{<\beta}.$$

10° **断言**。存在 $r\in D$ 和 $s_0\in\mathbb{P}_\beta$，使得

a. $(\forall N\in\mathcal{M}: N\cap\omega_1^V<M\cap\omega_1^V)(\exists N^+\in\mathcal{M}_r\cap\mathcal{C}_\gamma)(N=N^+\downarrow\gamma)$,

b. $s_0\leq q\restriction\beta, r\restriction\beta$,

c. $s_0\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} r\in M^{\dot{G}_\beta}$.

证明。

1′ 令 G_β 为一个包含 $q\restriction\beta$ 的 $V^{\mathbb{P}_\beta}$-泛型，并在 $V[G_\beta]$内进行讨论 .

2′ 对于 $N\in\mathcal{M}$ 以及 $N\cap\omega_1^V<M\cap\omega_1^V$，我们可以应用引理 [2.5。8] 来

a. $\underset{\sim}{M}:=M^{G_\beta}$,

b. $\gamma:=\gamma$,c. $\underset{\sim}{N}:=N$,

并得到满足 $N^+\downarrow\gamma^*=N$ 的唯一 $N^+\in M^{G_\beta}\cap\mathcal{C}_\gamma$

$$\mathcal{N}:=\{N^+: N\in\mathcal{M}, N\cap\omega_1^V<M\cap\omega_1^V\}\in M^{G_\beta}.$$

3′ 令 $D^*:=\{r\in D: r\restriction\beta\in G_\beta,\ \ \mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}_r\}$。我们想要找到 $r\in D^*\cap M^{G_\beta}$。

4′ 由于 $\beta\in M^{G_\beta}_{<\beta}$，模型 $M[G_\beta]$ 有定义，且 $D^*\in M[G_\beta]$。根据初等性，只需证明 $D^*\neq\emptyset$。

5′ **子断言**。 $\mathcal{N}$ 是关于 G_β 的弱 $\lhd_\gamma$-链。

证明。

1″ 任取满足 $N\cap\omega_1^V\leq P\cap\omega_1^V<M\cap\omega_1^V$ 的 N， $P\in\mathcal{M}$。我们想要证明

- 若 $N\cap\omega_1^V=P\cap\omega_1^V$，则 $N^+=P^+$,
- 若 $N\cap\omega_1^V<P\cap\omega_1^V$，则 $N^+\lhd_\gamma(P^+)^{G_\beta}$。

第一种情形显然，因为我们有 $N=P$。考虑 $N\cap\omega_1^V<P\cap\omega_1^V$ 的情形。

2″ 我们有 $N\lhd_{\gamma^*}P^{G_\beta}$。由于 $P\cong_{\gamma^*}P^+$，我们有 $N\lhd_{\gamma^*}(P^+)^{G_\beta}$。

3″ 因此，存在 $N'\in(P^+)^{G_\beta}$ 使得 $N\cong_{\gamma^*}N'$。

4″ 由于 $P^+\in(M\downarrow\gamma)^{G_\beta}$，我们得出

$$(P^+)^{G_\beta}\subseteq(M\downarrow\gamma)^{G_\beta}.$$

5″ 这意味着 $N'\in(M\downarrow\gamma)^{G_\beta}$。于是存在 $N''\in M^{G_\beta}$，使得 $N'\cong_\gamma N''$。6″ 因此，$N'\downarrow\gamma=N''\downarrow\gamma\in M^{G_\beta}$，而 $(N'\downarrow\gamma)\downarrow\gamma^*=N$。我们得出结论：

$$N^+=N'\downarrow\gamma\cong_\gamma N'\in(P^+)^{G_\beta},$$

这意味着 $N^+\lhd_\gamma(P^+)^{G_\beta}$。

□

6′ 存在 $t\in G_\beta$，使得

a. $t\leq q\restriction\beta$,

b. $t \Vdash^V_{\mathbb{P}_\beta} (\check{\mathcal{N}}$ is a weak $\lhd_\gamma$-chain w.r.t. $\dot{G}_\beta)$,

c. $t \Vdash^V_{\mathbb{P}_\beta} (\forall P \in \check{\mathcal{N}})(P^{\dot{G}_\beta}$ is active at $\gamma^*)$.

$7'$ 设 $w_u := w_t$，设 $\mathcal{M}_u := \mathcal{M}_t \cup \mathcal{N}$，并设 $u := (w_u,\ \mathcal{M}_u)$。前一点推出$u \in \mathbb{P}_\gamma$。我们还有 $u \restriction \beta = t \in G_\beta$，这意味着 $u \in (\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta)^{G_\beta}$。

$8'$ 由于 $\{v \in D :\ v \restriction \beta \in G_\beta\}$ 在 $(\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\beta)^{G_\beta}$中稠密，我们得出存在 $v \in D$，使得 $v \restriction \beta \in G_\beta$ 且 $v \leq_{\mathbb{P}_\gamma} u$；特别是，$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_v$，因此 $v \in D^*$。

$9'$ 因此，存在 $r \in D^* \cap M[G_\beta]$。这意味着

a. $r \in D$, b. $r \restriction \beta \in G_\beta$,

c. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_r$。

$10'$ 根据强迫定理，存在 $s_0 \in G_\beta$，使得

a. $s_0 \leq q \restriction \beta,\ r \restriction \beta$,

b. $s_0 \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} r \in M^{\dot{G}_\beta}$。

□

11° **断言**。存在 $s \in \mathbb{P}_\gamma$，使得 $s \leq_{\mathbb{P}_\gamma} q,\ r,\ s_0$。

证明。

$1'$ 令 $t := s_0 q \in \mathbb{P}_\gamma$。注意到

$$\mathrm{dom}(w_t) \cap [\beta, \gamma^*) = \mathrm{dom}(w_q) \cap [\beta, \gamma^*) = \emptyset.$$

$2'$ 令 $\mathrm{dom}(w_s) := \mathrm{dom}(w_t) \cup \mathrm{dom}(w_r)$。对于 $\xi \in \mathrm{dom}(w_s) - [\beta, \gamma^*)$，令 $w_s(\xi) := w_t(\xi)$。

$3'$ 对于 $\xi \in \mathrm{dom}(w_s) \cap [\beta, \gamma^*) = \mathrm{dom}(w_r) - \beta$，记 η 为其在 $\mathscr{E}$中的后继。

$4'$ 由于 $s_0 \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} r \in M^{\dot{G}_\beta}$ 和 $t \restriction \xi \leq s_0$，我们有 $t \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} (M^{\dot{G}_\xi}$ 在 η处是活跃的)。

$5'$ 因此，我们可以应用引理 [2.5。3] 到

a. $\underset{\sim}{\mu} := \xi, \underset{\sim}{\nu} := \eta$,

b. $\underset{\sim}{p} := t \restriction \eta$,

c. $\underset{\sim}{M} := M \downarrow \eta$,

d. $\underset{\sim}{u} := w_r(\xi)$

并得到一个规范的 $\mathbb{P}_\xi$名称 $w_s(\xi)$，它是 $\mathbb{Q}_\xi$ 的一个元素，使得

$$t \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} w_s(\xi) \leq w_r(\xi),$$

$$t \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} (\forall N \in \mathcal{M}^\eta_t[\dot{G}_\xi])(N \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V \implies (w_s(\xi) \text{ is semi-}N[\dot{G}_\xi]^{\dot{\mathbb{Q}}_\xi}\text{-generic})).$$

