arXiv:2303.13084v1 [math.CO] 23 Mar 2023

近似戈伦斯坦多胞体

¨THOMAS HALL、MAX KOLBL、KOJI MATSUSHITA 和 SORA MIYASHITA

摘要。本文研究由格多胞体产生的埃尔哈特环的近戈伦斯坦性。我们给出格多胞体的必要条件和充分条件，以判定其埃尔哈特环是否为近戈伦斯坦环。利用这些结果，我们提出一种高效构造近似戈伦斯坦多胞体的方法。此外，我们确定近戈伦斯坦 $(0,1)$-多胞体的结构，并刻画边多胞体和图拟阵的近戈伦斯坦性。

1. 引言

设$\mathbf{k}$ 为一个无限域，并分别用 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$表示非负整数集、整数集、有理数集和实数集。

设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个格 多胞体，即顶点坐标均为整数的凸多胞体。将 P 置于 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中高度为 1 的位置，并取其上的锥，即得到 $C_P \subset \mathbb{R}^{d+1}$。 P的埃尔哈特环 $A(P)$ 定义为$\mathbf{k}[C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}]$, 其中每个格点 $(x_1,\ldots\ldots x_d$、 $k) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ 均对应一个劳朗单项式 $t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d} s^k$。这种经典构造使我们能够通过多胞体和组合学研究环论概念，反之亦然。

科恩–麦考利环和戈伦斯坦环在交换代数中发挥着核心作用。在研究那些是科恩–麦考利环但不是戈伦斯坦环的环时，弱化戈伦斯坦这一强性质很有用；事实上，人们已经探讨了许多戈伦斯坦性的广义概念。例如，近似戈伦斯坦环、分次环和几乎戈伦斯坦环，仅举几例。

本文主要关注近似戈伦斯坦性质，该性质由 [8]引入。设R 是一个有限生成的 $\mathbb{N}$-分次$\mathbf{k}$-代数，且为科恩–麦考利环。近似戈伦斯坦的定义源于对 R的非戈伦斯坦轨迹的研究，该轨迹由典范模的迹tr (ω_R) 决定 ω_R （见定义 R 2.1）。具体而言， R 是戈伦斯坦环，当且仅当该迹与环本身相同，即 tr $(\omega_R) = R$。若该迹包含 R 的（唯一）极大分次理想 m，则称 R为近似戈伦斯坦环，即 $\mathbf{m} \subseteq \mathrm{tr}(\omega_R)$。

近年来，研究者针对某些特殊情形考察了近似戈伦斯坦性质，例如 Hibi 环[8, 定理 5。4], 与边多胞体相关联的边环 [14], 数值半群环 [9], 以及射影单项式曲线 [17]。此外， h近似戈伦斯坦齐次仿射半群环的 - 向量也得到了研究[16, 定理 4。4]。

一个经典结果指出，埃尔哈特环为戈伦斯坦环的格多胞体，恰好是存在一个整数 k，使得经过适当平移后， kP 是自反的[2], 。本文研究一般格多胞体所对应的埃尔哈特环的近戈伦斯坦性。

在第 2 节中，我们详细介绍有关近似戈伦斯坦$\mathbf{k}$-代数的重要定义和结果。随后，我们详细介绍格多胞体的埃尔哈特环。

在第 3 节中，我们讨论埃尔哈特环的近戈伦斯坦性与其多胞体之间的一些关系。我们将元素 $n \in (\mathbb{R}^d)^*$ 与元素$x \in \mathbb{R}^d$ 之间的自然配对 $n(x)$记为 $P \subset \mathbb{R}^d$ 设 $\mathcal{F}(P)$ 为格多胞体， P为 P的面集。我们固定其面表示:

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n_F(x) \geqslant -h_F \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P)\right\},$$

其中，每个高度 h_F 都是整数，每个内法向量 $n_F \in (\mathbb{Z}^d)^*$ 都是一个本原格点，也就是说，其坐标的最大公约数为 1。

对于格多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，我们定义其下取整多胞体为 $\lfloor P \rfloor := \mathrm{conv}(\mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d)$。我们还引入余数多胞体 $\{P\}$，它属于 P，其定义涉及以特定方式向内或向外推动其面（具体内容见定义3.3 ）。这些多胞体是我们研究近似戈伦斯坦多胞体的核心对象。此外，格多胞体 P的余度 a_P也很重要，它定义为$a_P := \min\{k \in \mathbb{N} : \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing\}$，即使其内含有格点所需的最小正整数膨胀倍数 P [1]。

