Draft version March 24, 2023 年使用
AASTeX631 默认样式排版

arXiv:2303.12907v1 [physics.space-ph] 22 Mar 2023

波望远镜技术的数据驱动不确定性量化：一般方程及其在 HelioSwarm 中的应用

T. Broeren [1] and K. G. Klein [2]

[1] *Department of Applied Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ, USA*
[2] *Lunar and Planetary Laboratory, University of Arizona, Tucson, AZ, USA*

（收稿日期：2023年3月9日；接受日期：2023年3月21日）

投稿至《天体物理学杂志增刊》

摘要

即将执行的美国国家航空航天局 HelioSwarm 任务将使用九艘航天器，首次对跨越多个尺度的空间等离子体进行同步多点测量。借助波望远镜技术，HelioSwarm 的测量数据将能够计算波矢—频率空间中的功率，并表征等离子体中存在于磁流体动力学和离子动力学尺度上的波所对应的色散关系。这项技术已应用于 CLUSTER 和 MMS 两项四航天器任务，其有效性此前也已通过少量案例研究加以评估。我们将这一不确定性量化分析扩展至由四至九艘航天器组成的任意构型，用于三维平面波。我们采用贝叶斯推断，得出近似描述波矢重建误差的方程，该误差是相对波矢模、航天器构型形状和航天器数量的函数。我们展示了如何将这些方程应用于取自九航天器构型的数据，从而提高该技术的准确度，并扩大可表征的波矢模范围。

关键词： 磁场 (994) — 等离子体物理学 (2089) — 贝叶斯统计学 (1900) — 计算方法 (1965) — 空间等离子体 (1544)

1. 引言

等离子体由带电粒子组成，带电粒子的运动会产生电磁场，也会响应电磁场。电磁波是场与带电粒子之间自洽耦合所产生的一种基本集体响应。这些电磁波在等离子体中传播，携带能量并将能量传递给传播路径上的物体。为了更好地理解等离子体系统，我们希望研究这些波的产生与耗散。然而，在地球上很难制造和约束等离子体。因此，太空常被用作研究等离子体的天然实验室（Verscharen等，2019年）。

波望远镜技术（有时也称为k滤波）旨在从多航天器任务进行的原位磁场测量中提取波信息（Pincon & Lefeuvre1988）。该技术计算谱能量密度随频率 ω 和波矢**k**的变化，使我们能够估算等离子体波的方向、速度和频率。该技术已用于分析欧洲空间局CLUSTER II任务（Glassmeier等，2001年）以及美国国家航空航天局MMS任务（Narita等，2016年的数据。由于该技术利用来自航天器构型的原位数据，其可靠性取决于航天器构型的大小及其形状（Sahraoui等，2010年）。有关波望远镜技术应用的近期综述见Narita等(2022)。

通讯作者： Theodore Broerenbroeren@arizona.edu

人们已提出众多多航天器任务（包括美国国家航空航天局的九航天器任务HelioSwarm），希望运用波望远镜波矢识别技术（Plice 等（2020）；Maruca 等（2021）；Retino 等（2019））。我们希望量化这一波矢识别技术的准确度，以验证波望远镜技术在未来多航天器任务中的适用性。由于这些任务概念共有的仪器是磁力仪，我们将分析重点放在只需原位磁场测量的波望远镜技术版本上。我们希望解答的具体问题包括：

1. 能否建立一个方程，用于给出任意航天器构型下识别波矢$\mathbf{k}$ 时的预期误差?
2. 预期误差如何随航天器数量的不同而变化?
3. 预期误差如何随航天器构型形状的不同而变化?
4. 这种平均误差值通常会出现多大程度的方差?

以下各节将对这些问题给出定量答案。本研究所用的方法将在§2 中介绍，所得学习得到的方程见§3。方程的事后分析将在§4中讨论，并在§4.2中将其应用于 HelioSwarm 设计参考任务的九航天器构型。波望远镜推导的更多细节见附录§A；附录§B概述了我们用于高效扫描波矢空间的算法；附录§C分析了示例 HelioSwarm 航天器构型的几何特性；附录§D则提供了对拟合方程的进一步验证。

2. 方法

本节首先介绍经典波望远镜的计算过程，见 §2.1。接下来，我们将在§2.2中讨论基于理论和先前数值研究得出的该技术的局限性。然后，我们将在 §2.3中介绍贝叶斯推断的概念，并用它来确定学习得到的方程中的系数。最后，我们将在 §2.4中详细介绍模拟中使用的航天器构型和磁场波，以及由此创建的数据集。

2.1. *Wave-Telescope Technique*

波望远镜技术通过搜索场能量密度的极大值，识别等离子体中存在的最强波 $P(\omega,\ \mathbf{k})$ (Pincon 和 Lefeuvre 1988；Motschmann 等（1996）；Narita 等（2022））。我们首先假设磁场可以表示为平面波的叠加

$$\mathbf{b}(t,\mathbf{r}_n)=\sum_{\omega}\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{b}(\omega,\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n-\omega t)}. \tag{1}$$

左侧的 $\mathbf{b}(t,\ \mathbf{r}_n)$ 是在时刻 t 航天器 n的位置 $\mathbf{r}_n$处测得的磁场值。令 N 表示一个构型中的航天器总数。若要将该技术用于其他应用，可以用其他基函数（例如球面波）替代平面波基函数（Constantinescu 等（2006））。

我们要计算的量——场能量密度 $P(\omega,\mathbf{k})$——是场能量矩阵$\mathbf{P}(\omega,\mathbf{k})$的迹，其定义为

$$\mathbf{P}(\omega,\mathbf{k})=\mathbb{E}\left[\mathbf{b}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{b}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\right]. \tag{2}$$

我们用小写粗体字母表示向量量，用大写粗体字母表示矩阵（或更高维）量，用非粗体字母表示标量值。我们用符号 $\mathbb{E}$ 表示期望值的计算。匕首符号 $\dagger$ 表示对向量/矩阵量取厄米（复共轭）转置。

由于航天器磁力仪的时间测量频率（10-100Hz）相较于其空间采样间隔（100-1000km）要快得多，因此我们可以通过离散傅里叶变换，将各航天器上的磁场测量时间序列 $n\leq N$ 转换到频域

$$\mathbf{b}(\omega,\mathbf{r}_n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t}\mathbf{b}(t,\mathbf{r}_n)e^{i\omega t}. \tag{3}$$

我们无法在$\mathbf{r}$ 空间和$\mathbf{k}$ 空间之间执行类似的变换，因为 N 测量位置不足以近似所需的求和。因此，我们采用最小方差估计器方法来描述空间结构。

频域变换后的 磁场测量，$\mathbf{b}(\omega,\mathbf{r}_n)$，可以表示为平面波的单重求和

$$\mathbf{b}(\omega,\mathbf{r}_n)=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{b}(\omega,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}. \tag{4}$$

方程 4 可通过合并所有 N 航天器的测量结果，写成矩阵形式。所得方程为

$$\tilde{\mathbf{b}}(\omega)=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{H}(\mathbf{k})\mathbf{b}(\omega,\mathbf{k}) \tag{5}$$

其中，测量 得的场量（经频域变换）包含在矩 ix

$$\tilde{\mathbf{b}}(\omega)=\begin{pmatrix}\mathbf{b}(\omega,\mathbf{r}_1)\\ \vdots\\ \mathbf{b}(\omega,\mathbf{r}_N)\end{pmatrix}_{3N\times 1}. \tag{6}$$

令$\mathbf{I}$ 表示 3×3 单位矩阵，我们将传播矩阵定义为

$$\mathbf{H}(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\mathbf{I}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\\ \vdots\\ \mathbf{I}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_N}\end{pmatrix}_{3N\times 3}. \tag{7}$$

我们还将 $3N\times 3N$ 空间相关矩阵定义为以下期望值

$$\mathbf{M}(\omega)=\mathbb{E}\left[\tilde{\mathbf{b}}(\omega)\tilde{\mathbf{b}}^{\dagger}(\omega)\right]. \tag{8}$$

为近似求得期望值 $\mathbf{M}$，我们将数据时间序列划分为 Q 个子区间，并计算每个子区间对应的 $\tilde{\mathbf{b}}_q(\omega)$。然后对不同区间的结果取平均值

$$\mathbf{M}(\omega)=\mathbb{E}\left[\tilde{\mathbf{b}}(\omega)\tilde{\mathbf{b}}^{\dagger}(\omega)\right]\approx\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}\tilde{\mathbf{b}}_q(\omega)\tilde{\mathbf{b}}_q^{\dagger}(\omega). \tag{9}$$

为了建立 $\mathbf{M}(\omega)$ 与已知参数之间的关系，我们采用 $\mathbf{b}(\omega)$ 的定义（方程5），将其右乘其厄米伴随，并取期望值。然后根据 $\mathbf{P}$ 的定义（方程 2），可得它与$\mathbf{M}$ 之间满足以下关系式

$$\mathbf{M}(\omega)=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{H}(\mathbf{k})\mathbf{P}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{H}^{\dagger}(\mathbf{k}). \tag{10}$$

现在的目标是求出满足方程 $\mathbf{P}$，使其对 10 中所有已计算出的 $\mathbf{M}(\omega)$ 和$\mathbf{H}(\mathbf{k})$ 值均成立。由于对波矢求和，10 无法直接求逆以解出 $\mathbf{P}$。因此，我们将采用滤波器组方法来求解。

每个滤波器 $\mathbf{W}(\omega,\ \mathbf{k})$ 都是一个矩阵，它将所需的 $\mathbf{b}(\omega,\ \mathbf{k})$（根据方程 $P2$ 计算）与通过以下方程计算得到的 $\mathbf{b}(\omega)$ 联系起来

$$\mathbf{b}(\omega,\mathbf{k})=\mathbf{W}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\tilde{\mathbf{b}}(\omega). \tag{11}$$

根据此定义，我们的滤波器 $\mathbf{W}$ 是一个 $3N\times 3$ 矩阵。我们可以将方程 11 与其厄米伴随相乘，并取期望值（再次应用方程 2），得到

$$\mathbf{P}(\omega,\mathbf{k})=\mathbf{W}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{M}(\omega)\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k}). \tag{12}$$

现在，我们通过要求滤波器吸收所有频率和波矢不恰好等于 ω andk 的能量，来唯一确定每个滤波器 $\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k})$。将其表述为一个最小化问题，即通过最小化总功率来确定滤波器

$$\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k})=\underset{\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k})}{\operatorname{argmin}}\,\mathrm{Tr}\left[\mathbf{W}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{M}(\omega)\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k})\right] \tag{13}$$

满足以下约束：频率为 ω 、波矢为 $\mathbf{k}$ 的波经过滤波矩阵作用后保持不变。根据方程 5 和 11 可知，该约束等价于

$$\mathbf{W}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{H}(\mathbf{k})\mathbf{b}(\omega,\mathbf{k}) = \mathbf{b}(\omega,\mathbf{k}). \tag{14}$$

