arXiv:2303.12699v2 [math.DG] 6 Aug 2023

导出叠的等价模型

GREGORY TAROYAN

摘要。本文建立了若干种导出几何模型之间的等价关系。具体而言，我们证明，这些模型所产生的高阶导出叠范畴是 Quillen 等价的。因此，我们将 Spivak–Borisov–Noel 构造的导出流形模型、Carchedi–Roytenberg 模型以及 Behrend–Liao–Xu 模型联系起来。根据 Behrend–Liao–Xu 的结果，后一个模型也等价于经典的 Alexandrov–Kontsevich–Schwarz–Zaboronsky 模型。这一等价关系使我们得以证明，按照 Behrend–Liao–Xu 的定义，导出流形之间的弱等价对应于这些流形的代数模型之间的弱等价，从而证明了 Behrend–Liao–Xu 的猜想。我们的结果在费马理论框架下表述，从而能够同时处理微分、全纯和代数情形。

目录

1. 引言 2 1.1. 论文结构与主要结果 3 致谢 4 2. 背景 5 2.1. 同伦代数几何 5 2.2. 费马理论上的几何 8 3. Dold–Kan 对应 11 3.1. 费马理论的连通性定理 11 3.2. Quillen ` 关于特征为零的交换代数的 Dold–Kan 对应 14 3.3. 特征为零的域上的费马理论的 Dold–Kan 对应。18 4. 仿射导出叠的三种模型 22 4.1. 单纯 T-代数 22 4.2. 交换微分 T-代数 23 4.3. 半自由微分分次 T-代数 23 5. 主要结果 23 6. 应用 24 6.1. 导出光滑无穷小分析的模型 25 6.2. 为分析构造模型 28 6.3. 与其他导出流形模型的比较 28 1

6.4. 导出微分上同调 34
参考文献 36

1. 引言

现代形式的导出几何是 Quillen[34]开创的一项研究计划的最终成果。这种方法的主要目标是以同伦论的方式研究代数和代数几何对象及其变形。在这一方向上，T¨oen–Vezzosi [40] 和 Lurie [25] 利用高阶层的同伦论，发展出一种统一的导出代数几何方法。

通过 C^∞-环研究微分几何，是一种强有力的方法，能够将纯代数和范畴论技术应用于光滑情形。Dubuc [13]，提供了经典论述；现代教材可参见 Moerdijk–Reyes [28]。Spivak 运用这一框架，遵循 Lurie 在 [38]中的思想，构造了导出微分几何的一个模型。Spivak 的构造使用了同伦 C^∞-环的同伦层。Borisov–Noel [7] 通过用单纯 C^∞-环取代同伦 C^∞-环，简化了 Spivak 的构造。大约在同一时期，Carchedi–Roytenberg [12], [11] 提出了另一种导出微分几何方法，其基础是微分分次C^∞-环，而非单纯环。导出微分几何的重要性怎么强调都不为过，因为它为诸多重要对象提供了统一的处理方式，例如最初由 Schwarz 和 Kontsevich [37], [1], 提出的微分分次流形（Q-流形）、导出临界轨迹（例如参见 Vezzosi [41]），以及其他对象。它还允许在缺乏适当横截性结果的情形下（例如等变拓扑中），对各种类型的配边进行计算，见[38, 定理 3.12]。因此，能够选择更适合计算的导出微分几何模型是很有意义的。

Spivak–Borisov–Noel 与 Carchedi–Roytenberg 方法的等价性问题有一段时间未能解决。Nuiten [29, 推论 2.2.10] 运用 Lurie [26, §5.5] 开发的技术，证明了 DG C^∞-环的 $(\infty,1)$-范畴等价于保持乘积至同伦的函子 $C^\infty \to \mathrm{sSet}$ 的 $(\infty,1)$-范畴。这些可以视为 Spivak 的同伦 C^∞-环的类似物，尽管构造并不完全相同。然而，Nuiten 的方法并未给出直接的等价；相反，它将 C^∞-环的情形归约为交换代数的情形，对它们运用 Dold–Kan 对应，然后将单纯和 DG C^∞-环的范畴重新构造为自由对象在同伦可滤余极限下的闭包。Pridham [31, 命题 2.13] 指出，Nuiten 的结果可以推广到特征零域上任意费马理论的代数。

然而，在本文中，我们明确构造了特征为 0 的域上的费马理论 T 所对应的单纯对象与微分分次李代数范畴之间的 Quillen 等价。其核心思想是将 Quillen 最初针对交换代数的幺半 Dold–Kan

对应推广到任意费马理论 [33, 第 223] 节的注记$\mathcal{T}$。由此，我们证明，归一化链函子及其左伴随（我们对后者作了明确描述），在 $\mathcal{T}$ 上的单纯对象与 DG 代数的模型范畴之间诱导出 Quillen 等价。 本工作的一个令人愉快的附带成果是，我们遵循 Quillen 最初的思路，对交换代数的 Dold–Kan 对应给出了一个“动手式”证明；据我们所知，文献中尚无此类证明。

随后，我们利用这一版本的 Dold–Kan 对应，确立单纯模型与微分分次模型之间关于导出合成微分几何的等价（定理 6.8）。这一结果适用范围更广，并为一般的合成解析几何建立了类似的等价（定理 6.9）。此外，我们证明，对于任意费马理论 T，导出几何不仅可以在单纯站点和微分分次站点上进行，也可以在更简单的笛卡尔站点 $\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$ 上进行；该站点由 $\mathrm{C}^{\infty}\mathrm{Alg}$ 半自由代数的对偶张成。因此，只需说明这些对象在这个简单站点上的表现，我们就能为所有叠统一定义主向量丛（带联络）、高阶 gerbe 等对象。

最后，我们确立了我们关于导出微分几何的方法与 Behrend–Liao–Xu [6]发展的导出流形理论之间的等价。作为这一等价结果的一部分，我们证明，我们的理论与 Schwarz [37] 以及 Alexandrov–Kontsevich– Schwarz–Zaboronsky [1]通过非负分次 DG (Q) 流形所采用的方法等价。我们还证明了 Behrend–Liao–Xu [6, p.6] 关于导出流形之间的弱等价与其函数代数的拟同构之间关系的猜想。

1.1. **论文结构与主要结果**。 本文的关键技术结果是以下针对费马理论的 Dold–Kan 对应版本：

定理 1.1 (定理3.21)。 记从域上单纯向量空间到链复形范畴的归一化链函子，其中该域的特征为 K，0，其值于 K，记作 N. 设$\mathcal{T}$ 是 K 上的费马理论（定义 *2.14*）。则 N 在 $\mathcal{T}$ 上的单纯代数范畴与 DG 代数范畴之间诱导出一个右 Quillen 等价。

定理 1.1 推出以下等价结果：

定理 1.2 (定理5.4)。 设 K 是一个特征为 0 的域。 设 $\mathcal{T}$ 是 K 上的费马理论（定义 *2.14*）。则在 $\mathcal{T}$ 上的单纯代数、DG 代数和半自由 DG 代数位点上的层模型拓扑斯之间存在 Quillen 等价。

定理 1.2 的一个推论是关于 $\mathcal{C}^{\infty}$-环的以下等价结果。

定理 1.3 (定理6.8)。 附录[28, 中所述光滑无穷小分析的所有位点的微分分次、半自由 DG 和单纯版本， 2] 都产生 *Quillen* 等价的层拓扑斯。

我们还有以下等价结果：导出流形上的高阶层范畴与光滑导出笛卡尔站点上的微分分次范畴的高阶层范畴之间存在等价 $\mathrm{d}\mathcal{C}^\infty\cdot$。

定理 1.4 (定理 6.30，$\mathrm{C}^{\mathrm{sif}}$ 命题6.15)。 *Behrend–Liao–Xu* 意义下导出流形的相对位点 $\mathscr{dMan}$ 上的高阶层拓扑斯 [6] 与导出笛卡尔站点 $\mathrm{d}\mathcal{C}^\infty\cdot_{\mathrm{C}^{\mathrm{sif}}}$ 上的层拓扑斯 *Quillen* 等价。该拓扑斯也与 *Alexandrov–Kontsevich–Schwarz–Zaboronsky* [1]意义下非正分次 *dg* 流形站点上的高阶层拓扑斯 *Quillen* 等价。

最后，我们肯定地证明了 Behrend–Liao–Xu 的猜想 [6, 第 6] 条。在准备将本文上传至 arXiv 期间，Carchedi 给出了推论 6.29的另一种证明 [10, 定理 5。20]。

命题 1.5 (推论 6.29)。 导出流形之间的态射是弱等价，当且仅当它在函数代数上诱导拟同构。

本文内容概述如下。第2 节介绍同伦代数几何与费马理论的背景知识。第3.1 节包含一项称为 Curtis 连通性定理的技术性结果，我们将其推广到任意特征下的任意费马理论。第3.2、3.3 节给出了特征0 下交换代数以及任意费马理论上的代数的 Dold–Kan 等价的证明。这是本文的技术核心。第4 节介绍三种几何模型，并证明它们的层拓扑斯等价：费马理论上的单纯、DG 和半自由 DG 代数。第5节包含本文的主要结果——定理5.4，该定理证明了第4节中三种模型各自的高阶层模型拓扑斯之间存在等价。

第6节将定理5.4 应用于具体的费马理论。在 §6.1中，我们证明，Moerdijk–Reyes 光滑无穷小分析的所有模型[28, 附录 2] 都可以提升为单纯、DG 和半自由 DG 模型，并定义相同的层范畴（在 Quillen 等价意义下）。在 §6.3.1中，我们证明，非负分次 dg 流形与 $\mathrm{d}\mathcal{C}^\infty$ 的位点产生 Quillen 等价的 $\mathrm{C}^{\mathrm{sif}}$ 高阶层拓扑斯。§6.3.2 证明了我们采用的导出微分几何方法与 Behrend–Liao–Xu [6]（定理6.30）的方法等价。特别地，我们证明，两种意义下导出流形之间的弱等价一致（推论6.29）。最后，第6.4 节给出了导出可微堆栈的微分上同调的直接定义。

致谢。首先，我们谨向导师 Dmitri Pavlov 致以诚挚的谢意，感谢他提出这个问题并讲解其解决方法。其次，我们要感谢合作伙伴 Alisa Chistopolskaia 一直以来给予我们的精神支持。最后，我们要感谢 Sander Kupers 与我们讨论 Quillen 的《有理同伦论》。

2. 背景

2.1. **同伦代数几何**。 本节我们将确定记号，并介绍同伦代数几何的核心概念，遵循 To¨en–Vezzosi [40] 以及 Dugger–Hollander–Isaksen [15]。

定义 2.1. 范畴上的覆盖 C 由一个函数构成，该函数为每个对象 $X \in C$ 指定一组态射族 $\{f_i : X_i \to X\}$，称为覆盖族，并满足

- 若 $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ 是一个覆盖族且 $g : Y \to X$ 是一个态射，则存在覆盖族 $\{h_j : Y_j \to Y\}$，使得每个复合态射 gh_j 都可分解为经过某个 f_i （见下图）。

$$\begin{array}{ccc} Y_j & \xrightarrow{k} & X_i \\ {\scriptstyle h_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

定义 2.2. 相对范畴上的同伦覆盖是局部化范畴 $S^{-1}C$.上的覆盖。配备了同伦覆盖的相对范畴称为相对位点。

定义 2.3. 设 (C, S) 是一个小相对范畴。模型范畴 $\mathcal{SSet}^{C^{op}}$（配备单射或射影模型结构）称为单纯预层的[I] 模型范畴，其定义在 (C, S). 上。记作

$$(C).$$

相对于所有映射 $\coprod_{s\in S_1} y(s), s \in S_1$的范畴 (C) 的左 Bousfield 局部化，其中 y 是 Yoneda 嵌入，将称为上的预栈范畴 。我们将其记为 $(C, S)^\wedge$.

为避免大小问题，我们引入以下定义。

定义 2.4 （参见¨en–Vezzosi [40, 定义 A.1.1、定义 4.1.1]）。 对于一个宇宙 $\mathcal{U}$， $\mathcal{U}$-范畴（参见 Artin–Grothendieck–Verdier [4]的著作）是指其所有态射集合都属于 $\mathcal{U}$ 且对象集合是 $\mathcal{U}$. 的子集的范畴。 $\mathcal{U}$-小模型范畴 M 是指具有 Hovey [23, 定义 1.1.3] 意义下的闭模型结构的范畴，且 M 是一个 $\mathcal{U}$-范畴，并且存在所有 $\mathcal{U}$-小极限和余极限。

注记。 下文中，我们将 $\mathcal{U}$-小范畴称为小 范畴，这意味着相关范畴对于某个宇宙 $\mathcal{U}$. 而言是 $\mathcal{U}$-小的

[I] 在记号中，我们不区分这两者，因为由此得到的模型范畴以及我们下面定义的 Bousfield 局部化彼此 Quillen 等价。这一约定由引理 2.7.

