仿射 Nijenhuis 算子与桁架的霍赫希尔德上同调

Tomasz BRZEZI ´NSKI 等 *James PAPWORTH* a

a) 斯旺西大学数学系，*Fabian Way*，斯旺西 *SA1 8EN*，英国电子邮件：*t.brzezinski@swansea.ac.uk*，*j.papworth.918550@swansea.ac.uk*

b) 比亚韦斯托克大学数学学院，*K. Cio-lkowskiego 1M*，*15-245* 比亚韦斯托克，波兰

收稿日期：2023年4月4日，定稿日期：2023年7月27日；在线发表日期：2023年8月4日https://doi.org/10.3842/SIGMA.2023.056

摘要。 将环的经典 Hochschild 上同调理论推广到带有分配乘法的阿贝尔堆或桁架。随后运用这一上同调，给出桁架上的 Nijenhuis 乘积成为结合乘法的充要条件。该乘积是对结合环上的 Nijenhuis 乘积的推广；后者由 Carin˜ena、Grabowski 和 Marmo 在 [《国际现代物理学杂志 *A*》**15** （2000），4797–4810，arXiv:math-ph/0610011]中提出。随后将桁架上的 Nijenhuis 乘积和算子的定义线性化，推广到具有相容结合乘法的仿射空间或结合仿射代数。结果表明，这一构造会在仿射空间上导出相容的李括号。

关键词： Nijenhuis 算子；Hochschild 上同调；桁架；堆；仿射空间

2020 年数学主题分类：20N10；16E40；81R12

arXiv:2303.12880v2 [math.RA] 4 Aug 2023

1 引言

正如 Magri [14] 所展示的，两个相容的泊松结构与经典哈密顿系统的可积性密切相关。将这一思想推广到量子力学，Cari˜nena、Grabowski 和 Marmo [8] 提出了一种变形方法：对代数（希尔伯特空间上算子构成的代数）上的给定乘积进行变形，从而得到两个相容的李代数结构。这种变形涉及一个作用于结合代数 N 上的算子 A，该算子满足以下简单方程：

$$N(a)N(b) = N(N(a)b - N(ab) + aN(b)) \qquad \text{for all } a, b \in A. \tag{1.1}$$

借用微分几何和李代数理论中的术语，N 称为*Nijenhuis* 张量，见 [8]。方程（1.1）右侧的符号组合立刻表明，Nijenhuis 条件具有仿射而非线性的特征。本文旨在说明，如何将 Nijenhuis 张量或算子推广到具有相容结合乘法的仿射空间。这或许进而能够以 [3, 15, 17, 18, 19]的理念，发展量子双哈密顿系统的规范或标架无关理论。

仿射空间具有自然的三元运算，因此可以将其视为堆(见定义2.1）。仿射空间上的双仿射乘法对三元堆运算具有分配性，因此，正如任意结合代数都是一个环，结合仿射代数也是一个桁架(见定义2.8）。因此，我们通过堆算子研究桁架上的乘积变形及由此产生的 Nijenhuis 条件，随后说明如何看待具有相容结合乘法的仿射空间上的仿射 Nijenhuis 算子。

条件（1.1）对于变形乘积的结合性而言是充分但非必要的。鉴于 Gerstenhaber 关于环的变形的经典结果 [10]，这并不完全

令人意外。正如 [8] 的作者所指出的，变形乘积的结合性完全由 A 在系数取 A [12]时的 Hochschild 上同调中的二余循环所控制。既然桁架的变形乘积也可以预期如此，事实上也确实如此，这促使我们着手发展桁架的 Hochschild 上同调基础理论。这里的主要困难在于，桁架范畴并非富化于阿贝尔群范畴，而是富化于阿贝尔堆范畴。后者没有零对象，因此无法应用通常的同调代数方法。为克服这一困难，我们取桁架 T的堆底层中的任意元素 e ，将其收缩为一个阿贝尔群，并以此构造双堆同态 $T^n \to T$ 构成的上链复形。由于以下事实，需要格外谨慎：首先，不能保证 e “表现得像零”，也就是说，乘积 ae 不一定是 e；其次，上链（多重堆同态）可能不保留 e ；第三，我们希望余边界算子保留取值为 e的常值函数，从而成为相应阿贝尔群（在取值为 e的常值上链处收缩所得）的同态。 e相对 ***Hochschild*** 上链复形的构造见定义 3.1 和定理 3.2。相应的上同调在定义 3.3 和3.4中定义，并在定理 3.8中证明，它不依赖于基元素的选取（在同构意义下）。

在重新梳理 Hochschild 上同调之后，我们接着定义一种***Nijenhuis*** 乘积，它是通过堆自同态对桁架上的原乘法进行变形而得到的 N ，并结合三元堆运算（见定义4.1）。这与 [8] 中的构造相仿（当然，在可加情形下会退化为该构造）。我们在定理4.6 中证明， T 上由 N 给出的 Nijenhuis 乘积是结合的，当且仅当对所有 $e \in T$ （等价地，对任意 $e \in T$），e-***Nijenhuis*** 扭率 N （定义4.1 中引入）是 e-相对 Hochschild 上同调中的一个 2-余循环 T。算子 N 若是新（变形后）乘积与原乘积所对应桁架之间的同态，则称为***Nijenhuis*** 算子。这等价于它的 e-扭率对任意 $e \in T$都为零。

第4 节的其余部分聚焦于 Nijenhuis 算子的示例与性质。特别地，在命题4.8 中，我们对构建在整数阿贝尔群上的交换桁架中的所有 Nijenhuis 算子进行分类。随后，我们在定理4.9 中提出一种构造 Nijenhuis 算子的迭代过程，并研究 Nijenhuis 算子的相容性，证明 Nijenhuis 算子的幂两两相容（见定义4.10 和定理4.12）。

第5节将 [8] 中的结果从线性映射推广到仿射映射，由此构建量子双哈密顿系统的仿射版本以及仿射 ***Nijenhuis*** 算子。我们重点讨论仿射 Nijenhuis 算子的相容条件与示例，并特别证明，在结合代数或更一般的仿射代数上，仿射 Nijenhuis 算子的重心组合构成 Nijenhuis 算子（见定理5.2和命题5.5）。本文最后给出定理5.7；该定理可被视为（弱）量子双哈密顿系统的仿射版本，因为它说明仿射 Nijenhuis 算子如何在仿射空间上诱导出一个李括号，并使其与交换子所给出的李括号相容。这是 [8, 定理 8]的仿射版本。

2 堆与桁架预备知识

以下内容将帮助读者掌握本文后续章节所需的堆 [2, 6, 9, 16]和桁架 [5, 6] 相关基础知识。

定义 2.1。 A堆 是一种代数结构（H, $[---]$），其中 H 是一个集合， $[---]$ 是一个三元运算

$$[---]\colon H^3 \to H, \qquad (a,b,c) \mapsto [a,b,c],$$

对于所有 $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in H$，我们具有以下性质：

$$\text{associativity:}\quad [[a,b,c],d,e] = [a,b,[c,d,e]],$$
$$\text{Mal'cev identities:}\quad [a,a,b] = b = [b,a,a].$$

此外，若对所有 $a,b,c \in H$，堆都满足阿贝尔性质，

$$[a,b,c] = [c,b,a].$$

注 2.2. 在阿贝尔堆（$H,[---]$）中，多次应用堆运算时括号的位置无关紧要，因此我们将用 $[a_1,a_2,\ldots,a_{2n+1}]$ 表示任意此类多次应用。不过，元素所在位置的奇偶性确实重要：运算中处于偶数位置或奇数位置的元素，可以分别与处于其他偶数位置或奇数位置的元素交换位置。此外，如果经过这种保持奇偶性的重排后，两个相邻元素相等，我们可以将这两个元素消去。例如，

$$[a,x,b,c,x] = [a,c,b,x,x] = [a,c,b]$$

对任意 $a,b,c,x \in H$。

注 2.3. 堆 H 的公理特别意味着，表达式 $[a,b,c] = d$ 中的任意三个元素都能确定第四个元素。特别地，$[a,b,c] = d$ 当且仅当$[c,d,a] = b$。此外，对于所有（等价地，任意）$c \in H$，$a = b$ 当且仅当 $[a,b,c] = c$ 当且仅当 $[c,a,b] = c$。从任意推广到所有，可由以下推理链显然得出：$[a,b,c] = c$ 当且仅当 $[[a,b,c],c,d] = [c,c,d]$，当且仅当 $[a,b,d] = d$，这是由堆的结合性和 Mal'cev 恒等式得出的。

定义 2.4. 从 $(H$堆同态$[---])$ 到 $(H',[---])$ 的*heap* 映射是一个映射 $f\colon H \to H'$，它保持三元运算，即对所有 $a,b,c \in H$，

$$f([a,b,c]) = [f(a),f(b),f(c)].$$

从 $(H,[---])$ 到 $(H',[---])$ 的所有堆同态构成的集合记为 Heap(H,H')。

集合 Heap(H,H') 特别包含所有常值函数。若 H, H' 是阿贝尔的，则 Heap(H,H') 在逐点运算 $[f,g,h](a) = [f(a)\ g(a)\ h(a)]$ 下构成一个堆。任何单元素集合都是一个（阿贝尔）堆，其运算平凡（且是唯一可能的运算）。从任意堆到单元素堆的唯一函数是堆同态。因此，单元素集合是 heap 范畴中的终对象；我们将其记为 $*$。

类似地，空集是一个阿贝尔堆，也是 heap 范畴中的始对象。为保持下文注记和定义 2.6中所述的堆与群之间的对应关系，我们在全文中假设所讨论的堆都是 非空。

注记 2.5。 给定一个群 $(G,\cdot,1)$，我们定义一个三元运算

$$[---]\colon\ G^3 \to G, \qquad [x,y,z] = x \cdot y^{-1} \cdot z.$$

Then $(G,[---])$ 是一个堆，记作 $H(G)$。如果 $(G,\cdot,1)$ 是阿贝尔的，那么 $H(G$ 也是如此 $)$.