然而，为了正确考虑这些矩阵的虚部，我们必须确保这一约束的厄米伴随也得到满足。这意味着可以通过以下公式求得功率

$$\begin{aligned} P(\omega,\mathbf{k}) = &\min_{\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k})} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{W}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{M}(\omega)\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k})\right] \\ \text{s.t.} \quad &\mathbf{W}^{\dagger}(\omega,\mathbf{k})\mathbf{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{I} \ \text{ and } \ \mathbf{H}^{\dagger}(\mathbf{k})\mathbf{W}(\omega,\mathbf{k}) = \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{15}$$

系统 15 可以使用拉格朗日乘子法求解。该系统的精确解（推导见附录§A）为

$$P(\omega,\mathbf{k}) = \mathrm{Tr}\left[\mathbf{H}^{\dagger}(\mathbf{k})\mathbf{M}^{-1}(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{k})\right]^{-1}. \tag{16}$$

为了确定磁波的 ω 和 $\mathbf{k}$ ，我们扫描 ω 和 $\mathbf{k}$ 的所有可能取值，并使用方程 16 计算每个取值对应的量 $P(\omega,\ \mathbf{k})$。扫描完成后，我们发现 $P(\omega,\ \mathbf{k})$ 会在 ω 和 $\mathbf{k}$ 的某些取值处出现局部极大值，这些取值对应于等离子体中存在的波的频率和波矢（示例见图11 ）。

2.2. 波望远镜的局限性

使用该技术扫描的 $(\omega,\ \mathbf{k})$ 空间范围并非无限。如果 T 是我们正在处理的数据的时间采样点数，且 $1/\Delta t$ 是采样频率，那么采用标准傅里叶变换得到的（正）频域范围受限于

$$\omega \in \left\{0, \frac{1}{T\Delta t}, \frac{2}{T\Delta t}, ..., \frac{1}{2\Delta t} - \frac{1}{T\Delta t}\right\}. \tag{17}$$

我们将波矢 $\mathbf{k}$ 表示为球坐标形式 $[k, k_\theta, k_\phi]$。如果所用的航天器构型既非共线也非共面，那么我们就可以重建所有 $k_\theta \in [0, 2\pi)$ 和 $k_\phi \in [0, \pi)$。然而，由于奈奎斯特采样定理，波矢模 k存在上限。若令 d_{max} 为最大航天器间距离，那么理论上我们能够重建的波矢模为 $k < k_{max}$ (Sahraoui 等，2010年；Constantinescu 等（2006）)，其中

$$k_{max} = \pi/d_{max}. \tag{18}$$

以往研究（Sahraoui 等，2010年）针对模拟平面波，使用一种四航天器构型，通过数值计算了波望远镜技术所确定的波矢的相对误差。我们使用单一、形状完美的四面体四航天器构型进行了数值实验。我们模拟了具有 35 种波矢模和 50 个方向的平面波（见 §2.4.2）。由于波望远镜计算出的波矢存在随机偏移，我们在图1中绘出了每个波矢模对应的误差中位数。可以看出，当波矢模小于 k_{max}时，误差随波矢模增大而按对数线性规律下降。这使我们得出结论，与Sahraoui 等人(2010)的结论一致，波望远镜技术在约一个数量级的波矢范围内具有较高精度（误差为 $\leq 10\%$），其中 $k \in (0.1k_{max},\ k_{max})$。

由于航天器构型所敏感的波矢模会随航天器构型的尺寸变化，我们将相对波矢模定义为 $\bar{k}$，即

$$\bar{k} = kL. \tag{19}$$

在此定义中， k 是波矢的绝对模（单位为距离倒数），而 L 是用于波望远镜计算的航天器构型的特征尺寸（单位为距离）（见公式24）。因此，对于任何航天器构型，我们都可以通过公式 $\bar{k}$ 将无量纲的相对波矢模（用于图1、3、4和6）换算为实际的长度倒数单位19。

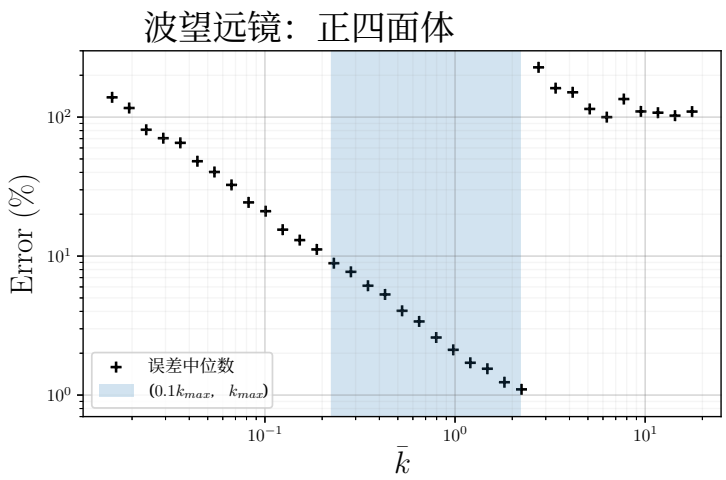


图1. 使用波望远镜技术，在单个形状完美的四航天器构型（$\chi = 0,\ \ L = 1,\ \ d_{max} = \sqrt{2}$）下进行数值实验，以识别波矢。我们绘出了波矢识别误差中位数随波矢模变化的关系。

2.3. 贝叶斯推断

在本研究中，我们采用一种称为贝叶斯推断的统计方法来估计未知模型参数。该方法利用贝叶斯定理，通过依次纳入数据来更新用户为每个未知参数设定的先验分布。纳入所有数据后，我们便得到每个量的后验分布。这些后验分布表示在给定数据和先验信息的条件下，各参数的概率密度函数（McElreath2016）。

我们选择使用 PyMC3 软件包实现贝叶斯推断（Salvatier 等，2016）。该工具使用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）采样来构建后验分布。MCMC 不会直接计算或近似后验分布，而是直接从参数的后验分布中抽取样本。我们使用直方图来呈现这些后验分布。最后，我们计算这些后验样本的统计量，例如均值和标准差，从而得到每个待估计未知模型参数的期望值和误差线。

2.4. 数据集生成

为了提取描述从不同尺寸和形状的航天器构型中重建波矢时所产生误差的方程，我们必须先定义描述尺寸和形状的一般参数，使其适用于任意观测站。由于我们采用数据驱动方法来学习这些方程，因此还必须确保数据集能够依据这些一般形状和尺寸参数，对航天器构型与波矢的所有可能组合进行均匀采样。

2.4.1. *Spacecraft Configurations*

为了量化航天器构型的形状和尺寸，我们采用 Paschmann& Daly （1998）第 12 章中描述的平面度、伸长度和特征尺寸定义。根据所有 N 航天器的位置，我们将构型的重心计算为航天器位置的平均值

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{r}_n. \tag{20}$$

随后，我们利用重心来定义 3×3 体积张量矩阵

$$R_{jk} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[r_n^{(j)} - (\bar{r})^{(j)}\right]\left[r_n^{(k)} - (\bar{r})^{(k)}\right], \tag{21}$$

其中，$r_n^{(j)}$是航天器位置的 j^{th} 分量。我们对体积张量的特征值开平方，得到其奇异值 $a \geq b \geq c$。这些奇异值描述了一个椭球的三个半轴，

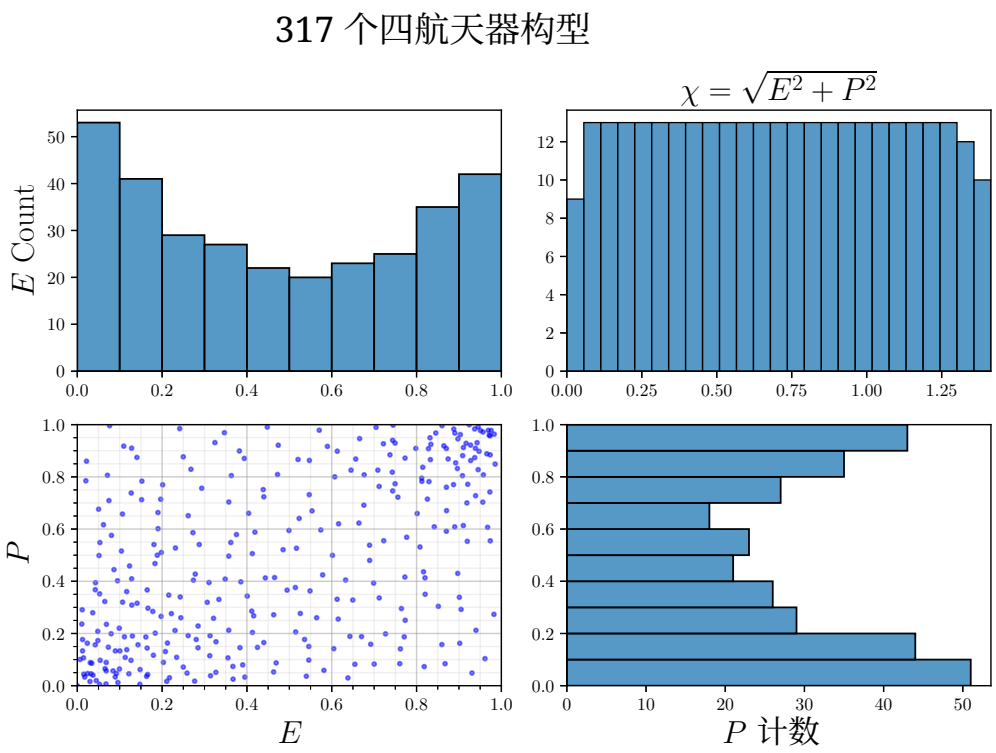


图 2. 展示四航天器构型形状分布的直方图。形状参数的分布 χ，定义见方程 25，对于每种航天器数量，在区间 $(0, \sqrt{2})$ 内近似均匀分布。在线期刊中提供了四至九航天器构型的完整图集（6 幅图像）。

该椭球近似表示航天器构型的尺寸和方向。我们用这些奇异值定义平面度（P）、伸长度（E）和特征尺寸（L）。伸长度表示椭球最长的两个半轴之比

$$E = 1 - b/a \in [0, 1], \tag{22}$$

对于近乎共线的构型，该值趋近于最大值。平面度描述椭球最短的两条半轴之比

$$P = 1 - c/b \in [0, 1], \tag{23}$$

对于近乎共面的构型，该值趋近于最大值。特征尺寸描述椭球沿其半长轴方向的整体尺寸

$$L = 2a \in [0, \infty). \tag{24}$$

以往对这些量的研究表明，构型的形状规整度与伸长度和平面度对称相关（第 343 页 Paschmann & Daly (1998),Broeren 等人 (2021)）。因此，我们定义了一个新的形状参数 χ，将伸长度和平面度结合起来

$$\chi = \sqrt{E^2 + P^2}. \tag{25}$$

对于形状良好的“球形”航天器构型，该新参数接近其最小值 0；而对于形状不佳（共线和共面）的构型，该参数则接近其最大值 $\sqrt{2}$。

为了检验波望远镜技术在各种航天器构型下的准确度，我们定义了若干航天器构型集合，其中包含 $N = 4$、5、6、7、8 和 9 个航天器。针对每种航天器数量，我们随机生成约 300 种构型，使其在形状参数 χ 范围内均匀分布。生成的四航天器构型如图 2所示，而 $N \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ 构型则见相应的图集。每种航天器构型均经过缩放，使其大小为单位长度（$L = 1$ 见公式 24）。