为了描述相对位点上的层条件，我们需要以下定义。

定义 2.5 (To¨en–Vezzosi [40, 定义 4.4.1], Dugger–Hollander–Isaksen [15, 定- 义 4.2]). 设 (C, S) 是一个带有覆盖 K 的小相对位点。对于一个对象 $x \in C$，记 $_K(x)$ 为 x 的同伦覆盖范畴，即那些 族 $\{U_i \to x\}$，它们在 $(S^{-1}C,K)$. 中成为覆盖族。范畴 $_(x)$ 中的一个单纯对象 $F_\bullet$，通过 Yoneda 嵌入变为 $y(x)$ 上的单纯预层：

$$y(\mathcal{F})_n = \coprod_{U \in \mathcal{F}_n} y(U).$$

这样的 $F_\bullet$ 称为 x.上的同伦超覆盖

定义 2.6 ([40, 推论 4.6.2]). 设 (C, S) 是一个小相对范畴。若 (C, S)带有一个同伦覆盖 K，则 $(C, S)^\wedge$ 在该类中的左 Bousfield 局部化

$$\mathcal{L} = \{y(\mathcal{F}_\bullet) \to y(x) \mid x \in C\}$$

其中，$F_\bullet \to y(x)$ 是一个同伦超覆盖的情形将称为位于……上的栈范畴 (C, S)，并记作 $((C, S); K)$.。根据 To¨en–Vezzosi [40, 定理 4.6.1]，该局部化存在。

注记。 关于位点上超覆盖的下降，经典论述可见于 Artin–Grothendieck–Verdier 的著作 [4, F. 1, E. 5, App.] 以及 Artin–Mazur 的著作 [5, §8]。与同伦论相关的较现代论述可见于 Dugger–Hollander–Isaksen [15, §4 起] 以及 To¨en–Vezzosi [40, §4.4]。

现在我们说明，在[3] 预栈范畴上选择单射或射影模型结构，对层拓扑斯的定义并无影响。

引理 2.7。 考虑预栈范畴相对于 $L_{\mathcal{L}}(C, S)^\wedge_{proj}$ 的左 Bousfield 局部化，其中采用射影模型结构 $\mathcal{L}$ (参见定义 2.6)，并考虑左 Bousfield 局部化 $L_{\mathcal{L}}(C, S)^\wedge_{inj}$. 恒等函子在以下模型范畴之间诱导出 Quillen 等价

(1) 采用单射和射影模型结构的预层模型拓扑斯：

$$sPSh(C)_{proj} \to sPSh(C)_{inj}.$$

(2) 预栈的模型拓扑斯：

$$(C, S)^\wedge_{proj} \to (C, S)^\wedge_{inj}.$$

(3) 层的模型拓扑斯：

$$L_{\mathcal{L}}(C, S)^\wedge_{proj} \to L_{\mathcal{L}}(C, S)^\wedge_{inj}.$$

[3] 对于 Jardine[24] 意义下预层上的任意中间模型结构，同样的结果也以本质上相同的证明成立。

证明。 (1) 是关于预层范畴上的模型结构的标准结果（参见例如 Lurie [26, 引理 A.2.8。3]）。所有投射余纤维化都是逐对象的（单射）余纤维化，因此恒等函子是左 Quillen 函子。由于它也反映等价，因此它是 Quillen 等价。

(2) 可由以下关于 Bousfield 局部化函子的函子性之标准结果推出（例如，参见 Hirschhorn 定理 3.3.）。设 $M \rightleftarrows N$ 是一个 Quillen 等价。假设 S 是 M 中的一类态射，且左 Bousfield 局部化 $L_S M$ 存在。那么存在一个诱导的 Quillen 等价：

$$L_S M \underset{L_{\mathbb{L}FS}U}{\overset{L_S F}{\rightleftarrows}} L_{\mathbb{L}FS} N.$$

这里 $\mathbb{L}F$ 表示余纤维替换函子与 F. 的复合。由于恒等函子保持 Yoneda 嵌入的像，并且相对于经过余纤维替换的态射集所作的局部化与原局部化 Quillen 等价，因此可得所需结果。

(3) 也可由 Hirschhorn 的上述定理推出。事实上，L 在恒等函子下映到 L，因此这些局部化是等价的。□

定义 2.8。 相对范畴 f 之间的态射，若其定义在相对位点 (C, S) 与 (D, L)之间，则称为相对位点的态射，如果它满足覆盖族的同伦提升性质。也就是说，对于 $L^{-1}D$ 中的任意覆盖族 $\{\beta_i : V_i \to f(X)\}$，存在 $S^{-1}C$ 中的一个覆盖族 $\{\alpha_j : U_j \to X\}$，使得每个 $f(\alpha_j)$ 都经由某个 $L^{-1}D.$ 中的 β_i 分解。

命题 2.9。 设 $f : (C, S) \to (D, L)$ 是相对位点之间的一个态射。标准的推前–拉回伴随 $(f_!, f^*)$ 在层范畴之间诱导出一个 Quillen 伴随

$$f_! : \quad (C, S) \rightleftarrows \quad (D, L) : f^*.$$

层范畴 层范畴 证明。 在单纯预层范畴层面，我们有这样一个伴随。由于 f 是相对位点之间的一个态射，预层范畴上的 Quillen 伴随保持了那些定义层范畴的态射集，而层范畴是这些态射集的左 Bousfield 局部化。因此，左 Bousfield 局部化的函子性（参见例如 Hirschhorn [22,定理 3.3.20]）意味着，预层范畴上的 Quillen 伴随下降为层范畴之间的 Quillen 伴随。□

对于相对位点之间的态射，我们有以下关键比较结果。

定理 2.10。 设 $f : (C, S) \to (D, L)$ 是一个相对位点之间的态射，满足

(1) f 是相对范畴的 *Dwyer–Kan* 等价（见 *Dwyer–Kan* [18]）。*(2)* f 反映同伦覆盖，即当且仅当 $\{U_i \to X\}$ 是 $S^{-1}C$中的覆盖族时，

$$(f)(\{U_i \to X\}) \text{ 是 } L^{-1}D.\text{中的覆盖族}$$

那么 $(f_!, f^*)$ 是……之间的 *Quillen* 等价 (C, S) 和 (D, L).

证明。 根据 T¨oen–Vezzosi [40, 推论2.3。6] （原始思想归功于 Dwyer–Kan [16]），第一个条件意味着预层范畴之间存在一个 Quillen 等价

$$f_! : (C, S)^\wedge \rightleftarrows (D, L)^\wedge : f^*.$$

根据第二个假设， $f_!$ 保持超覆盖类不变。因此，我们可以将 Hirschhorn 关于 Bousfield 局部化等价性的定理 [22, Theorem 3.3.20] 应用于预层范畴的左局部化，从而得到一个 Quillen 等价:

$$f_! : \underset{Sh}{(C, S)} \rightleftarrows \underset{Sh}{(D, L)} : f^*. \qquad \square$$

~~**定义 2.11.**~~ 满足定理 2.10 条件的相对位点态射称为相对位点等价。

2.2. 费马理论上的几何。

2.2.1. $\mathcal{T}$-代数。

De义 2.12. 对于交换环 R， 通过指定以下内容定义 Lawvere 理论 Com_R

$$\mathcal{C}om_R(R^m; R^n) = \{\text{the set of R-polynomial maps } \mathbb{A}^m_R \to \mathbb{A}^n_R\}.$$

显然，这就是交换 R-代数的理论。

定义 2.13 ([14, §1]). 考虑一个 Lawvere 理论 T， 以及一个 Lawvere 理论态射

$$\iota : \mathcal{C}om_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{T}.$$

如果进一步对于任意对象 S、 $T \in \in T$ 及任意态射，均成立，则称其为费马理论

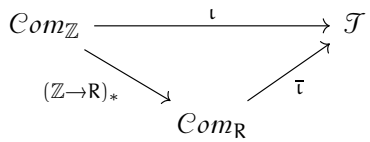
$$f : \iota(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) \times S \to T$$

存在 $g : \iota(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) \times \iota(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) \times S \to T$ 使得

$$f(l_1, s) - f(l_2, s) = (l_1 - l_2) \cdot g(l_1, l_2, s).$$

这里 l_1、 $l_2 : \iota\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}} \to \iota\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ 是两个投影的像，而环运算是 $\mathrm{Com}_{\mathbb{Z}}$. 中对应运算的像。后一性质通常称为*Hadamard* 引理， 此名称源于该性质在 $\mathbb{R}^n$.上的光滑函数中成立的相关结果

定义 2.14。 我们称 $\mathcal{T}$ 是环 R 上的费马理论，若态射 ι（定义2.13 中的）可分解为



这里左侧的态射由典范环同态诱导

$$\mathbb{Z} \to R, \quad 1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_R.$$

定义 2.15。 设 T 是一个费马理论。T-代数是一个将 T $\to$映至集合的有限积保持函子。

定义 2.16. T-代数同态（或简称 T-同态）是此类函子之间的自然变换。

构造 2.17 (参见 [12, §2.2。1])。 费马理论态射 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 诱导出一对伴随函子：

$$\mathcal{T}'\mathcal{A}lg \underset{(-)_{\#}}{\overset{\widehat{(-)}}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}\mathcal{A}lg$$

Th左伴随称为 T-完备化，右伴随则为遗忘函子 .

特别地，任意 K 上的交换代数都可以完备化为 K. 上某个费马理论 T 的代数

记号。 可以通过集合 $A(1)$ 及 $A(n)$ 在该集合上的作用恢复 T-代数 A 。因此，下文中我们将集合 $A(1)$ 简记为 A.

存在一个从 T-代数到普通代数的遗忘函子。因此，任何 T-代数都是普通代数。

命题 2.18 ([14, 命题 1。2])。 对于 T-代数 I 中的任意环论理想 $\mathcal{T}$-代数 A，在 $\mathcal{T}$-代数 A/I 上存在一个自然结构，使得 $A \to A/I$ 是一个 $\mathcal{T}$-同态。

定义 2.19。 T-代数若为代数 $y\mathbb{A}^n_{\mathcal{T}}$ 对某个 $n \geq 0$. 的商，则称其为有限生成

定义 2.20。 对于基数 λ，若一个 T-代数可表示为有限生成 T-代数沿 I 的滤过余极限，且满足 $|I| \leq \lambda$.，则称其为 λ-生成

定义 2.21。 将 $\mathcal{T}\mathcal{A}lg_r$ 记作 $(\aleph_1, \quad {}_n(|\mathcal{T}(n,1)|)$-生成的$_{\text{max sub}}$ $\mathcal{T}$-代数范畴。我们还假设范畴 $\mathrm{TAlg}_{\mathrm{ob}}^{\cdot}$ 上存在一个覆盖（见定义 2.1）。由于所有构造都不依赖于此类覆盖的具体选择，因此下文将不再特别说明该覆盖。关于费马理论上代数的对偶范畴上的覆盖示例，见 §2.2.2。

注记。 选择范畴 T-代数$_r$ 的特殊之处，可由我们在 Dold–Kan 对应中构造左伴随函子 $\mathcal{Q}$ 得到解释（见 §3.3）。从本质上说，我们只希望范畴 T-代数$_r$ 足够小，从而与层拓扑斯相关的构造能够如预期般发挥作用。

引理 2.22。 费马理论 T 上的遗忘函子 $\mathbb{U}$:TAlg $\to$ $_R$ （取值于 R模 ）存在一个左伴随自由 函子 $\mathbb{F}$. 此外，对于自由 R-模 V，我们有：

$$\mathbb{F}(V) = \underset{\substack{\text{free } W \subseteq V, \\ \text{compact} \\ \text{Kan}}}{\text{Kan}} \left(\mathbb{F}(W) = y\mathbb{A}_{\mathcal{T}}{}_{\text{Kan}}{}^{W}\right).$$

证明。该结论源于这样一个事实：此陈述对交换代数成立，并且完备化函子（构造 2.17）是左伴随，因此保余极限。□

2.2.2. 示例。 我们的结果有大量不同的示例和应用。这里只列出最基本的三个，其他示例见 Carchedi–Roytenberg [12, §2.2.3]。费马理论之所以如此有用，关键在于它们能够从“仿射模型”统一构造复杂的几何对象（例如高阶层）；更多细节请参见 Carchedi–Roytenberg [12, 引言]。

例 2.23。 我们已经遇到过的最简单的费马理论示例是 $\mathcal{C}om_R$ （见定义 2.12）。这是交换 R-代数的理论，其中系数环为交换环 R. 特别地，理论 $\mathcal{C}om_{\mathbb{Z}}$ 发挥着初始费马理论的作用。在 $\mathcal{C}om_{\mathbb{Z}}$ 上构造几何，便可重现标准的概形论代数几何。

例 2.24. 另一个非常重要的例子由费马理论 C^∞给出，它由以下公式定义。

$$\mathcal{C}^\infty(m,n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

基于该理论的几何再现了光滑（微分）几何。

例 2.25. 我们讨论的最后一个理论是全纯函数理论 O，它由以下公式定义。

$$\mathcal{O}(m,n) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n).$$

基于该理论的几何再现了复几何。

现在我们给出两种方法，来定义费马理论上的代数小范畴的覆盖。

构造 2.26. 对 T-代数 A，定义集合 A 为

$$A \overset{\text{Specm}}{=} (A, \mathbb{A}^1_{\mathcal{T}}).$$

集合 A （称为 A 的极大谱）可以用扎里斯基拓扑以一种自然的方式赋予拓扑，即我们将该拓扑的开集生成族定义为

$$U_a = \{p : A \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{T}} \mid p(a) \neq 0\}, \quad \text{for } a \in A(1).$$

构造 2.27. 现在我们在 $\mathrm{TAlg}^{\mathrm{rob}}_{\mathrm{ob}}$ 上定义一种位形结构。态射集 $\{f_i : B_i \to A | i \in I\}$ 是 T-代数 A 的一个覆盖族，当且仅当它与扎里斯基拓扑中的一个开覆盖对偶：

$$\{\underset{\text{Specm}}{(B_i)} \to \underset{\text{Specm}}{(A)} \mid i \in I\}.$$

注记。 构造2.27 与例子2.24、2.25有关，而与例子2.23的关联较弱。

另一种构造更适用于代数几何用途。

定义 2.28。 费马理论 T 上代数 A 中的环论理想 $I \triangleleft A$ 称为根式 的，若 I 与其定义如下的根式相同

$$\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a^n \in I\}.$$

代数 A 中的根理想与 A 的约化 商之间存在伽罗瓦型对应（即不含幂零元的 A 的商 T-代数）。

构造 2.29。 记 (A) 表示代数 A 中根理想所成的偏序集 .

