arXiv:2303.12679v1 [math.CO] 22 Mar 2023

类型保持的 amalgamation 与大 Ramsey 度

ANDR ´ES ARANDA、SAUMUEL BRAUNFELD、DAVID CHODOUNSK ´Y、JAN HUBI ˇCKA、MAT ˇ
EJ KONE ˇCN ´Y、JAROSLAV NE ˇSET ˇRIL 和 ANDY ZUCKER

Abstract. 我们为具有特殊类型尊重嵌入的关系结构范畴，给出了 Ne ˇset ˇril–R ¨odl 定理的无穷扩展。

1. Introduction

我们采用允许函数为偏函数的标准模型论结构概念。设L 为一种语言，其中包含关系符号 $R \in L$ 和函数符号 $f \in L$ ，每个符号都有其元数。一个 L-结构 A 是定义在 A 上的结构，具有顶点集 A、每个元数为 r 的关系符号 $R \in L$ 所对应的关系 $R_{\mathbf{A}} \subseteq A^r$ ，以及每个元数为 s的函数符号 $f \in L$ 所对应的偏函数 $f_{\mathbf{A}}$: $A^s \to A$ 。如果集合 A 是有限的，就称 A 为有限的（若 L 是无限的，它仍可能有无限多个关系）。我们只考虑顶点数有限或可数无穷的 L-结构。若语言 L 不含函数符号，则称其为关系语言。若恒等映射是一个嵌入 A → B，则称 A 是 B 的子结构，并记作 A ⊆ B。设 $\mathcal{K}$ 为一类 L-结构。若 $\mathcal{K}$ 对取子结构封闭，则称其为遗传的。若每个属于 $\mathcal{K}$ 的 L-结构都嵌入 U，则称 L-结构 U $\in \mathcal{K}$ 是$\mathcal{K}$-泛结构。

给定 L-结构 A 和 B，我们用 $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ 表示从 A 到 B 的所有嵌入构成的集合。我们用 C $\longrightarrow$ (B)$^{\mathbf{A}}_{k,l}$ 表示以下命题：对于任意以 k 种颜色对 $\binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$ 进行的着色，都存在一个嵌入 f: B $\to$ C，使得 χ 在 $\binom{f(\mathbf{B})}{\mathbf{A}}$ 上的取值不超过 l 个。对于可数无限的 L-结构 B 及其有限子结构 A，A 在 B 中的 大 Ramsey 度是满足以下条件的最小数 $D \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 B $\longrightarrow$ (B)$^{\mathbf{A}}_{k,D}$。如果 L-结构 B 的每个有限子结构 A 的大 Ramsey 度都是有限的，我们就称 B 具有有限大 Ramsey 度。

一般而言，我们关注以下问题：给定一个 L-结构的遗传类$\mathcal{K}$， $\mathcal{K}$ 中的 $\mathcal{K}$-泛结构 L是否具有有限大 Ramsey 度? 注意，如果 $\mathcal{K}$ 中某个 $\mathcal{K}$-泛结构L具有有限大 Ramsey 度，那么其中所有这类结构都具有有限大 Ramsey 度。大 Ramsey 度的研究始于 20 世纪 60 年代，当时 Laver 在一份未发表的证明中证明，有理数的序具有有限大 Ramsey 度。随后，Devlin [8]改进了这一结果，并给出了精确公式。近年来，该领域重新焕发生机，关于有限二元语言中结构的大 Ramsey 度的研究迅速进展（例如，参见近期综述 [10]）。

如果对于每一对顶点 $u, v \in A$ ，都存在一个关系符号 $R \in L$ 和一个元组 $\vec{t} \in R_{\mathbf{A}}$ ，使得 $u, v \in \vec{t}$，那么我们称 L-结构 A 是不可约的（这是对图团概念的简单推广）。给定一组 L-结构 $\mathcal{F}$，若不存在一个 L-结构 F $\in \mathcal{F}$，使得 F 嵌入到 A $\to$中，则称 A 是 $\mathcal{F}$-自由的。所有（有限及可数无限的） $\mathcal{F}$-自由 L-结构组成的类记作 Forb$_{\mathrm{e}}(\mathcal{F})$。有了这些定义，我们可以陈述一个近期的结果：

