arXiv:2303.13061v1 [math.CO] 23 Mar 2023

# 低秩 (0, 1)-多胞体的环面环

KOJI MATSUSHITA

Abstract. 多面体 $P$的秩定义为 $F-(d+1)$，其中 $F$表示 $P$的面数。本文着重研究低秩 (0, 1)-多胞体的环面环。我们研究其正规性、除子类群的无挠性，以及其同构类的分类。

## 1. Introduction

为简便起见，本文始终设 $\Bbbk$ 为特征零代数闭域。

1.1. 背景。对于整多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$，令 $\Bbbk[P]$ 表示 $P$的环面环，即

$$\Bbbk[P] = \Bbbk[t_1^{v_1} \cdots t_d^{v_d} t_0 : (v_1, \ldots, v_d) \in P \cap \mathbb{Z}^d].$$

整多面体的环面环是齐次仿射半群环，其代数性质已得到充分研究。特别是，正规性赋予环面环多种重要性质，并且一些代数对象可以用与多面体相关的术语来描述。事实上，众所周知，对于任意域 $\Bbbk$ ([18])，正规环面环都是 Cohen-Macaulay 的；而正规环面环的典范模可描述为由对应于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}(P)$ 内部元素的单项式所生成的理想（[28]），其中 $\mathcal{A}(P) = \{(\mathbf{v}, 1) \in \mathbb{Z}^{d+1} : \mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d\}$ 和$\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}(P) = \{a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n : \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{A}(P)\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。此外，环面环 $\Bbbk[P]$ 正规，当且仅当它是 Krull 环（参见 [33, 定理 9.8.13]）。在这种情况下，利用 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}(P)$ 的生成元和支撑形式，可以轻松计算 $\Bbbk[P]$ 的除子类群（见第 2.1 节）。

正规环面环 $\Bbbk[P]$ 的除子类群 $\mathrm{Cl}(\Bbbk[P])$ 是一个有限生成阿贝尔群，也是最有趣的不变量之一。其元素可与 $\Bbbk[P]$ 的除子理想的同构类相对应。近年来，锥形除子理想作为除子理想中的一类，并且是秩为一的极大 Cohen-Macaulay 模中的一种特殊类型，受到了广泛研究（例如参见 [1, 2]）。事实上，它们在非交换代数几何理论以及交换环理论中都发挥着重要作用。例如，通过考察若干锥形除子理想直和的自同态环，我们可以构造非交换保正则化（简称 NCCR）；这类对象由 Van den Bergh 引入（[32]）。事实上，许多类环面环都已构造出这类对象（例如参见 [15, 17, 21, 22, 27, 32]，等）。然而，一般而言，Gorenstein 环面环是否存在 NCCR 仍是一个开放问题。为解决这一问题，自然会考虑除子类群秩较低的环面环。另一方面，[7] 已证明，如果 Cohen-Macaulay 正规整环 $R$ 存在 NCCR,

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13F65；次要分类：13C20、52B20。*Key words and phrases.* 环面环、(0,1)-多胞体、除子类群。 

那么 $R$ 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。特别地，如果 $R$ 的除子类群无挠，且 $R$ 不是 Gorenstein 环，那么 $R$ 就不存在 NCCR。因此，判定除子类群是否无挠十分重要。

有限个 (0, 1) 向量的凸包称为 (0, 1)-多胞体。它源自各种组合对象，例如偏序集（简称 poset）、图和拟阵。例如，以下几类 (0, 1)-多胞体及其环面环已得到广泛研究：

- 序多胞体（参见 [30] 和第 2.2 节）；
- 稳定集多面体（[6]）$\supset$ 链多面体（[30]）；
- 边多面体（例如参见 [24, 26]）；

当然，这些并非仅有的例子，还有许多其他类型；例如割多面体（[8]）、完美匹配多面体（[9]）、拟阵多面体（[23]）等。此外，Stanley [29] 引入的压缩多胞体是一类自然的整多胞体，其中包含上文提到的一些 (0,1)-多胞体。已知压缩多胞体的环面环与某个 (0, 1)-多胞体的环面环同构（[31, 定理 2.4]）。

通过研究其环面环的交换环论性质，我们可以解决与底层组合对象相关的问题。

本文着重研究整多面体 $P$ 的秩，其定义如下：

$$\operatorname{rank} P = F - (\dim P + 1),$$

其中，$F$ 表示 $P$ 的面数。注意，秩 $P$ 是一个非负整数。事实上，若 $P$ 正规（参见第 2.1 节），则 $P$ 的秩与 Cl($\Bbbk[P]$) 的秩相同。也就是说，我们研究其除子类群秩较低的环面环。

本文旨在分析 (0,1)-多面体的正规性和无挠性，并在底层多面体秩较低的情形下，对其环面环的同构类进行分类。

1.2. 正规性。若整多面体 $P$ 具有正规性，则称其为正规。整多面体 $P$ 的正规性可以用 $\mathcal{A}(P)$ 所生成的格点来刻画（参见第 2.1 节）。一般而言，判断 $P$ 是否正规并不容易，但有一个判定 $P$ 正规性的实用充分条件：若 $P$ 存在幺模三角剖分，则 $P$ 正规（参见 [13, 推论 4.12]）。这意味着，完美图的序多胞体和稳定集多面体（包括链多面体）都是正规的，因为它们是压缩多胞体（见 [25]），而压缩多胞体存在幺模三角剖分。与此同时，已知图 $G$ 的边多胞体正规，当且仅当 $G$ 满足奇圈条件（[24, 26]）。

由此可见，(0, 1)-多胞体不一定是正规的。然而，非正规的 (0, 1)-多胞体似乎具有较大的秩。事实上，根据 [16, 命题 4.4] 及一些论证，我们可以发现，非正规边多胞体的秩至少为 4。因此，我们关注低秩整多胞体的正规性，并提出以下问题：

问题 1. 考察低秩 (0, 1)-多胞体的正规性。

1.3. 无挠性。我们称正规整多面体 $P$ 无挠，如果 Cl($\Bbbk[P]$) 也是无挠的。正规整多面体 $P$ 的无挠性可通过计算由 $P$中的格点与 $P$ 的面定义不等式构成的矩阵的史密斯标准形来确定（见第 2.1 节）。在 [20], 中给出了 $P$ 无挠的一个充分条件。作为推论可知，压缩多胞体是

无挠的（[20, 推论 3.4]），序多胞体以及完美图的稳定集多面体也如此。此外，正规边多胞体也无挠（[16, 定理 3.6]）。此外，最近还研究了环面面环的除子类群；这类环面面环可视为由单纯复形产生的 (0, 1)-多胞体的环面环，相关研究见[12]。研究表明，若其底层环面面环正规，则这些除子类群无挠（[12,推论 1.8]）。

这些事实引出了以下问题:

问题 2. 正规 (0, 1)-多胞体总是无挠的吗?

1.4. 分类。关于除子类群秩较低的某些环面环的同构类及其所属类别之间的关系， [16] 中已进行了如下研究。令 $\mathsf{Order}_n$ （分别为 $\mathsf{Stab}_n$、$\mathsf{Edge}_n$）表示秩为 $n$ 的序多胞体（分别为完美图的稳定集多面体、正规边多胞体）的环面环的同构类集合。那么有以下关系:

- $\mathsf{Order}_n = \mathsf{Stab}_n = \mathsf{Edge}_n$ 当 $n \leq 1$ 时。
- $\mathsf{Stab}_2 \cup \mathsf{Edge}_2 = \mathsf{Order}_2$ ，且 $\mathsf{Stab}_2$ 与 $\mathsf{Edge}_2$ 之间不存在包含关系;
- 当 $n \geq 3$ 时，$\mathsf{Order}_n$、$\mathsf{Stab}_n$ 与 $\mathsf{Edge}_n$ 之间不存在包含关系。

特别地，当 $n \leq 2$ 时，关系 $\mathsf{Stab}_n \cup \mathsf{Edge}_n \subset \mathsf{Order}_n$ 成立。

现在，我们考虑这一结果的推广。令 $(0,1)_n$ 表示秩为 $n$ 的 (0, 1)-多胞体的环面环的同构类集合。显然，关系 $\mathsf{Order}_n \cup \mathsf{Stab}_n \cup \mathsf{Edge}_n \subset (0,1)_n$ 成立。由上述三个族中的第三个关系可知，若 $n \geq 3$，则有 $\mathsf{Order}_n \subsetneq (0,1)_n$ 。另一方面，在 $n \leq 2$ 的情形下，$(0,1)_n$ 与 $\mathsf{Order}_n$ 之间的关系十分密切。

问题 3. 确定集合 $(0,1)_n$。此外，若 $n \leq 2$，关系 $(0,1)_n = \mathsf{Order}_n$ 是否成立?

在对 (0, 1)-多胞体的环面环的同构类进行分类时，考察 Gale 图——这是一种研究具有“少量顶点”的多胞体的组合类型的有效方法——与我们的研究相契合。本文研究低秩多胞体，即“面较少”的多胞体，因此我们可以通过考察对偶多胞体来应用 Gale 图方法。我们提出如下问题:

问题 4. 两个 (0, 1)-多胞体的组合等价是否意味着它们的环面环同构?

1.5. 结果。设 $P$ 是一个 (0, 1)-多胞体。对于问题 1、2、3 和 4，我们分别给出完整或部分解答;

$$\text{(r1)} \quad \operatorname{rank} P = 0 \text{ or } 1, \qquad \text{(r2)} \quad \operatorname{rank} P = 2, \qquad \text{(r3)} \quad \operatorname{rank} P \geq 3.$$

首先，我们给出上述问题在情形 (r1) 下的完整解答。事实上，这一结果的大部分内容已在 [20]中给出:

定理 1.1（命题 4.1 和定理 4.3）。设 $P$是一个秩为 $P \leq 1$ 的 (0, 1)-多胞体。那么， $P$ 是正规的且无挠的。此外，以下关系成立:

$$(\mathbf{0},\mathbf{1})_0 = \mathbf{Order}_0 = \{\Bbbk[x_1, \ldots, x_n] : n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \text{ and}$$

$(0,1)_1 = \mathsf{Order}_1 = \{(\Bbbk[x_1, \ldots, x_{n+1}] \# \Bbbk[y_1, \ldots, y_{m+1}]) \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[z_1, \ldots, z_{l-1}] : n、m、l \in \mathbb{Z}_{>0}\}$.此外，对于秩为 $P_i \leq 1$ 的两个 (0, 1)-多胞体 $P_1$ 和 $P_2$，当且仅当 $\Bbbk[P_1] \cong \Bbbk[P_2]$ 时，这两个多胞体具有相同的组合类型。

接下来，我们讨论情形（r2）。在此之前，我们需要引入一个新的 (0,1)-多胞体族 $P_{n_1,\ldots,\ n_k}$。

令 $\mathcal{B}_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。对于 $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$，(0, 1)-多胞体$P_{n_1,\ldots,n_k}$ 定义为原点、 $\mathcal{B}_d$的凸包，其中 $d := n_1 + \cdots + n_k$，并且其乘积为 $\mathcal{B}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{B}_{n_k}$。

在第 3 节中，我们研究 $P_{n_1,\ldots,n_k}$ 的若干性质。具体而言，我们描述 $P_{n_1,\ldots,n_k}$ 的面定义不等式（命题 3.2）。此外，我们证明 $\Bbbk[P_{n_1,\ldots,n_k}]$ 存在平方自由初始理想（命题 3.4）。此外，以下事实成立（定理 3.6）：

- $P_{n_1,\ldots,n_k}$ 具有整数分解性质，因此它是正规的。
- $\Bbbk[P_{n_1,\ldots,n_k}]$ 是 Gorenstein 的，当且仅当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$。
- 类群$(\Bbbk[P_{n_1,\ldots,n_k}]) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$。
- 若 $k \geq 3$，则对任意 $n_1$、…、$n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\Bbbk[P_{n_1,\ldots,n_k}] \notin \mathrm{Order}_{k-1}$。