定义 2.6。 设 $(H,[---])$ 是一个堆，且 $e \in H$。在 H 上定义如下二元运算：

$$\cdot_e\colon\ H \times H \to H, \qquad x \cdot_e y = [x,e,y].$$

那么， $G(H;\ e)$ 是一个群，称为 H 的收缩。最后请注意，如果 $(H,\ [---])$ 是阿贝尔群，那么 $G(H;e)$ 也是阿贝尔群。

定义 2.7. 设 H 是一个堆。对于所有 e, $e' \in H$，平移同构$\tau^e_{e'}$: $H \to H$ 定义为

$$\tau^e_{e'}(a) := [a, e', e].$$

容易验证，$\tau^e_{e'}$ 的逆元由 $\tau^{e'}_e$ 给出。此外， $\tau^{e'}_e$ 是群 $G(H; e)$ 到群 $\to G(H; e')$ 的群同构。H 的所有平移同构在复合运算下构成一个群。这个群同构于 H 的任意一个收缩。

堆 $(H, [---])$ 的一个（非空）子集 K 若在堆运算下封闭，则称为子堆，也就是说，对所有 $a, b, c \in K$，都有 $[a, b, c] \in K$。子堆在 H 上定义了一个等价关系：当且仅当对所有（等价地，任意） $x \in K$，都有 $a \sim b$ $[a, b, x] \in K$。等价类的集合记作 H/K。容易证明，这与收缩的商所关联的堆相同，即对任意 $e \in K$，都有 $H/K = H(G(H; e)/G(K; e))$。若 H^- 是阿贝尔的，则 H/K 在继承的结构 $[\bar{a}, b, \bar{c}] = [a, b, c]$ 下是一个阿贝尔堆，其中 $\bar{a}$ 等表示 a 在 H/K 中的等价类。

定义 2.8. 桁架是一种代数结构 $(T, [---], \cdot)$，由一个集合 T、一个三元运算 $[---]$ 和一个结合二元运算 $\cdot$ 组成，其中 $(T, [---])$ 构成一个阿贝尔堆，且 $\cdot$ 对 $[---]$ 满足分配律，即对所有 $a, b, c, d \in T$,

$$a[b, c, d] = [ab, ac, ad] \qquad \text{and} \qquad [b, c, d]a = [ba, ca, da].$$

如果乘法 $\cdot$ 有单位元，则称该桁架为含幺的。最后，如果运算 $\cdot$ 是交换的，则称该桁架为交换桁架。

注 2.9. 我们可以将收缩的定义（见定义 2.6）作为另一种看待收缩中的堆运算和桁架分配律的方式。在 $G(T;\ e)$ 中，我们有

$$\begin{aligned}
&a(b+c) = a[b, e, c] = [ab, ae, ac] = ab - ae + ac, \qquad (a+b)c = ac - ec + bc,\\
&a(b-c) = a[b, c, e] = [ab, ac, ae] = ab - ac + ae, \qquad (a-b)c = ac - bc + ec,\\
&a(-b) = a(e-b) = ae - ab + ae, \qquad (-a)b = eb - ab + eb.
\end{aligned}$$

将堆运算视为二元运算 $+$ 和 $-$ 的组合往往很有用，本文将始终用到这些分配律。

注 2.10。 桁架的世界比环丰富得多。在任意阿贝尔群 A （将其视为堆 $H(A)$）上，至少存在四种彼此不同构的桁架乘法，其中只有一种在所有情况下都会产生环。这些乘法为

$$ab = 0, \qquad ab = a, \qquad ab = b, \qquad ab = a + b = [a, 0, b] \tag{2.1}$$

对所有 a, $b \in A$ 均成立。特定群上还存在其他桁架结构。例如，对于所有 m, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ 上的交换桁架乘法 $\cdot$ 可用 $\mathbb{Z}$ 上的通常算术运算表示为

$$m \cdot n = amn + b(m + n) + c, \tag{2.2}$$

其中 a, b, $c \in \mathbb{Z}$ 满足

$$ac = b(b - 1); \tag{2.3}$$

见 [6, 定理 3。51]。我们将这些桁架记为 $T(\mathbb{Z};\ a,\ b,\ c)$。它们分为以下同构类：

(1) 对所有 $a \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot n = amn, \qquad m \cdot n = amn + m + n,$$

(2) 对所有满足 $ac = b(b-1)$ 的 $a \in \mathbb{Z}_+$、$b \in \{2, 3, \ldots, a-1\}$ 和 $c \in \mathbb{Z}_+$,

$$m \cdot n = amn + b(m+n) + c,$$

见 [6, 推论 3。53]。如 [1, 例 7。4], 所述，群 $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ (p （素数）上有 23 种两两不同构的幔群结构，而环结构只有 8 种。

注 2.11。如 [1], 所述，幔群与环扩张之间存在密切关系。更准确地说，设 R 是一个结合环，I 是 R 中的一个理想，$q \in R$ 是一个幂等元。那么 $T(I; q) := q + I$ 是一个幔群，其堆运算为 $[a, b, c] = a - b + c$，乘法与 R中的相同。任何幔群都可以通过这种方式嵌入一个结合环中。

3 桁架的霍赫希尔德上同调

本节旨在提出一种关于桁架的霍赫希尔德上同调的方案。

定义 3.1. 设 T是一个桁架，且 $C^0(T) = T$，并且对于所有正整数 n，令 $C^n(T)$ 为所有多元堆函数 $T^n \to T$ （即在每个自变量上都是堆态射）的集合。对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $C^n(T)$ 都视为堆，其运算逐点定义，也就是说，该运算继承自 T。

对于所有 $n \in \mathbb{N}$和 $e \in T$，堆同态 δ_e^n: $C^n(T) \to C^{n+1}(T)$ 定义如下

$$\delta_e^n f(a_0, \ldots, a_n) = \begin{cases} [e, a_0 e, a_0 f(a_1, \ldots, a_n), f(a_0 a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, \\ \quad f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} a_n), f(a_0, \ldots, a_{n-1}) a_n, e a_n], & n \text{ even}, \\ [e, a_0 e, a_0 f(a_1, \ldots, a_n), f(a_0 a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, \\ \quad f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} a_n), f(a_0, \ldots, a_{n-1}) a_n, e a_n, e], & n \text{ odd} \end{cases}$$

对所有 $f \in C^n(T)$ 和 $a_0, \ldots, a_n \in T$。我们称之为相对于 e 的 *Hochschild* n-余边界算子，定义在 T上。

顺便指出，由桁架分配律以及 T 是阿贝尔堆这一事实可知，映射 δ_e^n 是堆同态。使用术语余边界，其依据如下定理。

定理 3.2。对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in T$，都有 $\delta_e^{n+1} \circ \delta_e^n = e$；在每种情况下，取值为 e 的常值函数也记为 e 。

此外，对于所有的 n、$\delta_e^n(e) = e$，因此每个 δ_e^n 都是阿贝尔群的同态δ_e^n: $G(C^n(T); e) \to G\big(C^{n+1}(T); e\big)$。

证明。在此，我们将堆运算 $[---]$ 表示为 $+$和 $-$的线性组合，并使用收缩 $G(T; e)$中的分配律，其中 $(T, [---], \cdot)$ 是一个桁架。对于 n 为偶数且 $n+1$ 为奇数的情形，

$$\begin{aligned} \delta_e^n f(a_0, \ldots, a_n) = -a_0 e + a_0 f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(a_0, \ldots, a_{j-1} a_j, \ldots, a_n) \\ - f(a_0, \ldots, a_{n-1}) a_n + e a_n, \end{aligned}$$

$$\delta_e^{n+1} f(a_0,\dots,a_{n+1}) = -a_0 e + a_0 f(a_1,\dots,a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i f(a_0,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1}) + f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} - e a_{n+1}.$$

我们复合这些函数

$$\begin{aligned}&\delta_e^{n+1}\delta_e^n f(a_0,\dots,a_{n+1})\\ &\quad = -a_0 e + a_0 \delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \delta_e^n f(a_0,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1})\\ &\qquad + \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} - e a_{n+1}.\end{aligned}$$

消去符号交替的项后，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \delta_e^n f(a_0,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1})\\ &\quad = a_0 a_1 e - a_0 a_1 f(a_2,\dots,a_{n+1}) - \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1} a_0 f(a_1,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1})\\ &\qquad - \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(a_0,\dots,a_{j-1}a_j,\dots,a_n)a_{n+1} + f(a_0,\dots,a_{n-1})a_n a_{n+1} - e a_n a_{n+1}.\end{aligned}$$

然后应用 δ_e^n 的定义和桁架分配律，可以进一步简化

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \delta_e^n f(a_0,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1})\\ &\quad = a_0 e - a_0 \delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) - \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} + e a_{n+1}.\end{aligned}$$

将替换代入复合公式后，我们得到

$$\begin{aligned}&\delta_e^{n+1}\delta_e^n f(a_0,\dots,a_{n+1})\\ &\quad = -a_0 e + a_0 \delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) + a_0 e - a_0 \delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) - \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1}\\ &\qquad + e a_{n+1} + \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} - e a_{n+1} = e.\end{aligned}$$

现在我们来考察 n 为奇数且 $n+1$ 为偶数的情况。在这种情况下，复合结果为

$$\begin{aligned}&\delta_e^{n+1}\delta_e^n f(a_0,\dots,a_{n+1})\\ &\quad = -a_0 e + a_0 \delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \delta_e^n f(a_0,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1})\\ &\qquad - \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} + e a_{n+1}.\end{aligned}$$

