评述索恩和布兰德福德《现代经典物理学》中弹性线一节、万物的形状，以及现实的纵横比

J. A.Hanna*Mechanical Engineering, University of Nevada, Reno, NV 89557-0312, U.S.A.（日期：2023年3月23日）

我指出并分析了一本经典物理学教材中的一幅图所存在的错误。这个错误有助于说明处理物体形状时可能遇到的一个陷阱，也可能反映了物理学中的普遍文化观念。文中还顺带指出了另一个不那么有意思的错误。

arXiv:2303.12729v1 [physics.class-ph] 22 Mar 2023

本文讨论索恩和布兰德福德《现代经典物理学》中的图11.10（第11.5节，习题11.13）[1]（亦见 [2]），该图对弹性线 平衡形状的表示有误。问题在于，正确曲线经过了不恰当的仿射变换。我觉得有必要记录这一评论，因为这些曲线是我所在科学领域中基础性的概念与实践构件；而这本教材由两位声誉卓著的天体物理学家撰写，全面介绍了经典物理学的众多分支，读者群体广泛。[1] 我希望，这篇为结构力学基本要素辩护的短文，能**被视为一则有益的经验教训，而非批评**，说明一种常见且容易犯的错误。它或许也能略微引起人们对日常生活中的物理学与当前物理学教育和研究重点之间脱节的关注。

17世纪平面曲线问题中的悬链线或弹性线，或许都可称为结构力学中的“氢原子”或“简谐振子”，因为许多弹性结构模型都以它们为基础。弹性线是一条不可伸长曲线，其能量与曲率的平方成正比，并在两端受到力和力矩作用；它是经典力学中最简单的一维连续体之一。过去约四百年来，它的各种形态都已有详尽记录 [3–10]。对于从事薄弹性结构研究的人，或对这种形态在日常生活中的存在十分敏锐的人而言，[1] 的图11.10(c)和(d)显得极不符合物理实际，无论这种形态表现为电缆、植物卷须、布料还是纸张。在这些人看来，图像似乎发生了扭曲；下文将通过对正确曲线进行单向缩放，生成这些错误曲线，以证实这种印象。

弹性线静力平衡的一种可能方程，在形式上与重力摆的方程相同，

$$B d_s^2\theta + P\sin\theta = 0\,, \tag{1}$$

其中，B 是弯曲模量，P 是所施加端部作用力的大小，θ 是这些力与曲线切线之间的夹角（定义为：当曲线为直线时，$\theta = 0$ 受压，$\theta = \pi$ 受拉），s 是沿曲线的弧长。由此可得第一积分

$$\tfrac{1}{2}B\,(d_s\theta)^2 - P\cos\theta = c\,, \tag{2}$$

其中，c 是材料力或赝力 [9, 10]。解在整体缩放意义下由比值 c/P [10]确定。索恩和布兰德福德只考虑不施加力矩的情形，因此力共线，并作用于所得曲线的拐点处（图11.10的子图（b）在本文中不作讨论；该图未按照这一要求一致地截取。按书中所示，其两端应同时受到力和力矩作用）。因此，所考虑的只是称为有拐点弹性线的那部分解。本文讨论的两个例子类型相似；在这两种形状中，端部作用力都水平向外拉。

图1顶部以红色曲线展示了两种正确的弹性线构型。只需将这些形状与插图中弯曲的塑料薄片进行比较，就能轻易验证它们是否正确。[2] 图的底部展示了这些曲线沿力线单向缩放后的结果，并将其叠加在索恩和布兰德福德《现代经典物理学》中图11.10的子图(c)和(d)上。通过引导式试错得到的拟合相当不错，因此我认为，这些错误图像很可能是由于绘图时采用了不恰当的纵横比，或之后通过编辑子图制作组合图而产生的。这些形状并非弹性线，因为变换$x \to \lambda x$, $y \to y$（其中 λ 为常数，x 和 y 分别是平行和垂直于[3] 外力方向的坐标（因此 $d_s x = \cos\theta$ 和 $d_s y = \sin\theta$））会改变弧长 s、角度 θ以及诸如

* jhanna@unr.edu[1] .....顺便一提，他大约在这段评论的自负作者出生时，就已开始在加州理工学院教授这部分内容。原本我打算在2017年末、文章发表后不久，简单联系 [1] 的作者，指出这个错误。然而，那一周索恩的诺贝尔奖公布了，所以我想他大概会很忙。直到现在我才重新处理这件事。[2] 如果有人对这种桌面“实验”的用途感到惊讶，或许会认同特鲁斯德尔的评论：“许多人宁愿去挖掘大自然最幽暗、最深处的内脏——那里除了最精良的实验仪器或浩繁的统计数据外，鲜有人能进入——却对地球那张笑脸视而不见”（引自 *Experience, Theory, and Experiment*（1955年），后转载于 [11]）。[1] 之所以成为物理学课程中备受赞誉的补充，一个原因是它或许能纠正人们长期以来对人类尺度现象重视不足的问题。[3] 请注意记号上的一个重要区别：[1] 用 x 表示我们的弧长 s。