我们针对情形（r2）下的问题 3 和问题 4 提出若干观察：

- 上述事实表明，对于任意$n_1$、$n_2$、$n_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$，秩$P_{n_1,n_2,n_3} = 2$ 且 $\Bbbk[P_{n_1,n_2,n_3}] \notin \mathrm{Order}_2$，这构成了问题 3 中等式 $(0,1)_2 = \mathrm{Order}_2$的一个反例。
- 我们通过绘制它们的标准 Gale 图（见图 5、6、7、8 和 9），研究 $\mathcal{O}_{\Pi_1}$、…、$\mathcal{O}_{\Pi_4}$的对偶多胞体的组合类型（这些是秩为 2 的序多胞体），以及$P_{n_1,n_2,n_3}$。特别地，对于标准 Gale 图与 $\mathrm{Gale}_1$ 或 $\mathrm{Gale}_2$相同的 (0, 1)-多胞体，问题 4 有肯定答案。（定理 4.4 和定理 4.5）

最后，我们给出对上述问题在情形（r3）下的回答，尽管答案是否定的：

定理 1.2（命题 4.6、4.7 和 4.8）。对于任意正整数 $r \geq 3$，分别存在秩为 $P =$的非正规 (0, 1)-多胞体 $P$和秩为 $P' = r$的非无挠正规 (0, 1)-多胞体 $P'$。此外，存在两个组合类型相同、秩分别为 $Q =$和 $Q' = r$的 (0, 1)-多胞体 $Q$和 $Q'$，使得它们的环面环彼此不同构。

1.6. 结构安排。在第 2 节中，我们回顾整多面体的环面环的定义和记号，并给出一种计算正规整多胞体的环面环的除子类群的算法。我们还回顾某些 (0, 1)-多胞体，尤其是序多胞体的环面环及其若干性质。此外，我们回顾 Gale 图的概念，并介绍一种求给定多面体的对偶多胞体的 Gale 图的方法。在第 3 节中，我们引入一类新的 (0, 1)-多胞体并研究其性质。在第 4 节中，我们分别对每种情形下的秩为 $P = 0$或 1、秩为$P = 2$以及秩为 $P \geq 3$的情况，完整或部分地回答问题 1、2、3 和 4。

致谢。作者谨此感谢 Akihiro Higashitani 提供的诸多有益意见和富有启发性的讨论。作者部分受到日本学术振兴会特别研究员资助项目（Grant-in-Aid for JSPS Fellows），项目编号 JP22J20033 的资助。

## 2. Preliminaries

2.1. 整多面体的环面环及其除子类群。本小节回顾多面体和环面环的定义与记号。有关介绍，请参阅例如 [3] 或 [33], 。

首先，我们介绍整多面体的环面环。整多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是指其顶点位于 $\mathbb{Z}^d$中的多面体。对于整多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$，我们定义 $\phi_P$ 为 $\Bbbk$-代数的态射：

$$\phi_P : \Bbbk[x_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d] \to \Bbbk[t_0, t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}], \text{ induced by } \phi_P(x_{\mathbf{v}}) = \mathbf{t}^{\mathbf{v}} t_0,$$

其中，对 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ 中的每个 $\mathbf{v}$，$\mathbf{t}^{\mathbf{v}} = t_1^{v_1} \cdots t_d^{v_d} \in \mathbb{Z}^d$。接着，$\phi_P$ 的核记为 $I_P$，称为 $P$ 的环面理想。此外，$\phi_P$ 的像记为 $\Bbbk[P]$，称为 $P$ 的环面环。注意，$\Bbbk[P] \cong \Bbbk[x_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d]/I_P$。

众所周知，环面理想 $I_P$ 由齐次二项式生成。将每个 $\mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d$ 对应的 $\deg(\mathbf{t}^{\mathbf{v}} t_0)$ 设为 $= 1$，则环面环 $\Bbbk[P]$ 是 $\Bbbk[t_0, t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$ 的标准分次 $\Bbbk$-子代数。$\Bbbk[P]$ 的克鲁尔维数等于 $P$ 的维数加 1。

对于整多面体 $P \in \mathbb{R}^d$，令 $\mathcal{A}(P) = \{(\mathbf{v}, 1) \in \mathbb{Z}^{d+1} : \mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d\}$，并令$\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}(P) = \{a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n : \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{A}(P)\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$（我们以类似方式定义 $\mathbb{Z}\mathcal{A}(P)$ 和 $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}(P)$）。

于是，以下事实成立：

- $P$是正规（即，$\Bbbk[P]$ 是正规）当且仅当 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}(P) = \mathbb{Z}\mathcal{A}(P) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}(P)$（参见[33, 定理 9.8.13]）。
- 假设 $\mathbb{Z}\mathcal{A}(P) = \mathbb{Z}^{d+1}$。那么，$P$ 是正规当且仅当 $P$ 具有整数分解性质（简称 IDP），也就是说，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 以及任意 $\mathbf{a} \in nP \cap \mathbb{Z}^d$，存在 $\mathbf{a}_1$，…，$\mathbf{a}_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$，使得 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n$（参见[13,定理 4.7]）。

我们还将两个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$ 的乘积定义为

$$P \times Q = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q\} \subset \mathbb{R}^{d+e}.$$

我们可以看出，$P \times Q$ 是一个维数为 $\dim(P) + \dim(Q)$ 的多面体，其非空面是 $P$ 和 $Q$ 的非空面（包括多面体本身）的乘积。特别地，$P \times Q$ 的面数等于 $|\Psi(P)| + |\Psi(Q)|$，其中 $\Psi(P)$表示 $P$的面集。因此，我们有 $\operatorname{rank} P \times Q = \operatorname{rank} P + \operatorname{rank} Q + 1$。

两个整多面体之乘积的环面环，对应于这些环面环的“塞格雷积”；设 $P_1$ 和 $P_2$ 是两个整多面体，则 $\Bbbk[P_1 \times P_2]$ 同构于 $\Bbbk[P_1]$ 和 $\Bbbk[P_2]$的塞格雷积。这里，对于两个标准的 $\Bbbk$-代数$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ 和 $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$，我们将它们的塞格雷积 $R\#S$ 定义为如下分次$\Bbbk$-代数：

$$R\#S = (R_0 \otimes_{\Bbbk} S_0) \oplus (R_1 \otimes_{\Bbbk} S_1) \oplus \cdots \subset R \otimes_{\Bbbk} S.$$

接下来，我们给出一种算法，用于计算正规整多胞体的环面环的除子类群。我们使用了 [33, 第 9.8] 节中的理论。

令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$的自然内积。对于 $\in \mathbb{R}^d$ 和 $b \in \mathbb{R}$，我们将 $H^+(\mathbf{a}; b)$（分别为 $H(\mathbf{a}; b)$）记作闭半空间 $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle + b \geq 0\}$（分别记作仿射超平面 $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle + b = 0\}$）。特别地，我们将线性超平面$H(\mathbf{a}; 0)$记作 $H_{\mathbf{a}}$。

对于每个 $F \in \Psi(P)$，都存在一个向量 $\mathbf{a}_F \in \mathbb{Q}^d$ 和一个有理数 $b_F$，满足以下条件：

(d1) $H(\mathbf{a}_F; b_F)$ 是与 $F$ 和 $P \subset H^+(\mathbf{a}_F; b_F)$ 相关的支撑超平面；(d2) $d_F(\mathbf{v}) \in \mathbb{Z}$ 对任意 $\mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d$；(d3) $\sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} d_F(\mathbf{v})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$,

其中，对于 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$，$d_F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_F \rangle + b_F$。我们可以看到，对于 $\mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d$，$d_F(\mathbf{v})$ 与 $\mathbf{a}_F$ 和 $b_F$ 的选取无关。

在这种情况下，$P$ 具有不可约表示：

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}(P) = \operatorname{aff}(\mathcal{A}(P)) \cap \left( \bigcap_{F \in \Psi(P)} H^+_{\mathbf{c}_F} \right), \tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{c}_F := (\mathbf{a}_F, b_F) \in \mathbb{Q}^{d+1}$。给定 $v \in P \cap \mathbb{Z}^d$，我们定义 $\mathbf{w}_\mathbf{v}$ 属于自由阿贝尔群 $\mathcal{F} = \bigoplus_{F \in \Psi(P)} \mathbb{Z}\epsilon_F$，其基为 $\{\epsilon_F\}_{F \in \Psi(P)}$，定义如下：

$$\mathbf{w}_\mathbf{v} = \sum_{F \in \Psi(P)} \langle (\mathbf{v}, 1), \mathbf{c}_F \rangle \epsilon_F = \sum_{F \in \Psi(P)} d_F(\mathbf{v}) \epsilon_F.$$

Let

$$\mathcal{S} = \sum_{\mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}\mathbf{w}_\mathbf{v} = \left\{ \sum_{F \in \Psi(P)} \langle \mathbf{v}', \mathbf{c}_F \rangle \epsilon_F : \mathbf{v}' \in \mathbb{Z}\mathcal{A}(P) \right\} \tag{2.2}$$

并令 $\mathcal{M}_P$ 为矩阵，其列向量由 $\mathbf{w}_\mathbf{v}$ 组成，其中 $\mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d$，即 $\mathcal{M}_P = (d_F(\mathbf{v}))_{F \in \Psi(P),\ \mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d}$。然后我们可以如下计算 $\Bbbk[P]$ 的除子类群：

定理 2.1（参见 [33, 定理 9.8.19]）。采用与上文相同的记号，并假设 $P$ 是正规的。那么，我们有

$$\operatorname{Cl}(\Bbbk[P]) \cong \mathcal{F}/\mathcal{S}.$$

特别地，我们有

$$\operatorname{Cl}(\Bbbk[P]) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/s_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/s_m\mathbb{Z},$$

其中 $m =$ 维数为 $P + 1$，$r = |\Psi(P)| - m$，且 $s_1$、.....、$s_m$ 是出现在 $\mathcal{M}_P$ 的史密斯标准形对角线上的正整数。

整数 $s_1, \ldots, s_m$ 称为 $\mathcal{M}_P$ 的不变因子。

设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个整多面体，并设 $k_P$ 是满足以下命题的最大非负整数：

(∗) 存在互不相同的整点 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k_P} \in P \cap \mathbb{Z}^d$，以及 $P$ 的互不相同的面 $F_1, \ldots, F_{k_P}$，使得对每个 $1 < i \leq k_P$ 都有 $v_i \in \bigcap_{l=1}^{i-1} F_l$，并且对每个 $1 \leq i \leq k_P$ 都有 $(\mathbf{v}_i) = 1$。

定理 2.2（[20, 定理 3.2]）。设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个正规整多胞体，并设 $\mathcal{M}_P$ 的不变因子为 $s_1, \ldots, s_m$。则 $s_1 = \cdots = s_{k_P} = 1$。特别地，若 $k_P = \dim P + 1$，则 $\operatorname{Cl}(\Bbbk[P])$ 无挠。

最后，我们说明，除子类群无挠的正规环面环可以描述为代数环面作用在多项式环上所得到的不变量环。设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 $d$ 维正规整多胞体，并满足 $\mathbb{Z}\mathcal{A}(P) = \mathbb{Z}^{d+1}$。此外，我们假设 $\operatorname{Cl}(\Bbbk[P]) \cong \mathbb{Z}^r$。我们固定一个同构 $\iota\colon \mathcal{F}/\mathcal{S} \to \mathbb{Z}^r$，并对每个 $F \in \Psi(P)$，令 $\beta_F := \iota(\epsilon_F)$。本文将 $\beta_F$ 称为 $\Bbbk[P]$ 的权。我们考虑代数环面 $G = (\Bbbk^\times)^r$ 对多项式环 $S = \Bbbk[x_F\colon F \in \Psi(P)]$ 的作用，该作用由 $g \cdot x_F = \beta_F(g) x_F$（$g \in G$）诱导。于是，我们有 $R = S^G$（参见例如 [2,定理 2.1]）。