再次利用函数 δ_e^n 的定义以及桁架的分配律消去交替项，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \delta_e^n f(a_0,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0a_1e - a_0a_1f(a_2,\dots,a_{n+1}) - \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}a_0f(a_1,\dots,a_{i-1}a_i,\dots,a_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(a_0,\dots,a_{j-1}a_j,\dots,a_n)a_{n+1} \\
&\quad + ea_{n+1} - a_0e + f(a_0,\dots,a_{n-1})a_na_{n+1} - ea_na_{n+1} \\
&= a_0e - a_0\delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) + \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} - ea_{n+1}.
\end{aligned}
$$

利用上述计算，我们接着展开

$$
\begin{aligned}
&\delta_e^{n+1}\delta_e^n f(a_0,\dots,a_{n+1}) \\
&\quad = -a_0e + a_0\delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) + a_0e - a_0\delta_e^n f(a_1,\dots,a_{n+1}) + \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} \\
&\quad\quad - ea_{n+1} - \delta_e^n f(a_0,\dots,a_n)a_{n+1} + ea_{n+1} = e
\end{aligned}
$$

如所需。

由于 e 是 $G(T;\, e)$ 中的中性元，我们立即得到，对于所有 a_0、……、a_n 以及常值函数 $e\colon T^n \to T$，$(a_0 \dots a_{n-1}) \mapsto e$，

$$
\delta_e^n(e)(a_0,\dots,a_n) = -a_0e + a_0e + (-1)^{n+1}ea_n + (-1)^n ea_n = e.
$$

现在，注意到任意堆同态 $f\colon H \to K$ 都是群同态$f\colon G(H;\, e) \to G(K;\, f(e))$，对所有 $e \in H$ 均成立，这证实了最后的断言。■

定义 3.3。 在定义3.1的设定下，我们定义 e-相对 n-余循环的堆

$$
Z_e^n(T) := \{f \in C^n(T) \mid \delta_e^n(f) = e\},
$$

以及 e-相对 n-余边界的堆

$$
B_e^n(T) := \operatorname{Im}\delta_e^{n-1}.
$$

由于定理 3.2 表明 $B_e^n(T)$ 是 $Z_e^n(T)$ 的子堆，因此我们可以给出本节研究的主要对象的定义。

定义 3.4。 对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in T$，商堆

$$
H_e^n(T) = Z_e^n(T)/B_e^n(T)
$$

称为 n 阶 e 相对 ***Hochschild*** 上同调堆，它属于 T。

注 3.5。定理 3.2 的最后一个断言确保阿贝尔群上链复形 $\big(\delta_e^n\colon G(C^n(T);\, e) \to G\big(C^{n+1}(T);\, e\big)\big)$ 的存在。这使得我们能够将 e 相对 Hochschild 上同调堆的 e- 收缩解释为阿贝尔群，即 $G(H_e^n(T);\, \bar{e})$，其中 $\bar{e}$ 是常值 heap 映射 e 的类，它是上述阿贝尔群上链复形 $G(C^n(T);\, e)$ 的 n 阶上同调群。

接下来，我们证明不同 e 对应的相对霍赫希尔德上同调堆在同构意义下可以视为相同。我们从以下引理开始。

引理 3.6。 对于所有堆同态 $f \in C^n(T)$ 以及 $e, e' \in T$，

$$
\delta_{e'}^n(f) = \tau_e^{e'} \circ \delta_e^n(\tau_{e'}^e \circ f).
$$

证明。 首先，我们来看 n 为偶数的情形，

$$\delta^n_{e'} f(a_0,\dots,a_n) = \tau^{e'}_e(\delta^n_e(\tau^e_{e'} \circ f)(a_0,\dots,a_n)).$$

我们先计算

$$\begin{aligned}\delta^n_e(\tau^e_{e'} \circ f)(a_0,\dots,a_n) &= [e, a_0e, a_0f(a_1,\dots,a_n), a_0e', a_0e, f(a_0a_1,\dots,a_n), e', e,\dots,\\ &\quad f(a_0,\dots,a_{n-1}a_n), e', e, f(a_0,\dots,a_{n-1})a_n, e'a_n, ea_n, ea_n],\\ &= [e, a_0e', a_0f(a_1,\dots,a_n), f(a_0a_1,\dots,a_n),\dots,\\ &\quad f(a_0,\dots,a_{n-1}a_n), f(a_0,\dots,a_{n-1})a_n, e'a_n],\\ &= [e, e', \delta^n_{e'} f(a_0,\dots,a_n)].\end{aligned}$$

现在，对于 n 为奇数的情况，通过类似的计算，

$$\begin{aligned}\delta^n_e(\tau^e_{e'} \circ f)(a_0,\dots,a_n) &= [e, a_0e, a_0f(a_1,\dots,a_n), a_0e', a_0e, f(a_0a_1,\dots,a_n), e', e,\\ &\quad f(a_0, a_1a_2,\dots,a_n), e', e,\dots, f(a_0,\dots,a_{n-1}a_n), e', e,\\ &\quad f(a_0,\dots,a_{n-1})a_n, e'a_n, ea_n, ea_n, e]\\ &= [e, a_0e, a_0f(a_1,\dots,a_n), f(a_0a_1,\dots,a_n), e', e,\\ &\quad f(a_0, a_1a_2,\dots,a_n),\dots, f(a_0,\dots,a_{n-1}a_n),\\ &\quad f(a_0,\dots,a_{n-1})a_n, e'a_n, e]\\ &= [e, e', \delta^n_{e'} f(a_0,\dots,a_n)].\end{aligned}$$

因此，对于这两种情况，

$$\tau^{e'}_e(\delta^n_e(\tau^e_{e'} \circ f)(a_0,\dots,a_n)) = [e, e', \delta^n_{e'} f(a_0,\dots,a_n), e, e'] = \delta^n_{e'} f(a_0,\dots,a_n). \qquad \blacksquare$$

得益于堆运算的交换性和 Mal'cev 恒等式，对于所有e，$e' \in T$和 $n \in \mathbb{N}$，我们可以考虑堆同构

$$\vec{\tau}^{e'}_e :\ C^n(T) \to C^n(T), \qquad f \mapsto \tau^{e'}_e \circ f.$$

In 用这些同构表述，引理 3.6 的陈述可以改写为

$$\delta^n_{e'}\big(\vec{\tau}^{e'}_e(f)\big) = \vec{\tau}^{e'}_e(\delta^n_e(f)) \tag{3.1}$$

对所有 $f \in C^n(T)$。

引理 3.7。 对于所有的 $e, e' \in A$，映射 $\vec{\tau}^{e'}_e$ 限制为同构 $B^n_e(T) \to$以及 $Z^n_e(T) \to B^n_{e'}(T) \to Z^n_{e'}(T)$。

证明。 这几乎可以直接由引理 3.6 或其在（3.1）中的等价表述推出。具体而言，若 $g = \delta^n_e(f) \in B^n_e(T)$，则 $\vec{\tau}^{e'}_e(g) = \delta^n_{e'}\big(\vec{\tau}^{e'}_e(f)\big) \in B^n_{e'}(T)$。若 $\delta^n_e(f) = e$，则

$$e' = [e, e, e'] = \vec{\tau}^{e'}_e\big(\delta^n_e(f)\big) = \delta^n_{e'}\big(\vec{\tau}^{e'}_e(f)\big),$$

也就是说，$\vec{\tau}^{e'}_e(f) \in Z^n_{e'}(T)$。 $\blacksquare$

综合引理 3.6 和 3.7 即可得到所需的上同调堆识别。

定理 3.8. 设 T是一个桁架。则，对于所有的 $n \in \mathbb{N}$和 $e, e' \in T$，

$$H^n_e(T) \cong H^n_{e'}(T).$$

证明。 根据引理 3.6 和 3.7，同构 $\vec{\tau}_e^{e'}$ 下降为同构 $H_e^n(T) \to H_{e'}^n(T)$；对于 f，$g \in Z_e^n(T)$ 在 $H_e^n(T)$ 中表示同一个类，当且仅当

$$[f, g, \delta_e^{n-1}(h)] \in B_e^n(T)$$

对于某个（等价地，对于所有） $h \in C^{n-1}(T)$。因此，

$$\begin{aligned}[\vec{\tau}_e^{e'}(f), \vec{\tau}_e^{e'}(g), \delta_{e'}^{n-1}(\vec{\tau}_e^{e'}(h))] &= [\vec{\tau}_e^{e'}(f), \vec{\tau}_e^{e'}(g), \vec{\tau}_e^{e'}(\delta_e^{n-1}(h))] \\ &= \vec{\tau}_e^{e'}([f, g, \delta_e^{n-1}(h)]) \in B_{e'}^n(T).\end{aligned}$$

■

鉴于定理3.8，我们不妨不讨论 e-相对霍赫希尔德上同调堆，而直接讨论霍赫希尔德上同调堆，并从记号中去掉下标 e。

注 3.9。容易验证 $\vec{\tau}_e^{e'}(e) = e'$，因此定理3.8 中所述的同构是阿贝尔群 $G(\underline{H_e^n}(T); \bar{e}) \simeq G(H_{e'}^n(T); e')$。

对于代数的霍赫希尔德上同调，一余循环对应于导子。桁架的上同调也有类似结论，不过这种对应关系不像环的情形那样直接。

定义 3.10 ([7])。 设 T 是一个桁架。堆同态 $D\colon T \to T$ 称为 导子，如果对所有 a，$b \in T$，

$$D(ab) = [D(a)b, ab, aD(b)].$$

T 上的导子构成一个堆，记作 $\mathbf{Der}(T)$。

命题 3.11。 对所有 $e \in T$，$\mathrm{Der}(T) \cong Z_e^1(T)$ 作为堆同构。

证明。 该同构及其逆映射如下

$$\begin{aligned}&\Theta\colon \mathrm{Der}(T) \to Z_e^1(T), \qquad \Theta(D)\colon a \mapsto [D(a), a, e], \\ &\Theta^{-1}\colon Z_e^1(T) \to \mathrm{Der}(T), \qquad \Theta^{-1}(f)\colon a \mapsto [f(a), e, a].\end{aligned}$$