定理 1.1（Zucker [21]）。设 L 是一个有限二元关系语言，且 $\mathcal{F}$ 是有限个有限不可约 L-结构组成的集合。那么，每个 Forb$_{\mathrm{e}}(\mathcal{F})$-泛 L-结构都具有有限大 Ramsey 度。（换言之，对于 U 的每个有限子结构 A，都存在有限的 $D = D$(A)，使得 U $\longrightarrow$ (U)$^{\mathbf{A}}_{k,\,D}$ 对于每个 $k > 1$ 都成立。）

这一结果可视为著名的 Ne ˇset ˇril–R ¨odl 定理的无穷变体（该定理是结构拉姆齐理论的基础结果之一），在我们的框架下可表述如下：

定理 1.2（Ne ˇset ˇril–R ¨odl 定理 [17, 18]）。设 L 为一种关系语言， $\mathcal{F}$ 为一组有限不可约 L-结构。那么对于每个有限 A $\in$Forb$_{\mathrm{e}}(\mathcal{F})$，存在一个有限整数 $d = d$(A)，使得对于每个有限 B $\in$ Forb$_{\mathrm{e}}(\mathcal{F})$ 以及有限 $k > 0$ ，都存在一个有限 C $\in$ Forb$_{\mathrm{e}}(\mathcal{F})$，满足 C $\longrightarrow$(B)$^{\mathbf{A}}_{k,\,d}$。

为了解定理 1.1 和定理 1.2 之间的对应关系，选择定理 1.1 中的 $\mathcal{F}$，并取一个有限的$\mathcal{F}$-自由 L-结构 A。根据定理 1.1，存在有限的 $D = D(\mathbf{A})$，使得每个 $\mathrm{Forb_e}(\mathcal{F})$-泛 L-结构 U 都满足 $\mathbf{U} \longrightarrow (\mathbf{U})^{\mathbf{A}}_{k,\,D}$ 对每个 $k > 0$均如此。由 U 的 $\mathrm{Forb_e}(\mathcal{F})$-泛性质，对于每个 $\mathcal{F}$-自由 L-结构 B，我们有 $\mathbf{U} \longrightarrow (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{k,\,D}$ 而根据紧致性，存在 U 的一个有限子结构 C，使得 $\mathbf{C} \longrightarrow (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{k,\,D}$。一般而言，$D(\mathbf{A})$（其精确定义见 [1]）不同于 $d(\mathbf{A})$，后者对应于 A 的顶点的非同构序的数量。不过，可以调整定理 1.1 的证明，以得出 $d(\mathbf{A})$ 的精确界。

比较定理 1.1 和定理 1.2，自然会提出这样的问题：能否从定理 1.1 中去掉关于 $\mathcal{F}$有限性、语言 L有限性以及关系仅为二元关系的假设？众所周知，第一个条件不能省略：Sauer [19] 已证明，存在无限族 $\mathcal{F}$ 有限不可约 L结构，其中 $\mathrm{Forb_e}(\mathcal{F})$-泛结构的顶点具有无限大 Ramsey 度。即使语言 L 只包含一个二元关系（有向图），这一结论仍然成立。后两个条件仍是开放问题。

直到最近，大多数关于大 Ramsey 度的界限都只针对二元语言中的 L结构。关于 3-均匀超图大 Ramsey 度界限的技术已在 Eurocomb 2019 [4] 上公布，并于近期发表 [5]；随后，这些技术被推广到具有任意关系符号 [6]的语言。文献 [15], 确立了 Hales–Jewett 定理 [12],、Carlson–Simpson 定理 [7] 与大 Ramsey 度之间联系的推广；其中引入了一种针对带后继运算的树的 Ramsey 型定理 [3]，并将其推广到所有已知的关于 L结构的大 Ramsey 结果。然而，以下两个问题仍未解决：

问题 1.3（[6]）。具有可数多种边的类型的随机图是否具有有限大 Ramsey 度?

对于前一个问题，我们可以认为语言的无穷性增加了问题的难度；但原则上，没有理由认为以下类会造成困难：

问题 1.4。设 $L = \{E, H\}$ 是一种语言，包含一个二元关系 E 和一个三元关系 H。设 F 是 L 结构，其中 $F = \{0, 1, 2, 3\}$、$R^F = \{(0, 1)、(0, 2)、(1, 3)\}$、$H = \{(0, 2, 3)\}$。记 $\mathcal{K}$ 为所有满足不存在从 F 到 A 的单态射的 L 结构 A 所成的类。$\mathcal{K}$ 泛 L 结构是否具有有限大 Ramsey 度?

