Solomon 和 Benson 所研究类型的 2-局部有限群的构造：更正

BOB OLIVER

Abstract. 我们更正我与 Ran Levi 合著的论文 [LO] 中引理 3.1 的一处错误，并说明这一修改不影响该论文的任何其他结果。具体而言，正如 Justin Lynd 指出的那样，每个 Benson–Solomon 融合系统 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 中秩 3 的初等阿贝尔子群有两个共轭类，而非 [LO] 中所声称的一个。

arXiv:2303.12844v1 [math.GR] 22 Mar 2023

在 Ran Levi 与我合著的论文 [LO] 中，我们证明，对于奇素数幂 q，某个包含 $\mathrm{Spin}_7(q)$ 的 2-融合系统的融合系统 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 是饱和的，从而构造出首批定义在有限 2-群上的奇异融合系统实例。随后，我们证明，这些融合系统的分类空间是由 Dwyer 和 Wilkerson 构造的空间 $BDI(4)$ 上某些自映射的“同伦不动点集” [DW]。Dave Benson [Be]，早已预言了所有这些结果，因此我们的论文主要是对其预言的验证。在 [LO]，发表后不久，Andy Chermak 指出我们构造 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 时存在错误，因此需要进行重大修改以修正这一错误；相关修改见 [LO2]。

最近，Justin Lynd 指出了另一处错误，这是他与 Ellen Henke 和 Assaf Libman 合作期间发现的 [HLL]，，而且（幸运的是）不会影响论文的其余部分。我们曾在 [LO, 引理 3.1]中声称， $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 中所有秩 3 的初等阿贝尔子群彼此共轭，而 Lynd 及其合作者在 [HLL, 引理 4.8] 中（正确地）证明，这类子群实际上有两个共轭类。因此，他们对更正后命题的证明很快就会发表。无论如何，我们决定发表这篇更正：一方面，是为了让对这一错误的承认与我们的原论文联系得更紧密（以提醒其他将我们的论文作为参考的人）；另一方面，是为了提供另一种更贴近 [LO], 中所用论证和术语的证明，尤其是说明为何这一改动不会影响我们论文中的其他任何结果。

我们首先回顾 [LO] 中使用的一些记号和术语，这些记号和术语用于描述当 q 为奇素数幂时 $\mathrm{Spin}_7(q)$ 的元素和子群。我们先考察 $\mathrm{Spin}_7(q)$ 及其一些子群。照例，具有非退化二次型的 $\mathbb{F}_q$-向量空间的判别式，是该二次型相对于某个基的行列式（在 $\mathbb{F}_q^\times$的平方意义下定义良好）。

d:types

定义-记号 *1*（[*LO*，定义 *A*.7]）。固定一个奇素数幂 q、一个 *7* 维$\mathbb{F}_q$-向量空间 V，以及定义在 V 上的非奇异二次型 $\mathfrak{b}$，其判别式为平方。将 $SO_7(q) = SO(V, \mathfrak{b})$ 以及 $Spin_7(q) = Spin(V, \mathfrak{b})$ 视为相同。若 $SO_7(q)$ 或 $Spin_7(q)$ 的一个初等阿贝尔 *2*-子群在 V 上的作用所对应的特征子空间全都具有平方判别式（相对于 $\mathfrak{b}$），则称其为 *I* 型；否则称为 *II* 型。

固定 $S(q) \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Spin}_7(q))$，并令 $\mathcal{E}_n$ 表示 $S(q)$ 中所有秩为 n 且满足 $z \in E \leq S(q)$ 的初等阿贝尔 *2*-子群的集合。令 $\mathcal{E}_n^{\mathrm{I}}$ 和 $\mathcal{E}_n^{\mathrm{II}}$ 分别为 $\mathcal{E}_n$ 中由

2000 数学主题分类。主要分类 55R35。次要分类 55R37、20D06、20D20。关键词和短语。分类空间、 p-完备化、有限群、融合。B. Oliver 的部分研究经费由法国国家科学研究中心的 UMR 7539 提供。

I 型和 *II* 型子群组成的子集。

包含其中心的 $\mathrm{Spin}_7(q)$ 初等阿贝尔 2-子群的共轭类及其自同构子群早已为人所知。以下是描述它们的一种方式。

em.abel.