$6'$ 设 $\mathcal{M}_s := \mathcal{M}_t \cup \mathcal{M}_r$，且 $s := (w_s,\ \mathcal{M}_s)$。只需证明 $s \in \mathbb{P}_\gamma$即可。我们对 $\eta \in \mathscr{E} \cap [\beta, \gamma]$ 作归纳，证明 $s \restriction \eta \in \mathbb{P}_\eta$。

$7'$ **情形**。$\eta = \beta$

证明。由于 $s \restriction \beta = s_0$，这一情形显然成立。 □

$8'$ **情形**。设 $\eta \in (\beta,\ \gamma^*]$，且 η 在 $\mathscr{E}$中有一个前驱 ξ。

证明。

$1''$ 我们需要验证

$$\xi \in \mathrm{dom}(w_s) \implies s \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} (\forall N \in \mathcal{M}^\eta_s[\dot{G}_\xi])(w_s(\xi) \text{ is semi-}N[\dot{G}_\xi]^{\dot{\mathbb{Q}}_\xi}\text{-generic})$$

并且

$$s \restriction (\xi + 1) \Vdash_{\mathbb{P}_{\xi+1}} (\mathcal{M}^\eta_s[\dot{G}_\xi] \text{ is a weak } \lhd_\eta\text{-chain w.r.t. } \dot{G}_{\xi+1}).$$

$2''$ 令 $G_\xi \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\xi}$ 为包含 $s \restriction \xi$ 的任意泛型，并令 $\mathbb{Q}_\xi := \dot{\mathbb{Q}}_\xi^{G_\xi}$。注意

$$\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi] = \mathcal{M}_t^\eta[G_\xi] \cup \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi].$$

$3''$ 由于 $\mathcal{M}_t^\eta[G_\xi] \subseteq \mathcal{M}_t \cap \mathcal{C}_{\geq\eta} = \mathcal{M}_q$，我们有 $\mathcal{M}_t^\eta[G_\xi] = \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$，因此

$$\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi] = \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] \cup \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi].$$

$4''$ **子断言。** $\mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] \subseteq \mathcal{M} \downarrow \eta$

证明。
$1'''$ 任取 $N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$。那么存在 $P \in \mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}_{\geq\eta}$，使得 $\xi \in P^{G_\xi}$且 $N = P \downarrow \eta$。

$2'''$ 现在我们有 $\sup(P^{G_\xi} \cap \gamma) > \xi \geq \beta$ 根据断言 6° 可得

$$\sup(P^{G_\xi} \cap \gamma) = \gamma^*.$$

$3'''$ 这意味着 $P \downarrow \gamma^* \in \mathcal{M}_q^{\gamma^*}[G_\xi] = \mathcal{M}$，而 $N = (P \downarrow \gamma^*) \downarrow \eta$。

□

$5''$ **子断言。** $\{N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] : \ N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V\} \subseteq \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$

证明。
$1'''$ 令 $N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$ 满足 $N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V$。
$2'''$ 由子断言 $4''$，存在 $P \in \mathcal{M}$ 使得 $N = P \downarrow \eta$。
$3'''$ 我们有 $P \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V$，因此断言 10°a 蕴含存在 $Q \in \mathcal{M}_r \cap \mathcal{C}_\gamma$ 使得 $P = Q \downarrow \gamma^*$。

$4'''$ 注意到

$$\xi \in N^{G_\xi} \cong_\eta P^{G_\xi} \cong_{\gamma^*} Q^{G_\xi},$$

因此 $Q \downarrow \eta \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$，而 $N = Q \downarrow \eta$。

□

$6''$ **子断言。** 对于所有 $\xi \in \mathrm{dom}(w_s)$ 以及所有 $N \in \mathcal{M}_s^\eta[G_\xi]$，我们有 $w_s(\xi)^{G_\xi}$ 是半-$N[G_\xi]^{\mathbb{Q}_\xi}$-泛型的。

证明。
$1'''$ 首先假设 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$。由于 $\xi \in [\beta, \gamma^*)$，我们有 $\xi \in \mathrm{dom}(w_r) - \beta$，因而 $w_r(\xi)^{G_\xi}$是半-$N[G_\xi]^{\mathbb{Q}_\xi}$-泛型的。结论现在由以下事实得出：$w_s(\xi)^{G_\xi} \leq w_r(\xi)^{G_\xi}$。$2'''$ 接下来假设 $N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$ 且 $N \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V$。根据 $w_s(\xi)$ 的选取，$w_s(\xi)^{G_\xi}$ 是半 -$N[G_\xi]^{\mathbb{Q}_\xi}$-泛型的。$3'''$ 最后假设 $N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$ 且 $N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V$。由子断言 $5''$，我们有 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$，这意味着 $w_r(\xi)^{G_\xi}$是半-$N[G_\xi]^{\mathbb{Q}_\xi}$-泛型的。所需结论现在由以下事实得出：$w_s(\xi)^{G_\xi} \leq w_r(\xi)^{G_\xi}$。

□

$7''$ 子断言。 </style}令 $G_{\xi+1} \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_{\xi+1}}$ 是任意一个扩展 G_ξ 且包含$s \restriction (\xi+1)$的泛型。那么，$\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi]$ 关于 $G_{\xi+1}$是一个弱 $\lhd_\eta$-链。

证明。
$1'''$ 令 $\mathcal{M}^* := \{P \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] : \ P \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V\}$。由子断言 $5''$，集合 $\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi]$ 是集合 $\mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 和 $\mathcal{M}^*$的并集。
$2'''$ 集合 $\mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 和 $\mathcal{M}^*$ 关于 $G_{\xi+1}$都是弱 $\lhd_\eta$-链。此外，对每个$N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 以及每个 $P \in \mathcal{M}^*$，我们有

$$N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V \leq P \cap \omega_1^V.$$

$3'''$ 因此，还需要验证：对于每个 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 和每个 $P \in \mathcal{M}^*$，都有$N \lhd_\eta P^{G_{\xi+1}}$。

$4'''$ 由于 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$和 $r \in M^{G_\xi}$，我们有 $N \lhd_\eta M^{G_\xi}$。
$5'''$ 由子断言 $4''$，存在 $Q \in \mathcal{M}$ 使得 $P = Q \downarrow \eta$。由于 $Q \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V$，我们得出 $M \downarrow \gamma^* = Q$ 或 $M \downarrow \gamma^* \lhd_{\gamma^*} Q^{G_\xi}$。

6‴ 因此，存在 $R \in Q^{G_\xi} \cup \{Q\}$ 使得 $M \cong_{\gamma^*} R$。

7‴ 我们得出 $N \lhd_\eta R^{G_\xi} \subseteq Q^{G_\xi}$。

8‴ 因此，

$$N \lhd_\eta Q^{G_\xi} \cong_\eta P^{G_\xi} \subseteq P^{G_{\xi+1}},$$

正如所需。

□

8″ 这就完成了情形 8′ 的证明

□

9′ **情形**。 假设 $\eta \in (\beta,\ \gamma^*]$ 并且 η 是 $\mathscr{E}$ 的极限点。

证明。

1″ 我们需要证明存在 $\beta_0 < \eta$，使得

$$(\forall \xi \in \mathscr{E} \cap (\beta_0, \eta))(s \restriction (\xi+1) \Vdash_{\mathbb{P}_{\xi+1}} (\mathcal{M}_s^\eta[\dot{G}_\xi] \text{ is a weak } \lhd_\eta\text{-chain w.r.t. } \dot{G}_{\xi+1})).$$