这些问题揭示了为 Nešetřil–Rödl 定理给出自然无穷推广时遇到的意外障碍。我们提出一种新方法，既能避开这两个问题，也可能揭示大 Ramsey 度所适用的恰当框架。

有限结构 Ramsey 结果通常通过对 Ne˘set˘ril–R¨odl 多部构造 [18]进行改进来证明。由于本质上使用了逆向归纳，这种技术无法推广到无限结构。大 Ramsey 度的上界基于关于树的 Ramsey 型定理（例如 Halper–L¨auchli 定理 [13],、Milliken 树定理 [16],、Carlson–Simpson 定理 [7], 及其各种改进 [21, 9, 11]）。乍看之下，这种证明结构或许令人意外，但不可避免着色的存在为其提供了依据（其构造基于 Sierpi´nski 的思想）：这些着色通过依据 1-类型树的子树来分配颜色而构造出来（例如参见 [2, 10]）。因此，大 Ramsey 度的精确刻画可以理解为一种论证，说明这种证明结构在非常特定的意义上是唯一可能的：用于给出上界的树，也编码在大 Ramsey 度的精确刻画之中。

我们简要回顾 1-类型树的构造。回忆一下，（模型论意义上的）树是一个偏序 $(T, \leq)$，其中每个 $x \in T$ 的下集都是一条有限链。一个枚举的 L-结构，简单来说就是一个 L-结构 U，其底集是序数 $|\mathbf{U}|$。固定一个可数无限的枚举 L-结构 U。给定顶点 u, v 和一个满足 $\min(u, v) \geq n \geq 0$ 的整数 ns，我们记作 $u \sim^{\mathbf{U}}_n v$，并称 u 和 v 在 0, 1, . . . , $n-1$ 上具有相同的（无量词）类型，如果 U 在 $\{0, 1, \ldots, n-1, u\}$ 上诱导的 L-结构与 U 在 $\{0, 1, \ldots, n-1, v\}$ 上诱导的 L-结构在将顶点 v 重命名为 u 后完全相同。我们用 $[u]^{\mathbf{U}}_n$ 表示顶点 u 的 $\sim^{\mathbf{U}}_n$-等价类。

定义 1.1（1-类型树）。设 U 是一个无限的（关系）枚举 L-结构。给定$n < \omega$，记 $\mathbb{T}_{\mathbf{U}}(n) = \omega/\sim^{\mathbf{U}}_n$。一个（无量词）1-类型是以下不交并中的任意元素

$\mathbb{T}_{\mathbf{U}} \coloneqq \bigsqcup_{n<\omega} \mathbb{T}_{\mathbf{U}}(n)$。我们按如下方式将 $\mathbb{T}_{\mathbf{U}}$ 变成一棵树。给定 $x \in \mathbb{T}_{\mathbf{U}}(m)$ 和 $y \in \mathbb{T}_{\mathbf{U}}(n)$，我们规定 $x \leq^{\mathbb{T}}_{\mathbf{U}} y$ 当且仅当 $m \leq n$ 且 $x \supseteq y$。

可以将 $v \in$U 的每个顶点与其在 $\simeq^{\mathbf{U}}_{v}$ 中对应的等价类关联起来。这样，$\subseteq$U 的每个子结构 A 都对应于树 $\mathbb{T}_{\mathbf{U}}$ 的一个节点子集。随后，可以通过考察与每个给定副本对应的节点的交闭包形状，构造类似 Sierpi´nski 的着色。

$x \in \omega/\sim^{\mathbf{U}}_{n}$ 中的每种类型都可以描述为一个顶点集为 $T = \{0, 1, \ldots n-1, t\}$ 的 L-结构 T，使得对于每个 $v \in x$，由 U 在 $\{0, 1, \ldots n-1, v\}$ 上诱导的 L-结构，在将 t 重命名为 v 后就是 T。在考虑源自多个已枚举 L-结构的类型时，这一点非常有用（这种情况在许多大 Ramsey 证明中 [15, 2] 自然会出现）。

1-类型树这一概念在早期证明中（例如 Devlin 的博士论文中）是隐含的，后来才变得明确。然而，对于语言中包含元数为 3 或更高的符号的 L-结构，仅凭 1-类型树本身不足以给出大 Ramsey 度的上界。[5] 和 [6] 中的上界基于 Milliken 树定理的乘积形式，而这又启发了以下弱类型的概念。