~~引理 2.30~~ （Tierney [39, 命题 3.1]） 。 代数 A （其上的 Fermat 理论 T）的一组根理想偏序集 (A) 是 MacLane–Moerdijk [27, §IX.1]意义下的框架。该构造 (A) 可以提升为一个函子

$$:= \quad : \mathcal{TA}lg \quad \to \mathcal{L}oc.$$

谱 Zar **构造 2.31.** 我们现在在 TAlg 上定义另一种位形结构。态射集合 ~~$\{f_i : B_i \to A \mid i \in I\}$~~ 是 T-代数 A 的覆盖族，如果它是 locale 的开覆盖的对偶（按照 MacLane–Moerdijk [27, §IX] 的定义）：

$$\{ \quad (B_i) \to \quad (A) \mid i \in I\}.$$

谱 谱 注记。 构造 2.31 非常适合代数几何的用途（例 2.23）。然而，对于例 2.24、~~2.25 而言~~，它并不十分方便，因为函子产生的 locale 总是紧致的，因此无法充分建模光滑或谱 全纯仿射空间。

3. Dold–Kan 对应

3.1. **费马理论的连通性定理**。 假设 $\mathcal{T}$ 是某个环上的费马理论 R （见定义 2.14）。本节将 Curtis 连通性定理（见 [33, 定理 3.7]）推广到 $\mathcal{T}$上的半自由单纯代数。 为此，我们将利用 Quillen（[34, 定理 6.12], [32, 定理 8.8]）和 Andr`e（[3, 命题 XIII.3]）发展的连通性结果。

将 T_0 记为一点的 T-代数（即在 Yoneda 嵌入下，T 中由 0 索引的对象的像）。

定义 3.1. 将 TAlg 记为所有 T-代数构成的范畴，将 sTAlg 记为所有单纯 T-代数构成的范畴，即 TAlg 中的单纯对象。

命题 3.2。 沿用上述记号，sTAlg 上存在余纤维生成模型结构。记单纯集 $\Delta^{k-1}/\partial\Delta^{k-1}$ 为 S^{k-1} ，记单纯集 Δ^k/Λ^k_0. 为 D^k。我们有一个由包含映射诱导的单纯集包含：

将最后一个面包含到 k-单形中：$S^{k-1} \hookrightarrow D^k$. 。记 $\overline{R}[-]$ 为约化单纯链函子 $sSet_* \to s_R$. 。sTAlg 上存在一个模型结构，其弱等价由遗忘函子 $\mathbb{U} : sTAlg \to sSet_*$ 导出，生成余纤维化为以下包含映射：

$$\mathbb{F}(\overline{R}[\mathcal{S}^{k-1}]) \hookrightarrow \mathbb{F}(\overline{R}[\mathcal{D}^{k-1}]).$$

这里， $\mathbb{F}$ 表示逐次数应用的自由函子 T。

证明。对于微分分次代数，这是一个标准结果，例如可见 Gelfand– Manin [19, §V。3] 对于单纯代数，这同样是标准结果，例如可由 Quillen[35, 注记 II.4。2]推出。□

定义 3.3。设 M 是一个余纤维生成模型范畴。M 中的一个胞腔对象，是指可由生成余纤维化的余基变换经过超限复合得到的对象。

为方便起见，我们将 T_0 记作与以下对象对应的常值单纯代数：$\mathcal{T}$-代数 T_0.注意，sTAlg 中的每个代数 A 若相对于命题 3.2 中构造的 sTAlg 上的余纤维生成模型结构具有胞腔结构，则它在 T_0. 上带有增广。关于胞腔结构，该增广是典范的。此类增广的构造是归纳进行的：假设我们有一个带增广的单纯胞腔$\mathcal{T}$-代数 $\mathcal{B}$。 设胞腔代数 $\mathcal{A}$ 由以下余基变换定义：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(S^{k-1}) & \hookrightarrow & \mathbb{F}(D^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{A}. \end{array}$$

那么， $\mathbb{F}(\mathcal{S}^{k-1})$ 和 $\mathbb{F}(\mathcal{D}^k)$ 都带有增广结构，使典范映射$\mathbb{F}(\mathcal{S}^{k-1}) \to \mathbb{F}(\mathcal{D}^k)$ 成为增广代数之间的映射。这个增广会消去两个代数中所有“正长度单项式”。具体而言，它来自将函子 $\mathbb{F}$ 作用于单纯向量空间的零态射。由归纳法，$\mathcal{B}$ 也以与映射 $\mathbb{F}(\mathcal{S}^{k-1}) \to \mathcal{B}$兼容的方式带有增广结构。 因此，对于任意费马理论，我们都有如下定义的类似版本：3.12 。

定义 3.4. 对于 sTAlg 中的胞腔代数 A，将增广理想$\overline{A}$定义为上述典范增广映射的核。

定理 3.5. 设$\mathcal{A}$ 是$\mathcal{T}$上的约化胞腔单纯代数。则$\mathcal{A}^r$ 是一个 $(r-1)$-连通单纯阿贝尔群。

为了证明这一结果，我们想要调用[34, 定理 6.12]。我们先回顾以下定义。

定义 3.6 (Quillen [34, 定义 6.10])。 设 A 是一个交换环，并令 Λ_A表示 A-模范畴上的外 A 代数函子。理想 I 属于 A时，称其为 拟正则，如果 I/I^2 是一个平坦 A/I-模，且存在一个典范同构

$$\Lambda_A I/I^2 \xrightarrow{\cong} \quad {}^{A}(A/I, A/I). \tag{1}$$

我们有以下关于费马理论上自由代数的关键性质：

引理 3.7. 设 $A = \mathbb{F}(V)$ 是由自由T_0-模 V. 生成的费马理论 T 上的自由代数，则增广映射的核 $\overline{A}$

$$\varepsilon = \mathbb{F}(V \to 0) = A \to T_0$$

是一个拟正则理想。

证明。 第一个条件由费马性质（定义 2.14）显然成立。事实上，$\overline{A}/\overline{A}^2$ 通过泰勒级数论证与 V 典范同构，因此它是 T_0.上的平坦模

设 $V = T_0\langle e_i\rangle_{i\in I}$. 我们用 $\{e_i^0\}_{i\in I}$ 表示代数 A 中对应于上述 V. 基的生成元。为证明同构（1），考虑以下经典的（Koszul）自由分解： A-模 T_0 :

$$K_\bullet(A, T_0) = \ \ldots \longrightarrow \Lambda_A^2 A\langle e_i^2\rangle_{i\in I} \xrightarrow{d_1} \Lambda_A^1 A\langle e_i^1\rangle_{i\in I} \xrightarrow{d_0} A \xrightarrow{\varepsilon} T_0.$$

这里 d_j 按照 Koszul 符号规则作用：

$$d_j(e_{i_0}^{j+1} \wedge \ldots \wedge e_{i_j}^{j+1}) = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s e_{i_s}^0\, e_{i_0}^j \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_{i_s}^j \wedge \ldots \wedge e_{i_j}^j.$$

取张量积 $K_\bullet(A, T_0) \otimes T_0$ 显然会消去微分，因此我们有同构

$$\Lambda_A \overline{A}/\overline{A}^2 \cong \Lambda_A V \xrightarrow{\cong} K_\bullet(A, T_0) \otimes T_0 \cong (\Lambda_A V, d = 0) = \quad {}^{A}(T_0, T_0). \qquad \square$$

定理 *3.5* 的证明。 我们首先注意到，如果$\mathcal{A}$ 是定义在 $\mathcal{T}$ 上的胞腔单纯代数，那么它在每个次数上都是自由的。此外，规范增广 $\to T_0$ （构造于定义 3.4 ）逐次数的限制与自由 $\mathcal{T}$-代数的规范增广一致。

考虑代数 $\mathcal{A}$ 的增广理想 $\mathcal{A}$。 由引理 3.7， $\mathcal{A}_k$ 对每个 k. 都是拟正则的。 $\mathcal{A}_0 = 0$ 根据 $\mathcal{A}$ 是约化的这一假设，[34, 因此可以应用 Quillen12] 的结果（详细证明见 Quillen [32,定理 88]），这意味着$\mathcal{A}^r$ 是 $(r-1)$-连通的。 $\square$

3.2. **零特征下交换代数的 Dold–Kan 对应 `: Quillen 风格。** 本节扩展并略微推广了 Quillen《有理同伦论》 [33]第 223 页的注记。该注记断言，域上连通交换微分分次代数范畴与同一域上的连通单纯交换代数范畴之间存在 Quillen 等价，其中该域的特征为 0。我们将明确构造这种等价，并将其推广到非连通情形。

本节中，我们固定一个特征为零的域 K。我们将 K上的交换单纯代数范畴记为 sCAlg，将 K.上的分次交换微分分次代数范畴记为 dgCAlg

命题 3.8. 归一化链函子 $N : s_K \to$ $_K$ 诱导出一个函子

$$n : \mathcal{sC}\mathcal{A}\ell g \to \mathcal{dg}\mathcal{C}\mathcal{A}\ell g.$$

证明. 给定一个交换单纯代数

$$(\mathcal{A}, \mu : \mathcal{A}^{\otimes 2} \to \mathcal{A}, 1_{\mathcal{A}} : K \to \mathcal{A}),$$

我们有：

$$n(\mathcal{A}) = N(\mathbb{U}\mathcal{A}).$$

这里， $\mathbb{U}$:sCAlg $\to s_K$ 是遗忘函子。N(A) 上的乘法 $\hat{\mu}$ 按如下方式 Vect 定义：

$$n_p(\mathcal{A}) \otimes n_q(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{EZ}} n_{p+q}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \xrightarrow{n_{p+q}(\mu)} n_{p+q}(\mathcal{A}).$$

$$\widehat{\mu}$$

这里 $\mathcal{EZ}$ 是 Eilenberg–Zilber 映射（参见 Quillen[33, §I.4]）。Eilenberg–Zilber 映射的结合性和分次交换性性质，赋予了 $\hat{\mu}$. N 的单位 $(\mathcal{A})$ 定义为 $1_{\mathcal{A}}$ 在 $n(\mathcal{A})_0 = \mathcal{A}_0$. 的像

□

命题 3.9。 我们有以下两种标准的余纤维生成模型结构：

(i)) 设 S^{k-1} 是一个链复形，其在次数 $k-1$ 上为基域，并且具有零微分。设 D^k 是一个链复形，在次数 $k-1$、k 上各有一份基域，并且它们之间的微分为恒等映射。 $S^{k-1} \hookrightarrow D^k$ 是显然的包含。按照惯例，我们令 $S^{-1} = 0$ 和 $D^0 = K[0]$ （一个集中在 0 次的复形）。在 dgCAlg 上存在一个模型结构，其弱等价为拟同构，生成余纤维化由以下包含构成：

$$\mathbb{S}^g(S^{k-1}) \hookrightarrow \mathbb{S}^g(D^k), \quad k \geq 0.$$

这里 $\mathbb{S}^g$ 是分次对称代数函子

$_K \to$微分分次交换代数。

(ii)) 令 S^{k-1} 表示单纯集 $\Delta^{k-1}/\partial\Delta^{k-1}$，并令 D^k 表示单纯集 Δ^k/Λ^k_0. 。那么，由最后一个面包含到一个 k-单形中所诱导的单纯集包含为：$S^{k-1} \hookrightarrow D^k$. 。按照惯例，我们令 $S^{-1} = \emptyset$。记 $\overline{K}[-]$ 为约化单纯链函子 sSet $\to s_K$. 。那么向量空间 上存在一个单纯交换代数的模型结构，其弱等价由遗忘函子 $\mathbb{U}$: sCAlg $\to$sSet 生成，生成余纤维化由以下包含给出：

$$\mathbb{S}(\overline{K}[\mathcal{S}^{k-1}]) \hookrightarrow \mathbb{S}(\overline{K}[\mathcal{D}^k]), \quad k \geq 0.$$

此处 $\mathbb{S}$ 表示逐次数应用的对称代数函子。

证明。 这由 [35, 注记 II.42]。 □

命题 3.10。 函子 n 有一个左伴随 $\mathcal{Q}$。 考虑命题 3.9 中 微分分次交换代数 和 单纯交换代数上的标准可纤维生成模型结构。函子 $\mathcal{Q}$ 将 微分分次交换代数中的胞腔对象映为 单纯交换代数中的胞腔对象。

证明。 设 A 是一个交换微分分次代数。用 $\mathbb{U}$: dgCAlg $\to$ $_K$ 表示遗忘函子链复形范畴 。令 $\Gamma\mathbb{U}A$ 为在（非幺半）Dold–Kan 对应下与 $\mathbb{U}A$ 对应的单纯向量空间。令 $\mathbb{S}\Gamma\mathbb{U}$ A 表示逐次数应用于 $\Gamma\mathbb{U}A$ 的对称代数函子。

若 $x \in A_P$，则 $\Gamma x \in \Gamma\mathbb{U}A \subseteq \mathbb{S}\Gamma\mathbb{U}A$ 是在识别 $\Gamma\mathbb{U}A \supseteq N\Gamma\mathbb{U}A \cong \mathbb{U}A$ 下与 x对应的元素。现在显然，对于任意交换单纯代数 B，存在 $\phi : A \to NB$ 在 $_K$ 中的态射与链复形范畴 $\theta : \mathbb{S}\Gamma\mathbb{U}A \to B$ 在 sCAlg 中的态射之间的一一对应，使得

$$\theta(\Gamma x) = \phi(x), \quad \text{for any } x \in \mathcal{A}.$$

定义

$$\mathcal{Q}\mathcal{A} = \mathbb{S}\Gamma\mathbb{U}\mathcal{A}/\mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{A}). \tag{2}$$

这里，II(A) 是由 $(\hat{\mu}(\Gamma x, \Gamma y) - \Gamma\mu(x, y) \mid x, y \in A)$. 生成的单纯理想。于是， θ 诱导一个映射 QA $\to$B，当且仅当 ϕ 是微分分次交换代数中的态射。因此，我们建立了一个双射：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{dgCAlg}}(\mathcal{A}, n\mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{sCAlg}}(\mathcal{Q}\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

注意，伴随态射 $\beta : 1_{\mathrm{dgCAlg}} \Rightarrow NQ$ 给出为

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\beta} n\mathcal{Q}\mathcal{A}, \quad x \xmapsto{\beta} \Gamma x + \mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{A}).$$

设 A 是一个胞腔代数。由于 Q 是左伴随，只需证明 dgCAlg 中的下列余基变换被映射为

sCAlg 中生成余纤维化的复合：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^g(S^{k-1}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^g(D^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{A}. \end{array}$$

注意，映射

$$\mathcal{Q}\mathbb{S}^g(S^{k-1}) \to \mathcal{Q}\mathbb{S}^g(D^k)$$

与映射同构

$$\mathbb{S}\overline{K}[\mathcal{S}^{k-1}] \to \mathbb{S}\overline{K}[\mathcal{D}^k]$$

它是一个生成余纤维化，因此映射

$$\mathcal{Q}\mathcal{A}' \to \mathcal{Q}\mathcal{A}$$

是单纯交换代数中的一个生成余纤维化的余基变换。 □

命题 3.11. 设 $V : {}_K$ 是 K. 上的一个链复形。则以下映射链复形范畴 是同构：

$$\mathbb{S}^g(HV) \xrightarrow{a} H(\mathbb{S}^g V) \xrightarrow{b} \pi(\mathbb{S}\Gamma V).$$

