# 相容 BiHom-Lie 代数的上同调

Asif Sania *，Basdouri Imed [1] †，Bouzid Mosbahi[2] ‡，Nacib Saber [3] § 1. 南京信息工程大学，中华人民共和国南京。2. 加夫萨大学，加夫萨理学院，突尼斯加夫萨 2112。3. 斯法克斯大学，斯法克斯理学院，突尼斯斯法克斯 BP 1171，3038。4. 斯法克斯大学，斯法克斯理学院，突尼斯斯法克斯 BP 1171，3038

arXiv:2303.12906v1 [math.RA] 7 Feb 2023

摘要

本文通过两个线性交换映射对相容李代数进行扭曲，定义了相容 BiHom-Lie 代数。我们证明，相容 BiHom-Lie 代数可刻画为适当的双微分分次李代数中的 Maurer-Cartan 元。我们还为相容 BiHom-Lie 代数定义了一种上同调理论。

关键词：BiHom-Lie 代数，相容 BiHom-Lie 代数，上同调，分次李代数。数学主题分类：16R60，17B05，17B40，17B37

## 目录

1 引言 12 BiHom-Lie 代数与双微分分次李代数 ff 22.1 BiHom-Lie 代数.22.2 双微ff分分次李代数.4

3 相容 BiHom-Lie 代数
54 相容 BiHom-Lie 代数的上同调 7

## 1 引言

研究 BiHom-Lie 代数结构的动机在于它在物理学以及李代数变形理论中的重要性，尤其是向量场李代数。Cheng 和 Qi 于 [2], 首次引入 BiHom-Lie 代数，它是一个四元组 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$，其中 g 是一个 $\mathbb{K}$-线性空间，$\alpha, \beta : g \to g$ 是线性映射，$[\cdot,\cdot] : g \otimes g \longrightarrow g$ 是 g 上的李括号运算，记作 $[\cdot,\cdot](p \otimes q) = [p, q]$,，并满足以下条件，其中 $p, q, r \in g$:

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha,$$
$$[\beta(p), \alpha(q)] = -[\beta(q), \alpha(p)] \text{ (反对称性)},$$
$$[\beta^2(p), [\beta(q), \alpha(r)]] + [\beta^2(q), [\beta(r), \alpha(p)]] + [\beta^2(r), [\beta(p), \alpha(q)]] = 0 \text{ (BiHom-Jacobi 条件)}$$

*通讯作者，电子邮箱：11835037@zju.edu.cn
†通讯作者，电子邮箱：basdourimed@yahoo.fr
‡通讯作者，电子邮箱：mosbahibouzid@yahoo.fr§通讯作者，电子邮箱：sabernacib83@hotmail.com

BiHom-Lie 代数的主要特征是，它是带有一个扭曲映射 $\alpha$ 的 Hom-Lie 代数的扩展，其定义见 [4, 10], , 其中刻画 BiHom-Lie 代数的恒等式由两个扭曲映射 $\alpha$、$\beta$ 扭曲。若考虑 $\alpha = \beta$，则 BiHom-Lie 代数理论退化为 Hom-Lie 代数；令 $\alpha = \beta =$ 为 id，则得到李代数结构。

值得注意的是，（线性）相容乘积已受到广泛关注。就此而言，在同一向量空间上定义的两个特定类型的乘积，若其和也定义了同一种代数结构，则称它们是相容的。它们出现在数理物理和数学的诸多问题中。例如，关于两个 Hom-Lie结构相容这一想法，最早见于 [3], , 作者在那里发展了一种具有单个可交换的乘法线性映射的广义代数结构。这种结构被称为相容 Hom-Lie代数。Das 最近为相容 Hom-Lie 代数发展了一种上同调理论。这种上同调基于如下刻画：相容 Hom-Lie 代数是一个双微分分次李代数中的 Maurer-Cartan 元。鉴于 BiHom-Lie 代数和相容李代数都十分重要，我们研究了相容 BiHom-Lie 代数，并为其建立了上同调理论。与 BiHom-Lie 代数一样，通过选取相同的扭映射，相容 BiHom-Lie 代数也可归结为相容 Hom-Lie 代数。

本文结构如下。第2节（预备部分）回顾 BiHom-Lie 代数和双微分分次李代数的一些重要定义和概念。第3节介绍相容 BiHom-Lie 代数，并在适当构造的双微分分次李代数中给出其 Maurer-Cartan 刻画。我们还定义相容 BiHom-Lie 代数的表示，并构造半直积。第4节给出相容 BiHom-Lie 代数在表示系数下的上同调。

# 2 BiHom-Lie 代数与双微分分次李代数

## 2.1 BiHom-Lie 代数

我们首先回顾引言部分所定义的 BiHom-Lie 代数的一些重要说明。

注 2.1. 若 $\alpha$ 和 $\beta$ 是代数态射，即对于任意 $p, q \in g$，有 $\alpha([p, q]) = [\alpha(p), \alpha(q)], \beta([p, q]) = [\beta(p), \beta(q)]$, , 则称 BiHom-Lie 代数为乘法BiHom-Lie代数。
注 2.2. 如果 $\alpha, \beta$ 是双射，则称乘法BiHom-Lie代数为正则BiHom-Lie代数。

注 2.3. 显然，对于满足 $\alpha = \beta$ 的BiHom-Lie代数 $(g, [\cdot, \cdot], \alpha, \beta)$，它就是一个 Hom-Lie 代数 $(g, [\cdot, \cdot], \alpha)$。