在本文余下部分，固定一个包含二元符号 $\leq$ 的关系语言 L。对于所有L-结构，$\leq$ 始终是顶点上的一个线性序，它要么是有限的，要么具有序型 ω。这将描述枚举。所有嵌入都是保序的。

定义 1.2（弱类型）。我们将由 L 扩充一元函数符号f所得的语言记为 L^f。一个 L^f-结构 T 若满足以下条件，则称为层级为 ℓ 的弱类型：

(1) $T = \{0, 1, \ldots, \ell-1, t_0, t_1, \ldots\}$，其中顶点 t_i称为类型顶点。(2) 对每个 $R \in L$ 和 $\vec{t} \in R_{\mathbf{T}}$，都有 $\vec{t} \cap \{t_0, t_1, \ldots\}$ 是类型顶点的一个（可能为空的）初始段（即具有形式 $\{t_i$ 的集合，其中 $i \in k\}$，对某个 $k \in \omega$），并且 $\vec{t} \cap \{0, 1, \ldots, \ell-1\} \neq \emptyset$。(3) 对每个 $i > 0$，令 $f_{\mathbf{T}}(t_i) = t_{i-1}$。令 $f_{\mathbf{T}}(t_0) = t_0$；否则 $f_{\mathbf{T}}$ 未定义。

因此，弱类型所提供的信息少于标准模型论中的 k-类型 [14]。函数 f 被添加到类型顶点中，以便将它们与普通顶点区分开来。这在后续构造中会很有用。请注意，虽然严格来说弱类型有无限多个类型顶点，但根据定义 1.2 的条件 2，如果语言 L 不包含元数为 $r+1$ 或更大的关系，那么顶点 t_{r-1}、t_r、.....将是孤立的。特别地：

观察 1.5。如果 L 只包含一元和二元符号，那么 1-类型与弱类型之间存在一一对应关系，因为只有类型顶点 t_0 携带有意义的结构。

1-类型描述了枚举的 L-结构中某个初始部分的单顶点扩张。与之对应的弱类型概念如下：

定义 1.3（元组的弱类型）。设 A 是一个枚举的 L-结构，T 是层级为 $\ell \in A \subseteq \omega$ 的弱类型，且 $\vec{a} =$（a_0、a_1、.....、a_{k-1}）是来自 $A \setminus \ell$ 的递增顶点元组。若函数 $h\colon T \to A$ 满足以下条件，则称 $\vec{a}$ 在层级 ℓ 上具有类型 T：

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \ell, \\ a_i & \text{if } x = t_i \text{ for some } i < k \end{cases}$$

$\vec{}$具有如下性质：对于每个 $R \in L$ 和 b，若 $\{0, 1, \ldots, \ell-1, t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}\}$ 中的一个顶点元组满足 $\vec{b} \cap \{t_0, t_1, \ldots\}$ 是类型顶点的初始段，且 $\vec{b} \cap \{0, 1, \ldots, \ell-1\} \neq \emptyset$，则有 $\vec{b} \in R_{\mathbf{T}} \iff h(\vec{b}) \in R_{\mathbf{A}}$。

定义 1.4（弱类型树）。给定一个枚举的 L-结构 U，其弱类型树由所有 L^f-结构 T 组成，其中 T 是某个层级 $\ell \in U$ 上 U 的某个元组的弱类型，并按 $\subseteq$ 排序。

给定一个已枚举的 L-结构 A 和一个弱类型 T，如果 T $\setminus\{t_0, t_1, \ldots\} =$A，我们就称 T 扩展 A。给定两个扩展 A 的类型 T 和 T′ 以及 $n \geq 0$，如果 T $\restriction (A \cup \{t_0, t_1, \ldots t_{n-1}\}) =$T′ $\restriction (A \cup \{t_0, t_1, \ldots t_{n-1}\})$，我们就称 T 和 T′作为 n-类型相同。

证明无限 Ramsey 型定理的一种标准技巧，是研究所考虑嵌入的有限近似。参见例如 Todorcevic 对 Ramsey 空间的公理化处理 [20]。我们将如下描述这些嵌入的初始近似：