命题 2 ([LO, 命题 A.8])。 固定一个奇素数幂 q。则

- $\mathcal{E}_{\mathrm{II}_2} = \varnothing$;
- 以下每个集合 $\mathcal{E}_{\mathrm{I}2}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{I}3}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{II}3}$ 和 $\mathcal{E}_{\mathrm{II}4}$ 都恰好由一个子群共轭类组成;
- 集合 $\mathcal{E}_{\mathrm{I}4}$恰好包含两个 $\mathrm{Spin}_7(q)$-共轭类，在此记为 $\mathcal{E}_{\mathrm{Ia}4}$和 $\mathcal{E}_{\mathrm{Ib}4}$，它们在该群的一个对角外自同构作用下互换；并且
- $\mathcal{E}_n = \varnothing$ 对于 $n \geq 5$。

此外，以下结论成立。

(a) 对所有 $E \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{Aut}_{\mathrm{Spin}_7(q)}(E) = \{\alpha \in \boldsymbol{Aut}(E) \mid \alpha(z) = z\}$。***(b)*** 对所有 $E \in \mathcal{E}_4$, $C_{\mathrm{Spin}_7(q)}(E) = E$。***(c)*** 若 $E \in \mathcal{E}_3$, 则 $C_{\mathrm{Spin}_7(q)}(E) = A\langle x\rangle$, 其中 A 为阿贝尔, $x^2 = 1$, 且对于所有$a \in A$, ${}^x a = a^{-1}$ 。若 $E \in \mathcal{E}_3^{\mathrm{II}}$, 则 $C_{\mathrm{Spin}_7(q)}(E)$ 的西罗 *2*-子群是秩为 *4* 的初等阿贝尔群。

证明。 参见 [LO, 命题 A.8]: 点 (a) 以及关于共轭类的信息列于表中，而点 (b,c) 分别对应该命题中的点 (a,d)。□

接下来需要描述当 $E \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$ 时的 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Spin}_7(q)}(E)$。下一个命题将给出这一描述。设 $\mathbb{F}_q$ 为 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包，并令 $\psi^q \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Spin}_7(\mathbb{F}_q))$ 为 Frobenius 自同构。特别地，$C_{\mathrm{Spin}_7(\mathbb{F}_q)}(\psi^q) = \mathrm{Spin}_7(q)$。

p:E4II

命题 3 ([LO, 命题 A.9])。 固定一个奇素数幂 q，并令 $z \in Z(\mathrm{Spin}_7(q))$为中心对合。

(a) 对每个 $U \in \mathcal{E}_4$，都存在一个元素 $g \in \mathrm{Spin}_7(\mathbb{F}_q)$使得 ${}^g U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ia}}$。见 t

$$\boldsymbol{x}(U) = g^{-1}\psi^q(g)$$

对于这样的 g; 则 $\boldsymbol{x}(U) \in U$, 且与 g的选取无关。

(b)$U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ia}}$当且仅当$\boldsymbol{x}(U) = 1$, 且$U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}}$当且仅当$\boldsymbol{x}(U) = z$。

(c)假设 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$, 并令 $X = \langle z, \boldsymbol{x}(U)\rangle$。则$\mathrm{rk}(X) = 2$, 且

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Spin}_7(q)}(U) = \big\{\alpha \in \mathrm{Aut}(U) \,\big|\, \alpha|_X = \mathrm{Id}\big\}.$$