2.2. 某些 (0,1)-多胞体的环面环。本小节中，我们介绍与某些 (0, 1)-多胞体的环面环相关的一些性质。

首先，我们介绍若干多胞体及其环面环相关的命题。

- 若多胞体 $P$ 的所有顶点都是 (0, 1) 向量，则称其为 (0, 1)-多胞体。
- 棱锥 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是多面体 $Q \subset \mathbb{R}^d$ （底面为 $P$）与点 $v_0 \in \mathbb{R}^d$ （顶点为 $P$）之并集的凸包，其中 $v_0$ 不属于 aff($Q$)。注意，棱锥 $P$ 的底面是 $P$的一个面。
- 若多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的每个顶点都恰好包含于 $\dim P$ 个面中，则称其为单纯的。

命题 2.3（[19, 定理 1]）。当且仅当 (0, 1)-多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 等于若干 (0, 1)-单形的乘积时，它才是单纯的。

命题 2.4。设 $P \subset \mathbb{R}^d$是一个底面为 $Q$的 (0, 1)-棱锥。那么， $\Bbbk[P]$ 是 $\Bbbk[Q]$的多项式扩张。特别地，若 $P$ 是正规的，则 $Q$也是正规的，并且有

$$\mathrm{Cl}(\Bbbk[P]) \cong \mathrm{Cl}(\Bbbk[Q]).$$

接下来，我们介绍一类由偏序集产生的特殊 (0,1)-多胞体，称为序多胞体（[30]），它们在本文中起着重要作用。

设 $\Pi$ 是一个配备偏序 $\preceq$的有限偏序集。对于子集 $I \subset \Pi$，若 $p \in I$ 且 $q \preceq p$，则称 $I$ 是 $\Pi$ 的偏序理想。注意， $\emptyset$ 被视为一个偏序理想。令 $\widehat{\Pi} = \Pi \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$，其中 $\hat{0}$（分别为 $\hat{1}$）是一个不属于 $\Pi$ 的新极小（分别为极大）元素。

对于偏序集 $\Pi = \{p_1, \ldots, p_d\}$，令

$$\mathcal{O}_\Pi = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ x_i \geq x_j \text{ if } p_i \preceq p_j \text{ in } \Pi, \ \ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ for } i = 1, \ldots, d\}.$$

称凸多胞体 $\mathcal{O}_\Pi$ 为 $\Pi$的序多胞体。已知 $\mathcal{O}_\Pi$ 是一个 (0, 1)-多胞体，且具有整数分解性质。根据 [30], ， $\mathcal{O}_\Pi$ 的顶点与 $\Pi$的偏序理想一一对应。事实上，(0, 1)-向量（$a_1, \ldots, a_d$）是 $\mathcal{O}_\Pi$ 的顶点，当且仅当$\{p_i \in \Pi : \ a_i = 1\}$ 是一个偏序理想。此外， $\mathcal{O}_\Pi$ 的面与 $\widehat{\Pi}$的哈斯图中的边一一对应。事实上，对于 $p_i$、$p_j \in \Pi$，若 $p_i \prec p_j$，则 $\{p_i, p_j\}$ 是 $\Pi$ 的哈斯图中的一条$\widehat{\text{}}$边，当且仅当不等式 $x_i \geq x_j$ 定义了 $\mathcal{O}_\Pi$的一个面，其中若 $p_i = \hat{0}$（分别若 $p_j = \hat{1}$），我们令 $x_i = 1$ （分别令 $x_j = 0$）。

环面环 $\Bbbk[\mathcal{O}_\Pi]$ 称为 $\Pi$的 Hibi 环，它最初于[14]中引入。我们将 $\Pi$ 的 Hibi 环记作 $\Bbbk[\Pi]$ （简记为 $\Bbbk[\mathcal{O}_\Pi]$ ）。

设 $P$和 $Q$ 是两个具有 $P \cap Q = \emptyset$的偏序集。 $P$和 $Q$ 的不交并是定义在 $P \cup Q$ 上的偏序集$P + Q$，其中 $x \preceq y$属于 $P + Q$ 当且仅当满足以下条件之一: (a) $x$、 $y \in P$且 $x \preceq y$属于 $P$; 或 (b) $x$、 $y \in Q$且 $x \preceq y$属于 $Q$。 $P$和 $Q$的序数和是定义在 $P \cup Q \cup \{z\}$上的偏序集 $P \oplus Q$，其中$x \preceq y$属于 $P \oplus Q$ 当且仅当满足以下条件之一: (a) $x$、 $y \in P$且 $x \preceq y$属于 $P$; (b) $x$、 $y \in Q$且 $x \preceq y$属于 $Q$; (c) $x \in P$且 $y = z$; 或 (d) $x = z$ 且 $y \in Q$; 其中 $z$ 是一个不属于$P \cup Q$的新元素。通过考察 $P + Q$ 和 $P \oplus Q$的偏序理想，可得以下命题:

命题 2.5. 设 $P$ 和 $Q$ 是两个偏序集，满足 $P \cap Q = \emptyset$。

(i) 有 $\Bbbk[P + Q] \cong \Bbbk[P] \# \Bbbk[Q]$。(ii) 有

$\Bbbk[P \oplus Q] \cong \Bbbk[Q \oplus P] \cong \Bbbk[P] \otimes_\Bbbk \Bbbk[Q]$。

我们给出了 Hibi 环的除子类群的描述，该描述见[11]。令 $n$ 为 Π的哈斯图的边数。然后， [11]证明

$$\mathrm{Cl}(\Bbbk[\Pi]) \cong \mathbb{Z}^{n-d-1}. \tag{2.3}$$

特别地， $\mathcal{O}_\Pi$ 的秩等于 $n-(d+1)$ 。

T文献 [22, 16]研究了秩为 $\mathcal{O}_\Pi \leq 2$ 的偏序集 Π 的刻画:

定理 2.6（[22, 引理 3.2] 和 [16, 命题 4.1]）。设 Π 是一个偏序集。那么，

(i) 秩为 $\mathcal{O}_\Pi = 0$ 当且仅当（其哈斯图） Π是一条链。

此外，假设 $\Bbbk[\Pi]$ 不是 Hibi 环的多项式扩张。那么，

(ii) 秩为 $\mathcal{O}_\Pi = 1$ 当且仅当 Π 是两条链的不交并。(iii) 秩为 $\mathcal{O}_\Pi = 2$ 当且仅当 Π是偏序集 $\Pi_1$、 $\Pi_2$、 $\Pi_3$ 或 $\Pi_4$ 之一（见图 1、2、3 和 4）。

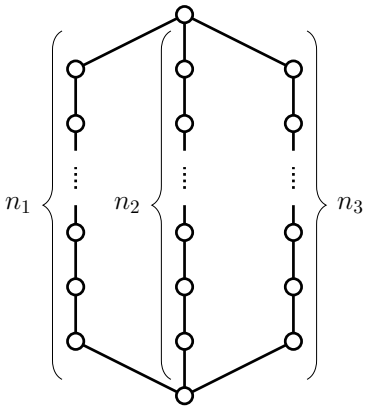



FIGURE 1. 偏序集 $\widehat{\Pi}_1$

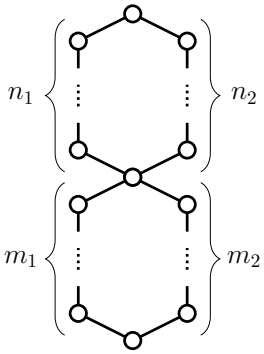



FIGURE 2. 偏序集 $\widehat{\Pi}_2$

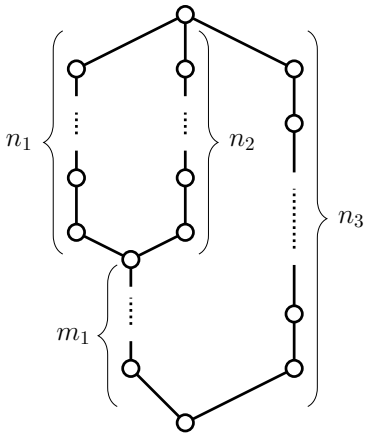



FIGURE 3. 偏序集 $\widehat{\Pi}_3$

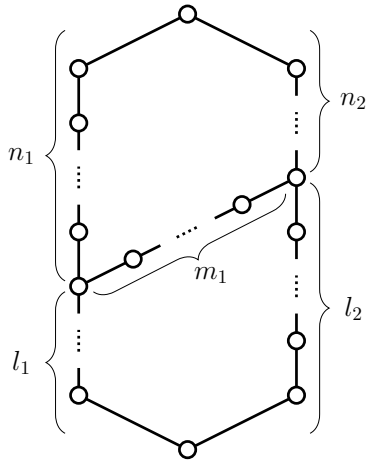



FIGURE 4. 偏序集 $\widehat{\Pi}_4$

这里， $n_1$、 $n_2$、 $n_3$、 $m_1$ 和 $m_2$ 是边的数量。注意， $\mathcal{O}_\Pi$ 的秩为 $\mathcal{O}_\Pi = 0$ 的 Hibi 环同构于一个多项式环。此外，由命题 2.5 (i) 可知， $\mathcal{O}_\Pi$ 的秩为 $\mathcal{O}_\Pi = 1$ 的 Hibi 环同构于两个多项式环的塞格雷积。

除子类群的秩为 2 的 Hibi 环的权在[22, 第 3.2 节和第 3.3] 节中计算。下表总结了与图 1、2、3 和 4 中偏序集相关联的 Hibi 环的权。

| 偏序集 | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 权 | $(1,0)\ \times n_1$<br>$(0,1)\ \times n_2$<br>$(-1,-1)\ \times n_3$ | $(1,0)\ \times n_1$<br>$(-1,0)\ \times n_2$<br>$(0,1)\ \times m_1$<br>$(0,-1)\ \times m_2$ | $(1,0)\ \times n_1$<br>$(-1,-1)\ \times n_2$<br>$(0,1)\ \times n_3$<br>$(0,-1)\ \times m_1$ | $(1,0)\ \times n_1$<br>$(-1,0)\ \times n_2$<br>$(-1,1)\ \times m_1$<br>$(0,1)\ \times l_1$<br>$(0,-1)\ \times l_2$ |

此处 $\times n_i$、$\times m_i$ 和 $\times l_i$ 表示重数。

2.3. Gale 图。本小节回顾多面体的 Gale 图记号，这有助于我们对环面环的同构类进行分类。

在本小节中，设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 $d$ 维多面体，其顶点集为 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$，并假设 $P$ 具有不可约表示 (2.1)。

我们考虑

$$D(P) = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in[n]} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \text{ and } \sum_{i\in[n]} \alpha_i = 0 \right\}.$$

我们可以看出， $D(P)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个 $(n-d-1)$ 维子空间。设 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-d-1}$ 是 $D(P)$ 的一组基。此外，对于 $i \in [n]$，令 $\mathbf{b}_i$ 表示 $(n-d-1) \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{b}_{n-d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}$ 的第 $i$ 列向量，即 $\mathbf{b}_i = (\mathbf{b}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{b}_{n-d-1}^{(i)})$；其中，对于向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$，$\mathbf{v}^{(i)}$ 表示 $\mathbf{v}$ 的第 $i$ 个坐标。