显然，所定义的映射互为逆映射。因此，仍需验证它们的定义域和值域是否如上所述。

如果 D 是一个导子，那么对所有 a，$b \in T$，

$$\begin{aligned}\delta_e^1(\Theta(D))(a, b) &= [e, ae, a\Theta(D)(b), \Theta(D)(ab), \Theta(D)(a)b, eb, e] \\ &= [e, ae, aD(b), ab, ae, D(ab), ab, e, D(a)b, ab, eb, eb, e] \\ &= [e, D(ab), aD(b), ab, D(a)b] = [e, D(ab), D(ab)] = e,\end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了桁架分配律，第三个等式则源自备注2.2中所述的消去与重排规则，而倒数第二个等式则是导子的定义。因此，$\Theta(D) \in Z_e^1(T)$，如所需。

反过来，若 $f \in Z_e^1(T)$，则对所有 a，$b \in T$，

$$[e, ae, af(b), f(ab), f(a)b, eb, e] = e,$$

因此，根据备注2.3，等价地

$$f(ab) = [f(a)b, eb, af(b), ae, e].$$

因此，

$$[\Theta^{-1}(f)(a)b, ab, a\Theta^{-1}(f)b] = [f(a)b, eb, ab, ab, af(b), ae, ab] = [f(ab), e, ab] = \Theta^{-1}(f)(ab),$$

因此，$\Theta^{-1}(f)$ 是 T 上的导子，符合要求。 ■

作为桁架 Hochschild 上同调的示例，我们计算注 2.1 中第二个桁架（2.10）的上同调堆。

例 3.12. 对于阿贝尔群 A，记乘积由左投影给出的桁架为 $\mathcal{L}(A)$，即 $ab = a$，则

$$H^n(\mathcal{L}(A)) \cong \begin{cases} \mathrm{End}(A) & \text{for } n = 1, \\ * & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 所有计算均相对于 A 中的中性元 0 进行。鉴于 $\mathcal{L}(A)$ 中的乘积，余边界算子（相对于 0，并以阿贝尔群的形式书写）的公式为

$$\delta^n f(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f\big(a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n\big), \tag{3.2}$$

其中 $\widehat{a_i}$ 表示缺少 a_i。

首先注意，对所有 a，$b \in A$，

$$\delta^0(a)(b) = -a, \tag{3.3}$$

因此 $H^0(\mathcal{L}(A)) = Z^0(\mathcal{L}(A)) = \{0\}$。

对于 $n \geq 2$ 和 $f \in C^n(\mathcal{L}(A))$，$\delta^n(f) = 0$ 当且仅当对所有 a_0、……、$a_n \in A$，

$$\begin{aligned} f(a_0, a_2, \dots, a_n) = {} & f(a_0, a_1, a_3, \dots, a_n) - f(a_0, a_1, a_2, a_4, \dots, a_n) + \cdots \\ & + (-1)^{n+1} f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

方程（3.4）的左端与 a_1无关。因此，令 $a_1 = 0$ 并重新标记指标，可得 f是一个 n-余循环，当且仅当对所有 a_0、……、a_{n-1}，

$$\begin{aligned} f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = {} & f(a_0, 0, a_2, \dots, a_{n-1}) - f(a_0, 0, a_1, a_3, \dots, a_{n-1}) + \cdots \\ & + (-1)^{n+1} f(a_0, 0, a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Set

$$g\colon\ A^{n-1} \to A, \qquad (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \mapsto -f(a_0, 0, a_1, \dots, a_{n-2}).$$

由于 $f \in C^n(\mathcal{L}(A))$，映射 g 在所有变量上都是堆同态，因此 $g \in C^{n-1}(\mathcal{L}(A))$。公式（3.5）立即推出 $\delta^{n-1}(g) = f$，因此每个 n- 余循环也是一个 n- 余边界。因此，当 $n \geq 2$ 时，所有霍赫希尔德堆都是平凡的。

最后，$C^1(\mathcal{L}(A))$ 的元素是 f 的堆自同态，即任何满足 $f(a-b+c) = f(a)-f(b)+f(c)$ 的函数 $f\colon A \to A$。给定这样的 f，映射 $g(a) = f(a)-f(0)$ 是可加的。反过来，给定 A 的群自同态 g 和 $c \in A$，映射 $f(a) = g(a) + c$ 是一个堆自同态。公式（3.2）表明，每个堆自同态 $f\colon A \to A$ 都是一阶上循环，而（3.3）表明，两个一余循环属于同一个上同调类，当且仅当它们相差一个常数（即，它们对应于同一个阿贝尔群自同态）。这就建立了 $H^1(\mathcal{L}(A))$ 与 A 的可加自同态堆之间的同构。■

4 桁架上的 Nijenhuis 乘积与算子

本节将 [8]中引入的 Nijenhuis 乘积和算子概念从环推广到桁架，并确定 Nijenhuis 乘积具有结合性的充分必要条件。我们还研究 Nijenhuis 算子的相容性，给出一般性示例，并对基于整数群构造的交换桁架上的所有 Nijenhuis 算子进行分类（见注2.10）。

定义 4.1。设 T 是一个桁架。对于所有堆同态 $N\colon T\to T$，在 T 上定义的二元运算 $\circ_N$ 为

$$a\circ_N b=[N(a)b,N(ab),aN(b)],$$

称为 ***Nijenhuis*** 乘积。

此外，N称为 ***Nijenhuis*** 算子，如果对于所有 $a,\ b\in T$,

$$N(a\circ_N b)=N(a)N(b).$$

对于所有 $e\in T$，N 的 e-***Nijenhuis*** 扭率 定义为

$$T^e_N(a,b)=[N(a\circ_N b),N(a)N(b),e].$$

注意，鉴于注记 2.3，N 是 Nijenhuis 算子，当且仅当其 e-扭率是等于 e的常值函数，也就是说，对于所有 $e,\ a,\ b\in T$，$T^e_N(a,\ b)=e$。这样的 e-扭率称为 平凡的。

注记 4.2。文献 [8] 的作者使用术语 Nijenhuis 张量，而非 Nijenhuis 算子。不过，前者通常用于描述几乎复结构不能源自复结构的障碍，而且与 Nijenhuis 扭率更为接近（见 [13,脚注 1，第 627]页），因此我们更倾向于使用后者。此外，Nijenhuis 算子一词如今被广泛用于描述将给定代数结构（通常是李括号，也包括结合乘积）变形为同类结构的一种方式；正如本文所论证的，这一概念也可推广至桁架。

例 4.3. 设 T 是一个桁架。

(1) 恒等映射 id: $T\to T$ 是一个 Nijenhuis 算子。(2) 设 P: $T\to T$ 是一个堆的乘法幂等同态。则 P 是 T上的 Nijenhuis 算子。特别地，对于任意幂等元 $q\in T$，常值映射$a\mapsto q$ 是一个 Nijenhuis 算子。

证明。在第一种情况下，Nijenhuis 乘积与 T中的原乘法相同，因此显然恒等映射是一个 Nijenhuis 算子。在第二个例子中，由于对所有 $a,\ b,\ c\in T$,

$$P([a,b,c])=[P(a),P(b),P(c)],\qquad P(ab)=P(a)P(b),\qquad P(P(a))=P(a),$$

我们可以轻易地计算出

$$\begin{aligned}P(a\circ_P b)&=P([P(a)b,P(ab),aP(b)])=[P(P(a)b),P(a)P(b),P(aP(b)]\\&=[P(a)P(b),P(a)P(b),P(a)P(b)]=P(a)P(b)\end{aligned}$$

如所需。

任意常值映射都是堆之间的堆同态；若其像是 T中的幂等元，则该映射是堆的乘法幂等同态。

■

下面的命题给出了环上的 Nijenhuis 算子与桁架之间的直接联系。

命题 4.4. 设 $T(q;\ I)$ 是由环 I 中的理想 q和幂等元 $R;\ \bar{}$所关联的桁架（见注 2.11）。设 N 是作用于 I上的 ***Nijenhuis*** 算子，并且对所有 $x\in I$,

$$\bar{N}(xq)=\bar{N}(x)q,\qquad \bar{N}(qx)=q\bar{N}(x).\tag{4.1}$$

Then

$$N\colon\ T(q;I)\to T(q;I),\qquad q+x\mapsto q+\bar{N}(x)$$

是 T（q; I）上的 ***Nijenhuis*** 算子。

证明。由 N 的定义可知，它显然是一个堆同态。对于任意 x， $y \in I$，Nijenhuis 乘积为：

$$\begin{aligned}(q+x)\circ_N(q+y) &= q+\bar{N}(x)q+qy+\bar{N}(x)y-q-\bar{N}(xq)-\bar{N}(qy)-\bar{N}(xy)\\ &\quad +q+x\bar{N}(y)+xq+q\bar{N}(y)\\ &= q+x\circ_{\bar{N}}y+xq+qy\end{aligned}$$

¯由以下事实可知： q 是幂等元，且根据（4.1）。由于 N 是环 I上的 Nijenhuis 算子，我们得出

$$N((q+x)\circ_N(q+y)) = q+\bar{N}(x)\bar{N}(y)+\bar{N}(x)q+q\bar{N}(y) = N(q+x)N(q+y),$$

也就是说， N是桁架 $T(I;\, q)$ 上的 Nijenhuis 算子。 ■

例 4.5。如下可构造一个命题4.4 中所述类型的 Nijenhuis 算子的具体例子。令 R 为环 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中的子环，其由 $n+1)\times(n+1$ 阶、定义在域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵构成，且这些矩阵具有如下分块形式

$$A(\mathbf{a},\mathbf{b},\alpha) = \begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{a} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$、$\mathbf{b} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$，且 $\alpha \in \mathbb{F}$。令

$$I = \{A(\mathbf{a},\mathbf{b},0) \mid \mathbf{a}\in M_{n\times n}(\mathbb{F}), \mathbf{b}\in M_{n\times 1}(\mathbb{F})\}, \qquad q = A(0,0,1),$$