例 2.1. 设 $(g, \mu, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合代数，配有双线性映射 $\mu : g \otimes g \to g$，定义为 $\mu(p, q) = p \cdot q$，以及双射线性映射 $\alpha, \beta : g \to g$。定义新的乘法 $[\cdot, \cdot]$ by$[p, q] = p.q - (\alpha^{-1}\beta(q)).(\alpha\beta^{-1}(p))$，对每个 $p, q \in g$ 都成立。我们称 $(g, [\cdot, \cdot], \alpha, \beta)$ 为一个 BiHom 李代数。

例 2.2. 设 $(g, [\cdot, \cdot])$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的普通李代数，且 $\alpha, \beta : g \to g$ 是两个可交换线性映射，满足对所有 $a, a' \in g$，$\alpha([p, q]) = [\alpha(p), \alpha(q)]$ 以及 $\beta([p, q]) = [\beta(p), \beta(q)]$。定义线性映射 $\{\cdot, \cdot\} : g \otimes g \longrightarrow g$，使得对所有 $p, q \in g$，$\{p, q\} = [\alpha(p), \beta(q)]$。那么 $g^{(\alpha,\beta)} = (g, \{\cdot, \cdot\}, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数，称为李代数 $(g, [\cdot, \cdot])$ 的扭曲。

定义 2.1. 设 $(g, [\cdot, \cdot], \alpha, \beta)$ 和 $(g', [\cdot, \cdot]', \alpha', \beta')$ 是两个 BiHom-Lie 代数。若线性映射 $\phi : g \to g'$ 满足 $\alpha' \circ \phi = \phi \circ \alpha, \beta' \circ \phi = \phi \circ \beta$ and $\phi[p, q] = [\phi(p), \phi(q)]'$，对任意 $p, q \in g$ 均成立，则称其为 BiHom-Lie 代数态射。

例 2.3. 给定两个 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 和 $(g', [\cdot,\cdot]', \alpha', \beta')$，则存在一个 BiHom-Lie 代数 $(g \oplus g', [\cdot,\cdot]_{g\oplus g'}, \alpha+\alpha', \beta+\beta')$，其中斜对称双线性映射 $[\cdot,\cdot]_{g\oplus g'}: \wedge^2(g \oplus g') \longrightarrow g \oplus g'$ 定义为 $[(p_1, q_1), (p_2, q_2)]_{g\oplus g'} = ([p_1, p_2], [q_1, q_2]')$，对所有 $p_1, p_2 \in g$、$q_1, q_2 \in g'$ 均成立；线性映射 $(\alpha+\alpha')$、$(\beta+\beta') : g \oplus g' \longrightarrow g \oplus g'$ 定义如下

$$(\alpha+\alpha')(p,q) = (\alpha(p), \alpha'(q)), \quad (\beta+\beta')(p,q) = (\beta(p), \beta'(q)), \quad \forall p \in g, q \in g'$$

接下来，我们回顾分次李括号（称为 Nijenhuis-Richardson 括号），其 Maurer-Cartan 元由 BiHom-Lie 代数结构给出。这是李代数背景下经典 Nijenhuis-Richardson 括号的推广。设 g 为一个向量空间，$\alpha, \beta : g \to g$ 为两个线性映射。对每个 $n \geq 0$，考虑以下空间

$$C^0_{BiHom}(g,g) = \{p \in g \mid \alpha(p) = p \text{ and } \beta(p) = p\}$$

and

$$C^n_{BiHom}(g,g) = \{f : \otimes^n g \to g \mid \alpha \circ f = f \circ \alpha^{\otimes^n}, \beta \circ f = f \circ \beta^{\otimes^n}\}, \quad for \ n \geq 1.$$

则移位后的分次向量空间 $C^{*+1}_{BiHom}(g,g) = \oplus_{n\geq 0} C^{n+1}_{BiHom}(g,g)$ 上带有如下定义的分次李括号：

对于 $P \in C^{m+1}_{BiHom}(g,g)$ 和 $Q \in C^{n+1}_{BiHom}(g,g)$，Nijenhuis-Richardson 括号 $[P,Q]_{NR} \in C^{m+n+1}_{BiHom}(g,g)$ 定义为

$$[P,Q]_{NR} = P \diamond Q - (-1)^{mn} Q \diamond P,$$

其中

$$(P \diamond Q)(p_1, ..., p_{m+n+1}) = \sum_{\sigma \in Sh(n+1,m)} (-1)^{\sigma} P(Q(p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(n+1)}), \alpha\beta^n(p_{\sigma(n+2)}), ..., \alpha\beta^n(p_{\sigma(n+m+1)})).$$

采用这一记号，我们有如下结论。

命题 2.4. 设 g 是一个向量空间，$\alpha, \beta : g \to g$ 为两个线性映射。则 g 上的 BiHom-Lie 括号恰好是分次李代数 $(C^{*+1}_{BiHom(g,g)}, [\cdot,\cdot]_{NR})$ 中的 Maurer-Cartan 元。

下面我们回顾带有表示系数的 BiHom-Lie 代数 $(g, [.,.], \alpha, \beta)$ 的 Chevalley-Eilenberg 上同调。

定义 2.2. 设 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数。g 的一个表示是一个四元组 $(V, \bullet, \alpha_V, \beta_V)$，其中 V 是一个线性空间，$\alpha_V, \beta_V : V \to V$ 是两个可交换线性映射，而表示 $\bullet : g \otimes V \longrightarrow V$ 定义为 $(p, v) \longmapsto p \bullet v$，是一个满足以下条件的双线性运算（称为作用）：