证明。 参见 Quillen [33, 附录 B，命题 2。1]。 □

注意，dgCAlg 中的每个胞腔代数 A 都相对于胞腔结构典范地带有增广。事实上，$\mathbb{S}^g(S^{k-1})$ 和 $\mathbb{S}^g(D^k)$ 都带有增广，使得典范映射 $\mathbb{S}^g(S^{k-1}) \to \mathbb{S}^g(D^k)$ 成为增广代数之间的映射。此增广消去两个代数中所有长度为正的单项式。我们还可以通过归纳假设 A ′带有与映射 $\mathbb{S}^g(S^{k-1}) \to$ A′相容的增广。因此，A 作为一个推出典范地带有增广。类似地，sCAlg 中的胞腔代数也相对于胞腔结构典范地带有增广。

定义 3.12。 对于 dgCAlg 中的胞腔代数 A，将其增广理想 A 定义为上述典范增广映射的核。类似地，对于 sCAlg 中的胞腔代数 A，将其增广理想A 定义为上述典范增广映射的核。

定理 3.13. 若$\mathcal{A}$ 在微分分次交换代数 中是胞腔的，则 $\beta : \mathcal{A} \to n\mathcal{Q}\mathcal{A}$ 是一个弱等价。

证明。令 $\mathcal{Q}\overline{\mathcal{A}}^r$为 $\mathcal{Q}\mathcal{A}$ 在定义3.12中定义的$\mathcal{A}$ 的增广理想的幂。令 $\mathcal{A}$ 为 微分分次交换代数 中的一个胞腔代数的增广理想。由此可得 $\mathcal{Q}\mathcal{A}^p \cdot \mathcal{Q}\mathcal{A}^q \subseteq \mathcal{Q}\mathcal{A}^{p+q}$ 因此

$$\beta\overline{\mathcal{A}}^r \subseteq n\overline{\mathcal{Q}\mathcal{A}}^r.$$

因此存在一个诱导映射

$$\beta : \quad \mathcal{A} \to \quad n\mathcal{Q}\mathcal{A} = n \quad \mathcal{Q}\mathcal{A} \quad \text{by exactness of } n.$$

由命题 3.10 对象 $\mathcal{Q}\mathcal{A}$ 是胞腔的，因此通过胞腔归纳

$$\mathcal{Q}\mathcal{A} \cong \mathbb{S}(\overline{\mathcal{Q}\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{Q}\mathcal{A}}^2).$$

类似地，

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{S}^g(\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{A}}^2).$$

下面我们证明映射 β 诱导出一个同构：

$$\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{A}}^2 \xrightarrow{\cong} \overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}/\overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}^2$$

由于增广理想与 $\mathcal{A}$ 上的微分无关，我们可以将$\mathcal{A}$ 与 $\mathbb{S}^g(V)$视为某个分次向量空间 V. 那么分次向量空间$\mathcal{A}/\mathcal{A}^2$ 由 V 的像生成（它同构于 V）。根据命题$\mathcal{Q}$ 3.10 的证明中给出的定义 我们有

$$\mathcal{Q}\mathcal{A} = \mathbb{S}(\Gamma\mathbb{U}\mathcal{A})/\mathcal{J}\mathcal{J}(\mathcal{A}).$$

因此，QA 由 V 生成及其所有退化生成元生成。将退化部分与 N 取商后，我们再次得到一个由 V 生成的代数，而增广理想 NQA 作为理想由 V生成。因此我们有：

$$\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{A}}^2 \cong V \cong \overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}/\overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}^2.$$

Thus β具有如下形式：

$$\mathbb{S}^g(V) \xrightarrow{\beta} n\mathbb{S}\Gamma V.$$

根据命题 3.11，后一个映射是弱等价。

这里我们采用 Gwilliam–Pavlov [21, §3] 中的术语。设 $A^0 = \overline{A}$且 $NQA^0 = \overline{NQA}$。我们有两个余纤维序列：

$$\underline{\mathcal{A}}: \quad \underline{\mathcal{A}}(n) := \begin{cases} \mathcal{A}, & n \geq 0; \\ \overline{\mathcal{A}}^{-n}, & n < 0 \end{cases}, \quad \underline{\mathcal{A}}(n) \to \underline{\mathcal{A}}(n+1) := \begin{cases} \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}, & n \geq 0; \\ \overline{\mathcal{A}}^{-n} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}^{-n+1}, & n < 0, \end{cases}$$

and

$$\underline{\mathbf{NQA}}: \quad \underline{\mathrm{NQA}}(n) := \begin{cases} \mathrm{NQA} & n \geq 0; \\ \mathrm{NQA}^{-n}, & n < 0, \end{cases}$$

$$\underline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}(n) \to \underline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}(n+1) := \begin{cases} n\mathcal{Q}\mathcal{A} \xrightarrow{n\mathcal{Q}\mathcal{A}} n\mathcal{Q}\mathcal{A}, & n \geq 0; \\ \overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}^{-n} \hookrightarrow \overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}^{-n+1}, & n < 0. \end{cases}$$

如果$\mathcal{A}$ 是连通的（即，$\mathcal{A}_0 \cong K$），对于足够大的 r 我们有 $(\overline{\mathcal{A}}^r)_q = 0$ 和 $\pi_q(\mathcal{Q}\overline{\mathcal{A}}^r) = 0$根据定理3.5 ，对于$\mathcal{T} = \mathcal{C}om_K$。因此，序列$\mathcal{A}$ 和$n\mathcal{Q}\mathcal{A}$ 都是完备的。

因此 [21, 引理 3.25] 适用，并且我们看到，由于映射 β 是弱分次等价（即， β 诱导出一个分次等价），我们得到一个弱等价

$$\beta : \mathcal{A} = \underline{\mathcal{A}}(\infty) \to \underline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}(\infty) = n\mathcal{Q}\mathcal{A}.$$

若 A 不连通，则考虑 0 次度中的增广理想，记为 A_0。我们有短正合列：

$$0 \to \overline{\mathcal{A}}_0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\overline{\mathcal{A}}_0 \to 0.$$

代数 A/A_0 是连通的，因此映射

$$\mathcal{A}/\overline{\mathcal{A}}_0 \to n\mathcal{Q}(\mathcal{A}/\overline{\mathcal{A}}_0)$$

是一个弱等价。接下来只需注意到 $NQ(A)_0$ 与 A_0 及 $\overline{QA}_0$ 同构，因此我们有一个短正合列之间的映射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\overline{\mathcal{A}}_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}_0 & \longrightarrow & n\mathcal{Q}\mathcal{A} & \longrightarrow & n\mathcal{Q}(\mathcal{A}/\overline{\mathcal{A}}_0) = n\mathcal{Q}\mathcal{A}/\overline{n\mathcal{Q}\mathcal{A}}_0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

该映射在同调上诱导出一个同构，证毕。 □

定理 3.14. 伴随对

$$\mathcal{sCAlg} \underset{n}{\overset{\mathcal{Q}}{\rightleftarrows}} \mathcal{dgCAlg}$$

是一个 *Quillen* 等价。

证明。 由于 微分分次交换代数 中的任意余纤维对象都是胞腔对象的一个缩回，且 $\mathcal{Q}$将胞腔对象映为胞腔对象，因此定理 3.13 表明伴随态射 β 在余纤维对象上是一个等价。因此，函子对 $(\mathcal{Q} \dashv n)$ 是一个 Quillen 等价。 □

3.3. **域的特征为零时，费马理论的 Dold–Kan 对应。** 本节中，我们固定一个特征为 K 的域，其中 0。

记号。 设 $\mathcal{T}$ 是一个定义在 K上的费马理论（定义 2.14）。令 $\mathcal{dgTAlg}$ 表示 微分分次交换代数 的子范畴，其对象是在次数 0 具有 T-代数 结构的对象，态射则保持该结构。另以 T_0 表示费马理论 T的系数环 ，即 Yoneda 嵌入下 T中的第 0个对象的像。

我们有以下关于命题 3.2 的类比，适用于$\mathcal{T}$:

命题 3.15. 沿用上述记号，范畴 dgTAlg 上存在一个余纤维生成模型结构。

考虑两类链复形 S^{k-1}, D^k 它们定义于命题 3.9 (i) 中。dgTAlg 上存在一个模型结构，弱等价为拟同构，生成余纤维化由以下包含给出：

$$\mathbb{F}^g(S^{k-1}) \hookrightarrow \mathbb{F}^g(D^k), \quad k \geq 0.$$

这里， $\mathbb{F}^g$ 是 T 在 0 次度上的自由函子，在正次数上则是关于 T_0 的分次对称代数函子。

证明。 这是 Carchedi–Roytenberg [11, §6] 的一个结果。 □

命题 3.16。 设 T 是如上所述的费马理论。Moore 复形函 r

$$N : \mathfrak{s} \quad \kappa \to \quad \kappa$$

在代数范畴之间诱导一个函子 $\Lambda^{\mathfrak{ec}\mathfrak{f}} \quad \complement\mathfrak{P}$

$$\mathcal{n} : \mathfrak{s}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g \to \mathfrak{d}g\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g.$$

证明。 在正次数上，此结果由命题 3.8 得出。在 0 次时，该函子 N诱导一个同构，并以显然的方式转移 $\mathcal{T}$-代数的结构。 □

命题 3.17。 函子 $\mathcal{n}$ 有一个左伴随 $\mathcal{Q}$。 考虑命题 3.2 和 3.15 中的 $\mathfrak{d}g\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g$ 和 $\mathfrak{s}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g$上的余纤维生成模型结构。则函子 $\mathcal{Q}$ 将 $\mathfrak{d}g\mathcal{C}\mathcal{A}\ell g$中的胞腔对象映为 $\mathfrak{s}\mathcal{C}\mathcal{A}\ell g$中的胞腔（且自由）对象。

证明。 设 A 是 T 上的一个微分分次代数。若 $x \in A^p$，则 $\Gamma x \in \Gamma\mathbb{U}A \subseteq \mathbb{F}\Gamma\mathbb{U}A$ 是在典范同构 $N\Gamma\mathbb{U}A \cong \mathbb{U}A$ 下与 x 对应的元素。显然，对于 sTAlg 中的任意对象 B，链复形范畴中的态射 $\phi : A \to NB$ 与 sTAlg 中的态射 $\theta : \mathbb{F}\Gamma\mathbb{U}A \to B$ 之间存在一一对应，使得

$$\theta(\Gamma x) = \phi(x), \quad \text{for all } x \in \mathcal{A}.$$

定义

$$\mathcal{Q}\mathcal{A} = \mathbb{F}\Gamma\mathbb{U}\mathcal{A}/\mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{A}). \tag{3}$$

这里，II(A) 是由以下公式定义生成的单纯理想。

$$\mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{A}) := (\widehat{f}(\Gamma x_1, \ldots, \Gamma x_n) - \Gamma f(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A})$$

对于 T 的所有可沿 N 转移的运算（即所有 0 次运算以及正次数中的乘法）。注意，伴随态射 $\beta : 1_{\mathfrak{d}g\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g} \Rightarrow NQ$ 由下式给出

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\beta} \mathcal{n}\mathcal{Q}\mathcal{A}, \quad x \xmapsto{\beta} \Gamma x + \mathcal{I}\mathcal{I}(\mathcal{A}).$$

关于胞腔对象经$\mathcal{Q}$ 映为胞腔对象（和自由对象）的事实，其证明可不加改动地沿用命题 3.10的证明。 □

注记。 先前的结果对于任意（多分类）Lawvere 理论 T 均无需修改即可成立。然而，下一个结果本质上用到了费马性质。

命题 3.18. 设 V 是定义在 K上的单纯向量空间。那么由完备化函子（构造 2.17）诱导出一个同构：

$$T_0 \otimes_K \pi_{>0}(\mathbb{S}V) = \pi_{>0}(\mathbb{S}T \otimes_K V) \xrightarrow{\cong} \pi_{>0}(\mathbb{F}V).$$

在维数 0 的情形下，我们有 $\pi_0(\mathbb{F}V) = \mathbb{F}\pi_0(V)$.