我们将证明 $\beta_0 := \beta$ 成立。

2″ 令 $\xi \in \mathscr{E} \cap (\beta, \eta)$，并令 $G_\xi \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\xi}$ 满足 $s \restriction \xi \in G_\xi$。

3″ 我们有 $\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi] = \mathcal{M}_t^\eta[G_\xi] \cup \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi] = \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] \cup \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$。

4″ **子断言**。 $\mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] \subseteq \mathcal{M} \downarrow \eta$

证明。

1‴ 令 $N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$ 任意。则存在 $P \in \mathcal{M}_q \cap \mathcal{C}_{\geq \eta}$ 使得

$$\sup(P^{G_\xi} \cap \eta) = \eta$$

且 $N = P \downarrow \eta$。

2‴ 现在有 $\sup(P^{G_\xi} \cap \gamma) > \beta$，由断言 6° 可知

$$\sup(P^{G_\xi} \cap \gamma) = \gamma^*.$$

3‴ 这意味着 $P \downarrow \gamma^* \in \mathcal{M}_q^{\gamma^*}[G_\xi] = \mathcal{M}$，而 $N = (P \downarrow \gamma^*) \downarrow \eta$。

□

5″ **子断言**。 $\{N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] :\ N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V\} \subseteq \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$

证明。

1‴ 令 $N \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$ 满足 $N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V$。

2‴ 由子断言 4″，存在 $P \in \mathcal{M}$ 使得 $N = P \downarrow \eta$。

3‴ 我们有 $P \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V$，因此断言 10°a 蕴含存在 $Q \in \mathcal{M}_r \cap \mathcal{C}_\gamma$ 使得 $P = Q \downarrow \gamma^*$。

4‴ 由于

$$N^{G_\xi} \cong_\eta P^{G_\xi} \cong_{\gamma^*} Q^{G_\xi},$$

我们有

$$\sup(Q^{G_\xi} \cap \eta) = \sup(N^{G_\xi} \cap \eta) = \eta,$$

即 $Q \downarrow \eta \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$。

5‴ 结论现在由以下事实得出：$N = Q \downarrow \eta$。

□

6″ **子断言**。 设 $G_{\xi+1} \rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_{\xi+1}}$ 是任意一个扩张 G_ξ 且包含 $s \restriction (\xi+1)$ 的泛型。则 $\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi]$ 关于 $G_{\xi+1}$ 是一个弱 $\lhd_\eta$-链。

证明。

1‴ 设 $\mathcal{M}^* := \{P \in \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi] :\ P \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V\}$。根据子断言 5″，集合 $\mathcal{M}_s^\eta[G_\xi]$ 是集合 $\mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 和 $\mathcal{M}^*$ 的并集。

2‴ 集合 $\mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 和 $\mathcal{M}^*$ 均相对于 $G_{\xi+1}$ 构成弱 $\lhd_\eta$-链。此外，对于每个 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 以及每个 $P \in \mathcal{M}^*$，我们有

$$N \cap \omega_1^V < M \cap \omega_1^V \leq P \cap \omega_1^V.$$

3‴ 因此，只需验证对于每个 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$ 以及每个 $P \in \mathcal{M}^*$，我们有$N \lhd_\eta P^{G_{\xi+1}}$。

4‴由于 $N \in \mathcal{M}_r^\eta[G_\xi]$和 $r \in M^{G_\xi}$，我们得到 $N \lhd_\eta M^{G_\xi}$。
5‴ 根据子断言 4″，存在 $Q \in \mathcal{M}$ 使得 $P = Q \downarrow \eta$。由于 $Q \cap \omega_1^V \geq M \cap \omega_1^V$，我们得出 $M \downarrow \gamma^* = Q$ 或 $M \downarrow \gamma^* \lhd_{\gamma^*} Q^{G_\xi}$。
6‴ 因此，存在 $R \in Q^{G_\xi} \cup \{Q\}$ 使得$M \cong_{\gamma^*} R$。
7‴ 我们得出 $N \lhd_\eta R^{G_\xi} \subseteq Q^{G_\xi}$。
8‴ 因此，

$$N \lhd_\eta Q^{G_\xi} \cong_\eta P^{G_\xi} \subseteq P^{G_{\xi+1}},$$

如所要求的。

□

7″ 这就完成了情形 9′ 的证明。

□

10′ **情形**。 设 $\eta \in (\gamma^*, \gamma]$。

证明。
1″ 由于 $s_0 \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} r \in M^{\dot{G}_\beta} \cap \mathbb{P}_\gamma$，我们有 $\mathrm{dom}(w_r) \subseteq \gamma^*$ 以及 $\mathcal{M}_r \subseteq \mathcal{C}_{<\gamma^*}$。因此，

$$w_{s\restriction\eta} = (w_s \restriction \gamma^*) \cup (w_t \restriction [\gamma^*, \eta)) = (w_s \restriction \gamma^*) \cup (w_q \restriction [\gamma^*, \eta)),$$

$$\mathcal{M}_{s\restriction\eta} = (\mathcal{M}_s \cap \mathcal{C}_{\leq\gamma^*}) \cup (\mathcal{M}_t \downarrow \eta) = (\mathcal{M}_s \cap \mathcal{C}_{\leq\gamma^*}) \cup (\mathcal{M}_q \downarrow \eta).$$

2″ 首先，假设 η 是 $\mathscr{E}$ 内某个 β 的后继。我们需要证明

$$\xi \in \mathrm{dom}(w_s) \implies s \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} (\forall N \in \mathcal{M}_s^\eta[\dot{G}_\xi])(w_s(\xi) \text{ is semi-}N[\dot{G}_\xi]^{\dot{\mathbb{Q}}_\xi}\text{-generic}) \tag{11}$$

并且

$$s \restriction (\xi+1) \Vdash_{\mathbb{P}_{\xi+1}} (\mathcal{M}_s^\eta[\dot{G}_\xi] \text{ is a weak } \lhd_\eta\text{-chain w.r.t. } \dot{G}_{\xi+1}). \tag{12}$$

. 3″由 1″，我们有 $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \mathcal{M}_s^\eta[G_\xi] = \mathcal{M}_q^\eta[G_\xi]$ 以及 $w_s(\xi) = w_q(\xi)$。性质（11）和（12）现在可由以下事实推出： q 是一个条件，并且 $s \restriction (\xi+1) \leq_{\mathbb{P}_{\xi+1}} q \restriction (\xi+1)$。
4″ 现在假设 η 是 $\mathscr{E}$的一个极限点。我们需要证明存在 $\bar{\eta} < \eta$，使得对所有 $\xi \in \mathscr{E} \cap (\bar{\eta}, \eta)$，

$$s \restriction (\xi+1) \Vdash_{\mathbb{P}_{\xi+1}} (\mathcal{M}_s^\eta[\dot{G}_\xi] \text{ is a weak } \lhd_\eta\text{-chain w.r.t. } \dot{G}_{\xi+1}). \tag{13}$$

5″ 我们断言 $\bar{\eta} := \gamma^*$ 可行。也就是说，对所有 $\xi \in \mathscr{E} \cap (\gamma^*, \eta)$，我们有