1. $\alpha(p) \bullet \alpha_V(v) = \alpha_V(p \bullet v)$, 2. $\beta(p) \bullet \beta_V(v) = \beta_V(p \bullet v)$, 3. $[\beta(p), q] \bullet \beta_V(v) = \alpha\beta(p) \bullet (q \bullet v) - \beta(y) \bullet (\alpha(p) \bullet v)$,

对所有的 $p, q \in g$ 和 $v \in V$。

例 2.5. 设 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数，且 $(V, \bullet, \alpha_V, \beta_V)$ 是 g 的一个表示。假设映射 $\alpha, \beta$ 和 $\alpha_V, \beta_V$ 均为双射。则半直积 $g \ltimes V = (g \oplus V, [.,.], \alpha\oplus\alpha_V, \beta\oplus\beta_V)$ 是一个 BiHom-Lie 代数。其中 $\alpha\oplus\alpha_V, \beta\oplus\beta_V$: $g \oplus V \longrightarrow g \oplus V$ 定义如下：

$$(\alpha \oplus \alpha_V)(p,a) = (\alpha(p), \alpha_V(a)), (\beta \oplus \beta_V)(p,a) = (\beta(x), \beta_V(a))$$

括号 $[\cdot,\cdot]$ 定义如下：

$$[(p,a),(q,b)] = ([p,q], p \bullet b - \alpha^{-1}\beta(y) \bullet \alpha_V\beta_V^{-1}(a))$$

对所有 $p, q \in g$ 以及 $a, b \in V$。

由此可知，任意 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 都是自身的一个表示，其作用由括号 $[.,.]$ 给出。这称为伴随表示。设 $(g, [.,.], \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数，且 $(V, \bullet, \alpha_V, \beta_V)$ 是其上的一个表示。对于每个 $n \geq 0$，我们定义 g 上取值于表示 $(V, \bullet, \alpha, \beta)$ 系数的 n 阶上链，它是从 $g \otimes g \otimes \cdots \otimes g$（共 n 个）到 V 的斜对称 n 重线性映射集合，记为 $C^n(g, V)$。具体而言

$$C^n(g,V) = \{f \mid f : \otimes^n g \longrightarrow V \ \ is\ a\ multilinear\ map\}.$$

g 上以 V 为系数的 n-BiHom 上链定义为满足与 $\alpha, \beta$ 及 $\alpha_V, \beta_V$ 相容条件的 n-上链 $f \in C^n(g, V)$，即 $\alpha_V \circ f = f \circ \alpha$ 且 $\beta_V \circ f = f \circ \beta$，也就是说

$$\alpha_V(f(p_1, ..., p_n)) = f(\alpha(p_1), ..., \alpha(p_n)),\ \ \beta_V(f(p_1, ..., p_n)) = f(\beta(p_1), ..., \beta(p_n))$$

记作

$$C^0_{BiHom}(g,V) = \{v \in V | \alpha_V(v) = v, \beta_V(v) = v\}$$

and

$$C^n_{BiHom}(g,V) = \{f \in C^n(g,V) | \alpha_V \circ f = f \circ \alpha \ and\ \beta_V \circ f = f \circ \beta\}$$

当 $n \geq 0$ 时，上余边算子 $\delta_{BiHom} : C^n_{BiHom}(g, V) \longrightarrow C^{n+1}_{BiHom}(g, V)$ 定义为

1.
$$\delta_{BiHom}(p)(v) = \alpha\beta^{-1}(p) \bullet v, \ \ for\ \ v \in C^0_{BiHom}(g,V)\ \ and\ \ p \in g.$$

2.
$$\begin{array}{rc} & \delta_{BiHom} f(p_1, \cdots, p_{n+1}) \\ = & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \alpha\beta^{n-1}(p_i) \bullet f(p_1, \cdots, \hat{p_i}, \cdots, p_{n+1}) \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j+1} f([\alpha^{-1}\beta(p_i), p_j], \beta(p_1), \cdots, \beta(\hat{p_i}), \cdots, \beta(\hat{p_j}), \cdots, \beta(p_{n+1})) \end{array}$$

其中 $f \in C^n_{BiHom}(g, V)$，且 $p1, \cdots, p_{n+1} \in g$。该上链复形的上同调群

$$\{C^*_{BiHom}(g,V), \delta_{BiHom}\}$$

称为 Chevalley-Eilenberg 上同调群，记作 $H^*_{BiHom}(g, V)$。需要注意的是，BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 以自身为系数的 Chevalley-Eilenberg 上同调的上余边算子可简单表示为

$$\delta_{BiHom} f = (-1)^{n-1}[\mu, f]_{NR}, \ \ \forall\ f \in C^n_{BiHom}(g,g),$$

其中，$\mu \in C^2_{BiHom}(g, g)$ 对应于 BiHom-Lie 括号 $[\cdot,\cdot]$。

## 2.2 双微分分次李代数

在介绍双微分分次李代数的概念之前，我们先给出微分分次李代数的定义。

定义 2.3. 微分分次李代数是一个三元组 $(L = \oplus L^i, [\cdot,\cdot], d)$，由一个分次李代数和一个次数为 +1 的微分 $d : L \longrightarrow L$ 组成，其中 d 是括号 $[\cdot,\cdot]$ 的导子。若一个元素 $\theta \in L^1$ 满足 Maurer-Cartan 方程：$\theta$，则称其为微分分次李代数 $(L, [\cdot,\cdot], d)$ 中的 Maurer-Cartan 元：