2.4.2. *Plane-Wave Distribution*

使用斐波那契球面算法（Keinert 等人，2015），我们定义了 50 个单位方向，模拟中的平面波将沿这些方向传播。这些单位方向的数量使平均最小角间隔达到 $28°$。针对这 50 个单位方向中的每一个，我们模拟了 35 个按对数间隔取值的波矢模对应的平面波（即取值为 k），其范围为 $[0.005\pi, 5.62\pi]$。因此，每种航天器构型都模拟了 1、750 个平面波。

由于我们已将每种航天器构型归一化为特征尺寸为单位（$L = 1$），因此我们知道，最大航天器间距离 d_{max}通常小于 1。根据方程 18 ，我们知道这对应于一个 $k_{max} > \pi$值。因此，我们将模拟中的最大相对波矢模设定为大于 π ，这样所有航天器构型都可能发生混叠。

在波望远镜技术的模拟中，我们首先在每个航天器处生成合成磁场测量

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}_n, t) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{k} - \omega t)}\right]. \tag{26}$$

这些磁场测量表示一个振幅为单位、相位为零、波矢为 $\mathbf{k}$、频率为ω的单一波。频率值 ω 是从可探测频率区间 $\omega \sim U\left[0, 1/2\Delta t\right.$内的均匀分布中随机抽取的。我们为每个航天器采集 64 个时间点的数据，并将数据划分为 $Q = 4$ 个子区间，通过系综平均获得期望值。随后，我们执行离散傅里叶变换，将数据从时域转换到频域。最后，对于每种航天器构型和波矢组合，我们采用 §2.1 中所述的波望远镜技术，根据模拟的航天器数据估算波矢$\mathbf{k}_{calc}$ 。我们采用附录 §B 中所述的扫描过程，加快波望远镜技术的计算。由此，对于每种航天器数量 N，可得到约 525,000 个样本的数据集。对于这些模拟波，我们计算其波矢识别误差，定义如下：

$$Error = 100\frac{\|\mathbf{k}_{calc} - \mathbf{k}\|_2}{\|\mathbf{k}\|_2}. \tag{27}$$

3. 方程学习

在第 §3.1 节中，我们将波望远镜模拟的完整结果可视化。随后，我们介绍数据筛选方法，并说明如何选取将在后续分析中使用的数据子集，详见 §3.2。在 §3.3中，我们定义了与这些结果相拟合的方程形式。接着，在 §3.4 中，我们验证贝叶斯推断能够利用数据集学习这些方程中的系数；随后，在 §3.5中，我们将贝叶斯推断应用于筛选后的模拟数据，以获得全部 12 个系数的后验分布。最后，在 §3.6中，我们验证所得方程能够正确分类波望远镜技术产生的误差。

3.1. 数据探索

为了扩展图 1中误差的展示，我们在图 3左侧各面板中绘制平均误差随真实波矢的相对幅值 k 和形状参数 χ 的变化。我们在图 3中央各面板中绘制标准差随 k 和 χ 的变化，并在图 3 右侧各面板中绘制观测到的波矢信号发生混叠的概率。平均误差、标准差和混叠概率均通过对位于 χ线性分箱值内的元素进行计算得出。所有航天器数量 N 对应的结果见图 3对应的图集。

图3 显示，采用形状良好的四航天器构型（$\chi \approx 0$）并不能达到与形状同样良好的九航天器构型相同的最低平均误差。对于相同的构型形状参数值 χ，我们还注意到，九航天器构型能够以较高准确度重构约 1.5 个数量级范围内的波矢，而四航天器构型以相近准确度重构的波矢范围只有 1 个数量级。

对于图3 中所示的两种航天器数量，我们可以看到，当构型形状良好但波矢模过大时，会出现较大的误差。请注意，这些情况应对应于违反奈奎斯特采样定理且 k_{calc} 不正确的情形。为了更好地了解这些发生混叠的点与数据集中平滑变化的其余部分有何不同，我们在图4左侧面板中绘制了数据的一个小子集，具体针对满足 $0.1 \leq \chi < 0.2$ 的四航天器构型。

我们可以看到，发生混叠的数值计算线性度较差。并且采用了多种航天器构型，其 χ 值的范围内均不为零。我们

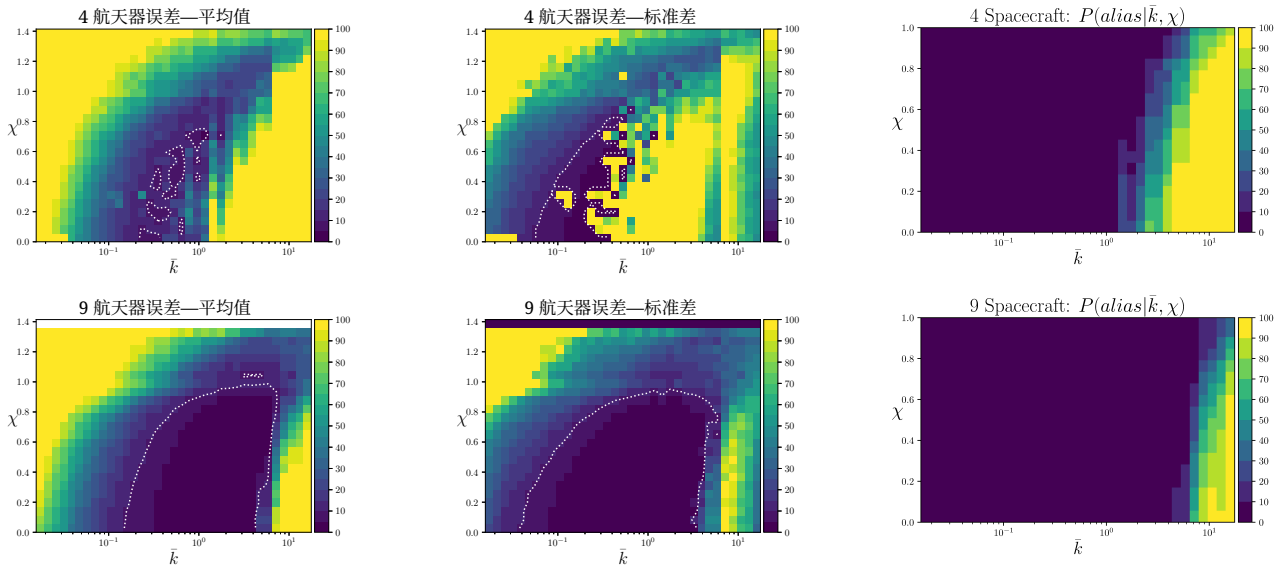


图3。 利用大量数值模拟的数据，我们展示了检测波矢相对模为 ¯的波所对应的平均误差（以颜色表示，定义见公式 27），该检测使用形状参数为 k 的四航天器或九航天器构型，结果见左侧面板。中央面板展示了每个波矢模和形状参数取值下数据的标准差。右侧面板展示了波矢信号发生混叠的观测概率。白色虚线表示平均误差和标准差均小于 10% 的区域。在线期刊中提供了四至九航天器构型的完整图集（18 幅图）。

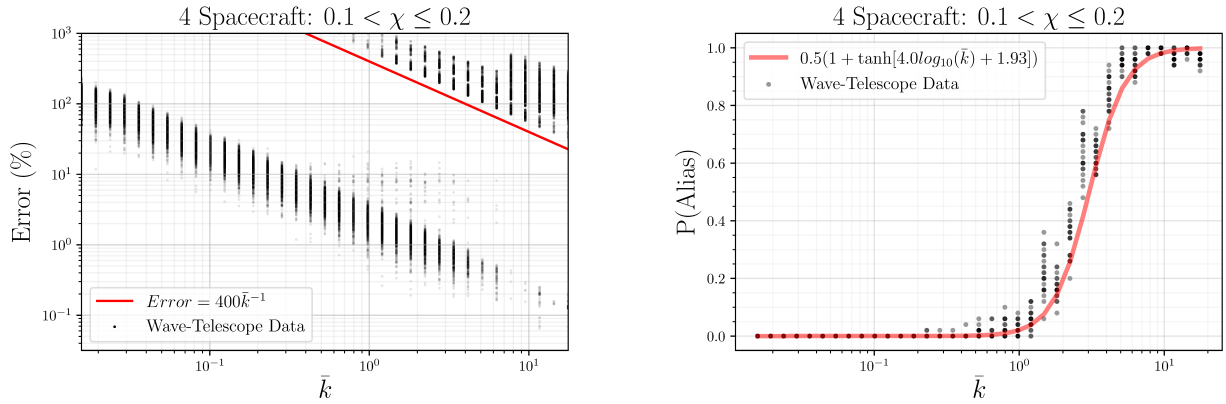


图4。 左侧面板以黑点绘出使用四航天器构型获得的误差，其中 $0.1 \leq \chi < 0.2$ 为黑点。我们注意到，可以通过在 $Error = 400\bar{k}^{-1}$处设置一个简单阈值来区分发生混叠的点。右侧面板绘出了波矢重建在每个模值 $\bar{k}$处发生混叠的概率。

¯在图 k 4 中固定 4，因为图 1 中的误差是针对所有波传播方向计算的，而图 4 中绘制的是所有波传播方向上的误差。我们观察到，在固定的

3.2. 数据筛选

比较图 4 左图与图 1 可见，不存在能够区分发生混叠与未发生混叠数据点的阈值 k_{max}。相反，我们发现，落入混叠点群的数据点比例会随 $\bar{k}$变化。我们手动标记位于直线 $Error = 400\bar{k}^{-1}$ 上方的数据点，将其视为波矢重建中发生混叠的数据点。这些数据点将不纳入估计均值和标准差误差方程的拟合中。我们将通过量化波望远镜计算发生混叠（因此落入 $Error = 400\bar{k}^{-1}$上方数据点群）的概率，来捕捉其影响。

落在两个明显呈对数线性趋势的组之间的少量数据点，是用于寻找波望远镜技术峰值功率输出的搜索算法中的数值误差造成的。我们没有对每个波矢和航天器组合的 $\mathbf{k}$ 空间进行密集扫描。相反，为了加快数百万次计算，我们采用了附录 §B中所述的三维自适应网格划分方案。少量因扫描算法而产生较大误差的数据点似乎不会影响模拟的总体统计结果（见表3）。