证明. 首先，注意等式 $T_0 \otimes_K \pi_*(\mathbb{S}V) = \pi_*(\mathbb{S}T \otimes_K V)$ 只是关于平坦基变换的一个标准结果。现在，任意单纯向量空间都可以表示为以下余基变换的超限复合

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\overline{K}[S^{n-1}] & \longrightarrow & \Gamma\overline{K}[D^n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ V' & \longrightarrow & V. \end{array}$$

左伴随函子 $\mathbb{S}$ 保留余极限，因此 $\mathbb{S}(V)$ 是以下形式的余基变换的超限复合：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\Gamma\overline{K}[S^{n-1}] & \longrightarrow & \mathbb{S}\Gamma\overline{K}[D^n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}V' & \longrightarrow & \mathbb{S}V. \end{array}$$

由于完备化函子也是左伴随，代数 $\mathbb{F}(V)$ 是余基变换的复合：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^{n-1}] & \longrightarrow & \mathbb{F}\Gamma\overline{K}[\mathcal{D}^n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}V' & \longrightarrow & \mathbb{F}V. \end{array}$$

因此，为了证明所需的同构，我们只需证明 $V = \overline{K}[\mathcal{S}^n]$，因为 $\mathbb{F}\Gamma\overline{K}[\mathcal{D}^n]$ 是无环的。根据命题 3.11 ，我们有一个同构

$$\pi(\mathbb{S}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^n]) \cong \mathbb{S}^g(\overline{K}[\mathcal{S}^n]). \tag{4}$$

此外，在每个维数下，我们都可以明确描述 d_i 对于 $\mathbb{S}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^n]$ 以及对于核 $\mathbb{F}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^n]$. 令 x_n 为 $\overline{K}[\mathcal{S}^n]$. 根据 Hadamard 引理（见定义 2.13）

理想 d_i^k 由下式给出

(5)
$$d_i^k = \left(s_{j_{k-n}} \dots s_{j_t=i} \dots s_{j_1} x_n - s_{j_{k-n}} \dots s_{j_t=i-1} \dots s_{j_1} x_n \mid j_{k-n} > \dots > j_1,\ j_{t-1} < i-1\right) + \\ + \left(s_{j_{k-n}} \dots s_{j_1} x_n \mid i, i-1 \notin \{j_1, \dots, j_{k-n}\}\right).$$

这类理想的交由 (5) 中描述的多项式的乘积生成。(4) 中的同构保证商空间

(6)
$$\pi_k(\mathbb{S}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^n]) = \frac{\bigcap_{i=0}^{k} d_i^k}{d_0^{k+1} \bigcap_{i=1}^{k+1} d_i^{k+1}}$$

是 K. 上的有限维向量空间。特别地，这个商空间有一个由多项式 $\{p_1, \dots, p_l\}$. 组成的有限基。完备化之后，这些多项式仍然生成理想 $\bigcap_{i=0}^{k} d_i^k$，以及 $d_0^{k+1} \bigcap_{i=1}^{k+1} d_i^{k+1}$.。然而，我们想要证明它是商空间在 T_0 上的一个加法基。令 $f \in \bigcap_{i=0}^{k} d_i^{k+1}$ 为任意元素 $f = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_i + \gamma$，其中 $\gamma \in d_0^{k+1} \bigcap_{i=1}^{k+1} d_i^{k+1}$.。记 N 为集合 $\{p_1, \dots, p_l\}$. 的最大总次数。对于一个非负整数向量 $s = (s_1, \dots, s_l)$，我们用 p^s 表示相应的单项式 $\prod_{i=1}^{l} p_i^{s_i}$.。对于这样的向量 s，我们用 $|s|$ 表示其分量之和。现在，我们对 λ_i 进行泰勒展开，直到总次数 $N+1$.。得到

$$\sum_{|s| \le N+1} \left[\lambda_i^{(s)} p^s + \xi_i p_i\right] + \gamma.$$

这里 ξ_i 是 λ_i. 的泰勒级数的余项。特别是，$\xi_i p_i$ 可被一个总次数为 $> N$ 的多项式整除，因此它属于 $d_0^{k+1} \bigcap_{i=1}^{k+1} d_i^{k+1}$. 由此我们证明了，$p_i$的张成空间就是商空间（6），并且它们显然在 T_0. 上线性无关。因此我们得到一个同构：

$$\pi_k(\mathbb{S}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^n]) \cong \pi_k(\mathbb{F}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^n]), \quad k > 0$$

由完备化诱导。

为处理 $k = 0$ 的情况，我们注意到，对于 $\Gamma\overline{K}[S^n]$ 且 $n > 0$，该命题显然成立。在 $n = 0$ 的情况下，我们有恒等式 $\pi_0(\Gamma\overline{K}[S^0]) = \Gamma\overline{K}[S^0]$，从而得到

$$\pi_0(\mathbb{F}\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^0]) = \mathbb{F}\pi_0(\Gamma\overline{K}[\mathcal{S}^0]).$$

因此，该结论对所有单纯向量空间都成立。 □

推论 3.19. 设 V 是 K. 上的一个链复形，那么我们有两个同构 s

$$\mathbb{F}^g H(V) \xrightarrow{a} H(\mathbb{F}^g V) \xrightarrow{b} \pi(\mathbb{F}\Gamma V).$$

证明。 由于在 K 上，任意链复形都等价于其同调，而 $\mathbb{F}^g$ 保持同伦等价，因此我们得到一列等价

$$H(\mathbb{F}^g H(V)) = \mathbb{F}^g H(V) \simeq \mathbb{F}^g V \simeq H(\mathbb{F}^g V).$$

因此 a是一个同构。要证明 b 是一个同构，应用命题 3.11 和命题3.18。 □

定理 3.20。 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathit{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg}$ 中的胞腔对象，则伴随态射 $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{N}\mathcal{Q}\mathcal{A}$ 是一个等价。

证明。 证明与定理 3.13的证明完全相同。 □

定理 3.21。 伴随对

$$\mathit{s}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg} \underset{n}{\overset{\mathcal{Q}}{\rightleftarrows}} \mathit{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg}$$

是一个 *Quillen* 等价。

证明。 证明与定理 3.14的证明完全相同。 □

4. 仿射导出叠的三种模型

本节中 $\mathcal{T}$ 是域上的费马理论 K ， 其特征为 0 (见定义 2.14)。

4.1. 单纯$\mathcal{T}$-代数。

定义 4.1。 记 $\mathit{s}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg}_{\mathrm{r}}$ 为范畴 $\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg}_{\mathrm{r}}$ (见定义 2.21) 中单纯对象所成的范畴，并附加如下假设：函子 π_*对该范畴中的所有对象都产生 有限生成的 $\mathcal{T}$-代数。

构造 4.2。 sTAlg$_{\mathrm{ob}}$中一族 $\{f_i : B_i \to A | i \in I\}$ 态射是单纯 T-代数 A的覆盖族，当且仅当

- $\{\pi_0(f_i) : \pi_0(B_i) \to \pi_0(A)\}$ 是 $\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg}_{\mathrm{ob}^{\mathrm{r}}}$ 上的某个覆盖的覆盖族（例子见 §2.2.2 ）；
- $\pi_*(B_i) \xleftarrow{\sim} \pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B_i)$.

令 s K 表示 K.上的单纯向量空间范畴

命题 4.3 遗忘函子存在一个左伴随 s$\mathbb{F}$

$$\mathbb{U} : \mathit{s}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathit{lg} \to \mathit{s}\ \ \mathrm{K}$$

使得

$$(\mathit{s}\mathbb{F}K)_n = \mathbb{F}(K_n).$$

这里 $\mathbb{F}$ 是作用于向量空间上的自由$\mathcal{T}$-代数函子（参见引理 2.22）。

构造 4.4。 范畴 sTAlg 上带有从范畴 s_{K} 沿函子 $\mathbb{U}$. 转移而来的模型结构。我们将 $\mathrm{sTAlg}_{\mathrm{r}}$ 限制为 $_{\Lambda^{\mathrm{ecf}}}$，从而赋予该范畴小模型范畴的结构。

4.2. **交换微分 T-代数**。 构造仿射导出 T-空间的另一种方式是将其视为微分 T-代数的对偶。

定义 4.5。 将 $\mathrm{dgTAlg}_{\mathrm{r}}$ 记为微分分次代数 dgTAlg 范畴与 $(\aleph_1, \quad _{\mathrm{n}}(|\mathrm{T}(\mathrm{n},1)|)$-生成的、定义在 K 上的交换微分分次代数范畴的交集，并附加最大上确界 假设：此范畴中所有对象的同调均为有限生成的（作为 T-代数）。

构造 4.6. $\{\mathrm{f_i} : \mathrm{B_i} \to \mathrm{A} | \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$ 的集合是微分分次 T-代数 A 的覆盖族，如果

- $\{\mathrm{H_0(f_i)} : \mathrm{H_0(B_i)} \to \mathrm{H_0(A)}\}$ 是某个覆盖的覆盖族T-代数$_{\mathrm{ob}^{\mathrm{r}}}$（参见 §2.2.2 中的示例）；$_{\sim}$
- $\mathrm{H_*(B_i)} \xleftarrow{\cong} \mathrm{H_*(A)} \otimes_{\mathrm{H_0(A)}} \mathrm{H_0(B_i)}$.

4.3. **半自由微分分次T-代数**。最后，还有另一种模型由半自由交换微分分次 T-代数的对偶给出。

定义 4.7。 如果微分分次代数的底层分次代数是自由的，则称它为半自由的。

记号。 我们将由半自由微分分次 T-代数张成的 $\mathrm{dgTAlg}_{\mathrm{r}}$ 的全子范畴记为 $\mathrm{sfdgTAlg}_{\mathrm{r}}$.

构造 4.8。 $\mathrm{sfdgTAlg}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{ob}}$ 上的同伦覆盖沿包含函子转移

$$\mathcal{sfdgTAlg}_{\mathrm{r}} \hookrightarrow \mathcal{dgTAlg}_{\mathrm{r}}.$$

5. 主要结果

定理 5.1。 包含函子 ι 定义了相对范畴之间的 *Dwyer–Kan* 等价：

$$\mathcal{sfdgTAlg}_{\mathrm{r}} \xrightarrow[\simeq]{\iota} \mathcal{dgTAlg}_{\mathrm{r}}$$

证明。 这是将余纤维对象子范畴包含到模型范畴中的标准结果。例如，参见 Dwyer–Hirschhorn–Kan–Smith [17, 推论 10。4]。 □

命题 5.2。 Dold–Kan 对应中的函子 Q、N 保持范畴 $\mathrm{sTAlg}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{ob}}$ 和 $\mathrm{dgTAlg}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{ob}}$ 上的覆盖。也就是说，若 $\{\mathrm{B_i} \to \mathrm{A}\}$ 是 $\mathrm{sTAlg}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{ob}}$中的一个覆盖族，则 $\{\mathrm{NB_i} \to \mathrm{NA}\}$ 是 $\mathrm{dgTAlg}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{ob}}$中的一个覆盖族，Q 也有类似的结论。

证明。 注意，由于 $s\mathrm{TAlg}_{\mathbb{r}}$ 中对象的同伦群是在其底层单纯集层面计算的，且所有此类集合都是纤维化的，因此我们有

$$\pi_*(\mathcal{A}) = \mathrm{H}_*(n\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \in s\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{r}}.$$

类似地，对于 $\mathrm{dgTAlg}_{\mathbb{r}}$ 中的对象，我们有

$$\mathrm{H}_*(\mathcal{A}) = \pi_*(\mathcal{Q}\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{r}}.$$

因此，函子 n 将条件4.2 映射到条件 4.6 ，因而保持覆盖族。类似地，函子 $\mathcal{Q}$ 也保持覆盖族。 □

推论 5.3。 由位点上的伴随关系诱导出层范畴之间的 Quillen 伴随（见定义2.6）

$$\begin{array}{ccc} (s\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{r}_{\mathfrak{ob}}}) & \xleftarrow{\mathrm{N}^*} & (\mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{r}_{\mathfrak{ob}}}) \\ \mathfrak{Sp} & \xrightarrow{\mathrm{Q}^*} & \mathfrak{Sp} \end{array}$$

证明。 由命题 5.2 可知，函子 n^* 将 $\mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g^{\mathbb{r}}_{\mathfrak{ob}}$上的超覆盖映射到 $s\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g^{\mathbb{r}}_{\mathfrak{ob}}$ 上的超覆盖。因此，由 Dugger–Hollander–Isaksen [15, 命题 82] ，函子 $(n^*、n_* = \mathcal{Q}^*)$ 构成一个 Quillen 伴随。 □

由此我们得到关于导出叠各种模型等价性的主要结果：

定理 5.4. 存在一个模型位点的等价

$$\mathfrak{Cgif}_{\mathcal{T}} := s\mathcal{f}\mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{d}_{\mathfrak{ob}}}, \mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{r}_{\mathfrak{ob}}}, \text{ and } s\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g_{\mathbb{r}_{\mathfrak{ob}}}.$$

证明。 根据构造，函子 $\mathfrak{Cgif}_{\mathcal{T}} \to \mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g^{\mathbb{r}}_{\mathfrak{ob}}$保持覆盖，因此也保持超覆盖。此外，根据定理 5.1 ，函子 $\iota_{\mathfrak{ob}}$ 是同伦范畴的等价。因此，$\iota_{\mathfrak{ob}}$ 是相对位点的等价（定义 2.11），我们可以应用定理 2.10。

类似地，根据命题 5.2 ，函子 $\mathcal{Q}^*$ 保持同伦覆盖，因此也保持超覆盖。此外，根据定理 3.21，它是一个 Quillen 等价。因此，$\mathcal{Q}$ 是相对位点的等价，我们可以应用定理 2.10 ，从而得出 $\mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g^{\mathbb{r}}_{\mathfrak{ob}}$ 与 $s\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g^{\mathbb{r}}_{\mathfrak{ob}}$ 上的层范畴等价。 □

6. 应用

我们陈述定理 5.4 的以下一个略微推广的版本。

定理 6.1。 假设我们在 $\mathbb{M} \subseteq s\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g$ 和$\mathbb{N} \subseteq \mathcal{dg}\mathcal{T}\mathcal{A}\ell g$中有小的全子范畴。并假设它们由这一对映射相互对应： $(\mathcal{Q}, n)$, 定义见 §*3.3*。此外，假设 $\mathbb{M}$

上存在同伦覆盖，并且 $\mathbb{N}$ 在这一对映射 $(\mathcal{Q}、\mathcal{n})$. 下保持不变。那么，这一对映射 $(\mathcal{Q}^*, \mathcal{n}^*)$ 诱导出层拓扑斯的等价

$$\mathfrak{Sp}(\mathbb{M}_{ob}) \underset{Q^*}{\overset{N^*}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Sp}(\mathbb{N}_{ob}).$$

证明。 证明与定理 5.4 中第二个等价的证明相同。 □

6.1. **导出光滑无穷小分析的模型**。 本节列出费马理论 $\mathcal{C}^\infty$ （参见例 2.24）中的导出叠的若干可能位点，遵循 Moerdijk–Reyes [28, 附录 2]。然后，我们应用定理 6.1 ，建立这些位点中若干位点上的层拓扑斯之间的等价。按照惯例，理论 $\mathcal{C}^\infty$ 上的代数称为 $\mathcal{C}^\infty$-环；我们遵循这一惯例。

记号。 令 $I \triangleleft C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一个光滑函数理想。用 $Z(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ 表示该理想的零点集合。对于集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ，用 $\mathfrak{m}_X^0$ 表示在 X. 上消失的光滑函数理想

定义 6.2。 理想 $I \triangleleft C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 若对任意 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus I$，都存在 $p \in \mathbb{R}^n$ 使得在局部化中有 $f_p \notin I_p$.，则称其为芽决定的

定义 6.3。 局部 C^∞-环 W 若在 $\mathbb{R}$上有限维，且可分解为和，则称为*Weil* 代数

$$W = \mathbb{R}\langle 1\rangle \oplus \mathfrak{m}.$$

这里 $\mathfrak{m}$ 是极大理想。

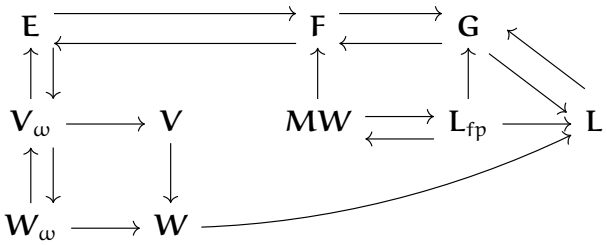
我们先列出所关注位点的非导出版。

构造 6.4。 Loci 范畴 $\mathbf{L}$ 是有限生成 $\mathcal{C}^\infty$-环范畴（见定义 2.19）在 $\mathcal{C}^\infty$-环范畴中的对偶范畴。范畴 $\mathbf{L}$ 是下文列出的所有其他位点的环境范畴；这些位点都是 $\mathbf{L}$的全子范畴，并由其对象作为商的表示所满足的条件来指定$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/I$.