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \mathcal{M}_s^\eta[\dot{G}_\xi] = \mathcal{M}_q^\eta[\dot{G}_\xi],$$

$$s \restriction (\xi+1) \leq_{\mathbb{P}_{\xi+1}} q \restriction (\xi+1),$$

因此，结论再次由 q 是一个条件这一事实得出。

□

11′ 至此，断言 11° 的证明完成。

□

12° 现在显然， s 且 r，这正是 2°所要求的，从而完成了论证。 □

2.7 半 proper 性与链条件

[2.7.1] **引理**。 设 $\gamma\in\mathscr{E}$，设 $M\in\mathcal{C}_{>\gamma}$，并设 $p\in\mathbb{P}_\gamma$ 满足 $M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}_p$。则

$$p\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} M^{\dot{G}_\gamma}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V.$$

证明。

1° 这通过对 γ 进行归纳得证。

2° **情形**。 $\gamma=$ 最小 $\mathscr{E}$

证明。 根据传递定理，条件 p 在局部是 $M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的，在此情形下这意味着它是 $M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的。 □

3° **情形**。 假设 γ 是 $\mathscr{E}$ 内某个 β 的后继。

证明。

1′ 任取包含 p 的 $G_\gamma\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\gamma}$，并验证

$$M^{G_\gamma}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V.$$

2′ 由归纳假设和传递定理可得

$$M^{G_\beta}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V,\quad M^{G_\gamma}=M^{G_{\beta+1}}.$$

因此，只需验证

$$M^{G_{\beta+1}}\cap\omega_1^V=M^{G_\beta}\cap\omega_1^V.$$

3′ 若 $\beta\notin M_{<\beta}^{G_\beta}$，则

$$M_{<\beta}^{G_\beta}=M^{G_\beta}=M^{G_\beta+1}.$$

那么设 $\beta\in M_{<\beta}^{G_\beta}$。

4′ 由于满足 $\beta\in\mathrm{dom}(w_q)$ 的条件 $q\in\mathbb{P}_\gamma$ 在 p 下稠密，因此存在 $q\in G_\gamma$，使得 $q\leq p$ 且 $\beta\in\mathrm{dom}(w_q)$。

5′ 我们有 $M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}_q^\gamma[G_\beta]$。由于 $\beta\in\mathrm{dom}(w_q)$，我们得出 $w_q(\beta)^{G_\beta}$ 是半（$M\downarrow\gamma$）$[G_\beta]^{\mathbb{Q}_\beta}$-泛型的。

6′ 由于 $q\in G_\beta$，我们得出

$$(M\downarrow\gamma)[G_{\beta+1}]\cap\omega_1^{V[G_\beta]}=(M\downarrow\gamma)[G_\beta]\cap\omega_1^{V[G_\beta]}.$$

这足以得出结论。

□

4° **情形**。 γ 是 $\mathscr{E}$ 的一个极限点。

证明。 根据归纳假设和传递定理，我们有

$$p\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} M^{\dot{G}_\gamma}=M_{<\gamma}^{\dot{G}_\gamma}.$$

因此，

$$p\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} M^{\dot{G}_\gamma}\cap\omega_1^V=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{E}\cap\gamma}(M^{G_\alpha}\cap\omega_1^V)=M\cap\omega_1^V$$

再次应用归纳假设。 □

5° 归纳至此结束。

□

[2.7.2] **命题**。对于所有的 $\gamma\in\mathscr{E}^*$，偏序集 $\mathbb{P}_\gamma$ 是半适当的。

证明。

1° 首先，假设 $\gamma\in\mathscr{E}$。只需证明，对于每个 $M\in\mathcal{C}_{>\gamma}$和每个 $p\in M$，都存在一个 $q\leq p$，它是半-$M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的。

2° 根据引理 [2.5.1], 存在 $q\leq p$ 使得 $M\downarrow\gamma\in\mathcal{M}_q$。根据前一个引理，条件$q$是半-$M^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型的。

3° 现在假设 $\gamma\in\mathscr{E}^+$。那么

$$\mathbb{P}_\gamma\simeq\mathbb{P}_{\gamma-1}*\dot{\mathbb{Q}}_{\gamma-1},$$

由此即可得出半 proper 性。

□

[2.7.3] **引理**。 假设

1. $\gamma\in\mathscr{E}$，2. γ 的余终数 $=\omega_1$,
3. $p\in\mathbb{P}_\gamma$。

那么存在 q 和 $\bar{\gamma}$，使得

a. $q\leq_{\mathbb{P}_\gamma}p$, b. $\bar{\gamma}\in\mathscr{E}\cap\gamma$, c. $\mathrm{dom}(w_q)\subseteq\bar{\gamma}$, d. 对所有 $\alpha\in\mathscr{E}\cap[0,\gamma]$, 对所有 $N\in\mathcal{M}_q$, $q\restriction\alpha\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}\sup(N^{\dot{G}_\alpha}\cap\gamma)\leq\bar{\gamma}$。

证明。

1° 注意到， γ 必然是 $\mathscr{E}$的一个极限点。

2° 令 $M\in\mathcal{C}_{>\gamma}$ 满足 γ, $p\in M$ 并令 $q\leq p$ 满足 定义域(w_q) $=$ 定义域(w_p) 并且 $\mathcal{M}_q=\mathcal{M}_p\cup\{M\downarrow\gamma\}$ (参见引理 [2.5.1])。

3° 设 $\bar{\gamma}:=\sup(\gamma\cap M)<\gamma$。我们有 $\mathrm{cof}(\bar{\gamma})=\omega$, $\bar{\gamma}$是 $\mathscr{E}$的极限点，并且 $\mathrm{dom}(w_q)=\mathrm{dom}(w_p)\subseteq\bar{\gamma}$。

4° **断言**。$q\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\sup(M^{\dot{G}_\gamma}\cap\gamma)=\bar{\gamma}$

证明。

1′ 设 $G_\gamma\rightsquigarrow V^{\mathbb{P}_\gamma}$ 是一个包含 q 的任意泛型，并且我们来证明

$$\sup(M^{G_\gamma}\cap\gamma)=\bar{\gamma}.$$

2′ 设 $f\in M$ 将 ω_1^V共终地映入 γ。

3′ 根据引理 [2.7.1], 我们有 $M^{G_\gamma}\cap\omega_1^V=M\cap\omega_1^V$。

4′ 因此，

$$\sup(M^{G_\gamma}\cap\gamma)=\sup(f[M^{G_\gamma}\cap\omega_1^V])=\sup(f[M\cap\omega_1^V])=\sup(M\cap\gamma)=\bar{\gamma}.$$

□

5° 因此，对于所有 $\alpha\in\mathscr{E}\cap[0,\gamma]$ 和所有 $N\in\mathcal{M}_q$，我们有

$$q\restriction\alpha\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}\sup(N^{\dot{G}_\alpha}\cap\gamma)\leq\bar{\gamma}.$$

□

[2.7.4] **定理**。 $\mathbb{P}_\kappa$ 具有 κ-链条件。

证明。

1° 反设不然。2° 令 $S:=\{\alpha\in\mathscr{E}\colon \mathrm{cof}(\alpha)=\omega_1\}$。那么 $\mathbb{P}_\kappa$ 中存在一个反链 $(p_\alpha\colon \alpha\in S)$。