于是， $n$元组 $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ 称为 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$（或 $P$）的 Gale 变换。此外，令

$$\widehat{\mathbf{b}_i} = \begin{cases} \mathbf{b}_i / ||\mathbf{b}_i|| & \text{if } \mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} & \text{if } \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

对每个 $i \in [n]$，其中 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ 是向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$。于是， $n$元组 $(\widehat{\mathbf{b}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{b}_n})$ 称为 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$（或 $P$）的 Gale 图。Gale 变换和 Gale 图取决于 $D(P)$ 的基的选择。

特别地，我们关注 $n-d-1=2$ 的情形，也就是说， $P$恰有 $d+3$ 个顶点。在这种情况下，我们可以根据 Gale 图 $\widehat{\mathbf{b}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{b}_n}$ 绘制标准（或约化）Gale 图，它由以 $\mathbb{R}^2$ 的原点为圆心的单位圆，以及至少有一个端点带重数的直径组成。绘制方法详见 [10, 第 6 节。3]

如果存在一个一一映射 $\Phi$，将 $Q$ 的所有面的集合映射到 $Q'$ 的所有面的集合，并且 $\Phi$ 保持包含关系（分别为反转包含关系），则称两个多胞体 $Q$ 和 $Q'$ 组合等价或具有相同的组合类型（分别为互为对偶）。注意，单纯多面体类（其面为单形的多胞体）与简单多面体类互为对偶。

根据 [10, 第 5.4 节和第 6.3], 节，以下事实已为人所知：

- 两个具有 $d+3$ 个顶点的 $d$ 维多胞体，当且仅当它们的标准 Gale 图正交等价时，才是组合等价的（即在将 $\mathbb{R}^2$ 映射到自身的正交线性变换下同构）。
- $P$ 是单纯的，当且仅当标准 Gale 图的任何直径都不同时包含两个端点。

显然，所有与 $P$ 对偶的多胞体都具有相同的组合类型。每当我们讨论对偶多胞体时，关注的都是它们的组合类型，因此称它们为 $P$ 的对偶多胞体。

本小节余下部分将说明如何得到对偶多胞体 $P$ 的 Gale 图。 $P$ 的极对偶 $P^\circ$ 定义为

$$P^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq -1 \text{ for any } \mathbf{y} \in P\}.$$

众所周知，若原点是 $P$ 的内点，则 $P^\circ$ 是一个多胞体，且与 $P$ 对偶。此外， $\{\mathsf{a}_F/b_F: F \in \Psi(P)\}$ 是 $P^\circ$ 的顶点集。

下面的定理表明，我们可以从多面体的环面环的权得到其对偶多面体的 Gale 图。

定理 2.7. 假设 $P$ 是正规 $\mathbb{Z}\mathcal{A}(P) = \mathbb{Z}^{d+1}$ 且 $\mathrm{Cl}(\Bbbk[P]) \cong \mathbb{Z}^r$。令 $\{\beta_F\}_{F\in\Psi(P)}$ 为 $\Bbbk[P]$ 的权。则，$(\beta_F/\|\beta_F\|)_{F\in\Psi(P)}$ 是 $P$ 的对偶多胞体的 Gale 图。

在给出证明之前，我们先准备以下引理：

引理 2.8. 沿用定理 2.7 中相同的假设和记号。则，对于每个 $j \in [r]$，有 $\sum_{F\in\Psi(P)} \beta_F^{(j)} \mathsf{a}_F = \mathbf{0}$，且 $\sum_{F\in\Psi(P)} \beta_F^{(j)} b_F = 0$。

证明. 令 $\mathsf{e}_i$ 为 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 的第 $i$ 个单位向量。由于对每个 $i \in [d+1]$，$\mathsf{e}_i \in \mathbb{Z}\mathcal{A}(P)$，$\sum_{F\in\Psi(P)} \langle \mathsf{e}_i, \text{故根据 (2.2)，} \mathsf{c}_F\rangle \epsilon_F$ 属于 $\mathcal{S}$。因此，考虑其在 $\mathbb{Z}^r$ 中的像，我们可得，对于每个 $i \in [d+1]$，$\sum_{F\in\Psi(P)} \mathsf{c}_F^{(i)} \beta_F = \mathbf{0}$。这一事实等价于，对于每个 $j \in [r]$，$\sum_{F\in\Psi(P)} \beta_F^{(j)} \mathsf{c}_F = \mathbf{0}$。因此，我们得到所需的等式。□

定理 2.7 的证明。令 $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^d$ 为一个向量，使得 $P+\mathsf{u}$ 的内部包含 0。那么，$Q = (P+\mathsf{u})^\circ$ 是 $P$ 的对偶多胞体。此外， $P+\mathsf{u}$ 有不可约表示

$$P + \mathbf{u} = \bigcap_{F\in\Psi(P)} H^+(\mathbf{a}_F; b'_F),$$

其中 $b'_F = b_F - \langle \mathsf{a}_F, \mathsf{u}\rangle$。注意，对于任意 $F \in \Psi(P)$，都有 $b'_F \neq 0$，因为 0 属于 $P+\mathsf{u}$ 的内部。

我们证明 $(b'_F\beta_F)_{F\in\Psi(P)}$ 是 $Q$ 的 Gale 变换。对于每个 $j \in [r]$，我们将 $\mathbb{R}^{|\Psi(P)|}$ 的向量 $\mathsf{b}^j$ 定义为 $\mathsf{b}^j := (b'_F\beta_F^{(j)})_{F\in\Psi(P)}$。于是可以看出

$$\overline{\mathbf{b}_j} = (b'_F\beta_F^{(1)}, \ldots, b'_F\beta_F^{(r)}) = b'_F\beta_F \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{b}_j} = \beta_F/\|\beta_F\|.$$

因此，只需证明 $\mathsf{b}^j$ 满足以下条件：

$$\text{(i) for each } j \in [r], \mathbf{b}_j \text{ is in } D(Q) \quad \text{and} \quad \text{(ii) } \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \text{ form a basis of } D(Q).$$

(i) 注意， $Q$ 的顶点集为 $\{\mathbf{a}_F/b'_F\colon\ F\in\Psi(P)\}$。由引理 2.8 可知，对每个$j\in[r]$,

$$\sum_{F\in\Psi(P)} b'_F\beta_F^{(j)}\cdot\mathbf{a}_F/b'_F=\sum_{F\in\Psi(P)}\beta_F^{(j)}\mathbf{a}_F=\mathbf{0}.$$

此外,

$$\begin{aligned}\sum_{F\in\Psi(P)} b'_F\beta_F^{(j)}&=\sum_{F\in\Psi(P)} b_F\beta_F^{(j)}-\sum_{F\in\Psi(P)}\langle\mathbf{a}_F,\mathbf{u}\rangle\beta_F^{(j)}\\&=0-\langle\sum_{F\in\Psi(P)}\beta_F^{(j)}\mathbf{a}_F,\mathbf{u}\rangle=-\langle\mathbf{0},\mathbf{u}\rangle=0.\end{aligned}$$

因此，对所有 $j\in[r]$，我们有 $\mathbf{b}_j\in D(Q)$。

(ii) 注意到 $D(Q)$ 是 $\mathbb{R}^{|\Psi(P)|}$的 $r$ 维子空间。因此，只需证明 $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_r$ 线性无关。假设存在一个 $=(a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{R}^r$，使得

$$a_1\mathbf{b}_1+\cdots+a_r\mathbf{b}_r=0.$$

那么，对每个 $F\in\Psi(P)$，都有

$$a_1(b'_F\beta_F^{(1)})+\cdots+a_r(b'_F\beta_F^{(r)})=b'_F\langle\mathbf{a},\beta_F\rangle=0.$$

由于 $b'_F\neq 0$，对于任意 $F\in\Psi(P)$，我们有 $\langle\mathbf{a}\ \beta_F\rangle=0$；等价地， $\beta_F$ 落在超平面 $H_{\mathbf{a}}$ 上。这与 $\beta_F$ 张成 $\mathcal{F}/\mathcal{S}\cong\mathbb{Z}^r$ 作为半群这一事实矛盾（ [5, 定理 2]）。□

## 3. 一类新的 (0, 1) 多胞体

本节中，我们构造一类新的 (0, 1)-多胞体，记作 $P_{n_1,\dots,n_k}$，并研究其性质。我们证明 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 是正规且无挠的。此外，我们看到，若 $k\geq 3$，则 $\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 不同构于任何 Hibi 环。

令 $n_1,\dots,n_k$ 为正整数，并令 $d=n_1+\cdots+n_k$。此外，令 $\mathcal{B}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，并令 $\mathcal{B}_{n_1,\dots,n_k}=\mathcal{B}_{n_1}\times\cdots\times\mathcal{B}_{n_k}$。于是，我们定义 $\mathbb{Z}^d$ 的子集 $V_{n_1,\dots,n_k}$ 为

$$V_{n_1,\dots,n_k}=\{\mathbf{0}\}\cup\mathcal{B}_d\cup\mathcal{B}_{n_1,\dots,n_k}$$

并定义 (0, 1)-多胞体 $P_{n_1,\dots,n_k}=$ 为凸包 $\mathrm{conv}(V_{n_1,\dots,n_k})$。

例 3.1. 我们可以看到

$$P_{1,1,1}=\mathrm{conv}(\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\})$$

and

$$\Bbbk[P_{1,1,1}]\cong\Bbbk[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]/(x_2x_3x_4-x_0^2x_5).$$

此外，我们可以看到

$$\begin{aligned}P_{1,1,1,2}=\mathrm{conv}(\{&(0,0,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\\&(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1)\})\end{aligned}$$

and

$$\Bbbk[P_{1,1,1,2}]\cong\Bbbk[x_1,\dots,x_8]/(x_6x_7-x_5x_8,x_2x_3x_4x_6-x_1^3x_8,x_2x_3x_4x_5-x_1^3x_7).$$

首先，我们描述 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 的面定义不等式。通过考虑嵌入

$$\mathcal{B}_{n_p} \hookrightarrow \mathbb{R}^d \qquad \mathbf{i}_p \mapsto (\underbrace{0,\dots\dots,0}_{n_1+\cdots+n_{p-1}},\ \mathbf{i}_p\ ,\underbrace{0,\dots\dots,0}_{n_{p+1}+\cdots+n_k}),$$

我们将 $\mathbf{i}_p \in \mathcal{B}_{n_p}$ 视为 $\mathbb{R}^d$的元素。
对于 $p \in [k]$，令 $\mathbf{f}_p = (k-2)\mathbf{1}_p - \sum_{q\in[k]\setminus\{p\}} \mathbf{1}_q$，其中 $\mathbf{1}_p = \sum_{\mathbf{i}_p\in\mathcal{B}_{n_p}} \mathbf{i}_p$。

命题 3.2。 (0, 1)-多胞体 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 具有如下不可约表示：

$$P_{n_1,\dots,n_k} = \Big(\bigcap_{\mathbf{e}\in\mathcal{B}_d} H^+_{\mathbf{e}}\Big) \cap \Big(\bigcap_{p\in[k]} H^+(\mathbf{f}_p; 1)\Big).$$

证明。若 $k = 1$，则 $P_{n_1} =$是 conv($\{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{B}_{n_1}$)，并且容易看出 $P_{n_1}$具有上述不可约表示。接下来，假设 $k \geq 2$。

我们可以在每个超平面上找到 $d$ 个仿射独立向量，它们属于 $V_{n_1,\dots,n_k}$。因此，这些向量确定了 $P_{n_1,\dots,n_k}$的面。