最后，从现在开始，我们将排除使用形状极差的航天器构型（$\chi > 1$）生成的数据。在使用 $\chi > 1$ 的构型时，我们发现，由波传播方向变化所驱动的变动主导了观测到的均值趋势。由于对这些巨大变动进行建模需要采用不同于我们方法的另一种方法，因此我们将完全舍弃这些情况。我们对这些形状极差的构型情况不感兴趣，因为多航天器任务通常会采用形状良好的四面体构型。

3.3. 方程形式

我们将数据集视为包含两个自变量（形状参数 χ 和相对波矢模 $\bar{k}$）以及一个因变量（误差百分比）。这意味着，在 $\bar{k}$ 和 χ 取值恒定时，波传播方向会导致 $\bar{k}$误差发生变化。我们还将数据集视为由两类截然不同的点构成：非混叠点和发生混叠的点。我们分别学习描述非混叠情况和发生混叠情况的方程。得到这两个方程后，我们使用简单的期望值公式将它们结合起来。

3.3.1. *Non-Aliased Case*

在图 4 的左图中，我们绘制了误差随 $\bar{k}$ 变化的曲线，考察了较小范围内的形状参数，并发现非混叠点呈现出明显的对数线性趋势。通过对以下形式的方程进行回归

$$Error = \alpha_0(\chi)\bar{k}^{\alpha_1(\chi)}, \tag{28}$$

我们观察了两个系数（α_0 和 α_1）如何随 χ的不同取值而变化。由此得到了一种函数形式，可拟合数据集中的平均值

$$Error(\bar{k},\chi) = \left(a_0^{\chi-a_1} + a_2\right)\bar{k}^{\left(a_3^{\chi-a_4}+a_5\right)}. \tag{29}$$

随后，我们从数据集中实际得到的误差值中减去了方程 29 给出的均值估计。我们发现，该残差的 $\log_{10}$ 似乎服从均值为零的正态分布，其标准差可以用以下形式建模

$$\sigma(\bar{k},\chi) = c_0 + c_1\log_{10}\bar{k} + c_2\chi^2. \tag{30}$$

因此，给定适当的系数，某次波望远镜计算中的误差（假设未发生混叠）可以用正态分布来描述

$$\log_{10}\left(Error(\bar{k},\chi)\right) \sim N(\mu,\sigma^2) \tag{31}$$

其中

$$\mu(\bar{k},\chi) = \log_{10}\left(a_0^{\chi-a_1} + a_2\right) + \left(a_3^{\chi-a_4} + a_5\right)\log_{10}\bar{k} \tag{32}$$

且 σ 由方程 30给出。

3.3.2. *Aliased Case*

请注意，我们可以使用阈值方程 $Error = 400\bar{k}^{-1}$来识别第二组点，并将其单独处理。对于每个满足 $0.1 < \chi \leq 0.2$的四航天器构型，我们在图4右侧面板中绘制点发生混叠（即落在此阈值以上）的概率。由于该概率随 $\bar{k}$的值增大而 k增大，我们拟合如下形式的 S 形函数

$$P(alias|\bar{k},\chi) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\beta_0(\chi)\log_{10}\bar{k} + \beta_1(\chi)\right]\right) \tag{33}$$

到数据。我们 观察 β 系数如何随 χ 变化，可以发现该泛函 m

$$P(alias|\bar{k},\chi) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[4\log_{10}\bar{k} + b_0\chi^2 + b_1\chi + b_2\right]\right) \tag{34}$$

¯可以表示所有 χ 和 k取值下的混叠概率。

现在我们已经得到了无混叠情况下误差均值的方程，以及混叠概率，就可以定义一个有效误差方程，根据两种可能结果给出期望值

$$\mu_{eff}(\bar{k},\chi) = \left[1 - P(alias|\bar{k},\chi)\right]\mu(\bar{k},\chi) + P(alias|\bar{k},\chi)\max\left(400\bar{k}^{-1}, 100\right). \tag{35}$$

项 max $\left(400\bar{k}^{-1},\ 100\right)$ 假设所有发生混叠的点的误差值至少为 100。对于较大的 k，这可能会略微

¯ ¯高估。我们设置这一最小值，使有效误差不会随着 $k \to \infty$ 而趋于 0。

3.4. 贝叶斯推断验证

我们希望使用贝叶斯推断（McElreath2016）来估计方程 32、30 和 34中的未知系数及其不确定性。在尝试这样做之前，我们必须验证数据集是否足够丰富，能够捕捉我们拟学习的函数形式的动力学特征。为此，我们生成一个新的验证数据集，该数据集严格遵循所提出的函数分布，且其系数值已知。

表1. 使用结果摘要 在我们的验证数据集上进行贝叶斯推断。由于我们能够学习这些系数
本例中所提出方程的 我们已验证可以对波望远镜数据集执行此操作。

参数 Name	True 数值	先验分布 $\sim N(\mu,\ \sigma)$		后验分布 $\sim N(\mu,\ \sigma)$	
		μ	σ	μ	σ
a_0	576.409	576.410	200	530.111	53.881
a_1	0.564	0.560	0.2	0.561	0.005
a_2	2.823	2.820	0.5	2.786	0.020
a_3	316.732	316.730	100	340.782	62.862
a_4	1.139	1.140	0.1	1.139	0.007
a_5	-0.915	-0.910	0.3	-0.918	0.003
c_0	0.119	0.12	0.02	0.117	0.002
c_1	0.018	0.02	0.005	0.018	0.001
c_2	0.143	0.14	0.03	0.141	0.004

此验证数据集使用的航天器构型和平面波分布与§2.4中所述相同。我们从这些组合中随机选取 10,000 个作为训练集。然而，我们不再模拟波并使用波望远镜技术对其进行估计，而是直接利用方程¯将波矢 χ 和 k 的重构误差关联起来，所用方程为31、32和30。这些方程中九个系数所选取的数值列于表*1*中的真实值列。

随后，我们对该验证数据集进行贝叶斯推断，以确认其能够以足够的准确度重构已知系数值。为此，我们必须首先为每个系数值定义一个先验分布。我们为每个系数选择了一个以真实值附近为中心、但标准差非常大的正态分布。进行贝叶斯推断后，我们发现，经过 5000 次抽样，后验分布的均值总体上非常接近系统的真实值。我们还发现，后验分布的标准差显著缩小，因此可以用后验分布的 μ 和 σ充分描述每个参数的真实值。表1 总结了该验证数据集中全部九个系数的真实值、先验分布和后验分布。

3.5. 学习方程系数

贝叶斯推断方法得到验证后，我们使用波望远镜生成的数据计算十二个系数 a的、b的、 c的后验分布。我们再次随机选取 10,000 个数据点作为训练集。四航天器构型对应的十二个系数的后验分布见图5。航天器对应的完整系数后验分布图集见图5对应的图集。表2 汇总了所有航天器数量下后验分布的均值 $\langle x_i \rangle$ 和标准差 σ_{x_i}，其中航天器数量为 N，且 $x \in \{a, b, c\}$。

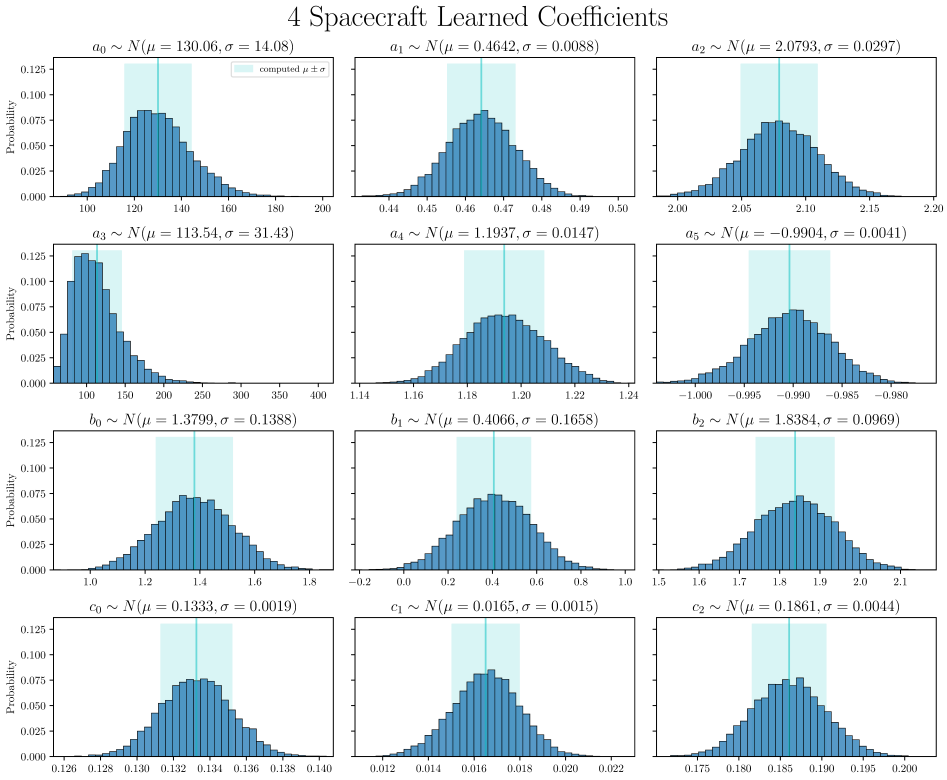


图5. 这些面板展示了由四航天器构型得到的波望远镜误差在方程 32、30、34中十二个系数的后验分布。蓝色竖线和阴影区域分别表示后验分布的均值和标准差。所有系数及航天器数量对应分布的汇总见表 2 。在线期刊提供了四至九航天器构型的完整图集（6 幅图）。

3.6. 后验预测检验

图6左侧各面板绘出了形状参数为 $0.1 \leq \chi < 0.15$时，四航天器和九航天器构型在波望远镜模拟中得到的误差。这些误差值既包括用于训练数据的 10,000 个点，也包括未用于训练的点（即测试数据）。我们叠加绘出了在假设不存在混叠时给出误差分布的计算方程（方程32 和30，红色），以及考虑混叠效应的有效误差方程（方程35 ，蓝色）。图6 右侧各面板绘出了相同结果，但对应的形状参数为 $0.8 \leq \chi < 0.85$。图6对应的图集中展示了更完整的结果，包括航天器数量为 4 至 9 的情况。

通过检查图 6 ，我们发现平均误差方程似乎能够准确地拟合数据，但我们希望¯用数值方法量化数据与拟合方程的符合程度。回想一下，在§3.3 中，我们假设（对于固定的 k和 χ），误差服从对数正态分布，并学习了用于计算波望远镜波矢时误差均值 μ 和标准差σ 的方程。如果关于 μ 和 σ的假设和学习得到的方程正确，那么我们预期落在区间 $\mu \pm \sigma$、 $\mu \pm 2\sigma$和 $\mu \pm 3\sigma$内的数据点比例分别为 0.6827、0.9545 和 0.9973。