(1) 范畴 $\mathbf{E}$ 由满足以下条件的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成： $f \in I$ 当且仅当 $f|_{Z(I)} \equiv 0$.。(2) 范畴 $\mathbf{F}$ 由满足以下条件的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成： I 是闭的。(3) 范畴 $\mathbf{G}$ 由满足以下条件的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成： I 是芽决定的（见定义 6.2）。(4) 范畴 $\mathbf{L}_{fp}$ 由满足以下条件的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成： I 是有限生成的。(5) 范畴 $\mathbf{V}$ 由满足以下条件的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成： I 是 C^∞-根式的，即 $f \in I$当且仅当 $\exists g \in I,\ Z(f) = Z(g)$.。(6) 范畴 $\mathbf{V}_\omega$ 由满足以下条件的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$构成： I 是 C^∞-根式且可数生成的，即存在 $\{g_k\}_{k=0}^\infty \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，使得 $f \in I$ 当且仅当 $\exists n\ Z(g_n) = Z(f)$.。(7) 范畴 $\mathbf{MW}$ 由与某个流形 M 的 $C^\infty(M)\otimes_\infty W$ 同构的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成，并且 $W \cong C^\infty(\mathbb{R}^{n-k})/J$ 是一个 Weil 代数（见定义 6.3）。这里， $\otimes_\infty$表示 C^∞-环范畴中的余积。

(8) 范畴 $\boldsymbol{W}$ 由与 $A \otimes_\infty W$同构的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成，其中 $A \in \boldsymbol{V}$，且 W是一个 Weil 代数。(9) 范畴 $\boldsymbol{W}_\omega$ 由与 $A \otimes_\infty W$同构的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ 构成，其中 $A \in \boldsymbol{V}_\omega$，且 W 是一个 Weil 代数。

上面列出的所有范畴都定义为在同构下封闭。我们有如下的包含函子图（见 Moerdijk–Reyes [28, 第 364] 页的讨论）。单箭头表示不存在右伴随；其他所有包含都是余反射的：



定义 6.5。 *C 上的开覆盖 $^\infty(\mathbb{R}^n)/I \in \mathbb{L}$ 是一个态射族*

$$\{C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \to C^\infty(U_i)/(I|_{U_i}) \mid \{U_i \to \mathbb{R}^n\} \text{ is an open cover}\}$$

投影 是一个与典范映射 $A \to A \otimes_\infty B$ 方向相反的映射，适用于 $B \neq 0$.

构造 6.4 中的范畴可以赋予以下四种覆盖之一：

C构造 6.6。 (i) 覆盖族由同构组成。(ii) 覆盖族由有限开覆盖组成。
(iii) 覆盖族由有限开覆盖和投影组成。(iv) 覆盖族由开覆盖组成。

我们有如下对应拓扑斯的图表，其中空白项对应非次正则拓扑。

$$
(\star)\qquad
\begin{array}{lcccc}
 & (\mathrm{iv}) & (\mathrm{iii}) & (\mathrm{ii}) & (\mathrm{i}) \\
\mathbf{L} & & \mathcal{B} \hookrightarrow & \mathcal{Z} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}} \\
\mathbf{F} & \mathcal{F} \hookrightarrow & \mathcal{F}_{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{F}_{\mathrm{fin}} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{F}^{\mathrm{op}}} \\
\mathbf{G} & \mathcal{G} \hookrightarrow & \mathcal{G}_{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{G}_{\mathrm{fin}} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{G}^{\mathrm{op}}} \\
\mathbf{MW} & \mathcal{MW} \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{MW} \hookrightarrow & \mathcal{MW}_{\mathrm{fin}} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{MW}^{\mathrm{op}}} \\
\mathbf{V} & & \mathcal{V}_{\mathrm{fpr}} \hookrightarrow & \mathcal{V}_{\mathrm{fin}} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{V}^{\mathrm{op}}} \\
\mathbf{W} & & \mathcal{W}_{\mathrm{fpr}} \hookrightarrow & \mathcal{W}_{\mathrm{fin}} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{W}^{\mathrm{op}}} \\
\mathbf{E} & \mathcal{E} \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{E} \hookrightarrow & \mathcal{E}_{\mathrm{fin}} \hookrightarrow & \mathcal{S}et^{\mathbf{E}^{\mathrm{op}}}
\end{array}
$$

关于 $\mathbf{V}_\omega$、$\mathbf{W}_\omega$ 的各行与关于 $\mathbf{V}$、$\mathbf{W}$. 的相同。现在我们定义构造 6.4 中位点的导出版。

定义 6.7。 设 $\mathbf{M}$ 是构造 6.4 中定义的十个范畴中的任意一个。

那么，其单纯导出版 $\mathrm{s}\mathbb{M}$ 是 $\mathrm{sC}^\infty\mathrm{Alg}_r$ 的全子范畴，该子范畴由与满足 π_0 属于 $\mathbf{M}$. 的代数弱等价的代数组成。

类似地，我们通过取 $\mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}_r$ 的全子范畴来定义 $\mathbf{M}$ 的微分分次导出版 $\mathrm{dg}\mathbb{M}$；该子范畴由与满足 H_0 属于 $\mathbf{M}$. 的代数弱等价的代数组成。

最后，我们可以通过取 $\mathrm{dg}\mathbb{M}$ 的全子范畴来构造 $\mathbf{M}$ 的微分分次半自由版 $\mathrm{sfdg}\mathbb{M}$，该子范畴由半自由代数组成。

根据这一定义，我们显然可以立即将构造 6.6 中的覆盖提升为同伦覆盖。因此，我们可以为每个 site 得到一个高阶版本。于是，存在一张与叠的模型拓扑斯对应的表格，类似于表（$\star$）；并且，我们可以将表（$\star$）中的所有等价提升为模型拓扑斯之间的等价。

定理 6.8. 前述构造中的每个位点都导出三个同伦位点：单纯位点、微分分次位点，以及半自由微分分次位点。这三个位点上的层范畴彼此 *Quillen* 等价。

证明. 由于 微分分次$\mathbb{M}$ 和 单$\mathbb{M}$ 范畴由函子对 $(\mathcal{Q},\mathcal{n})$相互映射，且这对函子保留同伦覆盖，因此定理 6.1 适用，从而得到所需的等价。对于半自由位点的包含，我们采用标准方法，通过余纤维化替换对恒等函子进行变形；参见 Riehl 的著作 [36, §2] ，可知同伦范畴之间存在等价。随后，我们可以应用 To¨en–Vezzosi [40, 定理 2.3。1]. □

6.2. **分析的模型导出**。 显然，构造 6.4 中的所有范畴及构造 6.6 中的覆盖，都可以针对例子 2.23、2.25 来定义，并且更一般地，也可以针对约化费马理论来定义（参见 Carchedi–Roytenberg [12, 定义 2。28]）。某些范畴之间的差异可能会消失。例如，对于 $\mathcal{C}om_K$ (K 为域)上的有限生成代数而言，这些范畴$\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{V}_\omega$ 并无区别，因为所有有限生成的 $\mathcal{C}om_K$-代数都是诺特的。显然，如果将相关费马理论视为定义在特征为 0 的域上，定理 6.8 也可以不作任何改动地推广到这一情形。 这一想法可以形式化为以下结果。

定理 6.9。 假设我们有一个位点 $\mathbf{M}$ ， 由费马理论 $\mathcal{T}$ 的有限表示 $\mathcal{T}$-代数组成。那么我们可以按照定义 微分分次$\mathbb{M}$、$\mathcal{sfd}g\mathbb{M}$，以及 $\mathcal{s}\mathbb{M}$ 构造三个导出位点，如定义 *6.7*所述。若 $\mathcal{T}$ 是定义在特征为零的域上的理论，则这三个位点会产生等价的层模型拓扑斯，其间的等价由该对 $(\mathcal{Q},\mathcal{n})$.

证明。 证明与定理 6.9的证明基本相同。我们注意到， $(\mathcal{Q},\mathcal{n})$ 在微分分次$\mathbb{M}$ 和 $\mathcal{s}\mathbb{M}$ 之间相互映射，并且同伦覆盖在构造下保持不变。因此，定理 6.1 适用，结论得证。与半自由位点上的栈拓扑斯的等价性，完全照定理6.8的证明即可得出。 □

6.3. **与导出流形其他模型的比较**。

6.3.1. 正振幅的 *DG (Q)* 流形。

定义 6.10 ([6, 定义 1.15])。 一个正振幅 $\mathcal{M}$ 的分次流形是一对 $(M,\mathcal{A})$，其中 M 是一个流形，

$$\mathcal{A}=\bigoplus_i \mathcal{A}^i$$

是 M 上的一个正分次 $C^\infty(M)$-代数层，且存在一个正分次向量空间

$$V=V^1\oplus\ldots\oplus V^n$$

以及 M 的一个开覆盖，记为 $\{U_i\to M\}_{i\in I}$ ，使得存在一个 $C^\infty(M)$-代数层的同构

$$\mathcal{A}|_{U_i}\cong\mathcal{C}^\infty(U_i)\otimes\mathbb{S}V^\vee,\quad \text{for all } i\in I.$$

我们假设 $\mathcal{M}$ 是有限维的，即 M 和 V 的维数均有限。以下定义最初由 Schwarz [37] 和 Kontsevich 提出，随后由 Alexandrov–Kontsevich–Schwarz–Zaboronsky 加以拓展 [1]。

定义 6.11 ([6, 定义 1.16])。一个微分分次流形（或微分分次流形，或Q-流形）是一个三元组 $(M, \mathcal{A}, Q)$，其中 $(M, \mathcal{A})$ 是一个分次流形， Q 是 $\mathbb{R}$-代数层 $\mathcal{A}$ 的导子，满足 $[Q, Q] = 0$. 。若一个微分分次流形的底层分次流形具有正振幅，则称该微分分次流形具有正振幅。

此类对象之间的态射由以下定义给出。

定义 6.12。微分分次流形 $(M, \mathcal{A}, Q) \to (N, \mathcal{B}, Q')$ 的一个态射是一个对 (f, Φ)，其中 $f : M \to N$ 是流形之间的可微映射，而 $\Phi : \mathcal{B} \to f_*\mathcal{A}$ （或等价地 $\Phi : f^*\mathcal{B} \to \mathcal{A}$）是分次代数层的态射，满足

$$Q\Phi = \Phi f^* Q'.$$

定义 6.13. 记 dgMan 为正振幅 dg 流形及其间态射构成的范畴。记 dgCart 为 dgMan 中由形如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, Q)$ for all $n \geq 0$. 的 dg 流形生成的全子范畴

构造 6.14. 对于一个正振幅 dg 流形 $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A}, Q)$，我们将其光滑函数代数$C^\infty(\mathcal{M}) \in$ dgC$^\infty$Alg 定义为

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})_0 = \mathcal{C}^\infty(M), \quad \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})_{\bullet \geq 1} = \Gamma(M; \mathcal{A}).$$

$C^\infty(\mathcal{M})$ 上的微分由 Q. 诱导。分次 C^∞-环的结构来自 $\mathcal{A}$. 的整体截面上的 $C^\infty(M)$-代数结构

我们得到一个函子

$$\mathcal{C}^\infty : \mathcal{dgMan}_{\mathrm{ob}} \to \mathcal{dgC}^\infty\mathcal{Alg}.$$

对于笛卡尔 dg 流形与有限生成半自由 DG C^∞-环的对偶范畴，我们有如下比较结果。

命题 6.15. 记 sfdgC$^\infty$Alg$_{\mathfrak{f}}$ 为有限生成半自由 C^∞-环构成的全子范畴。dgCart 与 sfdgC$^\infty$Alg$_{\mathfrak{fb}}$ 之间存在一个范畴等价，该等价由 C^∞ 及其右伴随 $\mathfrak{l}$ （我们称之为 *dg* 位点函子）诱导。

证明。 这一结果是函子 $C^\infty(-)$ 是普通流形范畴的全忠实嵌入这一事实的直接推广。我们首先指出，$\mathfrak{l}$ 可以定义如下：

$$\ell(\mathcal{A}) = (\mathfrak{l}(\mathcal{A}_0), \mathfrak{sh}\mathcal{A}_{\geq 1}, d_{\mathcal{A}}), \quad \mathfrak{sh}\mathcal{A}_{\geq 1}(U) := \mathcal{A}_0\{\chi_U^{-1}\}\mathcal{A}_{\geq 1}.$$

我们将 $A_0\{\chi_U^{-1}\}$ 记作 C^∞的局部化（见 Borisov–Noel [7, §2]）。此外， $\mathfrak{l}$ 表示通常的普通 C^∞-环的底点（见 [28, §II.1]），而 χ_U 是一个函数，它恰好在开子集 U. 的补集上为零。记 $(M,A\ Q)$ 为 lC^∞ 在 dg 流形 $(M,A\ Q)$. 上的取值。根据 $\mathfrak{l}$ 的构造，我们有典范的

同构 $M \cong M$，还有 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$，最后是 $Q \cong Q$，因为它由其在整体截面上的作用唯一确定。C^∞-l 的类似同构可用同样的方法证明。

□

命题 6.15 使我们能够将相对位点的结构从 $\mathrm{d}\mathcal{C}^\infty$ 转移到 CAlg dgCart。对于这一结构，我们有如下等价结果。

命题 6.16. 我们有一个相对位点的等价

$$\mathcal{C}^\infty : \mathrm{dgCart} \to \mathrm{d}\mathcal{C}^\infty,$$

CAlg，它在高阶层范畴上诱导出一个 Quillen 等价（定义 2.6）：

$$\mathcal{C}^\infty_! : \mathrm{Sh}_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{dgCart}) \rightleftarrows \mathrm{Sh}_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{d}\mathcal{C}^\infty) : (\mathcal{C}^\infty)^*.$$