令 $P' = \Big(\bigcap_{\mathbf{e}\in\mathcal{B}_d} H^+_{\mathbf{e}}\Big) \cap \Big(\bigcap_{p\in[k]} H^+(\mathbf{f}_p; 1)\Big)$，并证明 $P = P'$。显然，$P \subset P'$，因为 $V_{n_1,\dots,n_k} \subset P'$。此外，$P_{n_1,\dots,n_l}$ 的每个顶点都位于 $d$ 个仿射无关超平面$H_{\mathbf{e}}$ 或 $H(\mathbf{f}_p; 1)$上；也就是说，$\mathcal{P}'$的顶点集（记为 $V$）包含 $V_{n_1,\dots,n_k}$。因此，只需证明 $V \subset V_{n_1,\dots,n_k}$。

注意，若 $\mathbf{x} \in P'$，则 $\mathbf{x} \in H^+(\mathbf{f}_p; 1)$，即 $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{f}_p\rangle + 1 \geq 0$ 对所有 $p \in [k]$均成立。因此，对于任意 $p \in [k]$，我们有

$$\sum_{q\in[k]\setminus\{p\}} (\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_q\rangle + 1) = -(k-1)\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_p\rangle + (k-1) \geq 0 \ \Rightarrow\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_p\rangle \leq 1. \tag{3.1}$$

此外，由于对所有 $\mathbf{e} \in \mathcal{B}_d$均有 $\mathbf{x} \in H^+_{\mathbf{e}}$，我们可知 $V \subset P' \subset [0,1]^d$。

假设在 $V \setminus V_{n_1,\dots,n_k}$ 中存在一个元素 $\mathbf{v}$。首先，假设 $\mathbf{v} \in \{0,1\}^d$。在这种情况下，由 (3.1) 可知，对所有 $p \in [k]$，$\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_p\rangle = 0$ 或 1 均成立。以下三种情况之一会发生；

(i) 对所有 $p \in [k]$，$\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_p\rangle = 0$，或对所有 $p \in [k]$，$\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_p\rangle = 1$。(ii) 对某个 $p \in [k]$，$\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_p\rangle = 1$，且对所有 $q \in [k] \setminus \{p\}$，$\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_q\rangle = 0$。(iii) 存在 $p_1$、$p_2$、$p_3 \in [k]$，使得 $\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_{p_1}\rangle = \langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_{p_2}\rangle = 1$ 且 $\langle \mathbf{v}\ \mathbf{1}_{p_3}\rangle = 0$。
在情形 (i) 和 (ii) 中，$\mathbf{v}$ 必须属于 $V_{n_1,\dots,n_k}$。在情形 (iii) 中，我们有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{f}_{p_3}\rangle + 1 < 0$，也就是说，$\mathbf{v} \notin H^+(\mathbf{f}_{p_3}; 1)$，这与矛盾。

现在，假设 $\mathbf{v} \notin \{0,1\}^d$。如果存在两个元素 $\mathbf{i}_p$ 和 $\mathbf{j}_p \in \mathcal{B}_{n_p}$，满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_p\rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{j}_p\rangle > 0$，其中某个 $p \in [k]$，那么 $\mathbf{v}$ 不是 $\mathcal{P}'$ 的顶点。事实上，令

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \epsilon\mathbf{i}_p - \epsilon\mathbf{j}_p, \quad \mathbf{v}'' = \mathbf{v} - \epsilon\mathbf{i}_p + \epsilon\mathbf{j}_p,$$

其中 $\epsilon > 0$ 充分小。然后，我们可以验证 $\mathbf{v}'$、$\mathbf{v}'' \in P'$ 和 $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'')$。因此，我们假设对每个 $p \in [k]$，$\langle \mathbf{v},\ \mathbf{i}_p\rangle \geq 0$ 对某个 $\mathbf{i}_p \in \mathcal{B}_{n_p}$ 成立，且 $\langle \mathbf{v},\ \mathbf{j}_p\rangle = 0$ 对所有 $\mathbf{j}_p \in \mathcal{B}_{n_p} \setminus \{\mathbf{i}_p\}$ 成立。令 $t = \sum_{p\in[k]} \langle \mathbf{v},\ \mathbf{i}_p\rangle$。在 $t \leq 1$ 的情形下，令 $t_p = \langle \mathbf{v},\ \mathbf{i}_p\rangle$，其中 $p \in [k]$ 和 $t_{k+1} = 1 - t$ 成立。于是，我们有 $\mathbf{v} = \sum_{p\in[k]} t_p\ \mathbf{i}_p + t_{k+1}\mathbf{0}$ 和 $\sum_{p\in[k+1]} t_p = 1$，因此 $\mathbf{v} \notin V$。最后，我们考虑 $t > 1$ 的情形。如果存在 $p \in [k]$ 使得 $\langle \mathbf{v},\ \mathbf{i}_p\rangle = 0$ 成立，那么我们有 $\langle \mathbf{v},\ \mathbf{f}_p\rangle + 1 = -\sum_{q\in[k]\setminus\{p\}} \langle \mathbf{v},\ \mathbf{i}_q\rangle + 1 = -t + 1 < 0$，这就产生了矛盾。因此，我们可以看出，对所有 $p \in [k]$，$\langle \mathbf{v},\ \mathbf{i}_p\rangle > 0$ 成立。此外，由于 $\mathbf{v}$ 必须位于 $d$ 个仿射无关超平面 $H_{\mathbf{e}}$ 或 $H(\mathbf{f}_p; 1)$ 上，因此对所有 $p \in [k]$，都有 $\mathbf{v} \in H(\mathbf{f}_p; 1)$，也就是说，$\langle \mathbf{v},\ \mathbf{f}_p\rangle + 1 = 0$

对任意 $p \in [k]$ 都成立。我们可以假设 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_1 \rangle = \min\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_p \rangle : p \in [k]\}$，并令 $t_p = \begin{cases} \langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_p \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_1 \rangle, & \text{若 } p \neq 1, \\ \langle \ , \ _1 \rangle & p = 1 \end{cases}$ v i if 对 $p \in [k]$ 成立。于是，我们得到

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in [k] \setminus \{1\}} t_p \mathbf{i}_p + t_1 \sum_{p \in [k]} \mathbf{i}_p$$

and

$$\sum_{p \in [k]} t_p = -(k-2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_1 \rangle + \sum_{p \in [k] \setminus \{1\}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_p \rangle = -(k-2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{1}_1 \rangle + \sum_{p \in [k] \setminus \{1\}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{1}_p \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{f}_1 \rangle = 1.$$

因此， $v$不是 $P'$的顶点，所以 $V$与$V_{n_1,\ldots,n_k}$重合。

□

例3.3。我们考虑$P_{1,1,1}$。那么，

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$\langle \mathbf{f}_p, \mathbf{x} \rangle + 1 = x_p - (x_{q_1} + x_{q_2}) + 1 \geq 0 \quad (p = 1, 2, 3 \text{ and } \{p, q_1, q_2\} = \{1, 2, 3\})$$

它们是$P_{1,1,1}$的面定义不等式。

此外，我们考虑$P_{1,1,1,2}$。那么，以下是$P_{1,1,1,2}$的面定义不等式：

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 5),$$
$$2x_p - (x_{q_1} + \cdots + x_{q_4}) + 1 \geq 0 \, (p = 1, 2, 3 \text{和 } \{p, q_1, \ldots, q_4\} = \{1, \ldots, 5\}) \text{以及} 2(x_4 + x_5) - (x_1 + x_2 + x_3) + 1 \geq 0.$$

接下来，我们研究环面理想$I_{P_{n_1,\ldots,n_k}}$ 关于某个单项式序的初始理想，并给出其Gr¨obner基，由此可以研究正规性。关于初始理想和Gr¨obner基的基础材料，可参阅例如 [13]。

对于 $x_{\mathbf{v}} \in T = \Bbbk[x_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in P_{n_1,\ldots,n_k} \cap \mathbb{Z}^d]$，我们用 $x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_k}$ 表示，而不用 $x_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_k)}$ 表示，其中 $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k) \in \mathcal{B}_{n_1,\ldots,n_k}$。令 $<$表示 $T$ 上由如下变量排列诱导的反字典序：

- $x_{\mathbf{e}} < x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_k}$对于任意 $\mathbf{e} \in \{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{B}_d$ 以及任意 $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k) \in \mathcal{B}_{n_1,\ldots,n_k}$;
- 对于 $\mathbf{e}$、$\mathbf{e}' \in \{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{B}_d$（分别地，对于 $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k)$、$(\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_k) \in \mathcal{B}_{n_1,\ldots,n_k}$），当且仅当 $\mathbf{e} < \mathbf{e}'$（分别地，$(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k) < (\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_k)$）时，$x_{\mathbf{e}} < x_{\mathbf{e}'}$（分别地，$x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_k} < x_{\mathbf{j}_1,\ldots,\mathbf{j}_k}$）。这意味着向量 $\mathbf{e}' - \mathbf{e}$（分别地，$(\mathbf{j}_1 - \mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{j}_k - \mathbf{i}_k)$）最左侧的非零分量为正。

此外，令 $\mathcal{G}_{n_1,\ldots,n_k}$ 为 $T$ 中以下二项式的集合：

(b1) $x_{\mathbf{i}_1} x_{\mathbf{i}_2} \cdots x_{\mathbf{i}_k} - x_{\mathbf{0}}^{k-1} x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_k}$ for $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k) \in \mathcal{B}_{n_1,\ldots,n_k}$;

(b2) $x_{\mathbf{j}_p} x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_p,\ldots,\mathbf{i}_k} - x_{\mathbf{i}_p} x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{j}_p,\ldots,\mathbf{i}_k}$ for $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k) \in \mathcal{B}_{n_1,\ldots,n_k}$, $\mathbf{j}_p \in \mathcal{B}_{n_p}$ with $\mathbf{i}_p < \mathbf{j}_p$;

(b3) $x_{\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_k} x_{\mathbf{j}_1,\ldots,\mathbf{j}_k} - x_{\mathbf{i}'_1,\ldots,\mathbf{i}'_k} x_{\mathbf{j}'_1,\ldots,\mathbf{j}'_k}$ for $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k), (\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_k) \in \mathcal{B}_{n_1,\ldots,n_k}$,

其中，我们定义 $\mathbf{i}'_p = \begin{cases} \mathbf{i}_p \text{ if } x_{\mathbf{i}_p} < x_{\mathbf{j}_p}, \\ \mathbf{j}_p \text{ else,} \end{cases}$ 并定义 $\mathbf{j}'_p$ 为满足 $\{\mathbf{i}'_p, \mathbf{j}'_p\} = \{\mathbf{i}_p, \mathbf{j}_p\}$的对象。注意，这些二项式的每个首项都是相对于<的初始单项式。此外，这些二项式属于 $P_{n_1,\ldots,n_k}$ 的环面理想，即 $\mathcal{G}_{n_1,\ldots,n_k} \subset I_{P_{n_1,\ldots,n_k}}$。

命题 3.4。记号与上文相同。那么，$\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_k}$ 是 $I_{\mathcal{P}_{n_1,\dots,n_k}}$ 关于 $<$的 Gr ¨obner 基。

为了证明这个命题，我们使用以下引理：

引理 3.5（[13, 定理 3.11]）。设 $I \subset S = \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ 是一个整多面体的环面理想，$\mathcal{G} = \{g_1,\dots,g_s\}$ 是 $I$中的二项式集合。固定 $<$ 上的单项式序 $S$，并令 in$_<(\mathcal{G})$ 为由初始单项式 in$_<(g_1)$、.....、in$_<(g_s)$ 生成的 $S$的理想，也就是说，in$_<(\mathcal{G})$ $=(\{\text{in}_<(g) : g \in \mathcal{G}\})$。那么，以下条件等价：

(i) $\mathcal{G}$ 是关于 $<$的 $I$ 的 Gr ¨obner 基。（ii）对于单项式 $u$、$v \in S$，如果 $u \notin$ in$_<(\mathcal{G})$，$v \notin$ in$_<(\mathcal{G})$ 且 $u \neq v$，那么 $u - v \notin I$。