使用我们的模拟数据和学习得到的方程来计算 μ 和 σ，我们检查落在上述各区间内的点数。由于混叠会导致平均误差出现较大的突变，因此我们仅考虑满足以下条件的值：k 和 χ 其中 $P(alias) < 0.01$ 且 $\chi < 1$。对于符合此限制的航天器构型和波矢组合，表3 汇总了波望远镜计算结果落在所列区间内的比例。

从表3 可以看出，落在各指定区间内的数据点比例与预期比例一致。这证实了服从对数正态分布的误差假设，以及 μ和 σ 的学习得到的方程，能够准确捕捉所有航天器数量 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$下波望远镜计算中的误差。在附录§ D 图13中，我们通过计算满足 $Error < \mu + \sigma_0\sigma$的点在 $\sigma_0 \in [-3, 3]$ 中的比例，并将其与标准正态分布的累积分布函数进行比较，进一步扩展了这项分析。

表2. 通过贝叶斯推断得到的不同航天器数量对应的系数均值和标准差 N。各系数的均值（即 $\langle a_i \rangle$）用于方程 32、30、34。

方程	Term	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$
$\mu(k,\ \chi)$ 方程 32	$\langle a_0 \rangle$	130.06	109.24	270.99	226.42	188.19	274.74
	σ_{a_0}	14.1	10.8	27.8	22.9	18.9	29.0
	$\langle a_1 \rangle$	0.46	0.48	0.55	0.55	0.54	0.57
	σ_{a_1}	0.009	0.008	0.006	0.006	0.006	0.006
	$\langle a_2 \rangle$	2.08	1.80	1.80	1.63	1.50	1.44
	σ_{a_2}	0.030	0.023	0.018	0.016	0.017	0.016
	$\langle a_3 \rangle$	113.54	269.24	878.94	770.91	393.94	108.54
	σ_{a_3}	31.4	63.4	100.9	100.9	108.6	33.5
	$\langle a_4 \rangle$	1.19	1.16	1.17	1.18	1.21	1.27
	σ_{a_4}	0.015	0.011	0.006	0.007	0.014	0.021
	$\langle a_5 \rangle$	-0.990	-0.987	-0.980	-0.985	-0.987	-0.997
	σ_{a_5}	0.004	0.003	0.002	0.002	0.038	0.004
$P(alias\|k,\ \chi)$ 方程 34	$\langle b_0 \rangle$	1.38	1.39	1.55	1.64	1.65	1.64
	σ_{b_0}	0.139	0.160	0.189	0.189	0.187	0.185
	$\langle b_1 \rangle$	0.41	0.53	0.67	0.73	0.72	0.72
	σ_{b_1}	0.166	0.163	0.168	0.169	0.169	0.168
	$\langle b_2 \rangle$	1.84	2.82	3.07	3.15	3.18	3.20
	σ_{b_2}	0.097	0.093	0.098	0.095	0.095	0.096
$\sigma(k,\ \chi)$ 方程 30	$\langle c_0 \rangle$	0.133	0.131	0.129	0.126	0.129	0.134
	σ_{c_0}	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
	$\langle c_1 \rangle$	0.017	0.015	0.015	0.016	0.017	0.018
	σ_{c_1}	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
	$\langle c_2 \rangle$	0.186	0.199	0.205	0.217	0.217	0.213
	σ_{c_2}	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005

表3。使用针对 μ 和 σ学习得到的方程，我们验证了以下假设：数据服从对数正态分布，并且对于每种航天器数量 $N \in \{4,5,6,7,8,9\}$，模型的置信区间都是正确的。我们展示了落入各个范围内的误差值比例，以及用于计算这些比例的数据集大小 n （包括训练数据和测试数据）。在第二行中，我们将计算得到的比例与数据完全服从对数正态分布时的预期比例进行了比较。

区间	$\mu \pm \sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$
预期比例	0.6827	0.9545	0.9973
4 艘航天器 ($n=240950$)	0.6894	0.9577	0.9921
5 艘航天器 ($n=276100$)	0.6993	0.9592	0.9926
6 艘航天器（$n=275900$）	0.6945	0.9553	0.9904
7 艘航天器（$n=282750$）	0.6942	0.9536	0.9896
8 艘航天器（$n=287050$）	0.7012	0.9547	0.9899
9 艘航天器（$n=287850$）	0.7016	0.9557	0.9897

4. 结果

现在，我们得到了用于估算波望远镜技术有效误差的方程 $\mu_{eff}(k,\ \chi)$，以及相对于该均值的标准差 $\sigma(k,\ \chi)$。在§4.1 中，我们研究这些方程，以确定形状参数 χ 和航天器数量 N 对可重构波矢范围的影响。在§4.2 中，我们将这些方程应用于美国国家航空航天局 HelioSwarm 任务的九航天器构型，以展示这些方程的实用性。

4. 数量与形状依赖性

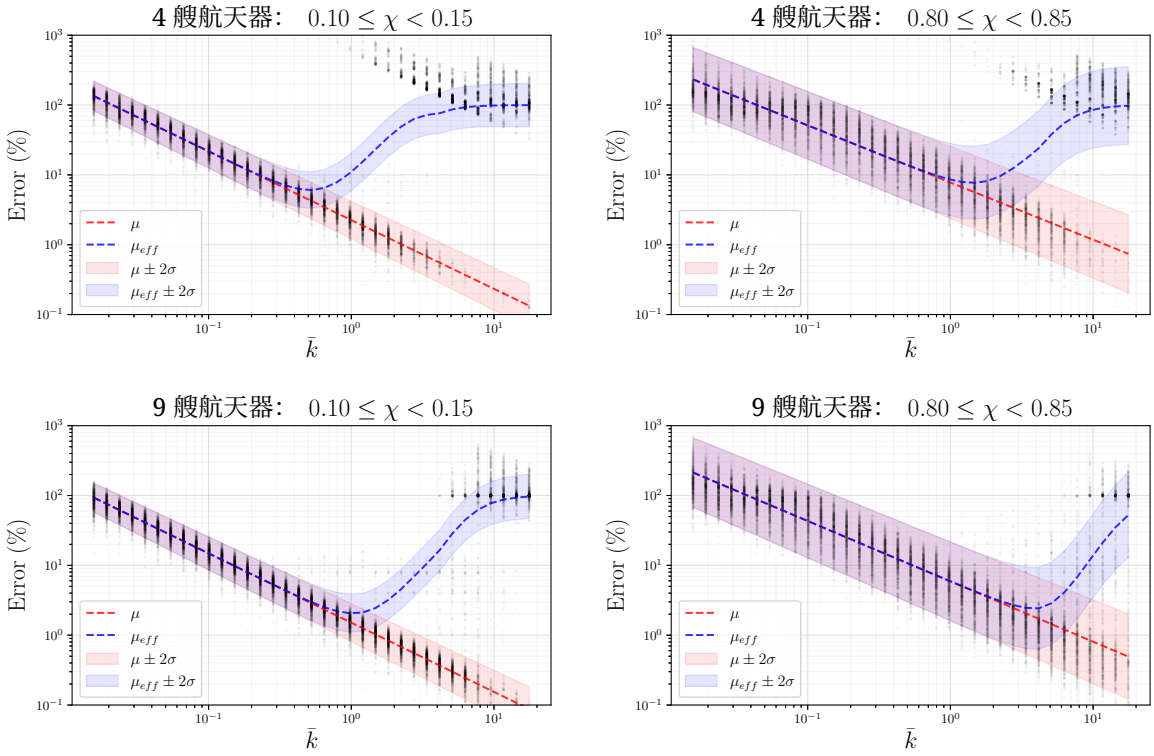


图6。 我们进行后验预测检验，以验证通过贝叶斯推断得到的系数能否正确识别误差均值 μ（方程 32），以及标准差 σ（方程 30）。我们还展示有效误差值 μ_{eff}（方程 35），该值将混叠概率纳入考量。我们针对四个和九个航天器构型（上、下两行）以及介于 $0.1 \le \chi < 0.15$ 和 $0.8 \le \chi < 0.85$ 之间的形状参数（左、右两列）进行了检验。在线期刊中提供了四至九个航天器构型的图集（18幅图像）。

为了量化可准确重构的波矢大小与航天器数量 N 及构型形状参数 χ 之间的关系，我们使用有效误差方程 $\mu_{eff}(k, \chi)$ 和标准差方程 $\sigma(k, \chi)$。对于每一组 $N \in \{4,5,6,7,8,9\}$ 和 $\chi \in [0,1]$ 组合，我们考察学习得到的方程所预测的波望远镜技术准确的数量级范围。由于该技术的准确度和精密度都很重要，我们在图7中采用两个不同的指标来量化准确度。

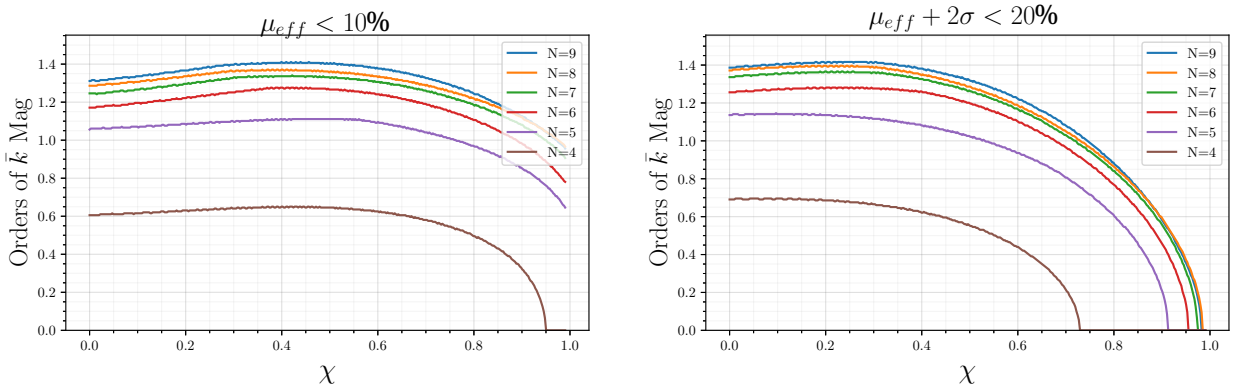


图7。 利用有效误差方程 μ_{eff} 和 σ，我们绘制了在两种不同的准确度和精密度度量下可重建的波矢 k 数量级。左图显示了可重建的 $\bar{k}$ 数量级，使得 μ_{eff} 小于 10%。右图显示了可重建的 $\bar{k}$ 数量级，使得 $\mu_{eff} + 2\sigma$ 小于 20%。

图7 的左图展示了一个由 N 个航天器组成的构型，在有效误差小于 10% 时能够重建的波矢数量级。鉴于其底层分布，这应解读为50^{th} 百分位误差小于 10%。图7 的右图展示了一个由 N 个航天器组成的构型能够重建的波矢数量级，且 $\mu_{eff} + 2\sigma < 20\%$（即 97.7^{th} 百分位误差小于 20%）。