因此

$$T(I;q) = \{A(\mathbf{a},\mathbf{b},1) \mid \mathbf{a}\in M_{n\times n}(\mathbb{F}), \mathbf{b}\in M_{n\times 1}(\mathbb{F})\}.$$

令 P_+ 表示 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中投影到上三角矩阵子环的投影。正如 [8, 例 1],中所论证的，映射

$$\bar{N}\colon\ I\to I, \qquad A(\mathbf{a},\mathbf{b},0)\mapsto A(P_+(\mathbf{a}),\mathbf{b},0)$$

¯是 I上的 Nijenhuis 算子。由于 N只作用于 $A(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ 0)$ 的上 $n\times n$ 块，并且根据 R中的一般乘法规则，

$$A(\mathbf{a},\mathbf{b},\alpha)A(\mathbf{a}',\mathbf{b}',\alpha') = A(\mathbf{a}\mathbf{a}',\mathbf{a}\mathbf{b}'+\alpha'\mathbf{b},\alpha\alpha'),$$

条件 (4.1) 得以满足。因此，

$$N\colon\ T(I;q)\to T(I;q), \qquad A(\mathbf{a},\mathbf{b},1)\mapsto A(P_+(\mathbf{a}),\mathbf{b},1)$$

是 $T(I;\, q)$上的 Nijenhuis 算子。

定理 4.6。 设 T 是一个桁架，且 $N\colon\ T\to T$ 是一个堆同态。*Nijenhuis* 乘积 $\circ_N$ 是结合的，当且仅当 N 的 *e-Nijenhuis* 扭率对所有(等价地，对任意) $e\in T$都是一个 e-相对 *Hochschild*2-余循环。若此条件成立，则 T 是一个配备 *Nijenhuis* 乘积 $\circ_N$的桁架。

证明。 首先注意，无论是否满足结合律，Nijenhuis 乘积都对堆运算满足分配律。事实上，对所有 e、 x、 y、 $z\in T$，

$$\begin{aligned}w\circ_N[x,y,z] &= [N(w)[x,y,z], N(w[x,y,z]), wN([x,y,z])]\\ &= [N(w)x, N(w)y, N(w)z, N(wx), N(wy), N(wz), wN(x), wN(y), wN(z)]\end{aligned}$$

$$= [N(w)x, N(wx), wN(x), N(w)y, N(wy), wN(y), N(w)z, N(wz), wN(z)]$$
$$= [w \circ_N x, w \circ_N y, w \circ_N z],$$

因为 T 是一个桁架，而 N 是一个堆同态。将各项重新排列以得到第三个等式，是因为 T 是一个阿贝尔堆，因此方括号中奇数位置（分别地，偶数位置）的各项可以任意重排；参见注 2.2。这证明了左分配律。右分配律可通过类似计算证明。

利用 N 的堆同态性质、T 中乘积的结合性以及它对堆运算的分配性，我们发现，对所有 a, b, $c \in T$,

$$(a \circ_N b) \circ_N c = [N(N(a)b)c, N(N(ab))c, N(aN(b))c, N(N(a)bc),$$
$$N(N(ab)c), N(aN(b)c), N(a)bN(c), N(ab)N(c), aN(b)N(c)],$$

and

$$a \circ_N (b \circ_N c) = [N(a)N(b)c, N(a)N(bc), N(a)bN(c), N(aN(b)c),$$
$$N(aN(bc)), N(abN(c)), aN(N(b)c), aN(N(bc)), aN(bN(c))].$$

因此，消去重复项后可得

$$[a \circ_N (b \circ_N c), (a \circ_N b) \circ_N c, e] = [N(a)N(b)c, N(a)N(bc), N(aN(bc)), N(abN(c)),$$
$$aN(N(b)c), aN(N(bc)), aN(bN(c)), N(N(a)b)c, N(N(ab))c,$$
$$N(aN(b))c, N(N(a)bc), N(N(ab)c), N(ab)N(c), aN(b)N(c), e].$$

接下来，利用桁架分配律，我们计算得

$$aT_N^e(b, c) = [aN(N(b)c), aN(N(bc)), aN(bN(c)), aN(b)N(c), ae],$$
$$T_N^e(ab, c) = [N(N(ab)c), N(N(abc)), N(abN(c)), N(ab)N(c), e],$$
$$T_N^e(a, bc) = [N(N(a)bc), N(N(abc)), N(aN(bc)), N(a)N(bc), e],$$

and

$$T_N^e(a, b)c = [N(N(a)b)c, N(N(ab))c, N(aN(b))c, N(a)N(b)c, ec].$$

因此，

$$\delta_e^2 T_N^e(a, b, c) = [aN(N(b)c), aN(N(bc)), aN(bN(c)), aN(b)N(c), ae,$$
$$N(N(ab)c), N(N(abc)), N(abN(c)), N(ab)N(c), e,$$
$$N(N(a)bc), N(N(abc)), N(aN(bc)), N(a)N(bc), e,$$
$$N(N(a)b)c, N(N(ab))c, N(aN(b))c, N(a)N(b)c, ec, ec, ae, e].$$

随后，我们可以根据阿贝尔堆的定义进行消去和重排（见注 2.2），得到

$$[a \circ_N (b \circ_N c), (a \circ_N b) \circ_N c, e] = \delta_e^2 T_N^e(a, b, c).$$

因此，根据注2.3,

$$a \circ_N (b \circ_N c) = (a \circ_N b) \circ_N c,$$

当且仅当 $\delta_e^2 T_N^e(a, b, c) = e$ 如所需。 ■

推论4.7。 若 N 是桁架 $(T, [---], \cdot)$ 上的 *Nijenhuis* 算子，则可得 $(T, [--—], \circ_N)$ 也是一个桁架。我们将此桁架记为 $T[N]$。

证明。 根据 Nijenhuis 算子的定义，对于所有 e，其 e-挠率都为零，因此它是所需的 2-余循环。■

作为定理 4.6 的一个示例，我们对 $T(\mathbb{Z};\ a,\ b,\ c)$ 上的所有 Nijenhuis 算子进行分类，这些算子定义在 $\mathbb{Z}$（见备注 2.10）。

命题4.8。 下表列出了交换桁架上的所有 *Nijenhuis* 算子$T(\mathbb{Z};\ a,\ b,\ c)$，它们定义在 $\mathbb{Z}$（见备注 2.10）。

$T(\mathbb{Z};\ a,b,c)$	Nijenhuis 算子
$c \neq 0$	$N(m) = \begin{cases} \left(q+1\right) m + \frac{b}{\text{最大公因数}(b,c)}, & \\ \left(q+1\right) m + \frac{b-1}{\text{最大公因数}(b-1,c)}, & \end{cases} \begin{matrix} \frac{c}{\text{最大公因数}(b,c)^q}, \\ \frac{c}{\text{最大公因数}(b-1,c)^q}, \end{matrix} \quad q \in \mathbb{Z}$
$c = 0$	$N(m) = \begin{cases} qm, & \\ \left(q+1\right) m + q, & \end{cases} \quad q \in \mathbb{Z}$

证明。 堆同态 $N\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 必然具有以下形式，对所有 $m \in \mathbb{Z}$,

$$N(m) = pm + q$$

其中 $p, q \in \mathbb{Z}$。我们需要确定 p 和 q 必须满足哪些条件，才能使 N成为 Nijenhuis 算子。我们在 $\mathbb{Z}, T(\mathbb{Z};\ a, b, c)$ 上取最一般的交换桁架，其乘法为 (2.2)，其中 a, b, c 满足约束 (2.3)，并计算所有 $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$N(m) \cdot n = apmn + (aq + b)n + bpm + bq + c,$$
$$N(m \cdot n) = apmn + bpm + bpn + cp + q.$$

由此得到 Nijenhuis 乘积

$$m \circ_N n = apmn + (aq + b)(m + n) + 2bq + 2c - q - cp. \tag{4.2}$$

根据定理 4.6，乘积 (4.2) 是结合的，当且仅当 e-Nijenhuis 扭率对于任意固定的 $e \in \mathbb{Z}$都是余循环，特别是对于 0。0-Nijenhuis 扭率为

$$T^0_N(m, n) = -cp^2 + ((2b - 1)q + 2c)p - aq^2 - (2b - 1)q - c. \tag{4.3}$$

另一方面， 正如注 2.10中所回顾的，乘积 (4.2) 是结合的，当且仅当 i f

$$2abpq + 2acp - apq - acp^2 = (aq + b)(aq + b - 1). \tag{4.4}$$

由于 $ac = b(b - 1)$，并结合式（4.3），可将其改写为

$$aT^0_N(m, n) = 0.$$

因此，如果 $a \neq 0$，Nijenhuis 乘积的结合性等价于 Nijenhuis 扭率为零，也就是说， N 是一个 Nijenhuis 算子。

我们将方程 $T_N^0(m,\ n)\ =0$ 视为以 p 为未知数的方程。如果 $c\neq 0$ 这是一个判别式为 q^2 的二次方程，因此其解为

$$p=\left(\frac{b}{c}q+1\right)\qquad \text{or}\qquad p=\left(\frac{b-1}{c}q+1\right).$$

为确保解为整数，数 q 必须是各分数的分母除以分子与分母的最大公约数所得结果的倍数。按此进行相应的缩放后，我们得到以下 Nijenhuis 算子：

$$N(m)=\left(\frac{b}{\gcd(b,c)}q+1\right)m+\frac{c}{\gcd(b,c)}q,\qquad q\in\mathbb{Z},$$

and

$$N(m)=\left(\frac{b-1}{\gcd(b-1,c)}q+1\right)m+\frac{c}{\gcd(b-1,c)}q,\qquad q\in\mathbb{Z}.$$