命题 3.4 的证明。我们证明 $\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_k}$ 满足引理 3.5 中的条件 (ii)。设 $u$ 是 $T$ 中的一个单项式。那么，$u$ 可写为

$$x_{\mathbf{0}}^{a} x_{\mathbf{e}_1} x_{\mathbf{e}_2} \cdots x_{\mathbf{e}_s} x_{\mathbf{i}_{11},\dots,\mathbf{i}_{1k}} \cdots x_{\mathbf{i}_{t1},\dots,\mathbf{i}_{tk}},$$

其中 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\mathbf{e}_1$、. . .、$\mathbf{e}_s \in \mathcal{B}_d$ 和 $\mathbf{i}_{1p}$、. . .、$\mathbf{i}_{tp} \in \mathcal{B}_{n_p}$ 对每个 $p \in [k]$ 都成立。设 $M_p$ =$\{\mathbf{e}_1$、. . .、$\mathbf{e}_s\} \cap \mathcal{B}_{n_p}$，并且 $N_p = |M_p|$ 对于 $p \in [k]$ 成立。那么，若 $u \notin$ 属于 $<(\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_k})$，我们可以看出：

(a) 存在 $p \in [k]$，使得 $M_p = \emptyset$ 来自 (b1)；(

b) 对每个 $p \in [k]$，对于任意 $\mathbf{e}_i \in M_p$ 以及来自 (b2) 的任意 $l \in [t]$，都有 $\mathbf{e}_i \leq \mathbf{i}_{lp}$；

(c) 对所有 $p \in [k]$，通过置换来自 (b3) 的 $x_{\mathbf{i}_{11},\dots,\mathbf{i}_{1k}}$、. . .、$x_{\mathbf{i}_{t1},\dots,\mathbf{i}_{tk}}$，都有 $\mathbf{i}_{1p} \leq \mathbf{i}_{2p} \leq \cdots \leq \mathbf{i}_{tp}$ .

令 $\phi_{P_{n_1\dots,\ n_k}}(u) = t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_d^{r_d} t_0^{r_0}$。现在，我们可以假设 $M_1 = \emptyset$。于是，我们可以看到 $t = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n_1}$。类似地，$N_p$和 $a$ 也可以表示为 $r_i$'s。此外，由 (b)、(c) 可知，$\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{i}_{1p},\dots,\mathbf{i}_{tp}$ 可以由 $r_0,\dots,r_d$唯一确定。因此，我们可以从 $t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_d^{r_d} t_0^{r_0}$恢复 $u$。这等价于引理 3.5 中的 (ii)。□

现在，我们给出本节的主要定理。

定理 3.6. (0, 1)-多胞体 $P_{n_1\dots,\ n_k}$ 具有以下性质：

(i) $P_{n_1,\dots,n_k}$ 具有整数分解性质。(ii) $\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 是 Gorenstein 当且仅当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$。(iii) Cl$(\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$。(iv) 若 $k \geq 3$，则对于任意 $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}] \notin$ Order$_{k-1}$。

证明。(i) 由命题 3.4 可知，$I_{n_1,\dots,n_k}$ 的初始理想是平方自由的，因此 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 存在正则幺模三角剖分（参见 [13, 定理 4.17]）。这说明 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 是正规的。此外，$\mathbb{Z}\mathcal{A}(P_{n_1,\dots,n_k})$ 与 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 相同，因为 $\{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{B}_d \subset P_{n_1,\dots,n_k}$，因此 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 具有整数分解性质。

(ii) 由于 $\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 是正规仿射半群环，典范模 $\omega_{\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]}$同构于由所有单项式生成的模，这些单项式的指数向量是 $\left(\bigcap_{\mathbf{e}\in\mathcal{B}_d} H^+((\mathbf{e}, 0); 1)\right) \cap \left(\bigcap_{p\in[k]} H^+((\mathbf{f}_p, 1); 1)\right)$ 中的格点。对某个整数 $\alpha$，通过平行平移 $(1,\dots,1,\alpha)$，可知它也同构于由所有单项式生成的模，这些单项式的指数向量是 $\left(\bigcap_{\mathbf{e}\in\mathcal{B}_d} H^+((\mathbf{e}, 0); 0)\right) \cap$ 中的格点。

$\left(\bigcap_{p\in[k]} H^+((\mathbf{f}_p, 1); m_p)\right)$, where $m_p = 1 - \alpha - (k-2)n_p + \sum_{q\in[k]\setminus\{p\}} n_q$.

因此，若 $\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 是 Gorenstein，则必须成立等式 $m_1 = \cdots = m_k = 0$。这意味着 $n_1 = \cdots = n_k$。反过来，若 $n_1$、.....、$n_k$ 相等，则令 $\alpha = n_1 + 1$，即可看出 $\omega_{\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]}$与 $\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 同构，也就是说，$\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 是 Gorenstein。

(iii) 设 $\mathbf{v}_1$、……、$\mathbf{v}_d$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 中满足 $\{\mathbf{v}_1$、……、$\mathbf{v}_d\} = \mathcal{B}_d$ 的向量，并设 $\mathbf{v}_{d+1} = \mathbf{0}$。此外，对于 $i \in [d]$，设 $F_i$ 为由 $H(\mathbf{v}_i; 0)$ 定义的 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 的面，并设 $F_{d+1}$ 为由 $H(\mathbf{f}_1; 1)$ 定义的 $P_{n_1,\dots,n_k}$ 的面。于是可以看出，这些序列满足陈述 $(*)$，并且有 $k_{P_{n_1,\dots,n_k}} = d+1$。因此，由定理 2.2 可得 $\mathrm{Cl}(\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$。

(iv) 由于 $\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_k}$ 是一个 Gr¨obner 基，二项式 (b1)、(b2) 和 (b3) 生成 $I_{P_{n_1,\dots,n_k}}$。考虑 $I_{P_{n_1,\dots,n_k}}$ 的一个由这些二项式构成的极小生成元集合 $\mathcal{G}'$。如果 $\mathcal{G}'$ 不包含 (b1) 中的任何二项式 $x_{\mathbf{i}_1}x_{\mathbf{i}_2}\cdots x_{\mathbf{i}_k} - x_{\mathbf{0}}^{k-1}x_{\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_k}$，那么存在如下表示：

$$x_{\mathbf{i}_1}x_{\mathbf{i}_2}\cdots x_{\mathbf{i}_k} - x_{\mathbf{0}}^{k-1}x_{\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_k} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mathbf{x}^{\mathbf{w}_i} f_i,$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{Z}$，$\mathbf{x}^{\mathbf{w}_i}$ 是多项式环 $\Bbbk[x_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d]$ 中的一个单项式，而 $f_i$ 是 (b2) 或 (b3) 中的二项式（参见 [13, 引理 3.7]）。然而，这是不可能的，因为对于某个 $(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k)$，变量 $x_{\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_k}$ 必须出现在 $f_i$ 的项中。因此，$\mathcal{G}'$ 对某个 $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k$ 包含 $x_{\mathbf{i}_1}x_{\mathbf{i}_2}\cdots x_{\mathbf{i}_k} - x_{\mathbf{0}}^{k-1}x_{\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_k}$。这意味着 $I_{n_1,\dots}$ 无法由二次二项式生成。

另一方面，Hibi 环的环面理想由二次二项式生成（[14]）。因此，$\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 与任何 Hibi 环都不同构。□

最后，我们计算 $\Bbbk[P_{n_1,\dots,n_k}]$ 的权。令 $F_{\mathbf{e}}$ 表示面 $P_{n_1,\dots,n_k} \cap H(\mathbf{e}; 0)$，其中 $\mathbf{e} \in \mathcal{B}_d$，并令 $F_i$ 表示面 $P_{n_1,\dots,n_k} \cap H(\mathbf{f}_p; 1)$，其中 $p \in [k]$。由 (2.2) 和定理 3.6 (i)，$\mathcal{F}$ 中的以下元素属于 $\mathcal{S}$：

$$\sum_{F \in \Psi(P_{n_1,\dots,n_k})} \langle (\mathbf{i}_p, 0), \mathbf{c}_F \rangle \epsilon_F = \epsilon_{F_{\mathbf{i}_p}} + (k-2)\epsilon_{F_p} - \sum_{q \in [k]\setminus\{p\}} \epsilon_{F_q} \tag{3.2}$$

对于每个 $p \in [k]$ 和 $\mathbf{i}_p \in \mathcal{B}_{n_p}$ 和

$$\sum_{F \in \Psi(P_{n_1,\dots,n_k})} \langle (\mathbf{0}, 1), \mathbf{c}_F \rangle \epsilon_F = \sum_{p \in [k]} \epsilon_{F_p}. \tag{3.3}$$

考虑映射 $\iota\colon \mathcal{F}/\mathcal{S} \to \mathbb{Z}^{k-1}$；令 $\iota(\epsilon_{F_i}) = \mathbf{e}_i$，其中 $i \in [k-1]$，而 $\mathbf{e}_i$ 表示 $i$ 的第 $\mathbb{Z}^{k-1}$ 个单位向量。这诱导出一个同构 $\iota\colon \mathcal{F}/\mathcal{S} \to \mathbb{Z}^{k-1}$，我们可以根据 (3.2) 和 (3.3) 计算剩余的权：

$$\begin{aligned}
&\iota(\epsilon_{F_k}) = -(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_{k-1});\\
&\iota(\epsilon_{F_{\mathbf{i}_p}}) = -(k-1)\mathbf{e}_p \quad \text{for each } p \in [k-1] \text{ and any } \mathbf{i}_p \in \mathcal{B}_{n_p};\\
&\iota(\epsilon_{F_{\mathbf{i}_k}}) = (k-1)(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_{k-1}) \quad \text{for any } \mathbf{i}_k \in \mathcal{B}_{n_k}.
\end{aligned}$$

特别地，我们可以如下得到情形 $k = 3$ 的权：

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,-1), \quad (-2,0) \times n_1, \quad (0,-2) \times n_2, \quad (2,2) \times n_3. \tag{3.4}$$

## 4. Answers to the problems

在本节中，设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 (0,1)-多面体。对于每种情况，我们都对问题 1、2、3 和 4 给出完整或部分解答；

$$\text{(r1)} \quad \operatorname{rank} P = 0 \text{ or } 1, \qquad \text{(r2)} \quad \operatorname{rank} P = 2, \qquad \text{(r3)} \quad \operatorname{rank} P \geq 3.$$

4.1. 情形 (r1)。首先，我们讨论秩为 $P=0$ 的情形，这种情形是平凡的。注意，当且仅当 $P$ 是一个单纯形时，$P$ 的秩为 0。此外，已知 $d$ 维 (0,1)-单纯形的环面环同构于以 $\Bbbk$ 为系数、含有 $d+1$ 个变量的多项式环（参见 [33, 引理 3.1.5]）。

显然，多项式环是正规的，且其除子类群无挠。此外，对于两个 (0, 1)-单形 $P$和 $P'$，当且仅当 $\Bbbk[P]\cong\Bbbk[P']$ 且 $P$和$P'$ 组合等价时，结论成立（等价地说，它们的顶点数相同）。因此，我们得到以下定理:

命题 4.1. 所有秩 0 的 (0, 1)-多胞体都是正规的且无挠。此外，以下关系成立:

$$(\mathbf{0},\mathbf{1})_0=\mathbf{Order}_0=\{\Bbbk[x_1,\dots,x_k]:k\in\mathbb{Z}_{>0}\}.$$

此外，对于两个秩为 $P_i=0$ 的 (0, 1)-多胞体 $P_1$和 $P_2$，它们具有相同的组合类型，当且仅当 $\Bbbk[P_1]\cong\Bbbk[P_2]$。