定义 1.5（带类型结构）。给定一个有限枚举的 L-结构 A，我们用 A^+ 表示由所有扩展 A 的弱类型的不交并通过以下方式构造的 L-结构

（1）将 A 的所有副本识别为同一个副本；（2）每当 T 和 T′ 作为 $i+1$ 类型一致时，将弱类型 T 中顶点 t_i 的副本与弱类型 T′中 t_i 的副本识别为同一个副本。

注意，由于弱类型中加入了函数 f，对于任意两个带类型的 L-结构 A^+ 和 B^+，每个嵌入 $h\colon \mathrm{A}^+ \to \mathrm{B}^+$ 也是一个映射，它将 A 的第 $|A|$ 层弱类型映射到 B 的第 $|B|$ 层弱类型。

给定一个 L-结构 A 和一个顶点 v，我们用 $\mathrm{A}(<v)$ 表示 A 在$\{a \in A$上诱导的 L-结构；$a < v\}$ 并称之为 A 的初始段。我们方法中的关键概念是仅考虑那些相对于弱类型表现良好的嵌入。也就是说，对于该 L-结构的每个初始段，嵌入的其余部分都可以通过扩展这些初始段的弱类型之间的嵌入来概括。

定义 1.6（ L-结构之间的保类型嵌入）。给定枚举的 L-结构 A 和 B，以及嵌入 $h\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，我们称 h 为保类型的，如果对每个 $v \in A$，都存在一个嵌入 $h^v\colon \mathrm{A}(<v)^+ \to \mathrm{B}(<h(v))^+$，使得 B 中层级为$h(v)$且仅由 $h[A]$ 的顶点组成的元组的弱类型，全都属于 h^v[A]的像。

定义 1.7（初始段的 $\mathcal{K}$-保类型嵌入）。设 A 和 B 是两个有限枚举的 L-结构。嵌入 $h\colon \mathrm{A}^+ \to \mathrm{B}^+$ 为保类型的，如果对每个（可能是无限的）L-结构 A′，其初始段为 A，都存在一个 L-结构 B′，其初始段为 B，并且存在一个由 h有限逼近的保类型嵌入 $g\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$。也就是说，$g \restriction A = h \restriction A$，且 B′ 中由 $g[A]$ 的顶点组成、层级为 $g(\max A)$ 的元组的每种弱类型都属于 $h[A^+]$。

给定一个由 L-结构组成的类 $\mathcal{K}$，我们称 $h\colon \mathrm{A}^+ \to \mathrm{B}'^+$ 为保 $\mathcal{K}$-类型的，当且仅当对于每个以 A 为初始段的 L-结构 $\mathrm{A}' \in \mathcal{K}$，都存在一个以 B 为初始段的结构 $\mathrm{B}' \in \mathcal{K}$，以及一个类型尊重嵌入 $g\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，可由 h 有限逼近。

定义 1.8（保类型 amalgamation 性质）。设 $\mathcal{K}$ 是由枚举的 L-结构组成的遗传类。若对于三个有限枚举的 L-结构 A、B、$\mathrm{B}' \in \mathcal{K}$，满足 $B' \setminus B = \{\max B'\}$ 且 $\mathrm{B}' \restriction \mathrm{B} = \mathrm{B}$，两个保 $\mathcal{K}$-类型的嵌入 $f\colon \mathrm{A}^+ \to \mathrm{B}^+$、$f'\colon \mathrm{A}^+ \to \mathrm{B}'^+$，以及一个类型尊重（但不一定是保 $\mathcal{K}$-类型的）嵌入 $g\colon \mathrm{B}^+ \to \mathrm{B}'^+$，其中 $g \restriction B$ 是恒等映射且 $g \circ f = f'$，都存在一个保 $\mathcal{K}$-类型的嵌入 $g'\colon \mathrm{B}^+ \to \mathrm{B}'^+$，使得 $g' \circ f = f'$ 且 $g' \restriction B = \mathrm{Id}$，则称 $\mathcal{K}$ 具有保类型 amalgamation 性质。