若 $c=0$，则 $T_N^0(m,\ n)\ =0$ 等价于

$$(2b-1)pq-aq^2-(2b-1)q=0.$$

因此，$q=0$ 或 $p=\frac{a}{2b-1}q+1$ 对于所有 q 都是整数，因为约束（4.4）在这种情况下意味着 $b=0$ 或 $b=1$。

综合以上所有情况，可得所述表格。 ■

以下定理是桁架版本的 [8, 定理 2]。

定理 4.9。若 N 是桁架 T 上的 *Nijenhuis* 算子，则对于所有 $j,k\in\mathbb{N}$，
(a) N^k 是 T 上的 *Nijenhuis* 算子，因此 $T\big[N^k\big]$ 是一个桁架，(b) $T\big[N^k\big]\big[N^l\big]=T\big[N^{k+l}\big]$，$(c)$ N^l 是 $T\big[N^k\big]$ 上的 *Nijenhuis* 算子，

其中 N^k 表示 N 的 k 重复复合，而 $N^0=\mathrm{id}$。

证明。为简化记号，我们将 $T\big[N^k\big]$ 中的乘积 $\circ_{N^k}$ 记作 $\overset{\circ}{k}$。显然，$\overset{\circ}{0}=\cdot$ 是 T 中的原乘法。

首先，我们证明对于所有 $a,b\in T,\ k\in\mathbb{N}$，

$$N^k(a)N(b)=\big[N(N^k(a)b),N^{k+1}(ab),N^k(aN(b))\big],\tag{4.5a}$$
$$N(a)N^k(b)=\big[N(aN^k(b)),N^{k+1}(ab),N^k(N(a)b)\big],\tag{4.5b}$$
$$\begin{aligned}N^{k+1}(ab)&=\big[N(N^k(a)b),N^k(a)N(b),N^k(aN(b))\big],\\&=\big[N^k(N(a)b),N(a)N^k(b),N\big(aN^k(b)\big)\big].\end{aligned}\tag{4.5c}$$

我们将通过归纳法证明等式（4.5a）。等式（4.5b）可以用对称的方法证明，而（4.5c）是对（4.5a）和（4.5b）的等价改述；参见注释 2.3。

对于 $k=0$，式（4.5a）自动成立；而对于 $k=1$，这就是 Nijenhuis 算子的定义。假设（4.5a）对 k 成立，那么首先利用 Nijenhuis 条件，再利用归纳假设，可得

$$\begin{aligned}N^{k+1}(a)N(b)&=N\big(\big[N^{k+1}(a)b,N(N^k(a)b),N^k(a)N(b)\big]\big)\\&=N\big(\big[N^{k+1}(a)b,N(N^k(a)b),N(N^k(a)b),N^{k+1}(ab),N^k(aN(b))\big]\big)\\&=\big[N^{k+2}(a)b,N^{k+2}(ab),N^{k+1}(aN(b))\big].\end{aligned}$$

最后一个等式由 Mal'cev 恒等式（堆运算中的消去律）以及 N 是堆同态这一事实得出。因此，根据数学归纳法，（4.5a）对所有自然数 k 均成立。

利用方程（4.5），我们可以计算

$$\begin{aligned} N(a)\underset{k}{\circ}N(b) &= \big[N^{k+1}(a)N(b), N^k(N(a)N(b)), N(a)N^{k+1}(b)\big] \\ &= \big[N(N^{k+1}(a)b), N^{k+2}(ab), N^{k+1}(aN(b)), N^{k+1}(aN(b)), N^{k+2}(ab) \\ &\quad N^{k+1}(N(a)b), N\big(aN^{k+1}(b)\big), N^{k+2}(ab), N^{k+1}(N(a)b)\big] \\ &= \big[N\big(N^{k+1}(a)b\big), N^{k+2}(ab), N\big(aN^{k+1}(b)\big)\big] = N(a \underset{k+1}{\circ} b). \end{aligned}$$

倒数第二个等式由阿贝尔堆运算的消去规则得到。最后一个等式则源于 N 是堆同态这一事实以及 Nijenhuis 乘积的定义。由此出发，我们可以运用归纳论证证明，对所有 a，$b \in T$、k，$l \in \mathbb{N}$，

$$N^l(a \underset{k+l}{\circ} b) = N^l(a)\underset{k}{\circ}N^l(b). \tag{4.6}$$

特别地，$k = 0$ 的情形给出了断言（a）。

第二个断言也通过对 l 作归纳来证明。归纳步骤显然，因此只需证明 $l = 1$ 的情形。对所有 a，$b \in T$，

$$\begin{aligned} [N(a)\underset{k}{\circ}b, N(a\underset{k}{\circ}b), a\underset{k}{\circ}N(b)] &= \big[N^{k+1}(a)b, N^k(N(a)b), N(a)N^k(b), N(N^k(a)b) \\ &\quad N^{k+1}(ab), N(aN^k(b)), N^k(a)N(b), N^k(aN(b)), aN^{k+1}(b)\big], \\ &= \big[N^{k+1}(a)b, N^{k+1}(ab), N^{k+1}(ab), N^{k+1}(ab), aN^{k+1}(b)\big], \\ &= \big[N^{k+1}(a)b, N^{k+1}(ab), aN^{k+1}(b)\big] = a \underset{k+1}{\circ} b. \end{aligned}$$

第二个等式由（4.5c）得到。至此，陈述（b）得证。最后一个断言由（b）和（4.6）立即推出。■

接下来 [8], 我们提出：

定义 4.10. Nijenhuis 算子 N_1, N_2 在桁架 T 上称为相容，如果对所有$a, b \in T$,

$$N_1(a)N_2(b) = [N_1(a \circ_{N_2} b), N_2(a)N_1(b), N_2(a \circ_{N_1} b)].$$

例 4.11 。恒等算子 id 在 T 上与 T上的任意 Nijenhuis 算子相容 .

下一个陈述是定理 3 和 4]的桁架版本。

定理 4.12. 设 T 是一个桁架。

(1) 若 $N_1, N_2, \ldots, N_{2n+1}$ 是 T 上两两相容的 *Nijenhuis* 算子，则

$$[N_1, N_2, \ldots, N_{2n+1}]$$

是 T 上的 *Nijenhuis* 算子。

(2) 对于 T 上的所有 *Nijenhuis* 算子 N：

（a）对于所有 k、$l \in \mathbb{N}$，算子 N^k和 N^l 相容；对于所有 k_i、$n \in \mathbb{N}$，（b） $\big[N^{k_1}, N^{k_2}, \ldots, N^{k_{2n+1}}\big]$ 是一个 *Nijenhuis* 算子。

证明。 （1）我们首先注意到，由于桁架中的乘法对堆运算满足分配律，并且阿贝尔堆满足备注2.2中所述的重排规则，对于任意堆同态 N_1、N_2、……、N_{2n+1}：$T \to T$以及所有 a、$b \in T$，

$$a \circ_{[N_1,N_2,\dots,N_{2n+1}]} b = [a \circ_{N_1} b, a \circ_{N_2} b, \dots, a \circ_{N_{2n+1}} b]. \tag{4.7}$$

有了（4.7），我们便可对 n 归纳，从而证明该命题。对于 $n = 1$，

$$\begin{aligned}
[N_1,N_2,N_3](a)\ [N_1,N_2,N_3](b) &= [N_1(a)N_1(b), N_1(a)N_2(b), N_1(a)N_3(b), N_2(a)N_1(b),\\
&\quad N_2(a)N_2(b), N_2(a)N_3(b), N_3(a)N_1(b), N_3(a)N_2(b), N_3(a)N_3(b)]\\
&= [N_1(a \circ_{N_1} b), N_1(a \circ_{N_2} b), N_2(a)N_1(b), N_2(a \circ_{N_1} b), N_1(a \circ_{N_3} b),\\
&\quad N_3(a)N_1(b), N_3(a \circ_{N_1} b), N_2(a)N_1(b), N_2(a \circ_{N_2} b), N_2(a \circ_{N_3} b),\\
&\quad N_3(a)N_2(b), N_3(a \circ_{N_2} b), N_3(a)N_1(b), N_3(a)N_2(b), N_3(a \circ_{N_3} b)]\\
&= [N_1(a \circ_{N_1} b), N_1(a \circ_{N_2} b), N_1(a \circ_{N_3} b), N_2(a \circ_{N_1} b), N_2(a \circ_{N_2} b),\\
&\quad N_2(a \circ_{N_3} b), N_3(a \circ_{N_1} b), N_3(a \circ_{N_2} b), N_3(a \circ_{N_3} b)]\\
&= [N_1(a \circ_{[N_1,N_2,N_3]} b), N_2(a \circ_{[N_1,N_2,N_3]} b), N_3(a \circ_{[N_1,N_2,N_3]} b)]\\
&= [N_1,N_2,N_3](a \circ_{[N_1,N_2,N_3]} b),
\end{aligned}$$

推导第一个等式时用到了算子上的 heap 括号定义和桁架分配律，接着利用了两两相容性。第三个等式由备注2.2中概述的重排规则和消去规则得出，而下一个等式则由（4.7）推出。因此，$[N_1, N_2, N_3]$ 是所需的 Nijenhuis 算子。

接下来，假设该命题对 $n = k - 1$ 成立，并注意到（4.7）以及备注 2.2 中的重排规则表明，若 N_1、N_2、……、N_{2k+1} 是两两相容的 Nijenhuis 算子，则 N_{2k} 和 N_{2k+1} 与 $N = [N_1, N_2, \dots, N_{2k-1}]$相容。因此，$[N, N_{2k}, N_{2k+1}]$ 根据上述证明 $n = 1$ 情形时所用的相同论证，是一个 Nijenhuis 算子。