3° 根据前一个引理，对所有 $\alpha\in S$，都存在 q_α 和 $\bar{\alpha}$，使得

a. $q_\alpha\leq_{\mathbb{P}_\alpha} p_\alpha\restriction\alpha$, b. $\bar{\alpha}\in\mathscr{E}\cap\alpha$, c. $\mathrm{dom}(w_{q_\alpha})\subseteq\bar{\alpha}$, d. 对所有 $\xi\in\mathscr{E}\cap[0,\alpha]$，对所有 $N\in\mathcal{M}_{q_\alpha}$，$q_\alpha\restriction\xi\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}\sup(N^{\dot{G}_\xi}\cap\alpha)\leq\bar{\alpha}$。

4° 根据按下引理，存在一个平稳的 $S_1\subseteq S$ 和 $\gamma\in\mathscr{E}$，使得对所有 $\alpha\in S_1$，我们有 ve $\alpha=\gamma$。

5° 存在 α，$\beta\in S_1$ 使得

a. $\gamma<\alpha<\beta$, b. $q_\alpha\in\mathbb{P}_\beta$, c. $q_\alpha\restriction\gamma=q_\beta\restriction\gamma$。

6° 令 $q:=q_\alpha\restriction\gamma=q_\beta\restriction\gamma$ 并令

$$\begin{aligned} w_r &:= w_q\cup(w_{p_\alpha}\restriction[\gamma,\beta))\cup(w_{p_\beta}\restriction[\beta,\kappa)),\\ \mathcal{M}_r &:= \mathcal{M}_q\cup\mathcal{M}_{p_\alpha}\cup\mathcal{M}_{p_\beta},\\ r &:= (w_r,\mathcal{M}_r).\end{aligned}$$

现在很容易看出 $r\in\mathbb{P}_\kappa$ 且 $r\leq p_\alpha$，p_β，这与 $p_\alpha\perp_{\mathbb{P}_\kappa}p_\beta$ 矛盾。

□

[2.7.5] **定理**。 $\mathbb{P}_\kappa$ 是半适当的。

证明。

1°令 θ为足够大的正则基数，令 $M\prec(H_\theta,\in,\kappa,U)$ 可数，令 $p\in\mathbb{P}_\kappa\cap M$，并令我们找出 $q\leq_{\mathbb{P}_\kappa}p$，使其为半-$M^{\mathbb{P}_\kappa}$-泛型。

2° 令 $\bar{\kappa}:=\sup(\kappa\cap M)\in\mathscr{E}\cap\kappa$，令 $N:=M\cap V_\kappa\in\mathcal{C}_{\bar{\kappa}}$，并令 $q\in\mathbb{P}_{\bar{\kappa}}$ 满足

a. $q\leq p$, b. $\mathrm{dom}(w_q)=$ 定义域(w_p), c. $\mathcal{M}_q=\mathcal{M}_p\cup\{N\}$

(参见引理 [2.5.1]；注意 $p\in\mathbb{P}_{\bar{\kappa}}$)。我们要证明 q 是半-$M^{\mathbb{P}_\kappa}$-泛型 .

3°任取满足 $\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\tau<\omega_1^V$ 的 $\tau\in M^{\mathbb{P}_\kappa}$。我们要证明 $q\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\tau\in M$。

4° 存在 $A\in M$，使得

a. A 是 $\mathbb{P}_\kappa$ 的极大反链；b. 对所有 $r\in A$，存在唯一的 $\alpha_r<\omega_1^V$，使得 $r\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\tau=\alpha_r$。

5° 根据前述定理，存在 $\gamma\in\mathscr{E}\cap M$，使得 $(w_q,\ \mathcal{M}_p)\in\mathbb{P}_\gamma$ 且 $A\subseteq\mathbb{P}_\gamma$。

6° 现在我们可以找到 $\sigma\in N^{\mathbb{P}_\gamma}$，使得对所有 $r\in A$，都有 $r\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\sigma=\alpha_r$。注意，此时 $\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\tau=\sigma$，因而 $\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\sigma<\omega_1^V$。

7° 令 $q_\tau:=(w_q,\ \mathcal{M}_p\cup\{N\downarrow\gamma\})$。显然，$q_\tau\in\mathbb{P}_\gamma$ 且 $q\leq_{\mathbb{P}_\kappa}q_\tau$。

8°根据引理 [2.7.1], 可知 q_τ是半-$N^{\mathbb{P}_\gamma}$-泛型。特别地，$q_\tau\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}\sigma\in N$。9° 因此，

$$q\leq_{\mathbb{P}_\kappa}q_\tau\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\tau=\sigma\in N\subseteq M,$$

正如所要求的。

□

3 饱和NSω_1

3.1 谨慎坍缩

[3.1.1] **记号**。 对于 M虚拟模型，我们记作 $\delta_M := \min($序数类 $- M)$。

[3.1.2] **定义**。 假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 是 $[H_\theta]^\omega$ 的一个平稳子集。

由 U引导的坍缩偏序集Col_U 定义如下。

a. $p \in$ 属于Col_U 当且仅当 $p = (\mathcal{M}_p,\ d_p)$，其中 i. 对所有 $M \in \mathcal{M}_p$，要么 $M \in U$ ，要么不存在满足 $M \subseteq N$ 和$\delta_N = \delta_M$的 $N \in U$ ； ii. $\mathcal{M}_p$ 是一个有限的 $\in$-链； iii. $d_p : \mathcal{M}_p \to [H_\theta]^{<\omega}$； iv. 对所有 $M,\ N \in \mathcal{M}_p$，若 $M \in N$，则 $d_p(M) \subseteq N$。 b. $p \leq q$属于Col_U当且仅当 $\mathcal{M}_p \supseteq \mathcal{M}_q$，并且对所有 $M \in \mathcal{M}_q$，$d_p(M) \supseteq d_q(M)$。

[3.1.3] **引理**。 假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 是 $[H_\theta]^\omega$的平稳子集，3. $x \in H_\theta$，4. $D := \{p \in \mathrm{Col}_U\colon \exists M \in \mathcal{M}_p,\ x \in M\}$。

那么 D 在Col_U中稠密。

证明。

1° 令 $p_0 \in \mathrm{Col}_U$ 为任意元素，下面找出满足 $p \leq p_0$的 $p \in D$ 。2° 由于 U是平稳的，存在 $M \in U$使得 $x,\ p_0 \in M$。3°那么 $p := ($ $\mathcal{M}_{p_0} \cup \{M\},\ d_{p_0} \cup \{(M,\ \emptyset)\})$正是所需。

□

[3.1.4] **引理**。 假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 是 $[H_\theta]^\omega$ 的平稳子集，3. $G \rightsquigarrow V^{\mathrm{Col}_U}$，4. $\mathcal{M}_G := \cup\{\mathcal{M}_p\colon p \in G\}$。

Then

a. $\mathcal{M}$ 是一个 $\in$-链，
b. otp$(\mathcal{M},\ \in) \leq \omega_1^V$，
c. $\cup\mathcal{M} = H_\theta$。

证明。

1° 部分a显然。2° 设 $(M_\xi : \xi < \alpha)$ 是 $\in$的递增枚举 $\mathcal{M}$。以下映射严格递增：这说明了部分b。

$$\alpha \to \omega_1^V : \xi \mapsto \delta_{M_\xi}.$$

3° 引理 [3.1.3]立即推出第 c 部分。

□

[3.1.5] **定义**。假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 是 $[H_\theta]^\omega$ 的平稳子集，3. $g \rightsquigarrow V^{\mathsf{Col}^U}$。

于是我们定义

a. $\mathcal{M}_g := \cup\{\mathcal{M}_p : p \in g\}$,

b. $\alpha_g := \mathsf{otp}(\mathcal{M}_g, \in)$,

c. for all $\xi < \alpha_g$, $\mathcal{M}_g(\xi)$ is the ξ^{th} element of $(\mathcal{M}_g, \in)$.