现在我们给出第 3节的主要结果。我们的第一个定理给出了格多胞体为近戈伦斯坦多胞体的必要条件和充分条件。

定理 1.1 （命题 3.5 和定理3.8）。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是余度为 a 的格多胞体 .
(1) 如果 P 是近戈伦斯坦的，那么它具有闵可夫斯基分解 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$。(2) 反过来，如果 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$，那么存在某个 K，使得对于所有整数 $k \geqslant K$，多面体 kP 都是近戈伦斯坦的。

下一个主要定理给出了近戈伦斯坦多胞体的闵可夫斯基分解中出现的下取整与余数多面体的面表示。

定理 1.2 (定理3.13)。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个余度为 a 的格多胞体。假设$P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$。那么

$$\lfloor aP \rfloor = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n_F(x) \geqslant 1 - ah_F \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P)\right\} \text{ and}$$
$$\{P\} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n_F(x) \geqslant (a-1)h_F - 1 \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P)\right\}.$$

此外，若 $\lfloor P \rfloor \neq \varnothing$，则 $\{P\}$ 是自反的。

这些结果使我们能够证明第 3 节的最后一个主要定理。该定理表明，近戈伦斯坦多胞体的本原内法向量来自自反多胞体的边界点。

定理 1.3。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个近戈伦斯坦多胞体。那么存在一个自反多胞体$Q \subset \mathbb{R}^d$，使得

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n(u) \geqslant -h_n \text{ for all } n \in \partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^*\right\},$$

其中 h_n 为整数。此外，由 $n \in$ 顶点(Q^*) 定义的不等式是不可约的。进一步说，近戈伦斯坦多胞体的面数有一个仅依赖于维数 d 的上界。

接着，我们利用定理 1.3 推导出一种高效构造近似戈伦斯坦多胞体的方法。利用该方法，我们找到了一个近似戈伦斯坦多胞体的例子，它无法分解为戈伦斯坦多胞体的闵可夫斯基和（例 3.19）。本节最后，我们研究闵可夫斯基不可分解的近似戈伦斯坦多胞体；特别地，我们证明它们实际上都是戈伦斯坦的。

在第 4 节中，我们研究近似戈伦斯坦 $(0,1)$-多胞体。这类多胞体包含许多源自组合学的多胞体子类，例如偏序集的序多胞体和图拟阵的基多胞体。先前的研究考察了 Hibi 环 [8] 的近戈伦斯坦性，以及完美图所对应的稳定集多胞体的埃尔哈特环 [14, 18]的近戈伦斯坦性。本节的主要结果通过刻画一大类近似戈伦斯坦 $(0,1)$-多胞体，推广了这些先前的结果：

定理 1.4 (定理 4.2)。 设 P 是一个具有整数分解性质的 $(0,1)$-多面体。那么，当且仅当存在某些戈伦斯坦 P 近似戈伦斯坦，当且仅当 $P = P_1 \times \cdots \times P_s$，其中 $(0,1)$- 多胞体 P_1，……，P_s 满足 $|a_{P_i} - a_{P_j}| \leqslant 1$，对于 $1 \leqslant i < j \leqslant s$。

在第4.1小节中，我们将更详细地探讨定理1.4 如何推广文献中的已有结果。随后，我们从定理1.4中推导出一些有趣的推论。例如，我们证明每个具有 $(0,1)$-多面体的近似戈伦斯坦

整数分解性质的近似戈伦斯坦4.4）都是分次的（推论4.5），并刻画具有整数分解性质的近似戈伦斯坦边多胞体（推论4.11）以及由图拟阵产生的近似戈伦斯坦基多胞体（推论

致谢。 第一作者在开展这项工作期间获得了日本学术振兴会博士前期奖学金（短期）PE22729 的资助，并谨此感谢其导师 Alexander Kasprzyk 和 Johannes Hofscheier 在撰写过程中提出的宝贵意见。第三作者部分获得了日本学术振兴会特别研究员科研补助金 JP22J20033 的资助。我们衷心感谢 Akihiro Higashitani 教授提出的宝贵意见和富有启发性的讨论。

2. Preliminaries and auxiliary lemmas

2.1. **近似戈伦斯坦 k-代数**。 设 R 是一个有限生成的 $\mathbb{N}$-分次$\mathbf{k}$-代数，具有唯一的分次极大理想 $\mathbf{m}$。我们始终假设 R 是科恩-麦考利的，且存在典范模 ω_R。我们称 $a(R)$ 为 R的 a-不变量，即

$$a(R) = -\min\{i \in \mathbb{N} : (\omega_R)_i \neq 0\},$$

其中，$(\omega_R)_i$ 是 ω_R的第 i个分次分量。

定义 2.1。 对于一个分次 R-模 M，令 $\mathrm{tr}_R(M)$ 为所有$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$上的理想 $\phi(M)$ 之和，即