在 U对 V的作用所对应的七个特征子空间中，$\boldsymbol{x}(U)$ 通过 $-\mathrm{Id}$作用于其中的四个子空间，其判别式均为非平方判别式；而$\boldsymbol{x}(U)$ 恒等作用于其中的三个子空间，其判别式均为平方判别式。

本文所称的$\boldsymbol{x}(E)$在 [LO]中记作 $x_{\mathcal{C}}(E)$。

请注意， E 的类型对所有初等阿贝尔子群都有定义：如果 $z \notin E$，那么 E 的类型与 $E\langle z\rangle$的类型相同。然而，关于恰有两个与 E_8同构的子群的 $\mathrm{Spin}_7(q)$-共轭类且由类型决定这一说法，仅适用于包含 z的那些子群。（显然，不包含 z 的子群不可能与包含它的子群 $\mathrm{Spin}_7(q)$-共轭。）

这就是 [LO 引理 3.1] 的证明中出错的原因。我们讨论了“秩 3 子群的两个共轭类”，却忘了这只适用于包含 z 的那些子群。特别是，由于从 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{I}}$ 中的子群到 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$ 中的子群的一个 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$-同构不能将 z 映到自身，因此它会将包含 z 的秩 3 子群映到不包含 z 的子群，所以涉及 I 型和 II 型的论证并不适用。

如上所述，我们用 $\mathcal{E}_{\mathrm{Ia}4}$ 和 $\mathcal{E}_{\mathrm{Ib}4}$ 表示 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{I}}$ 中两个 $\mathrm{Spin}_7(q)$-共轭类。更确切地说，按 [LO] 中使用的记号，$\mathcal{E}_4^{\mathrm{Ia}}$ 表示子群 $\sim\sim E_* = \langle z, z_1, A, B\rangle$ 的共轭类。不过，以下内容并不需要这些细节：重要的是，在较大的融合系统 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 中，正是共轭类 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}}$ 与 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$ 融合（如下文引理 5(c) 所述）。

根据命题 2(c)，S 中的每个子群 $E \cong E_8$ 都包含在某个 $U \cong E_{16}$ 中。（如果 $z \notin E$，那么 $E\langle z\rangle \cong E_{16}$。）

l:I-II **引理 4**。对于包含 z、秩为 3 的 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{II}4}$ 和 $E \le U$，

$$E \text{ has type I if } \boldsymbol{x}(U) \in E \text{ and has type II if } \boldsymbol{x}(U) \notin E. \tag{1}$$ eq

证明。若 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}}$，则根据命题 3(b)，$\boldsymbol{x}(U) = z$，且根据定义，每个包含 z 的秩 3 子群都是 I 型。因此，此时 (1) 成立；以下假设 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$。

设 $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ 是 U 的七个特征子空间（对应于七个非平凡特征标 $U/\langle z\rangle \longrightarrow \{\pm 1\}$），标记方式使得 $\boldsymbol{x}(U)$ 在 X_i 上是恒等变换，在 Y_i 上的作用为 –Id。根据命题 3(c)，每个 X_i 都具有平方判别式，而每个 Y_i 都具有非平方判别式。若 $\boldsymbol{x}(U) \in E$，则 E 的三个二维特征子空间（对应于非平凡特征标 $E/\langle z\rangle \longrightarrow \{\pm 1\}$）各自都是两个 X_i 或两个 Y_i 之和，因此具有平方判别式。所以此时 E 是 I 型。若 $\boldsymbol{x}(U) \notin E$，则 E 的三个二维特征子空间各自都是某个 i 的 $X_i \oplus Y_j, j$，因此具有非平方判别式，所以 E 是 II 型。□

因此，要么所有秩 3 子群在 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 下共轭，要么恰有两个共轭类，其中一个包含 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{II}4}$ 中所有包含 $\boldsymbol{x}(U)$ 的子群，以及其他包含 z 的 I 型子群；另一个则包含 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{II}4}$ 中不包含 $\boldsymbol{x}(U)$ 的子群。

l:3.1 **引理 5**（[LO，引理 3.1] 的修正版）。令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$。