(2) 不失一般性，我们可以假设 $k \geq l$。如定理 4.9 的证明中一样，我们将 $\overset{\circ}{k}$ 记作 $\circ_{N^k}$，等等。根据定理 4.9 以及 Nijenhuis 乘积 $\overset{\circ}{k-l}$的定义，对于所有 a，我们可以计算得$b \in T$，

$$\begin{aligned}
\left[N^k(a \overset{\circ}{l} b), N^l(a)N^k(b), N^l(a \overset{\circ}{k} b)\right] &= \left[N^{k-l}(N^l(a)N^l(b)), N^l(a)N^k(b), N^l(a) \overset{\circ}{k-l} N^l(b)\right]\\
&= \left[N^{k-l}\big(N^l(a)N^l(b)\big), N^l(a)N^k(b), N^k(a)N^l(b), N^l(a)N^k(b), N^l(a)N^k(b)\right]\\
&= N^k(a)N^l(b).
\end{aligned}$$

最后一个等式由消去规则和重排规则得出，这些规则已在备注2.2中回顾。由此完成了陈述 (a) 的证明。陈述 (b) 则由断言 (1) 得出。 ■

5 仿射 Nijenhuis 算子与量子双哈密顿系统

本节首先将上述讨论应用于桁架以及由结合代数导出的算子，从而将 [8]的结果从线性映射推广到仿射映射。接下来，我们构造（弱）量子双哈密顿系统的仿射版本。也就是说，我们构造一个仿射李括号（依照 [11, 定义 1]的含义），它可以表示为仿射空间上某个变形结合双仿射乘积的交换子。

域 $\mathbb{F}$ 上的结合代数 A 可以视为一个桁架，其原乘法来自加法群所确定的堆结构，即 $[a, b, c] = a - b + c$。为表明

这一三元观点，我们记作 T(*A*)。从这个角度看，仿射映射 $N\colon A \to A$ 是保持仿射组合或重心组合的堆同态，即对于所有 a， b， $c \in A$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}$，

$$N(a-b+c) = N(a) - N(b) + N(c), \qquad N((1-\lambda)a + \lambda b) = (1-\lambda)N(a) + \lambda N(b). \tag{5.1}$$

所有仿射映射的集合记为 Aff(*A*)。它是一个桁架，其乘积由复合给出，堆运算则逐点定义。容易验证，Aff(*A*) 是一个仿射空间，其底层向量空间为所有 A 的线性自同态组成的向量空间，运算均逐点定义。

定义 5.1。设 A 是一个结合代数，且 $N \in$ Aff(*A*)。若 N 是 T(*A*) 上的 Nijenhuis 算子，则称其为 A 上的 仿射 ***Nijenhuis*** 算子 。

尽管给定 $N \in \mathrm{Aff}(A)$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}$，函数 $\lambda N\colon A \to A$， $a \mapsto \lambda N(a)$ 并非仿射映射，但它仍然是堆同态，即条件（5.1）中的第一个条件成立。因此，可以陈述以下定理。

定理 5.2。设 A 是一个结合 $\mathbb{F}$-代数。

(1) 若 N 是 A上的仿射 ***Nijenhuis*** 算子，则对所有 $\lambda \in \mathbb{F}$， λN 都是 $\mathrm{T}(A)$ 上的 ***Nijenhuis*** 算子，且与 N相容。

(2) 若 N_1、……、$N_n \in \mathrm{Aff}(A)$ 是$\mathrm{T}(A)$上的两两相容仿射 ***Nijenhuis*** 算子，则对所有满足以下条件的 λ_1、……、$\lambda_n \in \mathbb{F}$： $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$， $N = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i$ 是 A上的仿射 ***Nijenhuis*** 算子。

证明。 **(1)** 首先注意，对所有 $a, b \in A$,

$$a \circ_{\lambda N} b = \lambda N(a)b - \lambda N(ab) + a\lambda N(b) = \lambda a \circ_N b. \tag{5.2}$$

因此，若 N 是 T(*A*) 上的 Nijenhuis 算子，则

$$\lambda N(a \circ_{\lambda N} b) = \lambda^2 N(a)N(b) = \lambda N(a)\lambda N(b)$$

如所需。相容性也可由（5.2）得出。

(2) （5.2）中的 Nijenhuis 乘积之间的对应关系表明，Nijenhuis 算子 $\lambda_i N_i$, $i = 1, \dots n$ 两两相容。由于 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i = N_1 - \lambda_2 N_1 + \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_1 + \cdots - \lambda_n N_1 + \lambda_n N_n \\ &= [N_1, \lambda_2 N_1, \lambda_2 N_2, \lambda_3 N_1, \dots, \lambda_n N_1, \lambda_n N_n], \end{aligned}$$

因此仿射映射 $\sum_{i=1}^n \lambda_i N_i$ 是 T(*A*) 上的 Nijenhuis 算子，因而根据定理 4.12 中的断言 **(1)**，它是 A 上的仿射 Nijenhuis 算子。 ■

推论 5.3。若 P是$\mathrm{Aff}(A)$中的乘法幂等元，则对所有 $\alpha \in \mathbb{F}$，$(1-\alpha)P + \alpha\,\mathrm{id}$都是仿射 ***Nijenhuis*** 算子。

证明。由定理 5.2 和例 4.11 可立即得出。 ■

设 A 是定义在一个 $\mathbb{F}$-向量空间 $\vec{A}$上的仿射空间。正如 [4, 节 4] 或 [7], 中所阐述的， $+$ 的 $\vec{A}$ 在 A 上的作用使后者成为一个阿贝尔堆，其运算定义如下：对任意 a、 b、 $c \in A$,

$$[a, b, c] = a + \overrightarrow{bc}, \tag{5.3}$$

其中，$\overrightarrow{bc}$ 是 $\vec{A}$ 中从 b 到 c的唯一向量，即满足 $c = b+\overrightarrow{bc}$的向量。按照这种解释，$\vec{\ }$从定义在 B 上的 B 到 A 的仿射映射，对应于一个堆同态 $f\colon A \to B$，并且对任意 a、$b \in A$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$f\big(a + \lambda\overrightarrow{ab}\big) = f(a) + \lambda\overrightarrow{f(a)f(b)}. \tag{5.4}$$

任意这样的映射都唯一地定义了线性变换 $\vec{f}\colon \vec{A} \to \vec{B}$，其定义为 $\overrightarrow{ab} \mapsto \overrightarrow{f\ a\ f\ b}$( )( )。我们将其称为 f 的线性化。

若 A 是一个向量空间，那么它自身就是一个仿射空间，a 到 b 的向量就是二者之差 $b-a$。此时，堆运算（5.3）与 $a-b+c$一致，而按照（A 到 A）的含义，（5.4）中的仿射映射等价于满足条件（5.1）。

回顾 [11, 定义 1]：仿射空间 A 上的李括号是一个反对称双仿射映射 $[-,-]\colon A \times A \to \vec{A}$，满足雅可比恒等式

$$\overrightarrow{[[a,b],c]} + \overrightarrow{[[b,c],a]} + \overrightarrow{[[c,a],b]} = 0.$$

括号上方的箭头表示仿射映射 $[-,b]\colon A \to \vec{A}$ 的线性化。

设 A 是一个带有双仿射结合乘法的仿射空间 $\cdot\colon A \times A \to A$（为避免与 A 中向量端点的记号混淆，我们仍会在元素之间保留点号 $\vec{A}$）。对于所有 $a \in A$，函数 $A \to A$, $b \mapsto a \cdot b$是仿射映射，这一事实特别意味着它是堆同态；这等价于说乘法对堆运算满足左分配律（5.3）。类似地，映射 $b \mapsto b \cdot a$ 的堆同态性质给出右桁架分配律。简言之，A 是一个桁架，可称为仿射桁架或结合仿代数——这一术语首创于 [11]。

注记 5.4。正如桁架可以嵌入环中（见注记 2.11），任何结合仿代数都可以作为某个结合代数中的陪集得到。具体而言，给定代数 A、其理想 I以及幂等元 A，$q \in A$，$T(I;\ q) = q + I$是 I上的仿射空间，其上定义$\longrightarrow(q+x)(q+y) = y - x$，而 A上的乘法限制为一个双仿射映射。

无需额外工作，仿射 Nijenhuis 运算的概念以及定理 5.2的陈述即可推广到仿射代数。 (2)

命题 5.5。若 N_1、...、$N_n \in \mathrm{Aff}(A)$ 是结合 $\mathbb{F}$-仿射代数 A 上两两相容的仿射 ***Nijenhuis*** 算子，则对于所有满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $N = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i$ 是 A 上的仿射 ***Nijenhuis*** 算子的 λ_1、...、$\lambda_n \in \mathbb{F}$，结论均成立。

例 5.6。设 A 是一个结合代数，I 是 A 中的一个理想，且 $q \in A$ 是一个幂等元。假设 I 可分解为 A, $I = I_1 \oplus I_2$ 中两个理想的直和。设 $P_i\colon I \to I_i, i = 1, 2$ 是相应的投影，满足对所有 $x \in I$, $i = 1, 2$，$P_i(xq) = P_i(x)q$ 且 $P_i(qx) = qP_i(x)$。根据定理 [8, , 对于所有 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$， 5], 是 I 上的 Nijenhuis 算子；特别地，其中每个 P_i 都是 Nijenhuis 算子。根据命题 4.4,

$$N\colon T(q;I) \to T(q;I), \qquad q + x \mapsto q + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x)$$

是 $T(q;\ I)$ 上的 Nijenhuis 算子。另一方面，N可以理解为算子 $N_i(q + x) = q + P_i(x)$ 和 $Q(q + x) = q$ 的仿射组合

$$N = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\, Q + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2.$$