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \phi(M).$$

当环不会引起混淆时，我们简记为 $\mathrm{tr}(M)$。

定义 2.2 ([8, 定义 2.2])。 我们称 R 为 近似戈伦斯坦 ，若 $\mathrm{tr}(\omega_R) \supseteq \mathbf{m}$。特别地， R 是戈伦斯坦的，当且仅当 $\mathrm{tr}(\omega_R) = R$。

命题 2.3 ([8, 引理 1.1])。 设 R 是一个环， I 是 R 的一个理想，且包含R的一个非零因子。设 $Q(R)$ 是 R 的分式全商环，并令 $I^{-1} := \{x \in Q(R) : xI \subseteq R\}$。 那么

$$\mathrm{tr}(I) = I \cdot I^{-1}.$$

定义 2.4 ([25, 第三章， 命题 3.2])。 若 R 的极小生成元的次数都相同，则称 R 为分次 。

设 $R = \bigoplus_{n \geqslant 0} R_n$ 和 $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_n$ 是标准$\mathbf{k}$-代数，并定义它们的塞格雷积$R\#S$ 为如下分次代数:

$$R\#S = (R_0 \otimes_{\mathbf{k}} S_0) \oplus (R_1 \otimes_{\mathbf{k}} S_1) \oplus \cdots \subseteq R \otimes_{\mathbf{k}} S.$$

我们将齐次元素 $x \otimes_{\mathbf{k}} y \in R_i \otimes_{\mathbf{k}} S_i$ 记为 $x\#y$。

命题 2.5 ([10, 命题 2.2 和定理 2.4])。 设 $R_1, \cdots, R_s$ 是克鲁尔维数至少为 *2* 的标准分次 *Cohen–Macaulay* 托里克$\mathbf{k}$-代数。设 $R = R_1\#R_2\#\cdots\#R_s$ 为它们的塞格雷积。则下述结论成立。

$$\omega_R = \omega_{R_1}\#\omega_{R_2}\#\cdots\#\omega_{R_s} \quad \textit{and} \quad \omega_R^{-1} = \omega_{R_1}^{-1}\#\omega_{R_2}^{-1}\#\cdots\#\omega_{R_s}^{-1}.$$

引理 2.6。 设 $R_1, \ldots, R_s$ 是定义在无限域 $\mathbf{k}$ 上、克鲁尔维数至少为 *2* 的齐次正规仿射半群环。设 $R = R_1\#\cdots\#R_s$ 为它们的塞格雷积。则以下结论成立：

(1) 若 R是近似戈伦斯坦的，则对所有 i， R_i 都是近似戈伦斯坦的。(2) 若对所有 i， R_i 都是分次的，则 R是分次的。

证明。 只需证明 $s = 2$ 的情形。设 $\mathbf{x}_1, \ldots\ldots, \mathbf{x}_n$ 是 $(R_1)_1$ 的$\mathbf{k}$-基，而 $\mathbf{y}_1, \ldots\ldots, \mathbf{y}_m$ 是$(R_2)_1$ 的$\mathbf{k}$-基。

(1)：在这种情况下，利用命题2.5，我们得到$\omega_R \cong \omega_{R_1}\#\omega_{R_2}$ 和$\omega_R^{-1} \cong \omega_{R_1}^{-1}\#\omega_{R_2}^{-1}$。于是，我们可以分别将 ω_R 和 $\omega_R{}^{-1}$ 与 $\omega_{R_1}\#\omega_{R_2}$ 和 $\omega_{R_1}^{-1}\#\omega_{R_2}^{-1}$等同起来。

只需证明对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，$x_i \in \mathrm{tr}(\omega_{R_1})$。由于 R 是近似戈伦斯坦的，存在齐次元素$v_1\#v_2 \in \omega_{R_1}\#\omega_{R_2}$和$u_1\#u_2 \in \omega_{R_1}^{-1}\#\omega_{R_2}^{-1}$，使得$x_i\#y_1 = (v_1\#v_2)(u_1\#u_2) = (v_1u_1\#v_2u_2)$，根据 [16, 命题4.2]。因此，我们得到$x_i = v_1u_1 \in \mathrm{tr}(\omega_{R_1})$，所以$R_1$是近似戈伦斯坦的。与上面相同，我们可以证明 R_2 也近似戈伦斯坦。