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0.$$

定义 2.4. 双微分分次李代数是一个四元组 $(L = \oplus L^i, [\cdot,\cdot], d_1, d_2)$，其中三元组 $(L, [\cdot,\cdot], d_1)$ 和 $(L, [\cdot,\cdot], d_2)$ 都是微分分次李代数，且另外满足 $d_1 \circ d_2 + d_2 \circ d_1 = 0$。

注 2.4. 任意分次李代数都可以视为双微分分次李代数，其中两个微分 $d_1$ 和 $d_2$ 均为平凡微分。

定义 2.5. 设 $(L, [\cdot,\cdot], d_1, d_2)$ 是一个双微分分次李代数。若一对元素 $(\theta_1, \theta_2) \in L^1 \oplus L^1$ 满足以下条件，则称其为 Maurer-Cartan 元：

1. $\theta_1$ 是微分分次李代数 $(L, [,], d_1)$ 中的 Maurer-Cartan 元；
2. $\theta_2$ 是微分分次李代数 $(L, [,], d_2)$ 中的 Maurer-Cartan 元；
3. 满足以下相容条件

$$d_1\theta_2 + d_2\theta_1 + [\theta_1, \theta_2] = 0.$$

正如微分分次李代数可以通过 Maurer-Cartan 元进行扭曲，双微分分次李代数也有相同的结论。

命题 2.6. 设 $(L, [\cdot,\cdot], d_1, d_2)$ 是一个双微分分次李代数，且 $(\theta_1, \theta_2)$ 是一个 Maurer-Cartan 元。那么四元组 $(L, [\cdot,\cdot], d_1^{\theta_1}, d_2^{\theta_2})$ 是一个双微分分次李代数，其中

$$d_1^{\theta_1} = d_1 + [\theta_1, -] \ \ and \ \ d_2^{\theta_2} = d_2 + [\theta_2, -].$$

对于任意 $v_1, v_2 \in L^1,$，当且仅当 $(v_1, v_2)$ 是双微分分次李代数 $(L, [\cdot,\cdot], d_1^{\theta_1}, d_2^{\theta_2})$ 中的 Maurer-Cartan 元时，$(\theta_1 + v_1, \theta_2 + v_2)$ 才是双微分分次李代数 $(L, [\cdot,\cdot], d_1, d_2)$ 中的 Maurer-Cartan 元。

# 3 相容 BiHom-Lie 代数

本节中，我们介绍相容 BiHom-Lie 代数，并给出 Maurer-Cartan 刻画。本节最后，我们定义相容 BiHom-Lie 代数的表示。设 g 是一个向量空间，$\alpha, \beta : g \to g$ 是两个线性交换映射。

定义 3.1. 若对于所有 $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$，四元组 $(g, \lambda[\cdot,\cdot]_1 + \eta[\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 都是 BiHom-Lie 代数，则称两个 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1, \alpha, \beta)$ 和 $(g, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 是相容的。该定义中的相容条件等价于以下条件：

$$\begin{aligned}&[\beta^2(p), [\beta(q), \alpha(r)]_1]_2 + [\beta^2(q), [\beta(r), \alpha(p)]_1]_2 + [\beta^2(r), [\beta(p), \alpha(q)]_1]_2\\ &+[\beta^2(p), [\beta(q), \alpha(r)]_2]_1 + [\beta^2(q), [\beta(r), \alpha(p)]_2]_1 + [\beta^2(r), [\beta(p), \alpha(q)]_2]_1 = 0\end{aligned}$$

对于所有 $p, q, r \in g$。

定义 3.2. 相容 BiHom-Lie 代数是一个五元组 $(g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$，其中 $(g, [\cdot,\cdot]_1, \alpha, \beta)$ 和 $(g, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 都是 BiHom-Lie 代数，且彼此相容。在这种情况下，当扭曲映射 $\alpha$ 和 $\beta$ 可由上下文明确时，我们称这对 $([\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2)$ 是 g 上的相容 BiHom-Lie 代数结构。

相容 BiHom-Lie 代数是相容李代数的扭曲版本。回顾一下，相容李代数是一个三元组 $(g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2)$，其中 $(g, [\cdot,\cdot]_1)$ 和 $(g, [\cdot,\cdot]_2)$ 都是李代数，并且它们满足相容性条件：对于所有 $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$，$\lambda[\cdot,\cdot]_1 + \eta[\cdot,\cdot]_2$ 都是 g 上的李括号。因此，若 $\alpha = \beta = \mathrm{id}$，则相容 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 无非就是一个相容李代数。

定义 3.3. 设 $(g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 和 $(g', [\cdot,\cdot]'_1, [\cdot,\cdot]'_2, \alpha', \beta')$ 是两个相容 BiHom-Lie 代数。它们之间的态射是一个线性映射 $\phi : g \to g'$，该映射既是从 $(g, [\cdot,\cdot]_1, \alpha, \beta)$ 到 $(g', [\cdot,\cdot]'_1, \alpha', \beta')$ 的 BiHom-Lie 代数同态，也是从 $(g, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 到 $(g', [\cdot,\cdot]'_2, \alpha', \beta')$ 的 BiHom-Lie 代数同态。