[3.1.6] **命题**。假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 是 $[H_\theta]^\omega$ 的平稳子集。

那么在 V^{Col^U}中，对所有极限 $\eta < \alpha_g$，$\mathcal{M}_g(\eta) = \bigcup_{\xi<\eta} \mathcal{M}_g(\xi)$。

证明。

1° 反设不成立。于是存在 p, α, η, x, M，使得

a. $p \Vdash \alpha_g = \alpha$, b. η 是严格小于 α的极限序数，c. $x \in H_\theta$, d. $p \Vdash x \in \mathcal{M}_g(\eta) - \bigcup_{\xi<\eta} \mathcal{M}_g(\xi)$, e. $p \Vdash \mathcal{M}_g(\eta) = M$, f. $M \in \mathcal{M}_p$。

2° 存在 $q \leq p$ 和 $N \in \mathcal{M}_q \cap M$，使得 $x \in d_q(N)$。

3° 令 $r \leq q$ 和 $\xi < \eta$ 满足 $r \Vdash \mathcal{M}_g(\xi) = N$。我们有

$$r \Vdash x \in d_r(N) \subseteq \mathcal{M}_g(\xi + 1),$$

这就产生了矛盾。

□

[3.1.7] **命题**。假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 在 $[H_\theta]^\omega$中是平稳的。

那么，Col_U 是强半适当的。

证明。

1° 考虑任意的a. $\chi \gg \theta$、b. $M \prec (H_\chi, \in, U)$，它们是可数的；c. $p \in \mathsf{Col}_U \cap M$。我们要找到一个 $q \leq p$，使其对于(M, Col_U)是强半泛型的。

2° **情形 I.** 存在 $N \in U$，使得 $M \cap H_\theta \subseteq N$且 $\delta_N = \delta_M$。

证明。

1′令 $q:=(\mathcal{M}_p \cup \{N\}, d_p \cup \{(N,\emptyset)\})$。我们要证明 q 是强半泛型 f or $(M,\ \mathsf{Col}_U)$。

2′任取 $r \le q$，我们来找一个 $r_M \in \mathsf{Col}_U$，使得对于 $P:=$包$(M,\ r_M)$，

a. $\delta_P = \delta_M$,

b. 对所有 $s \in \mathsf{Col}_U \cap P$，若 $s \le r_M$，则 $s \parallel r$。

3′令 $r_M:=(\mathcal{M}_r \cap N,\ d_r \restriction N) \in N$。我们有

$$\mathsf{Hull}(M, r_M) \cap H_\theta = \mathsf{Hull}(M \cap H_\theta, r_M) \subseteq N.$$

4′特别地，对于 $P:=$包$(M,\ r_M)$，有 $\delta_P = \delta_M$。

5′ 性质 2′b. 现在通常都能验证。

□

3° **情况 II.** 不存在这样的 $N \in U$，使得 $M \cap H_\theta \subseteq N$ 且 $\delta_N = \delta_M$。

证明。1′在这种情况下，我们有 $q:=(\mathcal{M}_p \cup \{M \cap H_\theta\},\ d_p \cup \{(M \cap H_\theta,\ \emptyset)\} \in \mathsf{Col}_U$ 且 $q \le p$。我们要验证，对于 $(M,\ \mathsf{Col}_U)$，q 是强泛型的。2′任取 $r \le q$，我们来找一个 $r_M \in \mathsf{Col}_U \cap M$，使得对于所有 $s \in \mathsf{Col}_U \cap M$，若 $s \le r_M$，则 $s \parallel r$。3′通常可以验证，$r_M:=(\mathcal{M}_r \cap M,\ d_r \restriction M)$ 满足要求。

□

4° 验证了这两种情形后，我们得出结论。

□

[3.1.8] **推论**。假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 在 $[H_\theta]^\omega$中是平稳的，3. $g \rightsquigarrow V^{\mathsf{Col}^U}$。

那么 $\mathsf{otp}(\mathcal{M}_g, \in) = \alpha_g = \omega_1$。证明。这是由以下事实得出的：$\alpha_g \le \omega_1^V = \omega_1$ 和 $H_\theta^V = \cup \mathcal{M}_g$。

□

[3.1.9] **推论**。假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 在 $[H_\theta]^\omega$中是平稳的。那么在 V^{Col^U}中，$|H_\theta^V| = \omega_1$。

□

[3.1.10] **引理**。假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的，2. U 在 $[H_\theta]^\omega$ 中是平稳的，3. $\chi \gg H_\theta$，4. $M \prec (H_\chi, \in, U)$是可数的，5. $p \in \mathsf{Col}_U$ 满足 $M \cap H_\theta \in \mathcal{M}_p$。那么，$p$是关于$(M, \mathsf{Col}_U)$的强泛型。证明。

1° 任取 $q \leq p$。我们要找出 $q_M \in \mathsf{Col}_U \cap M$，使得对于所有 $r \in \mathsf{Col}_U \cap M$，若$r \leq q_M$，则 $r \parallel q$。2° 令 $q_M := (\mathcal{M}_q \cap M, d_q \restriction M)$。显然， q_M符合要求。

□

[3.1.11] **命题**。 假设

1. $\theta > \omega$ 是正则的,
2. U 在 $[H_\theta]^\omega$中是平稳的。

那么在 V^{Col_U}中， U 在 $[H_\theta^V]^\omega$中是平稳的。

证明。

1° 反设不然。于是存在 $C \in V^{\mathsf{Col}_U}$ 和 $p \in \mathsf{Col}_U$，使得 a. $\Vdash_{\mathsf{Col}_U}$ “C 是 $[H_\theta^V]^\omega$中的闭无界集”，b. $p \Vdash_{\mathsf{Col}_U} C \cap U = \emptyset$。$2^\circ$ 设 $\chi \gg H_\theta$、C。于是存在可数的 $M \prec (H_\chi, \in, \theta, C, p)$，使得 $M \cap H_\theta \in U$。3° 设 $N := M \cap H_\theta \in U$，并令 $q := (\mathcal{M}_p \cup \{N\},\ d_p \cup \{(N, \emptyset)\}) \leq p$属于 Col_U。由引理 [3.1.10],可知， q是(M, Col_U)的泛型。4° 令 $g \rightsquigarrow V^{\mathsf{Col}_U}$包含 q。我们有 $C \in M[g]$, 因此 $M[g] \cap H_\theta^V \in C$。$5^\circ$ 由于 q在 V中是(M, Col_U)的泛型，我们有 $M[g] \cap H_\theta^V = N$。6° 因此, $N \in C \cap U$，矛盾。

□

3.2 封闭稠密集族

[3.2.1] **定义**。 设 $D \subseteq \mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$。我们称 D 是封闭的，若存在一个映射 $f\colon \omega_1 \to D$ 以及 ω_1 中的一个闭无界集 C，使得 $C \subseteq \nabla f$。

[3.2.2] **命题**。 若 $D \subseteq \mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$ 是封闭的，则 D 在 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$中稠密。 □