$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Zar}}\ \mathrm{Sh}_{\mathrm{Zar}}\ \mathrm{CAlg}$ 证明。根据构造，$\mathcal{C}^\infty$ 反映弱等价，且是范畴的一个等价。因此，它在 Dwyer–Kan 局部化上诱导出一个等价。此外，根据构造，函子 $\mathcal{C}^\infty$ 反映覆盖，因此是相对位点的等价（定义 2.11）。由此，定理 2.10 适用，并且我们得到了所述的层范畴之间的 Quillen 等价。□

6.3.2. *Behrend–Liao–Xu* 导出流形。

定义 6.17 (Behrend–Liao–Xu [6, 定义 1.1]**)。** M 是一个流形（称为基底），L 是一个（有限维）分次向量丛，三元组$\mathcal{M} = (M, L, \lambda)$称为导出流形

$$L = L^1 \oplus \ldots \oplus L^n$$

在 M 上，且 $\lambda = (\lambda_k)_{k\geq 0}$ 是一列次数为 $+1$的多重线性运算

$$\lambda_k : L \times_M \ldots \times_M L \to L, \quad k \geq 0.$$

运算 λ_k 必须是 M 上的光滑映射，并在每个纤维上诱导出弯曲 $L_\infty[1]$-代数 结构（见 [6, 附录 B]）。

定义 6.18 (Behrend–Liao–Xu [6, 定义 1.2]**)。** 映射$\lambda_0 : M \to L$的零点轨迹称为 $\mathcal{M} = (M, L, \lambda)$. 的经典轨迹。我们用 $\mathrm{CL}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. 表示它。$\mathrm{CL}(\mathcal{M})$ 中的点称为 $\mathcal{M}$ 的经典点，我们用 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. 表示这个集合。我们将 $\mathrm{CL}(\mathcal{M})$ 视为 C^∞-底点（即相应 C^∞-环的形式对偶），而非单纯的集合。

定义 6.19 (Behrend–Liao–Xu [6, 定义 1.3]**)。** 一个态射的导出流形

$$(M, L, \lambda) \xrightarrow{(f,\phi)} (N, K, \mu)$$

是由一个光滑映射 $f : M \to N$和一个分次丛的覆盖态射 $\phi : L \to K$ 组成的一对，后者在纤维上诱导出曲 $L_\infty[1]$-代数的态射。

定义 6.20 (Behrend–Liao–Xu [6, 定义 1.9])。 设 $\mathcal{M} = (M, L, \lambda)$ 是一个导出流形。那么对于一个经典点 $p \in M$，我们有 $\lambda_0(p) = 0$ 因此存在一个自然分解

$$T_{\lambda_0(p)} L^1 = T_p M \oplus L^1|_p.$$

将复合映射记为 $D_p\lambda_0$

$$D_p\lambda_0 := \left[T_p M \xrightarrow{T_p\lambda_0} T_p M \oplus L^1|_p \xrightarrow{\pi_2} L^1|_p \right].$$

对于经典点 p，现在可以构造 $\mathcal{M}$ 在 p 处的切复形

$$T_p\mathcal{M} = \left[\underbrace{T_p M}_{=0} \xrightarrow{D_p\lambda_0} \underbrace{L^1|_p}_{=1} \xrightarrow{\lambda_1|_p} \underbrace{L^2|_p}_{=2} \xrightarrow{\lambda_1|_p} \dots \right]$$

定义 6.21 (Behrend–Liao–Xu [6, 定义 1.12])。 导出流形的态射 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 若在经典轨迹上诱导双射，并且在每个经典点上诱导切复形的拟同构，则称为弱等价。

定义 6.22 (Behrend–Liao–Xu [6, 定义 1.21])。 导出流形的态射

$$(M, L, \lambda) \to (N, K, \mu)$$

若诱导淹没 $M \to N$，并且诱导分次丛 $L \to K$. 的逐次满射，则称为纤维化

构造 6.23 (Behrend–Liao–Xu [6, §1.2])。 给定一个导出流形 $\mathcal{M} = (M, L, \lambda)$，其函数代数是 $\mathrm{dgC}^\infty(\mathcal{M})$ Alg 中的一个对象，由微分分次代数层的整体截面代数定义

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \Gamma(M; \mathbb{S}_{\mathcal{C}^\infty(M)} L^\vee).$$

分次结构由 L 上的分次结构诱导，而分量 $C^\infty(\mathcal{M})_0$ 显然与 $C^\infty(M)$一致，从而赋予 $C^\infty(\mathcal{M})$ 一个分次 C^∞-环结构。映射 λ 诱导出一个微分，使 $C^\infty(M)$ 成为 dgC^∞Alg 中的一个对象。

我们对 Behrend–Liao–Xu[6,命题 1.32] 的结果作如下小幅改进。

命题 6.24. 设 A、B 是两个微分分次 C^∞-环。假设 $A = C^\infty(\mathcal{M})$ 和 $B = C^\infty(\mathcal{N})$ 对应于某些导出流形 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. 。设 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个导出流形态射，它诱导拟同构 $f^* : B \to A$。那么 f 诱导经典轨迹的一个同构（见定义 6.18）。这是一个 C^∞-轨迹的同构。此外，导出流形 $\mathcal{M}$ 的经典点集合与到始代数的微分分次C^∞Alg-态射集合典范同构：

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}); \mathbb{R}).$$

证明。 根据构造，$\mathbf{CL}(\mathcal{M})$ 与 $\mathbf{C}^\infty$-环 $\mathrm{H}_0(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))$ 对偶，因此该拟同构必定在 H_0上诱导同构，进而诱导经典轨迹的同构。

第二个陈述由 $\mathbf{CL}(\mathcal{M})$ 是 $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$.的底点这一点的定义显然可得。事实上，从 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 到始代数 $\mathbb{R}$ 的所有 $\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}$-态射，都与湮灭微分像的交换代数 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ 的同态一一对应。□

记号。 将 dMan 记为上述定义的、带有指定弱等价类和纤维化类的导出流形范畴。将 dCart 记为 dMan 的全子范畴，其对象由具有笛卡尔基底的导出流形构成。

引理 6.25. 设 $\mathcal{M}$ 是一个具有笛卡尔基底的导出流形。在经典点 $\mathrm{P}:\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ 处，存在一个链复形的典范同构

$$\mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathcal{M} \cong (\quad \mathrm{P}/(\quad \mathrm{P})^2)^\vee.$$

这里 $\vee$ 表示线性对偶。 $\ker \quad \ker$

证明。 设 $\mathcal{M} = (\mathrm{M}, \mathrm{L}, \lambda)$ 是一个具有笛卡尔基底的导出流形。由于笛卡尔空间上的任意向量丛都是平凡的（无论是否分次），存在一个分次代数的同构：

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M}) \otimes \mathbb{S}(\mathrm{L}|_{\mathrm{P}}^\vee).$$

这里，对称代数中生成元的分次由 $\mathrm{L}.$ 上的分次给出。这个同构立即诱导出微分分次 $\mathbf{C}^\infty$-环的一个同构，其中右侧的微分由 $\lambda.$ 给出。

现在这个同构就很清楚了，因为在 0 次部分，这只是笛卡尔空间切空间的通常描述；而在更高次数，$(\quad \mathrm{P}/(\quad \mathrm{P})^2)^\vee$核 核 与向量丛 $\mathrm{L}.$ 在 P 处的纤维的分次向量空间重合。$\mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathcal{M}$ 上的微分与 $(\quad \mathrm{P}/(\quad \mathrm{P})^2)^\vee$ 上的相同，因为 $\mathbf{C}^\infty(\mathrm{M}) \otimes \mathbb{S}(\mathrm{L}|_{\mathrm{P}}^\vee)$ 上的微分分次核 核 代数结构是由 $\lambda.$ □ 诱导的。

注记。引理 6.25 可以推广到任意导出流形。然而，在这种情况下，必须将环 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 局部化到一个笛卡尔邻域。

命题 6.26 ([6, 命题 1.18])。 正振幅微分分次流形与导出流形之间的范畴等价：

$$\omega : \mathcal{dMan} \to \mathcal{dgMan}.$$

推论 6.27。 函子 $\mathbf{C}^\infty(-) : \mathbf{dMan} \to \mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}^{\mathrm{op}}$ 限制在子范畴 dCart 上时，取值于 $\mathbf{sfdgC}^\infty\mathbf{Alg}$。此外，它有一个右伴随

$$\mathcal{dl} : \mathcal{sfdgC}^\infty\mathcal{Alg}_{\mathrm{red}} \to \mathcal{dCart}$$

它可以计算为如下复合函子：$\mathcal{dl} = \ell\omega$ 等价 ω 以及命题6.15中的 dg 位点函子。

证明。显然， ω 将具有笛卡尔基底的导出流形映射到具有笛卡尔基底的 dg 流形。其余部分由命题6.15推出。□

根据 Behrend–Liao–Xu [6, 定理 2。15] 范畴 $\mathscr{dM}an$ 构成 Goerss–Jardine 意义下的纤维对象范畴 [20, §I。9] （这一概念最初由 Brown 引入[8]）。范畴 $\mathscr{dC}art$ 对取拉回不封闭，但仍带有指定的弱等价类和纤维化类（见定义 6.21、6.22）。

显然，范畴 sfdgC∞Algfb也带有这样的结构。事实上，它是模型范畴 dgC∞Alg 中由余纤维对象张成的全子范畴的对偶。
我们有如下比较结果：

定理 6.28。 范畴等价

$$\mathscr{sfdgC}^{\infty}\mathscr{Alg}_{\mathfrak{fb}} \xrightarrow{\mathscr{dl}} \mathscr{dC}art$$

反映所有弱等价，而不仅仅是无圈纤维化。此外，$\mathscr{dl}$反映纤维化。因此$\mathscr{dl}$ 是相对范畴的 *Dwyer–Kan* 等价。

证明。我们首先证明函子 $C^{\infty}(-)$反映弱等价。注意，根据命题 6.24，导出流形上的函数代数之间，微分分次C∞Alg中的每个弱等价都会诱导经典轨迹的同构。设 $\alpha : A \to B$ 是 sfdgC∞Algf·中的一个拟同构。取经典轨迹 CL(dl(A))上的一点 P，以及经典轨迹 CL(dl(B)). 上的对应点 Q 。那么，根据引理 6.25，dl(A) 在 P 处的余切复形可以表示为 K¨ahler 微分模

$$\mathbb{T}^{*}_{P}\mathscr{dl}(\mathcal{A}) = \Omega^{1}_{K}(\mathcal{A}) = \qquad P/(\qquad P)^{2}.$$

K∈I K∈I 由于 A 是余纤维的，且 Ω^{1}_{K} 是左 Quillen 函子，因此我们有一个余切复形的拟同构：

$$\mathbb{T}^{*}_{P}\mathscr{dl}(\mathcal{A}) \simeq \mathbb{T}^{*}_{Q}\mathscr{dl}(\mathcal{B}).$$

因此，$\mathscr{sfdgC}^{\infty}\mathscr{Alg}_{\mathfrak{fb}}$中的弱等价会映射为定义 6.21意义下导出笛卡尔流形之间的弱等价。现在，Behrend–Liao–Xu 的一个定理 [6, 定理 3.13] 表明，导出笛卡尔空间的弱等价对应于其函数代数之间的拟同构。

根据构造，sfdgC∞Algfb 中的纤维化对应于全局投影（函数代数的半自由扩张），而全局投影会映射为导出笛卡尔空间之间的淹没。因此，dl 确实保持纤维化。□

定理6.28 使我们得以肯定地解决 Behrend–Liao-Xu 的猜想 [6,第 6]页。在准备将本文上传至 arXiv 期间，Carchedi 给出了推论6.29 的另一种证明 [10, 定理 5.20]。

推论 6.29. 导出流形态射是弱等价，当且仅当它在函数代数上诱导拟同构。

证明. 根据定理 6.28，函子 $\mathcal{C}^\infty(-)$ 在导出笛卡尔空间上反映弱等价。定义 6.21 中将映射称为导出流形之间弱等价的条件显然是局部的。由于任一导出流形都存在一个覆盖，其由底流形层面上为开集的导出笛卡尔空间构成，结论得证。□

定理 6.30. 由导出流形和弱等价构成的相对位点 $(\mathscr{dMan}, \mathscr{W})$ 定义了一个高阶层拓扑斯，它与$\mathscr{sfdgC^\infty Alg_{\mathfrak{ob}}}$上的高阶层拓扑斯 *Quillen* 等价

证明。 存在相对位点的等价 $(\mathscr{dMan}, \mathscr{W}) \to (\mathscr{dCart}, \mathscr{W})$，它由$\mathbf{dgC^\infty Alg_{ob}}$ 中的纤维化替换函子诱导而来。接下来只需应用定理6.28 即可看出函子 $\mathscr{dl}$ 是相对位点的等价。因此，根据定理2.10，□我们得到层拓扑斯的等价。

6.4. **导出微分上同调**。 本节定义导出可微堆栈的微分上同调。关于导出代数栈上的微分形式的一般论述，参见 Calaque–Pantev–To¨en–Vaqui´e–Vezzosi [9, §1.3.2, 1.4.1]。

定义 6.31。 设 $R = \mathfrak{l}(A)$ 是 $\mathrm{d}\,\mathcal{C}^\infty$ 中与 $A \in \mathbf{sfdgC^\infty Alg}$ 对应的一个对象。$\mathbf{C^{sing}}$ 则我们将 R 的 K¨ahler 微分模 $\Omega^1_K(R)$ 定义为遗忘函子的左伴随在对象 A 上的取值

$$\mathbb{U} : \mathscr{Ab}(\mathscr{dgC^\infty Alg}/\mathscr{A}) \to \mathscr{dgC^\infty Alg}$$

在对象 A 上。

请注意，上述定义正是 Beck 模的框架下构造 K¨ahler 微分的标准方法（例如参见 Quillen [34]）。按照 Dubuc–Kock [14, §2]，也可以给出同一定义的一个更明确的版本。