(a) 对每个 $r \le 2$，秩为 r 的初等阿贝尔子群 $E \le S(q)$ 在 $\mathcal{F}$ 下有唯一的共轭类。*(b)* 秩 *3* 初等阿贝尔子群 $E \le S(q)$ 有两个 $\mathcal{F}$ 共轭类：其中一个类包含 $\mathcal{E}_3^{\mathrm{I}}$，另一个包含 $\mathcal{E}II3$。*(c)* 秩 *4* 初等阿贝尔子群 $E \le S(q)$ 有两个 $\mathcal{F}$ 共轭类：$\mathcal{E}Ia4$ 和 $\mathcal{E}Ib_4 \cup \mathcal{E}II4$。若 $U_1, U_2 \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}II4$ 且 $\varphi \in Hom_{\mathcal{F}}(U_1, U_2)$，则 $\varphi(x(U_1)) = x(U_2)$。

此外，对于所有初等阿贝尔子群 $E \le S(q)$，均有 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E) = \mathrm{Aut}(E)$，但 $E \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}^{\mathrm{II}4}$ 的情况除外，此时

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(E) \mid \alpha(\boldsymbol{x}(E)) = \boldsymbol{x}(E)\}.$$

证明。**情况 1：rk(E) = 2 或 4：** 除 (c) 中的最后一条陈述外，这由[LO，引理 3.1]得出。（引理证明的这部分是正确的。）若 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(U_1, U_2)$，其中 $U_1, U_2 \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{II}4}$，则 φ 是一个同构，而由 φ 诱导的共轭作用将 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(U_1)$ 映到 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(U_2)$。因此，$\varphi(\boldsymbol{x}(U_1)) = \boldsymbol{x}(U_2)$，因为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(U_i)$ 是所有将 $\boldsymbol{x}(U_i)$ 映到其自身的自同构所成的群。

情形 2：rk(E) $= 3$： 假设秩 3 子群只有一个 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$-共轭类。对于$E \cong E_8$，其中 $z \notin E$, $C_{S(q)}(E) = C_{S(q)}(E\langle z\rangle) = E\langle z\rangle$。由命题 2(c)， $\mathcal{E}_3$ 中每个元素在 $S(q)$中的中心化子都包含一个 E_{16} 的副本，因此存在一些在 $\mathcal{F}$ 中完全中心化且包含 z的秩 3 子群。

因此，固定一个完全中心化的 $E_* \in \mathcal{E}_3$ （因此 $z \in E_*$）。令 E 为$U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}^{\mathrm{II4}}$的一个秩 3 子群，它包含 z且类型相反（I 或 II）。根据$\mathcal{F}$ 的扩张公理（[AKO，命题 I.2.5]），每个 $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(E,\ E_*)$ 都可扩张为某个 $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(U,\ U_*)$，其中$U_* \in U^{\mathcal{F}} = \mathcal{E}^{\mathrm{Ib}_4} \cup \mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$。设 $\overline{x} = \boldsymbol{x}(U)$，且 $x_* = \boldsymbol{x}(U_*)$。根据情况 1， $f(x) = x_*$成立，并且或者$x \in E$ 且 $x_* \in E_*$，或者 $x \notin E$ 且 $x_* \notin E_*$。因此，根据引理 4， E 与 E_* 类型相同，这与我们的假设矛盾，从而完成了 (b) 的证明。