例 3.1. 设 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数。若线性算子 $N : g \longrightarrow g$ 满足 $[N(p), N(q)] = N([N(p), q] - [N(q), p] - N([p, q]))$, 对任意 $p, q \in g$ 均成立，则称 N 为 BiHom-Nijenhuis 算子。于是，g 上有如下变形 BiHom-Lie 括号:

$$[p, q]_N = [N(p), q] - [N(q), p] - N([p, q])$$

换言之，$(g, [\cdot,\cdot]_N, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数。容易看出，五元组 $(g, [\cdot,\cdot], [\cdot,\cdot]_N, \alpha, \beta)$ 是一个相容 BiHom-Lie 代数。

定义 3.4. 设 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数，且 s、l 为非负整数，$\lambda \in \mathbb{K}$。若线性算子 $R : g \longrightarrow g$ 满足

$$\begin{aligned} \alpha \circ R &= R \circ \alpha \\ \beta \circ R &= R \circ \beta \\ [R(p), R(q)] &= R([\alpha^s\beta^l R(p), q] + [p, \alpha^s\beta^l R(q)] + \lambda[p, q]) \end{aligned}$$

对所有 $p, q \in g$，称 R 为 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 上权为 $\lambda$ 的 sl-Rota-Baxter 算子

sl-Rota-Baxter 算子 R 在 g 上诱导出一种新的 BiHom-Lie 代数结构，其 BiHom-Lie 括号为

$$[p, q]_R = [\alpha^s\beta^l R(p), q] + [p, \alpha^s\beta^l R(q)] + \lambda[p, q]$$

定义 3.5. BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 上两个具有相同权 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的 sl-Rota-Baxter 算子 R 和 S 称为相容的，当且仅当

$$[R(p), S(q)] + [S(p), R(q)] = R([\alpha^s\beta^l S(p), q] + [p, \alpha^s\beta^l S(q)]) + S([\alpha^s\beta^l R(p), q] + [p, \alpha^s\beta^l R(q)]).$$

命题 3.2. 设 R 和 S 是 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot], \alpha, \beta)$ 上两个权为 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的相容 sl-Rota-Baxter 算子，则 $(g, [\cdot,\cdot]_R, [\cdot,\cdot]_S, \alpha, \beta)$ 是一个相容 BiHom-Lie 代数。

设 g 是一个向量空间，且 $\alpha, \beta : g \longrightarrow g$ 是一个线性映射。考虑分次李代数 $(C^{*+1}_{BiHom}(g, g), [\cdot,\cdot]_{NR})$，四元组

$$(C^{*+1}_{BiHom}(g, g), [\cdot,\cdot]_{NR}, d_1 = 0, d_2 = 0)$$

是一个双微分分次李代数。于是我们得到相容 BiHom-Lie 代数的如下 Maurer-Cartan 刻画。

定理3.3。g 上的相容 BiHom-Lie 代数结构与双微分分次李代数 $(C^{*+1}_{BiHom}(g,g), [\cdot,\cdot]_{NR}, d_1 = 0, d_2 = 0)$ 中的 Maurer-Cartan 元之间存在一一对应关系。

证明。设 $[\cdot,\cdot]_1$ 和 $[\cdot,\cdot]_2$ 是 g 上两个乘法斜对称双线性括号。则括号 $[\cdot,\cdot]_1$ 和 $[\cdot,\cdot]_2$ 分别对应于 $C^2_{BiHom}(g, g)$ 中的元素（分别记为 $\mu_1$ 和 $\mu_2$,）。于是

1. $[\cdot,\cdot]_1$ 是 BiHom-Lie 括号 $\Longleftrightarrow [\mu_1, \mu_1]_{NR} = 0$;

2. $[\cdot,\cdot]_2$ 是一个 BiHom-Lie 括号 $\Longleftrightarrow [\mu_2,\mu_2]_{NR}=0$;

3. 相容条件 (3)$\Longleftrightarrow [\mu_1,\mu_2]_{NR}=0$。

因此，$(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 是相容 BiHom-Lie 代数，当且仅当 $(\mu_1,\mu_2)$ 是双微分分次李代数 $(C^{*+1}_{BiHom}(g,g),[\cdot,\cdot]_{NR}, d_1=0, d_2=0)$ 中的 Maurer-Cartan 元。□

命题 3.4. 设 $(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 是相容 BiHom-Lie 代数。那么，对于 g 上任意两个乘法型斜对称双线性运算 $[\cdot,\cdot]_1'$ 和 $[\cdot,\cdot]_2'$，五元组

$$(g,[\cdot,\cdot]_1+[\cdot,\cdot]_1',[\cdot,\cdot]_2+[\cdot,\cdot]_2',\alpha,\beta)$$

是相容 BiHom-Lie 代数，当且仅当 $(\mu_1',\mu_2')$ 是双微分分次李代数 $(C^{*+1}_{BiHom}(g,g), [\cdot,\cdot]_{NR}, d_1=[\mu_1,-], d_2=[\mu_2,-])$ 中的 Maurer-Cartan 元。这里，$\mu_1'$、$\mu_2'\in\in C^2_{BiHom}(g,g)$ 分别表示与括号 $[\cdot,\cdot]_1'$ 和 $[\cdot,\cdot]_2'$ 对应的元素。