N接下来，我们讨论秩为$P=1$的情形。 [20] 中已对这一情形进行了如下研究 s:

定理 4.2（[20, 定理 3.7]）。以下条件等价:

(i) $P$的秩为 1，也就是说， $P$恰有 $\dim P+2$ 个面；(ii) 对于某些 $n$、 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$，$\Bbbk[P]$ 同构于两个多项式环 $\Bbbk[x_1,\dots,x_{n+1}]$ 和$\Bbbk[y_1,\dots,y_{m+1}]$ 的塞格雷积，或是其多项式扩张；(iii) $P$是正规且无挠的，并且 $\mathrm{Cl}(\Bbbk[P])\cong\mathbb{Z}$。

因此，秩为 1 的 (0,1)-多胞体都是正规且无挠的。此外，(i) 和 (ii) 的等价性意味着，对于两个秩 $P$ =rank $P'=1$ 的 (0, 1)-多胞体 $P$和 $P'$，$\Bbbk[P]\cong\Bbbk[P']$ 当且仅当 $P$和 $P'$ 组合等价。因此，有以下定理:

定理 4.3. 所有秩为 1 的 (0, 1)-多胞体都是正规且无挠的。此外，存在以下关系:

$(0,1)_1=\mathbf{Order}_1=\{(\Bbbk[x_1,\dots,x_{n+1}]\#\Bbbk[y_1,\dots,y_{m+1}])\otimes_{\Bbbk}\Bbbk[z_1,\dots,z_{l-1}]:n,m,l\in\mathbb{Z}_{>0}\}$.此外，对于两个秩为 $P_i=1$ 的 (0, 1)-多胞体 $P_1$ 和 $P_2$，它们具有相同的组合类型当且仅当 $\Bbbk[P_1]\cong\Bbbk[P_2]$。

4.2. 情形（r2）。根据命题 2.4，以下不妨假设 $P$ 不是金字塔式的。

根据定理 2.7，我们可以得到秩为 2 且满足 $P_{n_1,\ n_2,\ n_3}$ 的序多胞体的对偶多胞体的标准 Gale 图。标准 Gale 图如下所示； $\mathcal{O}_{\Pi_1}$、 $\mathcal{O}_{\Pi_2}$、 $\mathcal{O}_{\Pi_3}$、 $\mathcal{O}_{\Pi_4}$ 和 $P_{n_1,\ n_2,\ n_3}$ 的对偶多胞体分别对应标准 Gale 图 $\mathrm{Gale}_1$,$\mathrm{Gale}_2$,$\mathrm{Gale}_3$,$\mathrm{Gale}_4$ 和 $\mathrm{Gale}_5$, 。

定理 4.4。以下条件等价:

(i) $P$ 的对偶多面体的标准 Gale 图与 $\mathrm{Gale}_1$ 正交等价。(ii) $P$ 的环面环同构于 $\Bbbk$ 上三个多项式环的塞格雷积。

特别地，设 $P_1$ 和 $P_2$ 是具有标准 Gale 图 $\mathrm{Gale}_1$, 的两个 (0, 1)-多胞体，那么 $P_1$ 和 $P_2$ 组合等价，当且仅当 $\Bbbk[P_1]\cong\Bbbk[P_2]$。

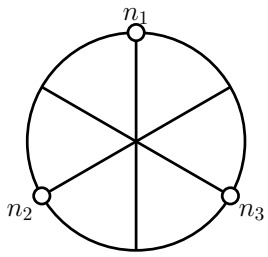



FIGURE 5.Gale 图 $\text{Gale}_1$

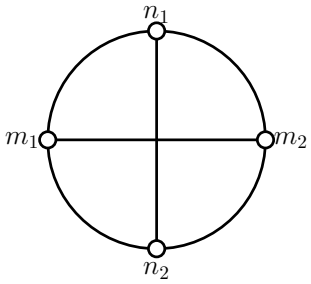



FIGURE 6.Gale 图 $\text{Gale}_2$

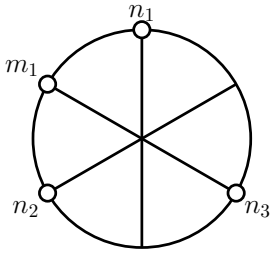



FIGURE 7.
Gale 图 $\text{Gale}_3$

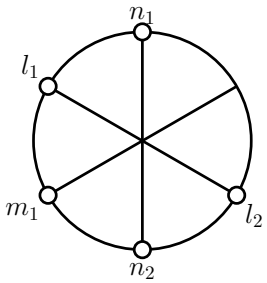



FIGURE 8.Gale 图 $\text{Gale}_4$

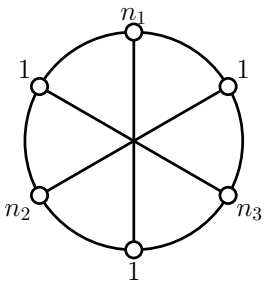



FIGURE 9.Gale 图
$\text{Gale}_5$

证明。(i) $\Rightarrow$(ii)：由于标准 Gale 图中没有直径同时包含两个端点，因此， $P$ 的对偶多胞体是单纯的，也就是说， $P$ 是单纯的。因此，根据命题 2.3， $P$ 只是三个 (0, 1)-单形的乘积，所以 $\mathbb{k}[P]$ 同构于三个多项式环的塞格雷积。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：由命题 2.5 可知，三个多项式环的塞格雷积可以实现为偏序集 $\Pi_1$ 的 Hibi 环。其权已在第 2.2 节给出。根据定理 2.7，我们可以得到 $P$ 的对偶多胞体的标准 Gale 图，该图与 $\text{Gale}_1$正交等价。

最后一个结论由等价条件 (i) 和 (ii) 得出。

□

定理 4.5。以下条件等价：

(i) $P$ 的对偶多胞体的标准 Gale 图与 $\text{Gale}_2$正交等价。

(ii) $P$ 的环面环与 $R_1 \otimes_{\Bbbk} R_2$同构，其中 $R_i$ 是两个关于 $\Bbbk$的多项式环的塞格雷积。

特别地，设 $P_1$ 和 $P_2$ 是具有标准 Gale 图 $\mathrm{Gale}_2$, 的两个 (0, 1)-多胞体，则 $P_1$ 与 $P_2$ 组合等价，当且仅当 $\Bbbk[P_1] \cong \Bbbk[P_2]$。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)：由于 P 的对偶多胞体的标准 Gale 图与 $\mathrm{Gale}_2$正交等价，$P$ 与 $\mathcal{O}_{\Pi_2}$组合等价。因此，存在一个一一映射 $\Phi$ ，将 $\mathcal{O}_{\Pi_2}$ 的所有面组成的集合映射到 $P$的所有面组成的集合，并且 $\Phi$保持包含关系。

令 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$ 表示 $\mathcal{O}_{\Pi_2}$ 中对应于 $\Pi_2$ 的偏序理想（包括与 $\Pi_2$的任意其他元素都可比的那个元素）的顶点，并令 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_m$ 表示 $\mathcal{O}_{\Pi_2}$中其余的顶点。注意，$\mathcal{O}_{\Pi_2}$ 的任意面 $F$都包含 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\}$ 或 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_m\}$，也就是说，对于所有 $i \in [n]$，$d_F(\mathrm{u}_i) = 0$ ；或者对于所有 $j \in [m].$，$d_F(\mathrm{v}_j) = 0$。此外，我们可以看出，$O_1 = \mathrm{conv}(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\})$ 和 $O_2 = \mathrm{conv}(\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_m\})$ 是秩为 $O_1 = \mathrm{rank}\, O_2 = 1$ 的 (0, 1)-多胞体。

令 $\mathrm{w}_i = \Phi(\mathrm{u}_i)$、$\mathrm{z}_j = \Phi(\mathrm{v}_j)$、$Q_1 = \Phi(O_1) = \mathrm{conv}(\{\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_n\})$，以及 $Q_2 = \Phi(O_2) = \mathrm{conv}(\{\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_m\})$。我们证明 $\Bbbk[P] \cong \Bbbk[Q_1] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[Q_2]$，等价地，$I_P = RI_{Q_1} + RI_{Q_2}$，其中 $R = \Bbbk[x_{\mathbf{v}} : \mathrm{v} \in P \cap \mathbb{Z}^d]$。由于 $I_P \supset RI_{Q_1}$ 和 $I_P \supset RI_{Q_2}$，我们有$I_P \supset RI_{Q_1} + RI_{Q_2}$。要证明反向包含，只需证明二项式$b = x_{\mathbf{w}_{i_1}} \cdots x_{\mathbf{w}_{i_p}} x_{\mathbf{z}_{j_1}} \cdots x_{\mathbf{z}_{j_q}} - x_{\mathbf{w}_{h_1}} \cdots x_{\mathbf{w}_{h_s}} x_{\mathbf{z}_{g_1}} \cdots x_{\mathbf{z}_{g_t}} \in I_P$属于 $RI_{Q_1} + RI_{Q_2}$。

在这种情况下，我们有

$$\mathbf{w}'_{i_1} + \cdots + \mathbf{w}'_{i_p} + \mathbf{z}'_{j_1} + \cdots + \mathbf{z}'_{j_q} = \mathbf{w}'_{h_1} + \cdots + \mathbf{w}'_{h_s} + \mathbf{z}'_{g_1} + \cdots + \mathbf{z}'_{g_t},$$

其中，对于 $\mathrm{v} \in \mathbb{Z}^d$，我们定义 $\mathrm{v}' = (\mathrm{v}, 1)$。

由于对任意 $F' \in \Psi(P)$，$d_{F'}(\mathrm{w}_i) = 0$对所有 $i \in [n]$ 均成立，或者 $d_{F'}(\mathrm{z}_j) = 0$对所有 $j \in [m]$ 均成立，我们可以看出 $\langle \sum_{k\in[p]} \mathrm{w}'_{i_k} - \sum_{l\in[s]} \mathrm{w}'_{h_l},\ \mathrm{c}_{F'} \rangle = 0$对所有 $F' \in \Psi(P)$ 均成立。事实上，如果 $F'$ 对所有 $i \in [n]$ 都包含 $\mathrm{w}_i$ ，那么

$$\begin{aligned}\langle \sum_{k\in[p]} \mathbf{w}'_{i_k} - \sum_{l\in[s]} \mathbf{w}'_{h_l}, \mathbf{c}_{F'} \rangle &= \sum_{k\in[p]} \langle \mathbf{w}'_{i_k}, \mathbf{c}_{F'} \rangle - \sum_{l\in[s]} \langle \mathbf{w}'_{h_l}, \mathbf{c}_{F'} \rangle \\ &= \sum_{k\in[p]} d_{F'}(\mathbf{w}_{i_k}) - \sum_{l\in[s]} d_{F'}(\mathbf{w}_{h_l}) = 0.\end{aligned}$$

此外，如果 $F'$ 对所有 $j \in [m]$ 都包含 $\mathrm{z}_j$ ，那么

$$\begin{aligned}\langle \sum_{k\in[p]} \mathbf{w}'_{i_k} - \sum_{l\in[s]} \mathbf{w}'_{h_l}, \mathbf{c}_{F'} \rangle &= \langle \sum_{k\in[p]} \mathbf{w}'_{i_k} + \sum_{k\in[q]} \mathbf{z}'_{j_k} - \sum_{l\in[s]} \mathbf{w}'_{h_l} - \sum_{l\in[t]} \mathbf{z}'_{g_l}, \mathbf{c}_{F'} \rangle \\ &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{c}_{F'} \rangle = 0.\end{aligned}$$