还需证明，对于所有 $E \in \mathcal{E}_3$，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E) = \mathrm{Aut}(E)$。若 $E < U$ for $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ia}}$，则根据定义有 $E \in \mathcal{E}_3^{\mathrm{I}}$，而由情况 1 可得 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(U) = \mathrm{Aut}(U)$。若 $E < U$for $U \in \mathcal{E}$II4 且 x $(U) \notin E$（回想一下，在这种情况下 x $(U) \neq z$），则 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E) = \mathrm{Aut}(E)$，因为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(U) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(U) \mid \alpha(\mathrm{x}\ (U)) = \mathrm{x}\ (U)\}$，且由引理 4 可得 $E \in \mathcal{E}_3^{\mathrm{II}}$。因此，对于 $\mathcal{E}_3^{\mathrm{I}}$ 的至少一些成员以及 $\mathcal{E}$II3 的一些成员，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E) = \mathrm{Aut}(E)$，进而对 $S(q)$ 的所有秩为 3 的初等阿贝尔子群均成立。□

因此，对于 $U \in \mathcal{E}_4^{\mathrm{Ia}}$， U 的所有秩 3 子群都彼此 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$-共轭（无论是否包含 z）。对于 $U \in \mathcal{E}_{4}^{\mathrm{Ib}} \cup \mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$， U 中所有包含 $\boldsymbol{x}(U)$ 的秩 3 子群彼此共轭，而所有不包含 $\boldsymbol{x}(U)$ 的秩 3 子群也彼此共轭。

回想一下，$\mathrm{Spin}_7(q)$ 的两个共轭类 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{Ia}}$ 和 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{Ib}}$ 会被 $\mathrm{Spin}_7(q)$ 的一个对角自同构互换。正是 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 的具体构造，决定了这两个类中的哪一个会与 $\mathcal{E}_4^{\mathrm{II}}$ 在 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$ 中融合。

对本文其余部分的影响 [LO]**：** 本文后文只两次提到 [LO] 中的引理 3.1。在引理 3.2 的证明中（第 944 页底部），我们只需知道，对于 $E \in \mathcal{E}_3$ （属于任一共轭类），$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)}(E) = \mathrm{Aut}(E)$；这一点已在引理 5 中证明。

在引理 4.1 的证明中（第 952 页顶部），对于某个 $\mathcal{F}$-中心化子子群 $P \leq S$（其中 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(q)$），我们令 $E = \Omega_1(Z(P))$，并声称 E 与 $\mathcal{E}_3^{\mathrm{I}}$ 的某个元素 $\mathcal{F}$-共轭。若非如此，则 E 与 $\mathcal{E}_{\mathrm{II3}}$ 的某个元素 $\mathcal{F}$-共轭，并且或者 $z \notin E$（因此$C_S(E) = E\langle z\rangle \cong E_{16}$），或者 $E \in \mathcal{E}_3^{\mathrm{II}}$（因此 $C_S(E) \cong E_{16}$，由命题 2(c)）。由于$P \leq C_S(E)$ 且 P 是 $\mathcal{F}$-中心化子，这种情况不可能发生。

References

[AKO] M. Aschbacher、R. Kessar 和 B. Oliver，《代数与拓扑中的融合系统》，剑桥大学出版社（2011）[Be] D. Benson，《散在群、有限环空间与 Dickson 不变量的上同调》，《群论中的几何与上同调》，伦敦数学会讲义丛书第 252 卷，剑桥大学出版社（1998），10–23[DW] W. Dwyer 和 C. Wilkerson，《素数 2 处的一个新有限环空间》，《美国数学会杂志》6（1993），37–64[HLL] E. Henke、A. Libman 和 J. Lynd，《奇异融合系统的穿孔群》，arXiv 2201.07160v2[LO] R. Levi 和 B. Oliver，《Solomon 和 Benson 所研究类型的 2-局部有限群的构造》，《几何与拓扑》6（2002），917–990。[LO2] R. Levi 和 B. Oliver，《更正：Solomon 和 Benson 所研究类型的 2-局部有限群的构造》，《几何与拓扑》9（2005），2395–2415。

Université Sorbonne Paris Nord, LAGA, UMR 7539 du CNRS, 99, Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

电子邮件地址：bobol@math.univ-paris13.fr