下面我们定义相容 BiHom-Lie 代数的表示。

定义 3.6. 相容 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 的一个表示由一个五元组 $(V, \bullet_1,\bullet_2,\alpha_V,\beta_V)$ 构成，满足
(i)$(V, \bullet_1,\alpha_V,\beta_V)$ 是 BiHom-Lie 代数 $(g, [.,.]_1,\alpha,\beta)$ 的一个表示 (ii) $(V, \bullet_2,\alpha_V,$
$\beta_V)$ 是 BiHom-Lie 代数 $(g, [.,.]_2,\alpha,\beta)$ 的一个表示 (iii) 满足以下相容条件

$[\beta(p), q]_1\bullet_2\beta_V(v)+[\beta(p), q]_2\bullet_1\beta_V(v) = \alpha\beta(p)\bullet_1(q\bullet_2 v)-\beta(q)\bullet_2(\alpha(p)\bullet_1 v)+\alpha\beta(p)\bullet_2(q\bullet_1 v)-\beta(q)\bullet_1(\alpha(p)\bullet_2 v)$，对所有 $p, q\in g$ 和 $v\in V$ 均成立。因此，任意相容 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 都是自身的一个表示，其中 $\bullet_1=[\cdot,\cdot]_1$ 和 $\bullet_2=[\cdot,\cdot]_2$。这称为伴随表示。

注 3.1. 设 $(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 是一个相容 BiHom-Lie 代数，且 $(V, \bullet_1,\bullet_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是它的一个表示。那么对任意 $\lambda,\eta\in\mathbb{K}$，四元组 $(g, \lambda[\cdot,\cdot]_1+\eta[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数，而 $(V, \lambda\bullet_1+\eta\bullet_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是它的一个表示。以下命题的证明与标准情形类似。

命题 3.5. 设 $(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 是一个相容 BiHom-Lie 代数，且 $(V, \bullet_1,\bullet_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是它的一个表示。那么直和 $g\oplus V$ 带有相容 BiHom-Lie 代数结构，其线性同态为 $\alpha\oplus\alpha_V$ 和 $\beta\oplus\beta_V$，且 BiHom-Lie 括号为

$$[(p,a),(q,b)]_i^{\ltimes}=([p,q]_i, x\bullet_i b-(\alpha^{-1}\beta(y))\bullet_i(\alpha_V\beta_V^{-1}(a)),\quad for\quad i=1,2\ \ and\ \ (p,a),(q,b)\in g\oplus V.$$

这称为半直积。

# 4 相容 BiHom-Lie 代数的上同调

本节中，我们介绍以某个表示为系数的相容 BiHom-Lie 代数的上同调。设 $(g, [\cdot,\cdot]_1,[\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 是一个相容 BiHom-Lie 代数，$(V, \bullet_1,\bullet_2,\alpha_V,\beta_V)$ 是它的一个表示。设 ${}^1\delta_{BiHom}: C^n_{BiHom}(g,V)\longrightarrow C^{n+1}_{BiHom}(g,V)$（对于 $n\geq 0$，${}^2\delta_{BiHom}: C^n_{BiHom}(g,V)\longrightarrow C^{n+1}_{BiHom}(g,V)$），分别是 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1,\alpha,\beta)$ 关于表示 $(V, \bullet_1,\alpha_V,\beta_V)$ 的 Chevalley-Eilenberg 上同调的上余边算子（以及 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_2,\alpha,\beta)$ 关于表示 $(V, \bullet_2,\alpha_V,\beta_V)$ 的 Chevalley-Eilenberg 上同调的上余边算子）。于是我们有

$$({}^1\delta_{BiHom})^2=0 \text{ and } ({}^2\delta_{BiHom})^2=0.$$

此外，我们有如下结论。

命题 4.1。上余边算子 ${}^1\delta_{BiHom}$ 和 ${}^2\delta_{BiHom}$ 满足以下相容性
${}^1\delta_{BiHom} \circ^2 \delta_{BiHom} +^2 \delta_{BiHom} \circ^1 \delta_{BiHom} = 0$。

在证明上述命题之前，我们先观察以下事实。对于一个相容 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 和一个表示 $(V, \bullet_1, \bullet_2, \alpha_V, \beta_V)$，我们考虑命题 3.6 中给出的 $g \oplus V$ 上的半直积相容 BiHom-Lie 代数结构。我们分别用$\pi_1, \pi_2 \in C^2_{BiHom}(g \oplus V, g \oplus V)$表示对应于 $g \oplus V$ 上 BiHom-Lie 括号 $[\cdot,\cdot]_1^{\kappa}$和 $[\cdot,\cdot]_2^{\kappa}$的元素。令

$$
\begin{aligned}
{}^1\delta_{BiHom} &: C^n_{BiHom}(g \oplus V, g \oplus V) \longrightarrow C^{n+1}_{BiHom}(g \oplus V, g \oplus V), \text{ for } n \geq 0,\\
{}^2\delta_{BiHom} &: C^n_{BiHom}(g \oplus V, g \oplus V) \longrightarrow C^{n+1}_{BiHom}(g \oplus V, g \oplus V), \text{ for } n \geq 0,
\end{aligned}
$$