从图7 可以得出结论：在波望远镜中使用的航天器数量增加时，能够重建的波矢范围也随之单调扩大。然而，能够准确重建的波矢数量级增幅最大的是从四个航天器增加到五个航天器。进一步考察数据后，我们得出结论，这主要是因为航天器数量从四个增加到五个时，混叠显著减少。我们认为，混叠大幅减少很可能是因为四航天器构型中只有两个航天器沿倒易矢量方向排列，而五航天器构型中至少有三个航天器在所有方向上排列。图3对应的图集可以看出混叠的减少。

图 7 还显示，形状参数较大的航天器构型 χ 无法准确重建许多数量级。 k 这是因为，当航天器构型的形状不佳时，不同方向传播的波所造成的误差变化 σ 会非常大。

4.2. 应用于 *HelioSwarm*

HelioSwarm任务将部署九颗航天器，在近地环境中对等离子体进行原位测量，包括未经扰动的太阳风、磁鞘和 foreshock（Klein等（2019））。我们介绍 NEWTSS（数值估计波望远镜子集选择器），这是我们用于先验选择每个波矢模 k下最佳航天器子集的工具。NEWTSS 使用 §3 中给出的有效误差方程，并对所有可能的航天器子集进行穷举搜索，以确定哪一个能使 97.7^{th} 百分位误差的期望值（$\mu + 2\sigma$）最小。

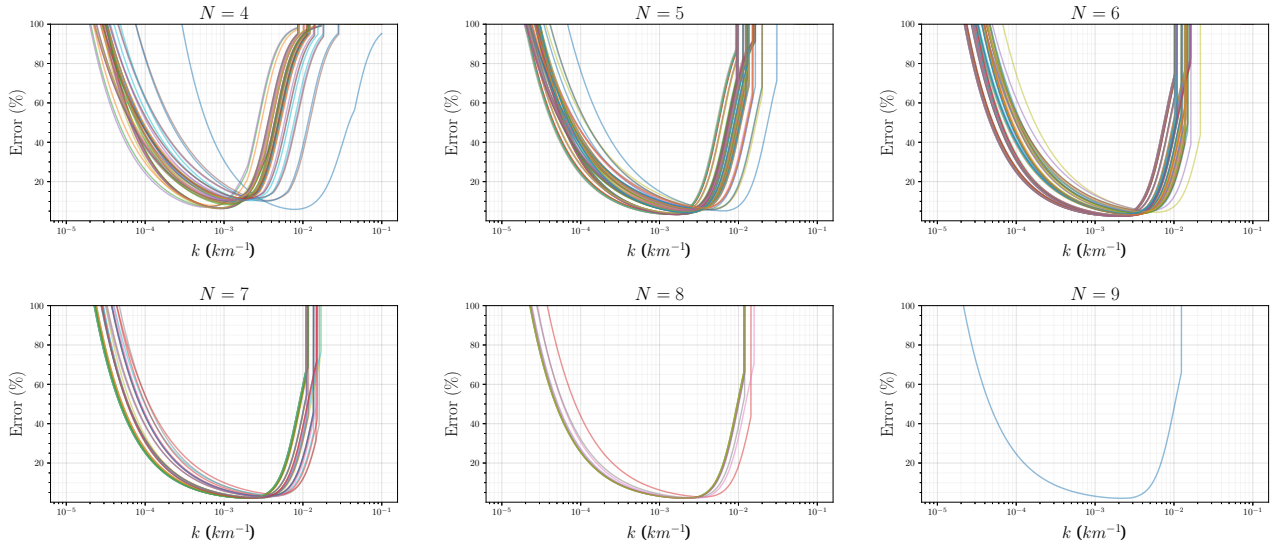


图 8. 对于九航天器构型，至少包含四颗航天器的子集共有 $\sum_{n=4}^{9} C_n^9 = 382$ 个。对于每个子集，NEWTSS 使用我们学习得到的方程，预测波望远镜技术在每个波矢模 k下的有效误差。此处采用的是 HelioSwarm B阶段DRM 中第 205 小时的示例构型。关于这 382 个 §C 航天器子集的形状参数和尺寸详见附录 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

为说明其工作原理，我们指出，每个 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$航天器子集的有效误差和标准差都可以表示为相对波矢模的函数。图8展示了设计参考任务（DRM）科学 N任务阶段第 205 小时构型中各 航天器子集的有效误差。通过在每个 k波矢模下选择使 $\mu_{eff}(k, \chi) + 2\sigma(k, \chi)$ 最小的子集，我们可以扩大利用波望远镜技术进行准确扫描的波矢范围。

图 9 展示了 NEWTSS 在每个 k值下选取使 $\mu_{eff} + 2\sigma$ 最小的航天器子集后，对应的预期误差和噪声。该图还展示了所选构型中的航天器数量

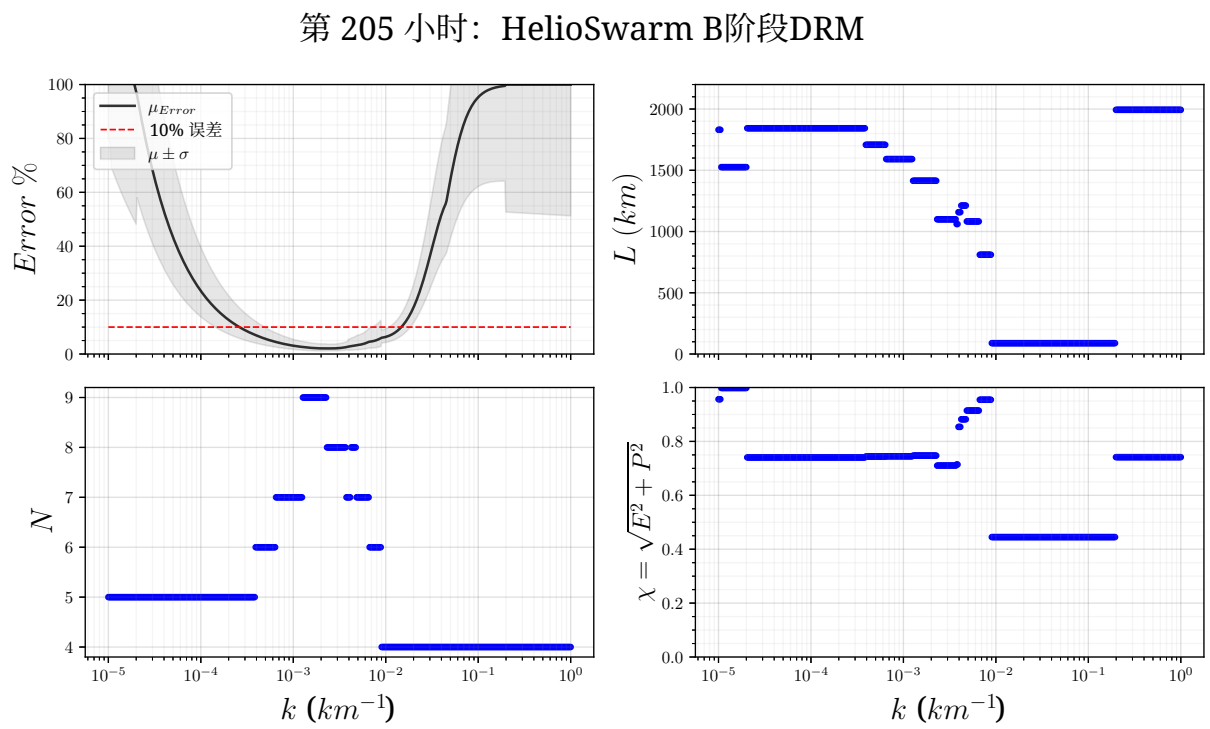


图 9. 对于每种由九艘航天器组成的 HelioSwarm 构型，NEWTSS 都会在每个波矢模 k下，选出使量值 $\mu_{eff} + 2\sigma$ 最小的航天器子集。我们在左上面板中绘出了与第 205 小时 HelioSwarm DRM 构型相关的最小有效误差以及 2σ 。其他面板则展示了所选子集中的航天器数量 N 、该子集的特征尺寸 L 以及该子集的形状参数 χ。

(*N*)、所选构型的特征尺寸（L）以及所选构型的形状参数（χ）。我们可以看到，对于能够准确识别的波矢模（其中 $\mu + 2\sigma < 20\%$），最优子集通常由多于 4 个航天器组成。我们还可以看到，最优子集的特征尺寸 L 往往与波矢模成反比。

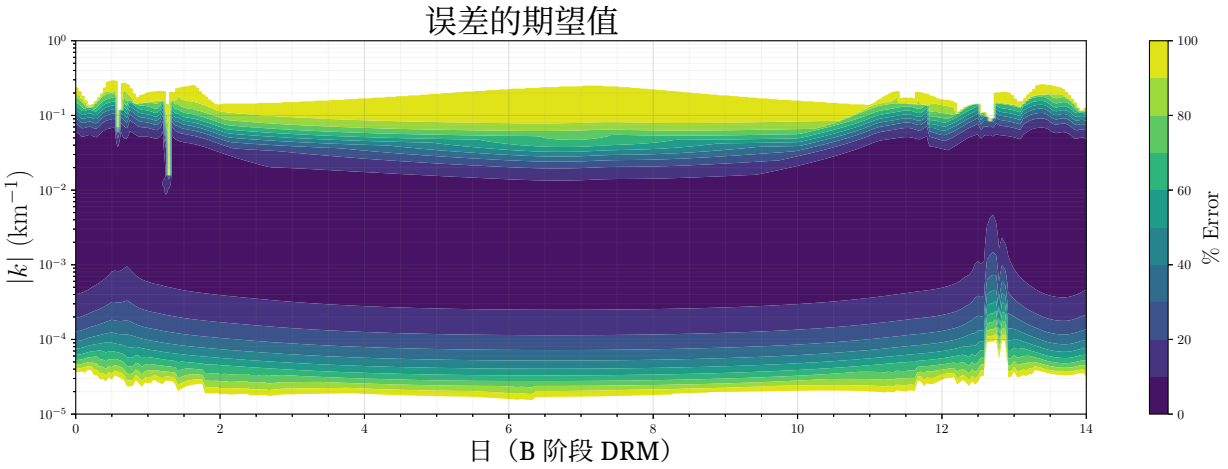


图10. 我们使用 NEWTSS 选出在每个波矢模 $\mu_{eff} + 2\sigma$ 下使 k 的值最小的航天器子集（如图 9所示）。我们绘出了 HelioSwarm 的 B 阶段科学任务前两周内 $\mu_{eff} + 2\sigma$ 在每个波矢模 k下的值。白点勾勒出 20% 误差值，红色短划线标出图 9 中第 205 小时的构型