[3.2.3] **命题**。 以下条件等价。

a. NS_{ω_1} 是饱和的。b. $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$ 的每个稠密子集都是封闭的。 □

[3.2.4] **命题**。 假设 $D \subseteq \mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$ 是封闭的，且 $\mathbb{P}$ 是保持平稳集的偏序集。那么 $V^{\mathbb{P}} \models$ “D 在 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$中是封闭的”。

[3.2.5] **定义**。 假设

1. D 在 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$中稠密,
2. $\theta \geq \omega_2$ 是正则的，3. $M \prec H_\theta$ 是可数的。

那么我们称 M 捕获 D，当且仅当存在 $S \in D \cap M$ 使得 $\delta_M \in S$。

[3.2.6] **引理**。 假设

1. D 在 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$中稠密，2. $\theta \geq \omega_2$ 是正则的,
3. $U := \{M \prec H_\theta\colon |M| = \omega,$ “M捕获 D”$\}$。

那么 U 是投影平稳的。

证明。

1° 令 $S \subseteq \omega_1$ 为平稳集，并令 $F\colon H_\theta^{<\omega} \to H_\theta$。存在 $T \in D$，使得 $T \cap S$ 是平稳的。2°存在 $M \prec H_\theta$，使得 $T \in M$、$F[M^\omega] \subseteq M$，且 $\delta_M \in T \cap S$。3°因此，$M \in U$、$\delta_M \in S$，并且对于 F，M是闭的，正如所需。

□

[3.2.7] **命题**。假设

1. D 是 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$中的稠密前集，2. U:
$= \{M \prec H_{\omega_2}\colon |M| = \omega,$ “M捕获 D”$\}$，3. g
是对 Col_U的 V-泛型，4. $U^*:= \{\xi < \omega_1\colon \mathcal{M}_g(\xi)$
$\in U\}$，5. h 在 $V[g]$ 上泛型，且 $\omega_1^{V[g][h]} = \omega_1$,
6. 在 $V[g][h]$中，U^* 包含一个闭无界集。

那么在 $V[g][h]$ 中，D 是封闭的。

证明。

1° 对于所有 $\xi < \omega_1$，我们将 $D \cap \mathcal{M}_g(\xi)$ 枚举为 $(S^\xi_n\colon n < \omega)$。2° 我们如下定义 $f\colon \omega_1 \to D$：对于所有 $\alpha < \omega_1$，对于满足$\alpha = \omega\xi + n$的唯一 $\xi < \omega_1$ 和 $n < \omega$，令 $f(\alpha) := S^\xi_n$。3° 设 C 是包含于 U^* 的一个闭无界集。由命题 [3.1.6], ，集合 $E := \{\delta(\mathcal{M}_g(\alpha))\colon \alpha \in C, \omega\alpha = \alpha\}$ 是一个闭无界集。4° 只需证明 $E \subseteq \nabla f$。为此，任取 $\delta \in E$，并找出$\gamma < \delta$，使得 $\delta \in f(\gamma)$。5° 存在 $\alpha \in C$，使得 $\omega\alpha = \alpha$ 且 $\delta = \delta(\mathcal{M}_g(\alpha))$。6°由于 $\alpha \in U^*$，我们有 $\mathcal{M}_g(\alpha) \in U$，因此存在 $S \in D \cap \mathcal{M}_g(\alpha)$，使得 $\delta \in S$。7° 再次由命题 [3.1.6], ，存在 $\xi < \alpha$ 和 $n < \omega$，使得 $S = S^\xi_n$。8° 令 $\gamma := \alpha\xi + n < \alpha$。那么 $\delta \in S^\xi_n = f(\gamma)$，如所需。

□

3.3 封闭迭代

[3.3.1] **定义**。设 $\delta > \omega$ 是一个基数，且 $A \subseteq V_\delta$。那么，如果对于所有乘法封闭的 $\lambda \in (\kappa, \delta)$，都存在一个强 (κ, λ)-伸缩子 E 满足 $i_E(A \cap V_\kappa) \cap V_\lambda = A \cap V_\lambda$，则称 $\kappa < \delta$ 是 A下方的 -反射 δ。

[3.3.2] **定义**。设 $\delta > \omega$ 是一个基数。δ 的 *Woodin* 钻石 是一个函数$\mathbf{U}\colon \kappa \to V_\kappa$，使得 at

a. 对所有 $\xi < \delta$，$\mathbf{U}(\xi) \subseteq V_\xi$;
b. 对所有 $A \subseteq V_\delta$，集合

$$\{\kappa < \delta\colon A \cap V_\kappa = \mathbf{U}(\kappa), \text{并且 } \kappa \text{ 是 } A\text{-反射于 } \delta\}\text{下方}$$

在 δ中是平稳的。

[3.3.3] **专业位置**。假设存在一个针对 δ的 Woodin 钻石。那么 δ 是一个伍丁基数。 □

[3.3.4] **命题**。假设 δ 是一个伍丁基数。那么在 $V^{\mathsf{Col}(\delta,\delta)}$中，存在一个针对 δ的 Woodin 钻石。

证明。参见 [Sch16，引理 1。3] □

[3.3.5] **定义**。 设 $\mathbf{U}$ 是 δ 的一个 Woodin 钻石。由 $\mathbf{U}$ 给出的 *NS*-饱和迭代的蓝图是 $((V_\delta, \in, \mathbf{U}), \mathbf{Q})$，其中 $\mathbf{Q}$：$\delta \times V_\delta \to V_\delta$ 在 $(V_\delta, \in, \mathbf{U})$ 上定义如下：对于所有 $\kappa < \delta$ 和所有 $\mathbb{P} \in V_\delta$，若满足

a. κ 是不可达基数，b. $\mathbb{P} \subseteq V_\kappa$ 是一个偏序集，c. $\mathbf{U}(\kappa) = \mathbb{P} \oplus (S_i : i < \kappa)$，d. $V^{\mathbb{P}} \models$ “$\{\dot{S}_i : i < \kappa\}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$中是稠密的”，

e. $\dot{U}$ 是规范名称，使得

$$V^{\mathbb{P}} \models \dot{U} = \{M \prec H_{\omega_2} : |M| = \omega, \text{“}M \text{ captures } \{\dot{S}_i : i < \kappa\}\text{”}\},$$

那么我们将 $\mathbb{Q}_\kappa$ 设为 $\mathsf{Col}_{\dot{U}}$的规范 $\mathbb{P}$-名称；否则，我们将 $\mathbb{Q}_\kappa$ 设为平凡偏序集的规范名称。

[3.3.6] **命题**。假设

1. $\mathbf{U}$ 是 δ的 Woodin 钻石，2. $(\mathbb{V}, \mathbf{Q})$是由$\mathbf{U}$给出的 NS_{ω_1}-饱和迭代的蓝图，3. $(\mathbb{P}_\alpha : \alpha \in \mathscr{E}^*)$是由蓝图$(\mathbb{V}, \mathbf{Q})$给出的半适当强迫迭代，4. $\mathbb{P} := \bigcup_{\alpha \in \mathscr{E}^*} \mathbb{P}_\alpha$。

那么有

a. $\mathbb{P}$ 是半适当的，b. $\mathbb{P}$具有 δ-链条件，c. $\omega_2^{V^{\mathbb{P}}} = \delta$，
d. 在 $V^{\mathbb{P}}$中，NS_{ω_1} 是饱和的。