分别表示 BiHom-Lie 代数 $(g \oplus V, [\cdot,\cdot]_1^{\kappa}, \alpha \oplus \alpha_V, \beta \oplus \beta_V)$ 的 Chevalley-Eilenberg 上同调（以及 BiHom-Lie 代数 $(g \oplus V, [\cdot,\cdot]_2^{\kappa}, \alpha \oplus \alpha_V, \beta \oplus \beta_V)$ 的 Chevalley-Eilenberg 上同调）中以自身为˜系数的上余边算子。注意，任意映射 $f \in C^n_{BiHom}(g \oplus V)$ 都可以提升为映射 $f \in C^n_{BiHom}(g \oplus V, g \oplus V)$，其定义为

$$\tilde{f}((p_1, v_1), ..., (p_n, v_n)) = (0, f(p_1, ..., p_n)).$$

˜那么，$f = 0$当且仅当 $f = 0$。
采用这些记号，对于任意 $f \in C^n_{BiHom}(g, V)$，我们有
$(\widetilde{{}^1\delta_{BiHom} f}) = \delta^1_{BiHom}(\tilde{f}) = (-1)^{n-1}[\pi_1, \tilde{f}]_{NR}$ and $(\widetilde{{}^2\delta_{BiHom} f}) = \delta^2_{BiHom}(\tilde{f}) = (-1)^{n-1}[\pi_2, \tilde{f}]_{NR}$.

证明。（命题4.1）对于任意$f \in C^n_{BiHom}(g,V)$，我们有

$$
\begin{aligned}
({}^1\delta_{BiHom} \circ^2 \delta_{BiHom} \widetilde{+ {}^2\delta_{BiHom}} \circ^1 \delta_{BiHom})(f) &= {}^1\delta_{BiHom}\widetilde{({}^2\delta_{BiHom} f)} + {}^2\delta_{BiHom}\widetilde{({}^1\delta_{BiHom} f)}\\
&= (-1)^n[\pi_1, \widetilde{{}^2\delta_{BiHom} f}]_{NR} + (-1)^n[\pi_2, \widetilde{{}^1\delta_{BiHom} f}]_{NR}\\
&= -[\pi_1, [\pi_2, \tilde{f}]_{NR}]_{NR} - [\pi_2, [\pi_1, \tilde{f}]_{NR}]_{NR}\\
&= [\pi_2, [\pi_1, \tilde{f}]_{NR}]_{NR} - [[\pi_1, \pi_2]_{NR}, \tilde{f}]_{NR} - [\pi_2, [\pi_1, \tilde{f}]_{NR}]_{NR}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\text{where } ([\pi_1, \pi_2]_{NR} = 0).$$

因此，可得 $({}^1\delta_{BiHom} \circ^2 \delta_{BiHom} +^2 \delta_{BiHom} \circ^1 \delta_{BiHom})(f) = 0$。由此即得所需结果。 □

现在我们可以定义相容 BiHom-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 关于表示 $(V, \bullet_1, \bullet_2, \alpha_V, \beta_V)$ 的系数的上同调。对于每个 $n \geq 0$，我们定义阿贝尔群 $C^n_{cBiHom}(g, V)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
C^0_{cBiHom}(g, V) &= C^0_{BiHom}(g, V) \cap \{v \in V | \alpha\beta^{-1}(p) \bullet_1 v = \alpha\beta^{-1}(p) \bullet_2 v, \forall p \in g\}\\
&= \{v \in V | \alpha_V(v) = v\,,\, \beta_V(v) = v \text{ and } \alpha\beta^{-1}(p) \bullet_1 v = \alpha\beta^{-1}(p) \bullet_2 v, \forall p \in g\},
\end{aligned}
$$

$$C^n_{cBiHom}(g, V) = \underbrace{C^n_{BiHom}(g, V) \oplus ... \oplus C^n_{BiHom}(g, V)}_{n\text{- copies}}, \text{ for } n \geq 1.$$

定义映射 $\delta_{cBiHom} : C^n_{cBiHom}(g, V) \longrightarrow C^{n+1}_{cBiHom}(g, V)$，$f$ or $n \geq 0$ by

$$\delta_{cBiHom}(v)(p) = \alpha\beta^{-1}(p) \bullet_1 v = \alpha\beta^{-1}(p) \bullet_2 v, \text{ for } v \in C^0_{cBiHom}(g, V) \text{ and } p \in g,$$
$$\delta_{cBiHom}(f_1, ..., f_n) = ({}^1\delta_{BiHom}f_1, ..., \underbrace{{}^1\delta_{BiHom}f_i +^2 \delta_{BiHom}f_{i-1}}_{i\text{-th position}}, ...,^2 \delta_{BiHom}f_n),$$

对于 $(f_1, ..., f_n) \in C^n_{cBiHom}(g, V)$。于是我们有以下结论。

命题 4.2. 映射 $\delta_{cBiHom}$ 是一个余边界映射，即 $(\delta_{cBiHom})^2 = 0$。

证明. 对任意 $v \in C^0_{cBiHom}(g,V)$，有

$$\begin{aligned}(\delta_{cBiHom})^2(v) &= \delta_{cBiHom}(\delta_{cBiHom}v) = ({}^1\delta_{BiHom}\delta_{cBiHom}v,^2 \delta_{BiHom}\delta_{cBiHom}v)\\ &= ({}^1\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}v,^2\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}v) = 0.\end{aligned}$$