给定一个 L结构类 $\mathcal{K}$、有限的 $\mathrm{A} \in \mathcal{K}$ 和 $\mathrm{B} \in \mathcal{K}$，我们用 $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}_{\mathcal{K}}$ 表示所有$\mathcal{K}$类型尊重嵌入 $\mathrm{A}^+ \to \mathrm{B}'^+$ 的集合，其中 B′ 是一个初始段。我们写作 $\mathrm{C} \longrightarrow^{\mathcal{K}} (\mathrm{B})^{\mathbf{A}}_{k,\,l}$表示以下陈述：对于 $\binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}_{\mathcal{K}}$ 的每一种有 k 种颜色的着色 χ，都存在一个类型尊重嵌入 $f\colon \mathrm{B} \to \mathrm{C}$，使得 χ 在 $\binom{f(\mathbf{B})}{\mathbf{A}}_{\mathcal{K}}$ 上的取值不超过 l 个。对于可数无限的 L结构 B 及其有限子序 A，A 在 B 中的$\mathcal{K}$类型尊重嵌入的大 Ramsey 度，是满足以下条件的最小数 $D \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\mathrm{B} \longrightarrow^{\mathcal{K}} (\mathrm{B})^{\mathbf{A}}_{k,\,D}$。

对于类型尊重嵌入，我们可以在完全一般的情形下证明 Ramsey 性质（这表明在这种情况下，问题 1.4 并不是一个问题）。

定理 1.6. 设 L 是一个有限关系语言。设 $\mathcal{F}$ 是由有限个有限的不可约枚举 L-结构组成的有限族。记 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ 为所有有限或可数无限的枚举L-结构 A 的类，其中 $\leq_{\mathbf{A}}$ 或为有限集，或具有序型 ω，且对于每个 $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$，都不存在嵌入 $\mathrm{F} \to \mathrm{A}$。假设 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ 具有保类型 amalgamation 性质。那么，对于每个泛结构 $L\mathrm{U} \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ 和每个有限结构 $\mathrm{A} \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$，都存在有限的 $D = D(\mathrm{A})$，使得 $\mathrm{U} \longrightarrow^{\mathcal{K}} (\mathrm{U})^{\mathbf{A}}_{k,\,D}$ 对于每个 $k \in \mathbb{N}$均成立。

我们证明如下：

命题 1.7. 设 L 是一个仅由二元和一元关系符号组成的有限语言。设 $\mathcal{F}$ 是由有限个枚举的不可约 L-结构组成的有限族。那么 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ 具有保类型 amalgamation 性质。此外，定理 1.6 推出定理 1.1。

证明。固定 L、 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$。令 A、B、B′ $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$, f: A$^+$ $\to$B$^+$, f': A$^+$ $\to$B′$^+$ 和 g: B$^+$ $\to$B′$^+$ 如定义 1.8 所述。根据观察 1.5，要指定 g'，只需为每个扩张 A 的弱类型 T 指定其类型顶点 $t_0 \in T$ 的一个像。令 $t' \in B^+$ 为对应于 t_0 的一个顶点。我们分两种情况讨论。(1) 若 $t' \in f[A^+]$，则令 $g'(t') = g(t')$。(2) 若 $t' \notin f[A^+]$，则令 $g'(t') = t''$，其中 t'' 是 t' 唯一可能的像，并且不存在关系符号 $R \in L$ 使得 $R_{\mathbf{B}^+}$ 包含一个同时具有 t'' 和 max B' 的元组。

我们验证 g' 是 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$-保类型的。取一个以初始段 B 为初始段的 A′ $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$。通过在 max B 之后插入新顶点 v，并相应扩展 $\leq_{\mathbf{A}''}$，由 A 构造 A″。然后将所有必要的元组加入关系中，使 B′ 成为 A″ 的初始段。最后，对于每个满足 $u > v$的 $R \in L$ 和$u \in A'$，当且仅当 ($g'(t)$ u) $\in R_{\mathbf{B}^+}$时，令 $(u, v) \in R_{\mathbf{A}''}$；其中 t是 B 中与 A′里 u 的类型相对应的类型顶点。类似地添加元组 $(v, u) \in R_{\mathbf{A}''}$。

剩下要验证的是 A″ $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$。反设存在 F $\in \mathcal{F}$ 以及嵌入e: F $\to$A″。由于 A′ $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$，显然 $v \in e[F]$。由于 B′ $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$，我们还知道 $e[F]$包含 A″ $\setminus$ $strB'$的顶点。因为 F 是不可约的，所有这类顶点的类型都必须是由上面的条件 (1) 创建的。这与 f'是 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$-保类型的矛盾。