定义 6.32。 设 $R = \mathfrak{l}(A)$ 是 $\mathrm{d}\,\mathcal{C}^\infty$ 中与 $A \in \mathbf{sfdgC^\infty Alg}$ 对应的一个对象。$\mathbf{C^{sing}}$ 设 N是代数 A 上的一个微分分次模（将 A 视为交换微分分次代数）。那么，映射 $\delta : A \to N$ 是一个 $\mathbf{C^\infty}$-导子，如果它在通常的分次交换意义下是一个导子，并且对于任意光滑的 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 以及任意一组 α_1、……、 $\alpha_n \in A_0$，我们都有

$$\delta(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \delta(\alpha_i).$$

我们用$\mathscr{A}(N)$ 表示取值于 N. 的 A 的 $\mathbf{C^\infty}$-导子模。R 的 Kähler 微分$\mathbf{D^{ef}}$模可识别为 $\mathbf{Ab}(\mathbf{dgC^\infty Alg}/A)$中的对象，它表示如下函子：

$$\mathscr{dgC^\infty Alg}/\mathscr{A} \ni N \mapsto \quad _{\mathscr{A}}(N).$$

导**引理 6.33.** 定义 6.316.31 和6.32 的构造给出典范同构的对象。

证明。设 A 是 $dC^\infty\cdot$ 中对象 R 的对偶。则范畴 Ab(dgC$^\infty$Alg/A)Cart 是范畴 Ab(dgComAlg/A). 的子范畴。此外，A 上的每个模 M 都自然地是 A_0. 上的模。根据 Dubuc–Kock 的结果 [14, 命题 2.2]，取值于 M 的 A_0 的 C^∞-导子可识别为从 $\Omega^1_K(A_0)$. 出发的态射。只需注意，这个自然双射可扩展到 A 的导子，因为根据定义，取值于 M 的 A 的任意 C^∞- 导子都是分次交换导子，并且其限制是 A 的 C^∞- 导子 $_0$. □

定义 6.34. 设 $\mathcal{R} = l(\mathcal{A})$ 是 dC^∞ 中对应于 $\mathcal{A} \in sfdgC^\infty\mathcal{A}lg.$ $_{\mathrm{Cgif}}$ 的一个对象。于是，我们将 $\mathcal{R}$ 的余切复形定义为 K¨ähler 微分（定义 6.31）函子的左导出函子：

$$L_{\mathcal{R}} = \mathbb{L}\Omega^1_K\mathcal{R}. \tag{7}$$

由此定义立即得到一个定义在 $dC^\infty\cdot$ 上的预层。注意，由于 $_{\mathrm{Cgif}}$ 网站 dC^∞ 由余纤维对象组成，公式（7）中的总左导出函子 $_{\mathrm{Cgif}}$ 实际上并不需要。对象 $L_{\mathcal{R}}$ 实际上与 K¨ähler 微分复形 $\Omega^1_K R$ 重合。

构造 6.35. 显然，定义6.34 及其同伦不变性使我们能够为高阶层拓扑斯 $(dC^\infty)_{\mathrm{Sp}\ \mathrm{Cgif}}$ 中的任意对象定义微分形式层（参见定义2.6）。事实上，只需将对称代数函子应用于函子 $L_{\mathcal{R}}$，再将其移位 -1，即可得到预层 Ω^*. 。将其映射到 Ω^* 的导出映射空间定义了 (dC^∞) 上的微分形式层。因此，结果 $_{\mathrm{Sp}\ \mathrm{Cgif}}$ 就是叠的德拉姆复形：

$$\Omega^* = \left[\underbrace{\left(C^\infty(-) = \Omega^0\right)}_{=0} \xrightarrow{d} \underbrace{\left(L_{(-)} = \Omega^1\right)}_{=-1} \xrightarrow{d} \underbrace{\left(\mathbb{S}^2\Omega^1 = \Omega^2\right)}_{=-2} \to \dots\right] \tag{8}$$

$_{\mathrm{qeg}\ \mathrm{qeg}\ \mathrm{qeg}}$ 上述构造是对 Pridham 在 [30, 定义 1.4] 中给出的、针对超次数零情形的定义的一种特化情形的直接推广，也就是说，适用于函数代数仅由偶元素构成的超 NQ 流形。

现在我们定义 Deligne 复形。关于通常的 Deligne 复形及其与经典微分上同调的关系，请参见[2, §7.3]。

定义 6.36 （Deligne 复形）。记 $\mathbb{Z}$ 为 $dC^\infty\cdot$ 上取值于 $\mathbb{Z}$的局部常值函数层。对于 $k \geq 1$，考虑如下由链复形构成的层复形（即 $_{\mathrm{Cgif}}$ 层双复形）：

$$\mathcal{D}^k = \left[\underbrace{\mathbb{Z}}_{=0} \xhookrightarrow{2\pi i} \underbrace{\Omega^0}_{=-1} \xrightarrow{d} \underbrace{\Omega^1}_{=-2} \xrightarrow{d} \underbrace{\Omega^2}_{=-3} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \underbrace{\Omega^{k-1}}_{=-k} \xrightarrow{d} 0 \to 0 \to \dots\right]. \tag{9}$$

$_{\mathrm{度}\ \mathrm{度}\ \mathrm{度}\ \mathrm{度}\ \mathrm{度}}$ 现在我们定义 k 阶微分上同调群 $\hat{H}^k(X)$ 为

$$\hat{H}^k(X) = H^k(\ [X, \mathcal{D}^k], d). \tag{10}$$

$_{\mathrm{Top}}$

这里， $[-,-]$ 是映射的同伦类集合，而则表示全化 复形，它由外微分与余切复形的微分相加得到。

注记。 请注意，栈 X的微分上同调还可以用导出映射空间来稍作不同地描述。也就是说， $\hat{H}^k(X) = H^k(\underline{\quad}(X,D))$, $_{\mathrm{Hom}}$ 右侧是两个栈之间的导出映射空间。

与 Calaque–Pantev–To¨en–Vaqui´e–Vezzosi 的方法相比，[9]我们的构造（9）恢复了内部德拉姆复形的 Deligne 版本，而构造（10）计算的是绝对 Deligne 复形的上同调（参见 Calaque– Pantev–To¨en–Vaqui´e–Vezzosi [9，命题1.3.8，定义 1.3.9]）。事实上，构造6.35 中的德拉姆复形（8）正是一个左伴随函子，它将层上的微分双分次 C^∞-代数映射到其 0 次子代数。 $d\ \mathcal{C}^\infty \cdot_{\mathrm{Cgif}}$ 因此，在层范畴中得到的复形是 Calaque–Pantev–To¨en–Vaqui´e–Vezzosi 的内部德拉姆复形的 C^∞-版本。

注记。 请注意，由上述内容可知，Deligne 复形与单纯由 1 次微分形式生成的自由代数大不相同。事实上，它带有两个不同的微分，其中一个是外微分，另一个则是余切复形的内微分。因此，微分上同调是两种本质上迥异的数据的非平凡组合。

注记。 由于除 $\mathbb{Z}$在 $\mathcal{D}^k$ 中的以外，所有预层都是纤维化的，定义 6.36 具有同伦不变性。也就是说，为了得到导出映射空间的 $[X,\mathcal{D}^k]$ 中的 π_0，我们不必严格地进行纤维化替换，也不必在尾部进行余纤维化替换。

注记。 显然，定义 6.31-6.34 适用于任意费马理论，因此定义 6.36 对任意费马理论也都有意义。

参考文献

[1] Mikhail Alexandrov、Maxim Kontsevich、Albert Schwarz 和 Oleg Zaboronsky。《主方程的几何与拓扑量子场论》。《现代物理学国际期刊A》（1997年），12:7，1405–1429。arXiv:hep-th/9502010，doi:10.1142/s0217751x97001031。[2] Araminta Amabel、Arun Debray 和 Peter J. Haine。《微分上同调：范畴、特征类与联络》。arXiv:2109.12250。[3]Michel Andr´e。《交换代数的同调》。第206卷，（Springer，1974年）。doi:10.1007/978-3-642-51449-4。[4] Michael Artin、Alexandre Grothendieck 和 Jean Louis Verdier。《拓扑斯理论与概形的étale上同调：第3卷》，（Springer，1973年）。doi:10.1007/BFb0061319。[5] Michael Artin 和 Barry Mazur。《Étale同伦》。第100卷，（Springer，2006年）。doi:10.1007/bfb0080957。[6] Kai Behrend、Hsuan-Yi Liao 和 Ping Xu。《导出可微流形》。arXiv:2006.01376。[7] Dennis Borisov 和 Justin Noel。《导出微分流形的单纯形方法》。arXiv:1112.0033。[8] Kenneth S. Brown。《抽象同伦论与广义层上同调》。《美国数学会汇刊》（1973年），186，419–458。doi:10.1090/s0002-9947-1973-0341469-9。

[9] Damien Calaque、Tony Pantev、Bertrand To¨en、Michel Vaqui´e 和 Gabriele Vezzosi。《移位泊松结构与变形量子化》。《拓扑学杂志》（2017年），10:2，483–584。arXiv:1506.03699，doi:10.1112/topo.12012。[10] David Carchedi。《作为微分分次流形的导出流形》。arXiv:2303.11140。[11] David Carchedi 和 Dmitry Roytenberg。《可微函数超代数的同调代数》。arXiv:1212.3745。[12] David Carchedi 和 Dmitry Roytenberg。《关于可微函数超代数的理论》。arXiv:1211.6134。[13] Eduardo J. Dubuc。《C^∞-概形》。《美国数学杂志》（1981年），103:4，683–690。doi:10.2307/2374046。[14] Eduardo J. Dubuc 和 Anders Kock。《1-形式分类器》。《代数通讯》（1984年），12:12，1471–1531。doi:10.1080/00927878408823064。[15] Daniel Dugger、Sharon Hollander 和 Daniel C. Isaksen。《超覆盖与单纯预层》。载于《剑桥哲学学会数学会刊》，第136卷，（剑桥大学出版社，2004年），9–51。arXiv:math/0205027，doi:10.1017/s0305004103007175。[16] William G. Dwyer 和 Daniel M. Kan。《图表的同伦理论之间的等价》。《代数拓扑与代数K理论》，《数学年刊研究》（1987年），113，180–205。doi:10.1515/9781400882113-009。[17] William G. Dwyer、Philip S. Hirschhorn、Daniel M. Kan 和 Jeffrey H. Smith。《模型范畴与同伦范畴上的同伦极限函子》。第113号，（美国数学会，2004年）。doi:10.1090/surv/113。[18] William G. Dwyer 和 Daniel M. Kan。《范畴的单纯局部化》。《纯粹与应用代数杂志》（1980年），17:3，267–284。doi:10.1016/0022-4049(80)90049-3。[19] Sergei I. Gelfand 和 Yuri I. Manin。《同调代数方法》（Springer，1996年）。doi:10.1007/978-3-662-03220-6。[20] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine。《单纯同伦论》（Springer，2009年）。doi:10.1007/978-3-0346-0189-4。[21] Owen Gwilliam 和 Dmitri Pavlov。《滤过导出范畴的增强》。《纯粹与应用代数杂志》（2018年），222:11，3621–3674。arXiv:1602.01515，doi:10.1016/j.jpaa.2018.01.004。[22] Philip S. Hirschhorn。《模型范畴及其局部化》。第99号，（美国数学会，2003年）。doi:10.1090/surv/099。[23] Mark Hovey。《模型范畴》，第63号，（美国数学会，1999年）。doi:10.1090/surv/063。[24] J. F. Jardine。《单纯预层的中间模型结构》。《加拿大数学通报》（2006年），49:3，407–413。doi:10.4153/cmb-2006-040-8。[25] Jacob Lurie。《导出代数几何》。博士论文，麻省理工学院，2004年。http://hdl.handle.net/1721.1/30144。[26] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，（普林斯顿大学出版社，2009年）。doi:10.1515/9781400830558。[27] Saunders MacLane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初探》，（Springer，1994年）。doi:10.1007/978-1-4612-0927-0。[28] Ieke Moerdijk 和 Gonzalo E. Reyes。《光滑无穷小分析的模型》，（Springer，2013年）。doi:10.1007/978-1-4757-4143-8。[29] J. Nuiten。《导出微分拓扑中的李代数丛》。博士论文，乌得勒支大学（2018年）。https://imag.umontpellier.fr/~nuiten/Writing/LieAlgdDerDiffTopScreen.pdf。[30] J. P. Pridham。《导出微分几何中的移位泊松结构与变形量子化纲要》，2018年。arXiv:1804.07622。[31] J.P. Pridham。《导出解析几何的微分分次模型》。《数学进展》（2020年），360，106922。arXiv:1805.08538，doi:10.1016/j.aim.2019.106922。[32] Daniel Quillen。《交换环的同调》，油印讲义（1968年）。未发表。https://web.archive.org/web/20150420184538/http://chromotopy.org/paste/quillen.djvu。[33]Daniel Quillen。《有理同伦论》。《数学年刊》（1969年），205–295。doi:10.2307/1970725。

[34] Daniel Quillen. 论交换环的（余）同调。载于《纯数学研讨会论文集》第17卷（1970年），65–87。doi:10.1090/pspum/017/0257068. [35] Daniel Quillen.《同伦代数》，第43卷（Springer，2006年）。doi:10.1007/bfb0097438. [36] Emily Riehl.《范畴同伦论》，第24卷（剑桥大学出版社，2014年）。doi:10.1017/CBO9781107261457. [37] Albert Schwarz. Batalin-Vilkovisky形式体系中的半经典近似。《数学物理通讯》158（1993年），373–396。arXiv:hep-th/9210115，doi:10.1007/BF02108080. [38] David I. Spivak. 导出光滑流形。《杜克数学期刊》153:1（2010年），55–128。arXiv:0810.5174，doi:10.1215/00127094-2010-021. [39] Myles Tierney. 关于环化拓扑斯的谱。载于《代数、拓扑与范畴论》，纪念 *Samuel Eilenberg* 的论文集（Elsevier，1976年），189–210。doi:10.1016/C2013-0-10841-0.[40] Bertrand To¨en 和 Gabriele Vezzosi. 同伦代数几何 I：拓扑斯理论。《数学进展》193:2（2005年），257–372。arXiv:math/0207028，doi:10.1016/j.aim.2004.05.004. [41] Gabriele Vezzosi. 导出临界轨迹 I：基础。arXiv:1109.5213。