此外，对任意 $(f_1, ..., f_n) \in C^n_{cBiHom}(g, V)$，$n \geq 1$，有

$$\begin{aligned}&(\delta_{cBiHom})^2(f_1, ..., f_n)\\ &= \delta_{cBiHom}({}^1\delta_{BiHom}f_1, ...,^1 \delta_{BiHom}f_i +^2 \delta_{BiHom}f_{i-1}, ...,^2 \delta_{BiHom}f_n)\\ &= ({}^1\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}f_1,\ {}^2\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}f_1 + {}^1\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}f_1 + {}^1\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}f_2, ...,\\ &\underbrace{{}^2\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}f_{i-2} + {}^2\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}f_{i-1} + {}^1\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}f_{i-1} + {}^1\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}f_i, ...,}_{3\leq i\leq n-1}\\ &{}^2\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}f_{n-1} + {}^2\delta_{BiHom}\ {}^1\delta_{BiHom}f_n + {}^1\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}f_n,\ {}^2\delta_{BiHom}\ {}^2\delta_{BiHom}f_n\\ &= 0\end{aligned}$$

这证明了 $(\delta_{cBiHom})^2 = 0$。 □

由上述命题可知，$\{C^*_{cBiHom}(g, V), \delta_{cBiHom}\}$ 是一个上链复形。相应的上同调群

$$H^n_{cBiHom}(g, V) = \frac{Z^n_{cBiHom}(g,V)}{B^n_{cBiHom}(g,V)} = \frac{Ker\delta_{cBiHom}:C^n_{cBiHom}(g,V)\longrightarrow C^{n+1}_{cBiHom}(g,V)}{Im\delta_{cBiHom}:C^{n-1}_{cBiHom}(g,V)\longrightarrow C^n_{cBiHom}(g,V)}, \text{ for } n \geq 0$$

称为相容 BiHom-Lie 代数 $(g, [.,.]_1, [.,.]_2, \alpha, \beta)$ 在表示 $(V, \bullet_1, \bullet_2, \alpha_V, \beta_V)$ 中取系数的上同调。

设 $g = (g, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, \alpha, \beta)$ 是一个相容 BiHom-Lie 代数，$V = (V, \bullet_1, \bullet_2, \alpha_V, \beta_V)$ 是它的一个表示。由注 3.15 可知，$g_+ = (g, [\cdot,\cdot]_1 + [\cdot,\cdot]_2, \alpha + \beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数，而 $V_+ = (V, \bullet_1 + \bullet_2, \alpha_V + \beta_V)$ 是它的一个表示。考虑相容 BiHom-Lie 代数 g 在表示 V 中取系数的上链复形 $\{C^*_{cBiHom}(g, V), \delta_{BiHom}\}$，以及 BiHom-Lie 代数 $g_+$ 在 V 中取系数的上链复形 $\{C^*_{BiHom}(g_+, V_+), \delta_{BiHom}\}$。同样地，在 [1], 中我们可以建立如下定理：

定理 4.3。集合 $\{\varphi\}_{n\geq 0}$ 定义了一个从 到 $\{C^*_{BiHom}(g_+, V_+), \delta_{BiHom}\}$ 的上链复形态射。因此，它在相应的上同调之间诱导出一个态射 $H^*_{cBiHom}(g, V) \to H^*_{BiHom}(g_+, V_+)$。其中 $\varphi_n$ 是一个映射 $\varphi_{n\geq 0}: C^n_{cBiHom}(g, V) \to C^n_{BiHom}(g_+, V_+)$，定义如下

$$\varphi_{n\geq 0} = \Big\{\varphi_0(v) = \frac{1}{2}(v), \quad v \in C^0_{cBiHom}(g, V) \tag{4.1}$$

$$\varphi_{n\geq 1}((f_1, \cdots, f_n)) = f_1 + \cdots + f_n, \quad (f_1, \cdots, f_n) \in C^{n\geq 1}_{cBiHom}(g, V)\Big\} \tag{4.2}$$

致谢：作者谨向审稿人对本文提出的宝贵意见和建议表示感谢。

# 参考文献

[1] Ammar, F., Ejbehi, Z., Makhlouf, A. (2010). Hom-代数的上同调与形变。arXiv 预印本，arXiv:1005.0456。[2] Cheng, Y., Qi, H. (2022, March). BiHom-Lie 代数的表示。载于《代数评论》（第 29 卷，第 01 期，第 125-142 页）。世界科学出版公司。[3] Das, A. (2022). 相容 Hom-Lie 代数的上同调与形变。arXiv 预印本，arXiv:2202.03137。[4] Das, A., Sen, S. (2022). Hom-Lie 代数上的 Nijenhuis 算子。《代数通信》，50(3)，1038-1054。[5] Fan, Y., Zhu, J., Chen, L. *O*-双Hom-Lie代数上的算子。[6] Graziani, G., Makhlouf, A., Menini, C., Panaite, F. (2015). BiHom-结合代数、BiHom-Lie 代数和 BiHom-双代数。SIGMA：《对称性、可积性与几何：方法与应用》，11，086。[7] Liu, L., Makhlouf, A., Menini, C., Panaite, F. (2017). BiHom-pre-Lie 代数、BiHom-Leibniz 代数及 BiHom-Lie 代数上的 Rota-Baxter 算子。arXiv 预印本，arXiv:1706.00474。[8] Liu, L., Makhlouf, A., Menini, C., Panaite, F. (2022). BiHom-NS 代数、扭曲 Rota-Baxter 算子和广义 Nijenhuis 算子。arXiv 预印本，arXiv:2206.04418。[9] Liu, J., Sheng, Y., Bai, C. (2023). 相容李代数的 Maurer-Cartan 刻画与上同调。《中国科学：数学》，1-22。[10] Mishra, S. K., Naolekar, A. (2020). *O*hom-Lie 代数上的算子。《数学物理学杂志》，61(12)，121701。