为了证明“此外”部分，我们必须构造一个泛结构 U，它是某个 U′ $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ 的子结构，并满足如下性质：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个具有 n 个顶点的 A $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$，以及每个嵌入 e: A $\to$ U′，都存在一个结构 E $\in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ （称为包络），其顶点数至多为 N，并存在一个 $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$-类型尊重嵌入 h: E $\to$U，使得$e[A] \subseteq h[E]$。这由 [21], 的第 4 节可知，因为在此设置中， $\mathcal{K}$-类型尊重嵌入恰好就是 Zucker 在 [21]中使用的老化嵌入。□

命题 1.8. 设 $L' = \{E, H, \leq\}$，并设 F′是通过对问题 1.4 中的L-结构 F 按顶点的自然序进行扩展而得到的一个 L'-结构。用 $\mathcal{K}$ 表示所有已枚举的 L'-结构 A 所构成的类，其中不存在单态射 F $\to$ A。类 $\mathcal{K}$ 不具有保类型 amalgamation 性质。

证明。我们给出一个类型尊重 amalgamation 失败的明确例子，说明在前一个证明中使用观察 1.5 是必要的。设 A 是空的 L'-结构，B 是带有 $B = \{0\}, E_{\mathbf{B}} = H_{\mathbf{B}} = \emptyset$ 的 L'-结构，而 B′ 是带有 $B' = \{0, 1\}$, $E_{\mathbf{B}'} = \{(0, 1)\}$,$H_{\mathbf{B}'} = \emptyset$ 的 L'-结构。设 T$_{\mathbf{A}}$ 是扩张 A 的唯一弱类型。设 T$_{\mathbf{B}}$ 是带有 $E_{\mathbf{T_B}} = H_{\mathbf{T_B}} = \emptyset$ 的扩张 B 的弱类型，T′$_{\mathbf{B}}$ 是带有 $E_{\mathbf{T'_B}} = \emptyset$ 和 $H_{\mathbf{T'_B}} = \{(0, t_0, t_1)\}$ 的扩张 B 的弱类型。注意，T$_{\mathbf{B}}$ 和 T′$_{\mathbf{B}}$ 作为 1-类型相同，因此在 B$^+$ 中，它们的顶点 t_0 被识别。最后，设 T$_{\mathbf{B}'}$ 和 T′$_{\mathbf{B}'}$ 是扩张 B′ 的弱类型，其中 $E_{\mathbf{T_{B'}}} = H_{\mathbf{T'}}B_{,}$ $= \{(0, 1), (1, t_0)\}$, $H_{\mathbf{T_{B'}}} = \emptyset$,$H_{\mathbf{T'}}B_{,}$ $= \{(0, t_0, t_1)\}$。同样，T$_{\mathbf{B}}$ 和 T$_{\mathbf{B}'}$ 作为 1-类型相同。现在，令 f: A$^+$ $\to$B$^+$ 将 T$_{\mathbf{A}}$ 映到 T$_{\mathbf{B}}$，令 f^+: A$^+$ $\to$B$^+$ 将 T$_{\mathbf{A}}$ 映到 T$_{\mathbf{B}'}$。容易验证，这些都是 $\mathcal{K}$类型尊重嵌入。g: B$^+$ $\to$ B′$^+$ 可以通过将类型 T$_{\mathbf{B}}$ 映到 T$_{\mathbf{B}'}$、将 T′$_{\mathbf{B}}$ 映到 T′$_{\mathbf{B}'}$，构造为保类型的。然而，不存在保 $\mathcal{K}$-类型的 g': B$^+$ $\to$B′$^+$。为此，注意 T′$_{\mathbf{B}}$ 的任何像都必须与 T$_{\mathbf{B}'}$ 作为 1-类型相同，并考虑带有 $A' = \{0, 1, 2\}$ 和 $H_{\mathbf{A}'} = \{(0, 1, 2)\}$ 的 A′。A 是 A′ 的初始段，而且无法将 g' 扩展为一个保 $\mathcal{K}$-类型的嵌入，将 A′ 嵌入某个 $\mathcal{K}$ 中的 L-结构，因为它总会在 A 的顶点 0 之后添加顶点 v，从而存在一个从 F 到 $\{0, v, 1, 2\}$ 的单态射。□

我们猜想，问题 1.3 和 1.4 的答案实际上是否定的。通过专注于类型尊重嵌入，大 Ramsey 度的研究或许能找到一个合适的框架。

致谢。前六位作者łðšu捷克科学基金会（GAˇCR）项目 21-10775S 的资助。本文是一个项目的一部分，该项目获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧洲联盟地平线 2020 研究与创新计划下提供的资助（资助协议编号 810115）。