曲率 $d_s\theta$这样的导数，而这种改变并不保持方程(1-2)不变。一般而言，我们不应期待仿射变换下的不变性。在结构力学中，曲率相关能量取决于角度导数，而投影到体坐标系上的力分量则取决于角度。

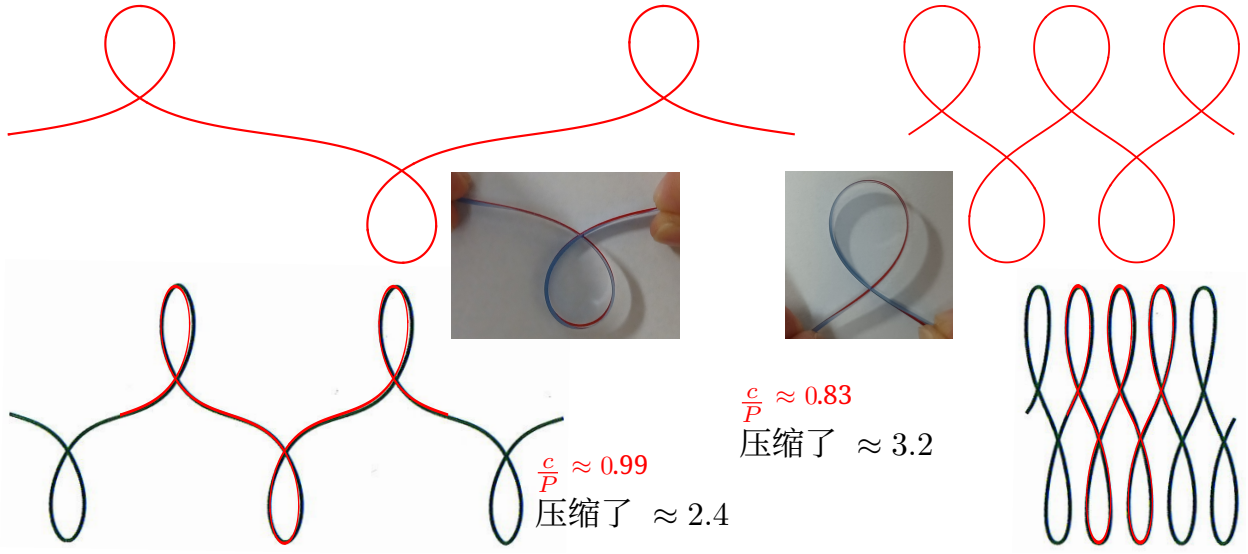


图1： 与式（2）的解相对应的两种 *elastica* 形状（上方，红色），叠加在一条薄塑料片上（插图），并沿单一方向压缩后叠加在 [1] 的图11.10(c-d)上（下方）。插图照片由 A. Dehadrai 拍摄。

我发现学生中常见这种错误。一些经验丰富的物理学家也会犯这种错误，这并不意外：在他们通常的研究领域中，他们只是不习惯绘制事物的形状，而不是绘制数据或函数（其呈现方式并不取决于图形的各向异性缩放）。经典力学关乎我们在 $\mathbb{E}^3$中的日常现实，而这里的重要教训是：现实的纵横比为一。

致谢

感谢 A. Dehadrai 和 H. Singh 提供帮助。

---

[1] K. S. Thorne 和 R. D. Blandford。 *Modern Classical Physics*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2017年。[2] K. S. Thorne 和 R. D. Blandford。 *Elasticity and Fluid Dynamics: Volume 3 of Modern Classical Physics*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2021年。[3] W. A. Oldfather、C. A. Ellis 和 D. M. Brown。莱昂哈德·欧拉的弹性曲线。 *Isis*，20(1):72–160，1933年。[4] C. G. Fraser。欧拉研究弹性线中的数学技巧与物理观念。 *Centaurus*，34:211– 246，1991年。[5] R. Levien。弹性线：一段数学史。 *University of California Berkeley Technical Report No. UCB/EECS-* ， ， ， 。 *2008-103* 2008
[6] A. E. H. Love。 *A treatise on the mathematical theory of elasticity*。多佛出版社，纽约，1944年。[7] S. S. Antman。 *Nonlinear Problems of Elasticity*。施普林格，纽约，2005年。[8] I. M. Mladenov 和 M. Hadzhilazova。 *The Many Faces of Elastica*。施普林格，查姆，2017年。[9] O. M. O'Reilly。 *Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods*。施普林格，纽约，2017年。[10] H. Singh 和 J. A. Hanna。关于平面 *elastica*、应力和材料应力。 *Journal of Elasticity*，136(1):87–101，2019年。[11] C. Truesdell。 *An Idiot's Fugitive Essays on Science*。施普林格，纽约，1984年。