在图10中，我们使用 NEWTSS 对 HelioSwarm 任务科学阶段 B 阶段设计参考任务中前 2 周每小时的构型进行优化。通过对这一时间区间取平均，我们计算得出，在有效误差小于 10% 时，可以重建 1.86 个数量级的 k。我们还发现，当 $\mu_{eff} + 2\sigma < 20\%$ 时，可以重建 1.52 个数量级的 k。将这些数值与图7中的数值进行比较后，我们得出结论：使用 HelioSwarm 构型选择最优子集，能够重建比使用任何单个 N航天器构型并采用 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$时更大范围的波矢。

5. 总结与讨论

我们利用许多采用四至九艘航天器的波望远镜模拟数据，学习得到该技术预期误差的函数形式（ $\mu_{eff}(k, \chi)$，方程 35）。对于给定的航天器集合，预期误差是航天器构型形状参数 χ （方程 25）以及所选波矢相对模 k （方程 19）的函数。除预期误差方程外，我们还学习得到一个用于估算误差标准差的方程，即 $\sigma(k, \chi)$（方程 30）。这些结果考虑了发生混叠（方程 34）和不发生混叠（方程 32）的可能性。方程 32、30 和 34 中的 12 个系数（a_i、 b_i 和 c_i），以及它们的不确定性，见表2。

利用这些方程，我们证明，在波望远镜中使用更多航天器确实能够减小波矢重建的误差，并扩大可重建波矢的范围。不过，我们观察到，准确度提升最大的是航天器数量从四个增加到五个。由于这些方程的计算速度很快，我们证明了 NEWTSS 可以利用这些信息，将任意由 $N \geq 4$ 个航天器组成的构型拆分为针对每个 k 的最优子集。我们将这一方法应用于 HelioSwarm 九航天器设计参考任务构型前两周的位置数据，证明它能够扩大可探测波矢的范围。

未来的工作应将这项分析外推至包含更多航天器的构型。重要的是，构型中的航天器越多，该构型就越能适应形状参数值 χ的变化。进一步外推可能需要在分析中确定更多自变量。从理论上讲，波矢方向也应作为自变量纳入考虑，但我们未能将其纳入该方法并提升拟合方程的质量。将这些推导出的混叠概率方程与近期发展的解析描述进行比较（Schulz等人（2023）），也可能成为未来工作的重点。

致谢

HelioSwarm 天文台设计参考任务轨迹的构建与分析部分得到了 HelioSwarm 项目的资助。该项目由美国国家航空航天局根据主合同编号 80ARC021C0001 提供资金。K.G.K 还获得了 NASA 职业早期资助 80NSSC19K0912。本研究由伯尔尼的国际空间科学研究所通过 ISSI 国际团队项目 #556（空间等离子体中的跨尺度能量传递）提供支持。

附录

A. LAGRANGE MULTIPLIER MINIMIZATION

从记号中省略自变量后，要解决的最小化问题为

$$P = \min_{W} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W}\right] \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{H} = \mathbf{I} \quad \text{and} \quad \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{W} = \mathbf{I}. \tag{A1}$$

我们利用A1 并结合 3×3 拉格朗日乘子矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 和 $\mathbf{\Gamma}$

$$P = \min_{W} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W} + \left(\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{H} - \mathbf{I}\right)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Gamma}\left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{W} - \mathbf{I}\right)\right]. \tag{A2}$$

由于$\mathbf{P}$ 是一个 3×3 矩阵，迹方程 P包含三项。这些项在对角线上的形式均为

$$P_{ii} = W^{\dagger}_{ij}M_{jk}W_{ki} + W^{\dagger}_{ij}H_{jk}\Lambda_{ki} - \Lambda_{ii} + \Gamma_{ij}H^{\dagger}_{jk}W_{ki} - \Gamma_{ii}. \tag{A3}$$

现在令 $\partial P_{ii}/\partial \mathbf{W}$ 为零，以求出局部极小值。这意味着

$$\frac{\partial P_{ii}}{\partial W_{ki}} = W^{\dagger}_{ij}M_{jk} + \Gamma_{ij}H^{\dagger}_{jk} = 0 \tag{A4}$$

and

$$\frac{\partial P_{ii}}{\partial W^{\dagger}_{ij}} = M_{jk}W_{ki} + H_{jk}\Lambda_{ki} = 0. \tag{A5}$$

省略下标后，将方程A4 右乘$\mathbf{W}$ ，可得$\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W} = -\mathbf{\Gamma}\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{W}$。然后应用约束$\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{W} = \mathbf{I}$ ，得到

$$-\mathbf{\Gamma} = \mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W}. \tag{A6}$$

我们还注意到，若将方程A5 左乘$\mathbf{W}^{\dagger}$ ，则有$\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W} = -\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}$。利用约束$\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ，可得

$$-\mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W}. \tag{A7}$$

同时，我们看到，方程A5意味着

$$\mathbf{M}\mathbf{W} = -\mathbf{H}\mathbf{\Lambda} \tag{A8}$$

$$\left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{M}^{-1}\right)\mathbf{M}\mathbf{W} = -\left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{M}^{-1}\right)\mathbf{H}\mathbf{\Lambda} \tag{A9}$$

$$\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{W} = -\left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\right)\mathbf{\Lambda}. \tag{A10}$$

利用$\mathbf{H}^{\dagger}W = \mathbf{I}$ 的约束可得

$$-\mathbf{\Lambda} = \left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}. \tag{A11}$$

将关于 $\mathbf{\Lambda}$ (A7 和A11)的两个公式相等，可得在临界点有

$$\mathbf{W}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{W} = \left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}. \tag{A12}$$

将这个临界点代回原始最小化问题的自变量A1，我们发现，满足约束条件的精确解为

$$P = \mathrm{Tr}\left[\left(\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\right]. \tag{A13}$$

算法 1： 自适应 **k** 搜索

当 P（ω，$\mathbf{k}^*$）$< P_{thres}$ **时**
  定义网格分辨率（I，J，L）；
  定义扫描范围：$k \in [k_{min}, k_{max}]$、$k^\theta \in [0, 2\pi]$、$k^\phi \in [0, \pi]$;
  定义扫描网格：$k_{\rm grid} = [k_0, ..., k_I]$、$k^\theta_{\rm grid} = [k^\theta_0, ..., k^\theta_J]$、$k^\phi_{\rm grid} = [k^\phi_0, ..., k^\phi_L]$;
  当 $|k_{max} - k_{min}| < \Delta k$ **时执行**
    在网格上计算 $P(\omega, \mathbf{k})$;
    识别峰值：$(k_{i^*}, k^\theta_{j^*}, k^\phi_{l^*}) = \underset{\mathbf{k}\in\mathbf{k}网格}{\rm argmax}\ P(\omega, \mathbf{k})$;
    更新扫描范围：$k \in [k^*_{i^*-1}, k^*_{i^*+1}]$, $k^\theta \in [k^\theta_{j^*-1}, k^\theta_{j^*+1}]$, $k^\phi \in [k^\phi_{l^*-1}, k^\phi_{l^*+1}]$;
    更新扫描网格;
  end
  提高网格分辨率（I, J, L）；
end
返回 $(k_{i^*}, k^\theta_{j^*}, k^\phi_{l^*})$

B. 波望远镜扫描算法

波望远镜技术通过对密集范围内的 **k** 值计算 $P(\omega, \mathbf{k})$，来识别磁场时间序列中存在的波。随后，将使 $P(\omega, \mathbf{k})$ 取得最大值的 **k** 值确定为计算得到的波矢。由于我们希望构建一个包含数百万个波矢识别结果的大型数据集，因此希望尽量减少所需的 $P(\omega, \mathbf{k})$ 函数求值次数。我们注意到，对于单个平面波，使用波望远镜时，$P(\omega, \mathbf{k})$ 会在正确的 **k** 值处出现一个尖锐峰值，并且离峰值越远，峰值便呈指数衰减（见 Narita 等人（2022）的图 2）。如果我们能通过粗略扫描确定 **k**空间中包含该峰值的区域，就可以对 **k** 扫描进行自适应细化，聚焦于包含 $P(\omega, \mathbf{k})$ 峰值的区域。

我们采用算法 1 来执行这种自适应网格细化。首先，将波矢 $\mathbf{k} \in [k, k_\theta, k_\phi]$（球坐标下的）区域划分为一个 $16 \times 13 \times 13$ 网格。然后，在所有网格点上计算 $P(\omega, \mathbf{k})$。我们找出$[k, k_\theta, k_\phi]$ 达到 $P(\omega, \mathbf{k})$最大值的位置，并以该位置为中心进行新一轮更精细的扫描。扫描与细化过程不断重复，直到所扫描的**k** 矢量的模达到 k-模分辨率阈值 ($\Delta k = 0.01k$)。

最后，我们检查 $P(\omega, \mathbf{k})$的峰值是否高于功率阈值（$P_{thres} = 1000$）。如果找到的峰值 $P(\omega, \mathbf{k})$未超过此阈值，我们就以更高的分辨率重新启动自适应扫描过程。我们重复自适应扫描并提高分辨率，直到找到高于P_{thres} 的峰值，或达到预先设定的最大分辨率（$22 \times 19 \times 19$）。图11 展示了一个平面波示例中，采用这种自适应方法扫描的**k** 值。可以看到，经过连续迭代后，网格逐渐聚焦于识别出 $P(\omega, \mathbf{k})$峰值的位置。

C. HELIOSWARM 第205小时

在 8 和 9 的 §4.2 节中，我们重点展示了 NEWTSS 在 HelioSwarm B阶段设计参考任务中的一个九航天器构型示例上的应用。图 12展示了该构型所有子集（包含 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 个航天器）的伸长度、平面度和特征尺寸；该构型计划用于任务科学阶段的第205小时。

D. 拟合方程验证

在 3的 §3.6 节的表中，我们统计了落在区间 $\mu \pm \sigma$、$\mu \pm 2\sigma$和 $\mu \pm 3\sigma$内的数据点数量，其中 μ和 σ是根据我们学习得到的方程定义的。现在，我们希望量化落在 μ附近任意区间内的数据点比例。为此，我们检查在 $\mu \pm \sigma_0\sigma$时，σ_0 取 $[-3, 3]$范围内的数据点落入该区间的比例。如果我们学习得到的方程有效，那么这一量化结果应与服从对数正态分布的累积分布函数（CDF）相符，因为这是我们最初的假设。下文展示了针对每个 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 航天器拟合方程的比较结果。由于混叠会导致平均误差出现较大的突变，我们仅考虑数据集中满足 $P(alias) < 0.01$且 $\chi < 1$的点。