(2)：首先，由命题 2.5 可得 $\omega_R \cong \omega_{R_1}\#\omega_{R_2}$。设 a_1 和 a_2 分别为 R_1 和R_2的 a-不变量，并假设 $a_1 \leqslant a_2$。由于 R_1 和 R_2 是分次的，因此 $\omega_{R_1} \cong \langle f_1, \cdots, f_r\rangle R_1$ 和$\omega_{R_2} \cong \langle g_1, \cdots, g_l\rangle R_2$，其中对所有 $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant l$，$\deg f_i = -a_1$ 且 $\deg g_j = -a_2$。因此，由于 $\omega_R \cong \omega_{R_1}\#\omega_{R_2}$，我们可以将 ω_R 与 $\langle f_1, \cdots, f_r\rangle R_1\#\langle g_1, \cdots, g_l\rangle R_2$ 等同。我们设

$$V := \left\{ \mathbf{y}^{\mathbf{b}} g_j \,:\, 1 \leqslant j \leqslant l,\, \mathbf{a} \in \mathbb{N}^m,\, \sum_{i=1}^{m} b_i = a_2 - a_1 \right\},$$

其中 $\mathbf{y}^{\mathbf{a}} := y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m}$。于是 $\omega_R = \langle f_i\#v : 1 \leqslant i \leqslant r, v \in V\rangle R$。因此， R 是分次的。 □

2.2. **格多胞体与埃尔哈特环**。我们用 $n(x)$ 表示元素 $n \in (\mathbb{R}^d)^*$ 与元素 $x \in \mathbb{R}^d$ 之间的自然配对。在本小节中，设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个格多胞体， $\mathcal{F}(P)$ 为 P 的面集，$\mathrm{vert}(P)$ 为 P 的顶点集。此外，回顾一下，我们始终假设 P 是满维的，并具有如下的面表示

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,:\, n_F(x) \geqslant -h_F \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P) \right\}, \tag{1}$$

其中，每个高度 h_F 都是整数，每个内法向量 $n_F \in (\mathbb{Z}^d)^*$ 都是一个本原格点，即其坐标的最大公约数为 1 的格点。

设 C_P 为 P 上方的锥，即，

$$C_P = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(P \times \{1\}) = \left\{ (x, k) \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, n_F(x) \geqslant -kh_F \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P) \right\}.$$

我们将 P 的埃尔哈特环定义为

$$A(P) = \mathbf{k}[C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}] = \mathbf{k}[\mathbf{t}^x s^k : k \in \mathbb{N} \text{ and } x \in kP \cap \mathbb{Z}^d],$$

其中 $\mathbf{t}^x = t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d}$和 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in kP \cap \mathbb{Z}^d$. 注意， P的埃尔哈特环是正规仿射半群环，因此它是科恩-麦考利的。此外，通过令每个 $x \in kP \cap \mathbb{Z}^d$ 都满足 $\deg(\mathbf{t}^x s^k) = k$，我们可以将 $A(P)$视为一个 $\mathbb{N}$-分次的$\mathbf{k}$-代数。

我们还定义另一个仿射半群环，即 P的环面环，如下：

$$\mathbf{k}[P] = \mathbf{k}[\mathbf{t}^x s : x \in P \cap \mathbb{Z}^d].$$

P 的环面环是一个标准的 $\mathbb{N}$-分次$\mathbf{k}$-代数。

已知，$\mathbf{k}[P] = A(P)$ 当且仅当 P 具有整数分解性质。这里，如果对于所有正整数 k以及所有 $x \in kP \cap \mathbb{Z}^d$，都存在 $y_1, \ldots, y_k \in P \cap \mathbb{Z}^d$ 使得 $x = y_1 + \cdots + y_k$，我们就称 P 具有整数分解性质 （即 P 具有整数分解性质）。

为了用 P 描述 $A(P)$ 的典范模和反典范模，我们先准备一些记号。

对于多面体或锥 K，我们用 $\mathrm{int}(\sigma)$ 表示 σ 的严格内部。注意到

$$\mathrm{int}(C_P) = \left\{ (x, k) \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, n_F(x) > -kh_F \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P) \right\}.$$

此外，我们定义

$$\mathrm{ant}(C_P) := \left\{ (x, k) \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, n_F(x) \geqslant -kh_F - 1 \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P) \right\}.$$

于是，以下结论成立。

命题 2.7 (参见 [10, 命题 4.1 和推论 4.2])。 的典范模 $A(P)$ 以及 $A(P)$ 的反典范模分别由以下给出：

$$\omega_{A(P)} = \left\langle \mathbf{t}^x s^k : (x, k) \in \mathrm{int}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \right\rangle \textit{ and } \omega_{A(P)}^{-1} = \left\langle \mathbf{t}^x s^k : (x, k) \in \mathrm{ant}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \right\rangle.$$