从 $\mathbb{Z}\mathcal{A}(P)$ 到 $\mathcal{S}$ 的同态由 $\mathrm{v}' \mapsto \sum_{F\in\Psi(P)} \langle \mathrm{v}',\ \mathrm{c}_F \rangle \epsilon_F$ 给出，它是一个同构（参见 [33, 命题 9.8.17]）。因此，我们有 $\sum_{k\in[p]} \mathrm{w}'_{i_k} - \sum_{l\in[s]} \mathrm{w}'_{h_l} = \mathbf{0}$。类似地，我们有 $\sum_{k\in[q]} \mathrm{z}'_{j_k} - \sum_{l\in[t]} \mathrm{z}'_{g_l} = \mathbf{0}$，从而

$$\begin{aligned}b &= x_{\mathbf{w}_{i_1}} \cdots x_{\mathbf{w}_{i_p}} (x_{\mathbf{z}_{j_1}} \cdots x_{\mathbf{z}_{j_q}} - x_{\mathbf{z}_{g_1}} \cdots x_{\mathbf{z}_{g_t}}) + x_{\mathbf{z}_{g_1}} \cdots x_{\mathbf{z}_{g_t}} (x_{\mathbf{w}_{i_1}} \cdots x_{\mathbf{w}_{i_p}} - x_{\mathbf{w}_{h_1}} \cdots x_{\mathbf{w}_{h_s}}) \\ &\in RI_{Q_1} + RI_{Q_2}.\end{aligned}$$

由于 $Q_1$ 和 $Q_2$ 的秩为 1，由定理 4.2 可知，$\Bbbk[Q_1]$ 和 $\Bbbk[Q_2]$ 是两个多项式环的塞格雷积，故得证。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：根据命题 2.5 (i) 和 (ii)，$\Bbbk[P]$ 可实现为偏序集 $\Pi_2$的 Hibi 环。根据第 2.2 节中给出的其权以及定理 2.7，可知 $P$ 的对偶多面体的标准 Gale 图与 $\mathrm{Gale}_2$正交等价。

最后一个结论由等价关系 (i) 和 (ii) 得出。 □

这些定理并未完全解答我们的问题。我们还面临以下问题：

问题 1. 对于任意秩为 $P = 2$ 的 (0, 1)-多胞体 $P$，是否存在某个 $n_1$、$n_2$、$n_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\Bbbk[P]$ 同构于一个 Hibi 环或 $\Bbbk[P_{n_1,n_2,n_3}]$？换言之，关系 $(0,1)_2 = \mathrm{Order}_2 \sqcup \{\Bbbk[P_{n_1,n_2,n_3}] : n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ 是否成立?

问题 2. 对于任意秩为 $P = 2$ 的 (0,1)-多胞体 $P$，其对偶多胞体 $P$ 的标准 Gale 图是否正交等价于某个 $\mathrm{Gale}_i$'? 此外，设 $P$ 和 $P'$ 是两个 (0,1)-多胞体，其对偶多胞体的标准 Gale 图分别为 $\mathrm{Gale}_3$, $\mathrm{Gale}_4$ 或 $\mathrm{Gale}_5$, ，那么 $P$ 和 $P'$ 的组合等价是否意味着它们的环面环同构?

如果问题 1 的答案是肯定的，那么所有秩 2 的 (0, 1)-多胞体都是正规的且无挠的。

4.3. 情形 (r3)。最后，我们讨论秩为 $P \geq 3$ 时的正规性、无挠性和分类。事实上，与前面的情形不同，这些性质并无保证。

命题 4.6。对于任意正整数 $r \geq 3$，都存在一个非正规的 (0, 1)-多胞体$P$，其秩为 $P = r$。

证明。令

$$Q_1 = \mathrm{conv}(\{(0,0,0,0), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1)\}).$$

于是，我们可以看出 $Q_1$ 的秩为 3，且不是正规多面体。事实上，利用 Magma（[4]），可以验证 $\dim Q_1 = 4$ 和 $Q_1$ 有 8 个面，因此秩为 $Q_1 = 3$。此外，$(1, 1, 1, 0, 2) \in \mathbb{Z}\mathcal{A}(Q_1) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}(Q_1)$，而 $(1, 1, 1, 0, 2) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A}(Q_1)$。

此外，$Q_1 \times [0,1]^{r-3}$，其中 $[0,1]^d$ 表示 $d$ 维单位超立方体，也是一个非正规 (0, 1)-多胞体，其秩等于 $r$。□

命题 4.7. 对任意正整数 $r \geq 3$，存在一个秩为 $P = r$ 的非无挠正规 (0, 1)-多胞体 $P$。

证明。设

$$Q_2 = \mathrm{conv}(\{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}).$$

那么，我们可以看出 $Q_2$ 的秩为 3，且是正规但非无挠的。事实上，我们可以利用 Magma 看出 $\mathbb{Z}\mathcal{A}(Q_2) = \mathbb{Z}^5$ 和 $Q_2$ 具有整数分解性质，因此 $Q_2$ 是正规的。此外，我们可以计算 $\mathcal{M}_{Q_2}$ 及其史密斯标准形如下：

$$\mathcal{M}_{Q_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，我们有 $\mathsf{Cl}(\Bbbk[Q_2]) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$。

此外， $P := Q_2 \times [0,1]^{r-3}$ 也是一个正规 (0,1)-多胞体，其秩等于 $r$。我们可以如下计算 $\mathcal{M}_P$ 及其史密斯标准形：

$$\mathcal{M}_P = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{Q_2} & \cdots & \mathcal{M}_{Q_2} \\ & A_{r-3} & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix},$$

其中我们定义了 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，并且

$$A_n = \begin{pmatrix} & A_{n-1} & & & A_{n-1} & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

对于 $n \geq 2$。因此，我们得到 $\mathsf{Cl}(\Bbbk[P]) \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$。 □

在这种情况下，对同构类进行分类似乎毫无希望，因为即使对于 Hibi 环，给出完整的分类也很困难。此外，利用 Gale 图的方法已不再有用。事实上，存在两个组合类型相同的 (0,1)-多胞体，它们的环面环彼此不同构。

命题 4.8. 对任意正整数 $r \geq 3$，都存在两个具有相同组合类型且秩为 $P = \text{rank } P' = r$ 的 (0, 1)-多胞体 $P$ and$P'$，使得它们的环面环彼此不同构。

证明. 实际上，命题 4.6 和 4.7 中出现的 $Q_1$ and $Q_2$ 满足这些条件。Magma 确认它们是组合等价的。另一方面， $\Bbbk[Q_2]$ 是正规的，但 $\Bbbk[Q_1]$ 不是。因此，它们不同构。

$Q_1 \times [0,1]^{r-3}$ 和 $Q_2 \times [0,1]^{r-3}$ 也同样如此。 □

## References


[1] W. Bruns，《正规幺半群代数上的锥除子类》，*Commutative algebra and algebraic geometry Contemp. Math.* **390** 2005 63 71 ,,,

美国数学会, ( ), – . [2] W. Bruns 和 J. Gubeladze，《正规半群环的除子线性代数》，*Algebra and Represent. Theory* **6** 2003 139 168 ( ), –

. [3] W. Bruns 和 J. Gubeladze，《多胞体、环与 K 理论》，施普林格数学专著。施普林格，多德雷赫特，(2009)。[4] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust，Magma 代数系统。I. 用户语言，(英文摘要)《计算代数与数论》(伦敦，1993)， *J. Symbolic Comput*, 24 (1997), 第 3–4 期，235–265。[5] L. Chouinard，克鲁尔半群与除子类群， *Canad. J. Math.* **33** (1981), 1459–1468。[6] V. Chv´atal，关于某些与图相关的多胞体， *J. Combin. Theory, Ser.* (B) 18 (1975), 138–154。[7] H. Dao、O. Iyama、R. Takahashi 和 M. Wemyss，Gorenstein 修正与 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 环， *J. Algebraic Geom.* **29** (2020), 729–751。[8] M. M. Deza 和 M. Laurent，《割与度量的几何》，算法与组合学 15，施普林格出版社，柏林，1997。

[9] J. Edmonds，最大匹配与一个具有

0, 1 *J.Res.Nat.Bur.Standards Sect* 个顶 *B* **69** 1965 125 130
点的多面体，, B, ( ), – .[10] B. Gr¨unbaum，《凸多胞体》第二版，数学研究生教材，221，施普林格，纽约，(2003)。[11] M. Hashimoto、T. Hibi 和 A. Noma，与分配格相关的仿射半群环的除子类群，
*J. Algebra* **149** (2), (1992), 352–357。[12] J. Herzog、T. Hibi、S. Moradi 和 A. A. Qureshi，单纯复形的环面面环，arXiv:2302.03653。[13] J. Herzog、T. Hibi 和 H. Ohsugi，《二项式理想》，数学研究生教材，279，施普林格，沙姆，(2018)。[14] T. Hibi，分配格、仿射半群环与具有直线化律的代数。载于：Nagata, M., Matsumura, H. (编)《交换代数与组合学》。纯数学高级研究，第 11 卷，第 93–109 页。北荷兰，阿姆斯特丹 (1987)。[15] A. Higashitani 和 K. Matsushita，完全多部图边环的锥形除子理想与非交换保正则化， *J. Algebra* **594** (2022), 685–711。[16] A. Higashitani 和 K. Matsushita，由具有小类群的偏序集或图导出的三类环面环， *J. Pure Appl. Algebra*, 226 no. 10, (2022), 107079。[17] A. Higashitani 和 Y. Nakajima，Hibi 环的锥形除子理想及其在非交换保正则化中的应用， *Selecta Math.* **25** (2019), 25 页。[18] M. Hochster，代数环面的不变量环、由单项式生成的 Cohen–Macaulay 环与多胞体。 *Ann. Math.* **96** (1972), 318–337。[19] V. KAIBEL 和 M. WOLFF，简单的 0/1 多胞体，欧洲 *J. Combinatorics* **21** (2000), 139-144。[20] K. Matsushita，整多胞体的环面环的除子类群的无挠性，arXiv:2202.10686。[21] K. Matsushita，环面环的锥形除子理想及其在 Hibi 环与稳定集环中的应用，arXiv:2210.02031。[22] Y. Nakajima，具有小类群的 Hibi 环的非交换保正则化，

*J. Pure* ( ), – *Appl. Algebra* **223** 2019 3461 3484
.[23] J. Oxley，《拟阵理论》，牛津数学研究生教材，第 21 卷，牛津大学出版社，牛津，第二版，2011。[24] H. Ohsugi 和 T. Hibi，由有限图导出的正规多胞体， *J. Algebra* **207** (1998), 409–426。[25] H. Ohsugi 和 T. Hibi，所有反字典序初始理想均为平方自由的凸多胞体，*Proc. Amer. Math. Soc.*, 129 (2001), 第 9 期, 2541–2546。[26] A. Simis、W. V. Vasconcelos 和 R. H. Villarreal，与图相关的子环的整闭包，*J. Algebra* **199** (1998), 281–289。[27] ˇS. ˇSpenko 和 M. Van den Bergh，约化群的商奇点的非交换解消，*Invent. Math.* **210** (2017), 第 1 期，3–67。[28] R.P. Stanley，分次代数的希尔伯特函数。 *Adv. Math.* **28** (1978), 57–83。[29] R. P. Stanley，有理凸多胞体的分解， *Ann. Discrete Math.* **6** (1980), 333–342。MR 82a:52007。[30] R. P. Stanley，两个偏序多胞体， *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23。[31] S. Sullivant，压缩多胞体与统计披露限制， *Tohoku Math. J.* **58** (2006), 433–445。[32] M. Van den Bergh，非交换保正则化，《尼尔斯·亨里克·阿贝尔的遗产》，第 749–770 页。施普林格，柏林 (2004)。[33] R. H. Villarreal，《单项式代数》，数学专著与研究札记。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015。

Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871, Japan*Email address*: k-matsushita@ist.大阪-u.ac.jp