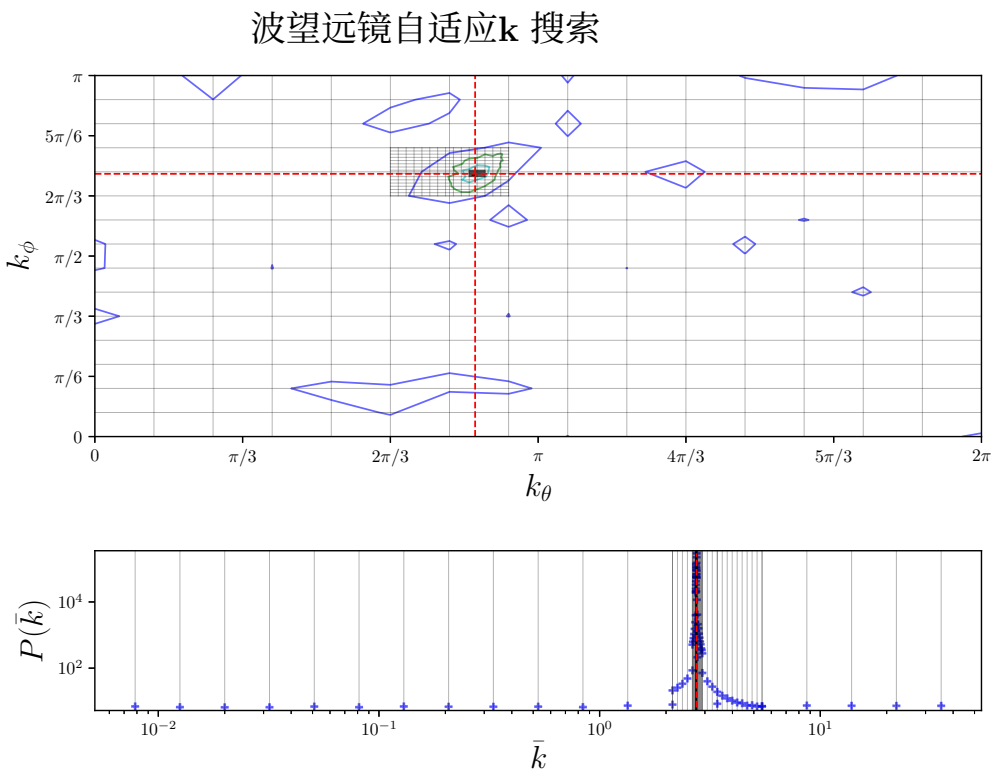


图 11. 使用六艘航天器模拟一个平面波。我们使用自适应 $\mathbf{k}$ 搜索算法 1 定义自适应网格，以便在尽量减少函数求值次数的同时，识别 $P(\omega, \mathbf{k})$ 的峰值。图中黑线表示通过此过程扫描的 $\mathbf{k} \in [\bar{k}, k_\theta, k_\phi]$ 值。可以看到，识别出的峰值对应于平面波的真实波矢（红色虚线所示）。上图叠加了三个取值 P对应的等高线（蓝色、绿色和青色线）。下图还显示了计算得到的 $P(\bar{k})$ 值（蓝色叉号）。

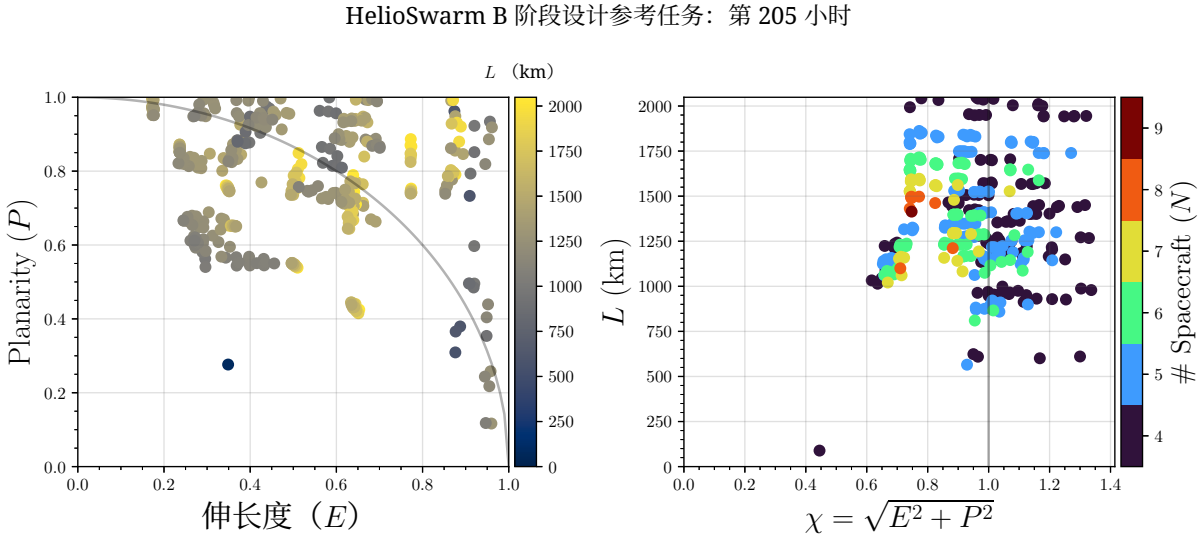


图12. 根据 HelioSwarm B 阶段设计参考任务科学阶段第 205 小时的数据，我们计算九航天器构型中所有包含 $N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 艘航天器的子集的伸长度、平面度和特征尺寸。黑线表示形状阈值 $\chi = 1$。

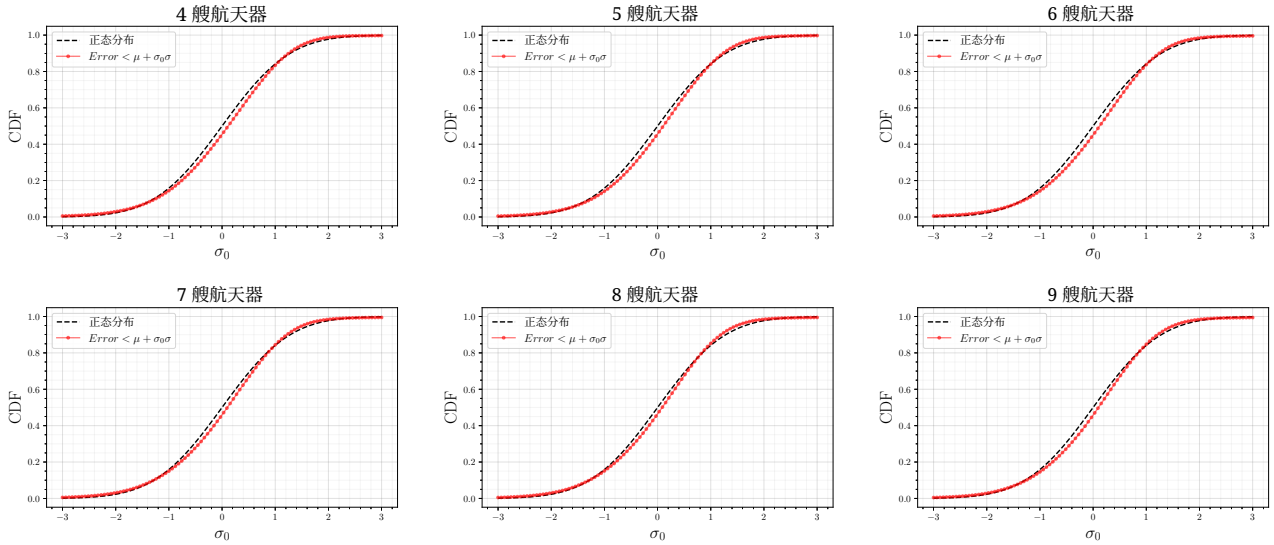


图13. 使用我们的数据集以及针对 μ 和 σ学习得到的方程，我们检查在 $[-3, 3]$区间内， σ_0 取不同值时，落在阈值 $\mu \pm \sigma_0\sigma$ 范围内的点所占比例。为便于可视化，我们对误差值取了 $\log_{10}$ 。因此，如果我们的方程能完美拟合数据，那么标准正态分布的累积分布函数（以黑色虚线表示）应与之完全一致。

参考文献

Broeren, T., Klein, K. G., TenBarge, J. M., et al. 2021, 《天文学与空间科学前沿》, 8, 144, doi: 10.3389/fspas.2021.727076Constantinescu, O. D.,Glassmeier, K. H., Motschmann, U., et al. 2006, 《地球物理研究杂志：空间物理》, 111, doi: 10.1029/2005JA011550Glassmeier, K.-H., Motschmann, U., Dunlop, M., et al. 2001, 《地球物理年刊》, 19, doi: 10.5194/angeo-19-1439-2001Keinert, B.,Innmann, M.,S¨ anger, M., & Stamminger, M. 2015, 《ACM 图形学汇刊》, 34, doi: 10.1145/2816795.2818131Klein, K. G., Alexandrova, O., Bookbinder, J., et al. 2019, arXiv 电子预印本,
a
r
Xi
v:1903.05740.https://arxiv.org/abs/1903.05740Maruca, B. A., Agudelo Rueda, J. A., Bandyopadhyay, R., et al. 2021, 《天文学与空间科学前沿》, 8, doi: 10.3389/fspas.2021.665885McElreath, R. 2016, 《统计学新思维：使用 R 和 STAN 的贝叶斯课程及示例》（CRC 出版社, Taylor & Hall 集团）。
https://doi.org/10.1201/9781315372495Motschmann, U.,Woodward, T. I., Glassmeier, K. H.,Southwood,D. J., & Pin˙con, J. L. 1996, 《地球物理研究杂志》 , 101, 4961, doi: 10.1029/95JA03471Narita, Y., Glassmeier, K. H., & Motschmann, U. 2022, 《地球物理研究杂志：空间物理》, 127, doi: 10.1029/2021JA030165

Narita, Y., Plaschke, F., Nakamura, R., 等. 2016, 《地球物理研究快报》, 43, doi: 10.1002/2016GL069035Paschmann,G.,&Daly, P. W.1998,ISSIScientific Reports Series, 1 Pin˙con, J. L., & Lefeuvre, F. 1988, 《空间研究进展》, 8, 459, doi: 10.1016/0273-1177(88)90161-5Plice, L., Perez, A. D., & West, S. 2020, 《航天科学进展》, 171 Retino, A., Khotyaintsev, Y., Le Contel, O., 等. 2019, arXiv e-prints, arXiv:1909.02783, doi: 10.48550/arXiv.1909.02783Sahraoui, F., Belmont, G., Goldstein, M. L., & Rezeau, L. 2010, 《地球物理研究杂志》, 115, 4206, doi: 10.1029/2009JA014724Salvatier, J., Wiecki, T. V., & Fonnesbeck, C. 2016, 《PeerJ 计算机科学》, 2, e55, doi: 10.7717/peerj-cs.55Schulz, L., Glassmeier, K.-H., Plaschke, F., Toepfer,S., &Motschmann, U.2023, EGUsphere, 2023, 1,doi: 10.5194/egusphere-2023-172Verscharen, D., Klein, K. G., & Maruca, B. A. 2019, 《太阳物理学综述》, 16, 5, doi: 10.1007/s41116-019-0021-0