举一个具体的例子，我们可以取代数 R、其理想 I 以及例 q 中描述的幂等元4.5。每个 I 中的元素都可以唯一分解为一个上三角矩阵和一个严格下三角矩阵之和。若 P_- 表示对后者的投影，则对所有标量 λ_1，λ_2，我们得到 T（I；q）上的如下仿射 Nijenhuis 算子：

$$N(A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1)) = A(\lambda_1 P_+(\mathbf{a}) + \lambda_2 P_-(\mathbf{a}), \lambda_1 \mathbf{b}, 1).$$

任意结合仿代数 A 都可通过线性化交换子定义一个李括号，对所有$a,\ b \in A$,

$$[a,b] = \overrightarrow{(b\cdot a)(a\cdot b)}. \tag{5.5}$$

事实上，$[a,b]$ 显然是反对称的，并且对于所有的 $a,\ b,\ c \in A$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{[[a,b],c]} + \text{cycl.} &= \overrightarrow{\left[\overrightarrow{(b\cdot a)(a\cdot b)},c\right]} + \text{cycl.} = [a\cdot b,c] - [b\cdot a,c] + \text{cycl.}\\ &= \overrightarrow{(c\cdot a\cdot b)(a\cdot b\cdot c)} - \overrightarrow{(c\cdot b\cdot a)(b\cdot a\cdot c)} + \text{cycl.} = 0.\end{aligned}$$

在备注 $T(I;\ q)$ 中的仿射代数情形 5.4，李括号是标准交换子的平移，即 $[q+x,q+y] = q + [x,y]$。

有了这些准备，我们可以陈述下述 [8, 定理 8]的仿射版本。

定理 5.7。 设 N 是结合仿代数 A上的仿射 ***Nijenhuis*** 算子。设 $[-,-]$为李括号 (5.5)。

(1) 乘法 $\circ_N$ 是一个双仿射运算，因此使 $A[N]$ 成为一个结合仿代数。

(2) 由以下方式定义的运算 $[-,-]_N\colon A\times A\to \vec{A}$ 为

$$[a,b]_N := [N(a),b] - \vec{N}([a,b]) + [a,N(b)],$$

对于所有 $a,b\in A$，它是 A 上的李括号，并且满足

$$[a,b]_N = \overrightarrow{(b\circ_N a)(a\circ_N b)}.$$

(3) 对于所有 $a,b\in A$,

$$\vec{N}([a,b]_N) = [N(a),N(b)].$$

证明。 首先，注意到根据堆运算的定义（5.3），Nijenhuis 乘积可写为

$$a\circ_N c = N(a)\cdot c + \overrightarrow{N(a\cdot c)(a\cdot N(c))}.$$

我们将反复用到仿射空间理论中的以下基本事实。对于所有点 $a,\ b,\ c,\ d\in A$ 以及所有向量 $v,\ w\in A$,

$$\overrightarrow{(a+v)(b+w)} = \overrightarrow{ab} - v + w, \qquad \overrightarrow{cd} - \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{bd} - \overrightarrow{ac}. \tag{5.6}$$

要检验 $\circ_N$是否为双仿射乘法，任取 $a,\ b,\ c\in A$和 $\lambda\in\mathbb{F}$，并利用 N 是仿射映射、乘法 $\cdot$ 是双仿射的以及（5.6），计算得

$$\begin{aligned}\left(a+\lambda\overrightarrow{ab}\right)\circ_N c &= \left(N(a)+\lambda\overrightarrow{N(a)N(b)}\right)\cdot c\\ &\quad + \overrightarrow{N\left(a\cdot c+\lambda\overrightarrow{(a\cdot c)(b\cdot c)}\right)\left((a+\lambda\overrightarrow{ab})\cdot N(c)\right)}\\ &= N(a)\cdot c + \lambda\overrightarrow{(N(a)\cdot c)(N(b)\cdot c)}\\ &\quad + \overrightarrow{\left(N(a\cdot c)+\lambda\overrightarrow{N(a\cdot c)N(b\cdot c)}\right)\left(a\cdot N(c)+\lambda\overrightarrow{(a\cdot N(c))(b\cdot N(c))}\right)}\\ &= N(a)\cdot c + \lambda\overrightarrow{(N(a)\cdot c)(N(b)\cdot c)} + \overrightarrow{N(a\cdot c)(a\cdot N(c))}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \lambda\overrightarrow{N(a\cdot c)N(b\cdot c)} + \lambda\overrightarrow{(a\cdot N(c))(b\cdot N(c))}\\
&= a\circ_N c + \lambda\Big(\overrightarrow{(N(a)\cdot c)(N(b)\cdot c)} - \overrightarrow{N(a\cdot c)(a\cdot N(c))} + \overrightarrow{N(b\cdot c)(b\cdot N(c))}\Big)\\
&= a\circ_N c + \lambda\Big(\overrightarrow{N(a)\cdot c + N(a\cdot c)(a\cdot N(c))}\Big)\Big(N(b)\cdot c + \overrightarrow{N(b\cdot c)(b\cdot N(c))}\Big)\\
&= a\circ_N c + \lambda\overrightarrow{(a\circ_N c)(b\circ_N c)}
\end{aligned}
$$

如所需。第二个相容条件可用对称的方法证明。因此，$A[N]$ 是一个结合仿代数。

利用性质（5.6），我们发现，对所有 $a,\ b\in A$,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{(b\circ_N a)(a\circ_N b)} &= \overrightarrow{\Big(N(b)\cdot a + \overrightarrow{N(b\cdot a)(b\cdot N(a))}\Big)\Big(N(a)\cdot b + \overrightarrow{N(a\cdot b)(a\cdot N(b))}\Big)}\\
&= \overrightarrow{(N(b)\cdot a)(N(a)\cdot b)} - \overrightarrow{N(b\cdot a)(b\cdot N(a))} + \overrightarrow{N(a\cdot b)(a\cdot N(b))}\\
&= \overrightarrow{(N(b)\cdot a)(a\cdot N(b))} - \overrightarrow{N(b\cdot a)N(a\cdot b)} + \overrightarrow{(b\cdot N(a))(N(a)\cdot b)}\\
&= [N(a),b] - \vec{N}([a,b]) + [a,N(b)] = [a,b]_N.
\end{aligned}
$$

鉴于 Nijenhuis 乘积 $\circ_N$ 使 A 成为结合仿代数，这就证明了陈述 (2) 中的两个断言。

最后，由于 N 是 A上的一个仿射映射和 Nijenhuis 算子，

$$
\begin{aligned}
\vec{N}([a,b]_N) &= \vec{N}\left(\overrightarrow{(b\circ_N a)(a\circ_N b)}\right) = \overrightarrow{N(b\circ_N a)N(a\circ_N b)}\\
&= \overrightarrow{(N(b)\cdot N(a))\,(N(a)\cdot N(b))} = [N(a),N(b)].
\end{aligned}
$$

定理得证。 ■

致谢

Tomasz Brzezi´nski 的研究部分由波兰国家科学中心资助，资助项目编号为 2019/35/B/ST1/01115。

参考文献

[1] Andruszkiewicz R.R., Brzezi´nski T., Rybo-lowicz B., 理想环扩张与桁架， *J. Algebra* **600** (2022), 237–278, arXiv:2101.09484.[2] Baer R., 关于引入 Schar 概念， ¨(1929), 199–207.[3] Benenti S., 规范仿射丛与牛顿力学，载于《群的哈密顿作用。李的第三定理》（里昂，1986）， *Travaux en Cours*, 第 27 卷，Hermann，巴黎，1988，13–37.[4] Breaz S., Brzezi´nski T., Rybo-lowicz B., Saracco P., 模堆与仿射空间， *Ann. Mat. PuraAppl.*, 即将出版，arXiv:2203.07268.[5] Brzezi´nski T., 桁架：介于括号与环之间， *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), 4149–4176, arXiv:1710.02870.[6] Brzezi´nski T., 桁架：典范子、理想与模， *J. Pure Appl. Algebra* **224** (2020), 106258, 39 页，arXiv:1901.07033.[7] Brzezi´nski T., 李桁架与李仿射代数堆， *Proc. Sci.* **406** (2022), PoS(CORFU2021)307, 12 页，arXiv:2203.12975.[8] Cari˜nena J.F., Grabowski J., Marmo G., 量子双哈密顿系统， *Internat. J. Modern Phys. A*15 (2000), 4797–4810, arXiv:math-ph/0610011.[9] Certaine J., 群的三元运算（*abc*），*Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943), 869–877.[10] Gerstenhaber M., 关于环与代数的变形， *Ann. of Math.* **79** (1964), 59–103.

[11] Grabowska K., Grabowski J., Urba´nski P., 仿射丛上的李括号， *Ann. Global Anal. Geom.* **24** (2003), 101–130, arXiv:math.DG/0203112.[12] Hochschild G., 关于结合代数的上同调群， *Ann. of Math.* **46** (1945), 58–67.[13] Kosmann-Schwarzbach Y., Courant 锚丛上的 Nijenhuis 结构， *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2011), 625–649, arXiv:1102.1410.[14] Magri F., 可积哈密顿方程的一个简单模型， *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1156–1162.[15] Massa E., Vignolo S., Bruno D., 非完整拉格朗日力学与哈密顿力学：一种内禀方法, *J. Phys. A* **35** (2002), 6713–6742.[16] Pr¨ufer H., 阿贝尔群理论， *Math. Z.* **20** (1924), 165–187.[17] Tulczyjew W.M., 解析力学的标架无关性,

Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. ( ), – *Natur.* **119** 1985 273 279
.[18] Urba´nski P., 解析力学中的仿射泊松结构，载于《量子化与无限维系统》（比亚沃维耶扎，1993 ），普莱 enum，纽约，1994，123–129.[19] Weinstein A., 杨–米尔斯场中粒子的普适相空间， *Lett. Math. Phys.* **2** (1978), 417–420。