证明。

1° 部分 a-c是关于该迭代的一般事实。我们来验证，在 $V^{\mathbb{P}}$，NS_{ω_1} 是饱和的。2° 设 $(\dot{S}_i : i < \delta)$ 是 $\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$ 中的一个稠密集的名称，该稠密集属于 $V^{\mathbb{P}}$。我们要证明，$V^{\mathbb{P}}$ 中对应的稠密集是封闭的。

3° 集合

$$\mathscr{E}_0 := \left\{\alpha < \delta : V_\alpha \prec (V_\delta, \in, \mathbf{U}, \mathbb{P}, (\dot{S}_i : i < \delta))\right\}$$

是 δ中的一个闭无界集。这意味着存在 $\kappa \in \mathscr{E}_0$ 使得

a. $\mathbf{U}(\kappa) = \mathbb{P}_{<\kappa} \oplus (\dot{S}_i : i < \kappa)$，
b. κ 在 δ 以下是 $\mathbb{P} \oplus (S_i : i < \delta)$-反射的。

我们将证明 $(\dot{S}_i : i < \kappa)$ 在 $V^{\mathbb{P}_\kappa}$ 内是封闭的。

4° 设 $\lambda, E, j, \mathcal{M}$ 满足

a. $\lambda \in \mathscr{E}_0$ is inaccessible $> \kappa$,
b. E is a strong (κ, λ)-extender,
c. $j := i_E : V \prec \mathsf{Ult}(V, E) =: \mathcal{M}$,
d. $j(\mathbb{P}_{<\kappa}) \cap V_\lambda = \mathbb{P}_{<\lambda}$,
e. $j((\dot{S}_i : i < \kappa)) \restriction \lambda = (\dot{S}_i : i < \lambda)$.

5° 设 G_κ 是 V-泛型的，且我们在 $V[G_\kappa]$ 中工作。族 $(S_i : i < \kappa)$ 在$\mathbb{P}_{\mathsf{NS}_{\omega_1}}$ 中是稠密的，因此 $\mathbb{Q}_\kappa = \mathsf{Col}_U$，其中

$$U := \{M \prec H_{\omega_2} : |M| = \omega, \text{“}M \text{ captures } \{S_i : i < \kappa\}\text{”}\}.$$

6° L且 g 是 Col_U 的 $V[G_\kappa]$-泛型，令 $G_{\kappa+1}$ 为与 G_κ *对应的 $\mathbb{P}_{\kappa+1}$ 的 V-泛型 g，a并且我们在 $V[G_{\kappa+1}]$ 中工作。我们用 U^* 表示集合

$$\{\xi < \omega_1 : \mathcal{M}_g(\xi) \in U\}.$$

7° 设 G^* 是扩展 $G_{\kappa+1}$ 的 $j(\mathbb{P}_\kappa)$ 的 V-泛型，并设 $k\colon V[G_\kappa] \prec \mathcal{M}[G^*]$ 满足 $k \restriction V = j$ 且 $k(G_\kappa) = G^*$。

8° **断言**。在 $\mathcal{M}[G^*]$ 中，$\omega_1 - U^*$ 不是平稳的。

证明。

1′ 反设不然。则存在 $i_0 < j(\kappa)$，使得集合

$$k((\dot{S}_i : i < \kappa))(i_0) \cap (\omega_1 - U^*)$$

在 ω_1中是平稳的。

2′ 在 $\mathcal{M}$ 中，令 $(T_i : i < j(\kappa)) = k((S_i : i < \kappa))$，并令 $(M_\xi : \xi < \omega_1)$ 为一个连续的 $\in$-链 in 的可数初等子模型

$$(\mathcal{M} \restriction j(\lambda), \in, \kappa, \lambda, \dot{T}_i).$$

3′ 回到 $\mathcal{M}[G^*]$，集合

$$\{\delta(M_\xi[G^*]) : \xi < \omega_1\}$$

是 ω_1中的闭无界集，因此存在 $\xi_0 < \omega_1$ 使得

$$\alpha := \delta(M_{\xi_0}[G^*]) \in T_{i_0} \cap (\omega_1 - U^*).$$

4′ 由于 $\alpha \notin U^*$，我们有 $\mathcal{M}_g(\alpha) \notin U$。换言之，在 $\mathcal{M}[G_\kappa]$中，不存在 $N \in U$ 使得 $N \supseteq \mathcal{M}_g(\alpha)$且 $\delta_N = \delta(\mathcal{M}_g(\alpha))$。

5′ 由于 $\mathcal{M}_g(\alpha)$是 $\mathcal{M}[G_\kappa]$ 中的 H_{ω_2} 的可数子集，并且由于 $\omega_2^{\mathcal{M}[G_\kappa]} = \kappa$，我们有 ve 即 $k(\mathcal{M}_g(\alpha)) = \mathcal{M}_g(\alpha)$。

6′ 因此，在 $\mathcal{M}[G^*]$中，不存在 $N \in k(U)$使得 $N \supseteq \mathcal{M}_g(\alpha)$且 d $\delta_N = \delta(\mathcal{M}_g(\alpha))$。

7′ 由于 $g \in M_{\xi_0}[G^*]$，我们得到

$$M_{\xi_0}[G^*] \cap H_{\omega_2}^{V[G_\kappa]} = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_g(\xi) = \mathcal{M}_g(\alpha).$$

因此，$M_{\xi_0}[G^*] \supseteq \mathcal{M}_g(\alpha)$ 且 $\delta(M_{\xi_0}[G^*]) = \delta(\mathcal{M}_g(\alpha))$.

8′ 另一方面，$M_{\xi_0}[G^*]$ 捕获了 $k(\{S_i : i < \kappa\})$，其见证为 T_{i_0}。这意味着 $M_{\xi_0}[G^*] \in k(U)$。

9′ 上述三点合在一起导出了矛盾。

□

9° 因此，在 $\mathcal{M}[G^*]$中，U^* 包含一个闭无界集。

10° 根据命题 [3.2.7] 在 $\mathcal{M}[G_\kappa]$中应用后，我们有 $\{S_i : i < \kappa\}$ 在 $\mathcal{M}[G^*]$中是封闭的。

11° 这意味着 $k(\{S_i : i < \kappa\})$ 在 $\mathcal{M}[G^*]$ 中是封闭的，由 k 的初等性可得$\{S_i : i < \kappa\}$ 在 $V[G_\kappa]$中是封闭的，正如所要求的那样。

□

[3.3.7] **推论**。设 δ 是一个伍丁基数。那么存在一个偏序集 $\mathbb{P}$，使得 t

a. $\mathbb{P}$ 是半适当的，b. $\mathbb{P}$是 δ-可数链条件，c. $\omega_2^{V^{\mathbb{P}}} = \delta$，

d. 在 $V^{\mathbb{P}}$中，NS_{ω_1} 是饱和的。

□

参考文献

[Kas22a] Obrad Kasum。《迭代适当迫迫》。笔记，2022 年。[Kas22b] Obrad Kasum。《适当迫迫公理》。笔记，2022 年。[Nee14] 伊泰·尼曼。《使用两类模型序列的迫迫》。《圣母大学形式逻辑杂志》，55(2):265 – 298，2014 年。[Sch16] 拉尔夫·辛德勒。关于 NS_{ω_1} 饱和的问题。《在线笔记》，2016 年。[Vel14] Boban Veli˘ckovi´c。《半适当迫迫的迭代再探》，2014 年。