References

[1] Martin Balko、David Chodounsk´y、Natasha Dobrinen、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y、Lluis Vena 和 Andy Zucker。通过编码树精确计算大 Ramsey 度。arXiv:2110.08409，2021。[2] Martin Balko、David Chodounsk´y、Natasha Dobrinen、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y、Lluis Vena 和 Andy Zucker。泛型偏序的大 Ramsey 度的刻画。arXiv:2303.10088，2023。[3] Martin Balko、David Chodounsk´y、Natasha Dobrinen、Jan Hubiˇcka、Jaroslav Neˇsetˇril、Matˇej Koneˇcn´y 和 Andy Zucker。带后继运算的树的拉姆齐定理。准备中，2023。[4] Martin Balko、David Chodounsk´y、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y 和 Lluis Vena。3-均匀超图的大 Ramsey 度。 *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*，88(3):415–422，2019。Eurocomb 2021 扩展摘要。[5] Martin Balko、David Chodounsk´y、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y 和 Lluis Vena。3-均匀超图的大 Ramsey 度是有限的。 *Combinatorica*，42(2):659–672，2022。[6] Samuel Braunfeld、David Chodounsk´y、No´e de Rancourt、Jan Hubiˇcka、Jamal Kawach 和 Matˇej Koneˇcn´y。大 Ramsey 度与无限语言。arXiv:2301.13116，2023。[7] Timothy J. Carlson 和 Stephen G. Simpson。拉姆齐定理的一种对偶形式。 *Advances in Mathematics*，53 3 265( ): –290，1984。[8] Denis Devlin。 *Some partition theorems and ultrafilters on ω*。博士论文，达特茅斯学院，1979。[9] Natasha Dobrinen。泛齐次无三角形图的拉姆齐理论。 *Journal of Mathematical Logic* 20 02 2050012, 2020 ，( ): 。

[10] Natasha Dobrinen。齐次结构的拉姆齐理论：当前趋势与未决问题。 *preprint arXiv:2110.00655; Survey for ICM'22* 2021 *arXiv* ，。[11] Natasha Dobrinen。亨森图的拉姆齐理论。 *Journal of Mathematical Logic*，0(0):2250018，2023。[12] Alfred W. Hales 和 Robert I. Jewett。正则性与位置博弈。 *Transactions of the American Mathematical Society* 106 222 229, 1963 ，: – 。

[13] James D. Halpern 和 Hans L¨auchli。一项分划定理。 *Transactions of the American Mathematical Society*，124 2 360 367，1966 ( ): – 。[14] Wilfrid Hodges。 *Model theory*，第 42 卷。剑桥大学出版社，1993。[15] Jan Hubiˇcka。利用参数空间计算大 Ramsey 度。 *arXiv:2009.00967*，2020。[16] Keith R. Milliken。一项树的拉姆齐定理。 *Journal of Combinatorial Theory Series A* 26 3 215 237, ，( ): – 。1979

[17] Jaroslav Neˇsetˇril 和 Vojtˇech R¨odl。拉姆齐定理的一种结构推广。 *Bulletin of the American Mathematical Society* 83 1 127 128, 1977 ，( ): – 。[18] Jaroslav Neˇsetˇril 和 Vojtˇech R¨odl。多部构造与拉姆齐集合系统。 *Discrete Mathematics*，75 1 327 334，1989 ( ): – 。[19] Norbert Sauer。可数齐次有向图的一个拉姆齐定理。 *Discrete Mathematics*，253:45– 61，06 2002。[20] Stevo Todorcevic。 *Introduction to Ramsey spaces*，第 174 卷。普林斯顿大学出版社，2010。[21] Andy Zucker。关于二元自由 amalgamation 类的大 Ramsey 度。 *Advances in Mathematics*，408:108585，2022。

Department of Applied Mathematics (KAM), Charles University, Prague, Czech Republic
Email address: {aranda|braunfeld|chodounsky|hubicka|matej}@kam.mff.cuni.cz
Computer Science Institute (IUUK), Charles University, Prague, Czech Republic
Email address: nesetril@iuuk.mff.cuni.czDepartment of Pure Mathematics,
University of Waterloo, Canada*Email address*: a3zucker@uwaterloo.ca