此外， $A(P)$ 的负 a 不变量与 P 的余度一致，即

$$a(A(P)) = -\min \left\{ k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1} \,:\, \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing \right\}.$$

设 A 和 B 是 $\mathbb{R}^d$的子集。它们的 闵可夫斯基和 定义为

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

我们回顾一下，两个多面体的（直）积 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^e$ 记作$P \times Q \subset \mathbb{R}^{d+e}$。

注意，我们可以如下将 $P \times Q$ 视为多面体的闵可夫斯基和。Le t

$$P' = \left\{ (p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{e}) \in \mathbb{R}^{d+e} : p \in P \right\} \text{ and } Q' = \left\{ (\underbrace{0, \ldots, 0}_{d}, q) \in \mathbb{R}^{d+e} : q \in Q \right\}.$$

于是，我们可以看到 $P \times Q = P' + Q'$。反过来，设两个多面体 P'、$Q' \subset \mathbb{R}^d$ 满足以下条件：对于所有 $i \in [d] := \{1, \ldots\ldots d\}$，都有 $\pi_i(P') = \{0\}$ 或 $\pi_i(Q') = \{0\}$，其中 $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是到第 i 个坐标的投影。于是，我们可以将 $P' + Q'$ 视为两个多面体的积。此外，设 P 和 Q 为两个格多胞体。已知$\mathbf{k}[P \times Q]$ 同构于塞格雷积$\mathbf{k}[P] \# \mathbf{k}[Q]$。

最后，我们回顾多面体的（极）对偶和自反性的定义。

定义 2.8。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个多面体。其（极）对偶 为

$$P^* := \left\{ n \in (\mathbb{R}^d)^* : n(x) \geqslant -1 \text{ for all } x \in P \right\}.$$

如果 P 的 P 和 P^* 都是格多胞体（分别相对于格 $\mathbb{Z}^d$ 和$(\mathbb{Z}^d)^*$），则称 P 自反 。

3. 格多胞体的近戈伦斯坦性

本节中，格多胞体 P 具有面表示（1）。

定义 3.1。 若埃尔哈特环 $A(P)$ 是戈伦斯坦（分别为近似戈伦斯坦），则称 P 为戈伦斯坦 （分别为近似戈伦斯坦）。

关于格多胞体 P 本身，戈伦斯坦性有一些广为人知的等价条件。例如， P 是戈伦斯坦的，当且仅当存在一个正整数 a ，使得 aP 的某个格平移 是自反的；也就是说， aP 有唯一一个内部格点，且该点到 aP所有面的格距离均为 1。

本节将根据多面体 P 本身，确定 P 成为近似戈伦斯坦多胞体的一项必要条件。该条件要求 P 具有某种特定的闵可夫斯基分解。从对偶的角度来看，我们可以清楚地看到它与自反多胞体之间的联系。接下来，我们将证明，如果 P 满足上述必要条件，且在某种意义上“足够大”，那么 P 就会是近似戈伦斯坦的。本节最后将考察闵可夫斯基不可分解格多胞体的近戈伦斯坦性。

3.1. 必要条件。本小节的主要目标是证明定理 1.1 的前半部分。在继续之前，我们先引入一些有用的记号。对于$\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$的子集 X ， 令 $X_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : (x, k) \in X \right\}$ 表示 X的第 k块。请注意记号中一个细微之处：虽然 X 是 $\mathbb{R}^{d+1}$的子集，但其第 k块 X_k 却是 $\mathbb{R}^d$的子集。此外，对于格多胞体 P，我们用 a_P 表示其余度——定义见下文命题 2.7。根据上下文意思明确时，我们简单地用 a 代替 a_P。

命题 3.2。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个格多胞体。当且仅当 P 是近似戈伦斯坦的

$$(C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}) \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{int}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} + \operatorname{ant}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1}. \tag{2}$$

特别地，如果 P 是近似戈伦斯坦的，那么

$$P \cap \mathbb{Z}^d = \operatorname{int}(C_P)_a \cap \mathbb{Z}^d + \operatorname{ant}(C_P)_{1-a} \cap \mathbb{Z}^d. \tag{3}$$

如果 P 具有整数分解性质，逆命题也成立。

证明。根据定义，当且仅当典范理想ω 的迹 $\mathrm{tr}(\omega)$ 包含 $A(P)$的极大理想 $\mathfrak{m}$ 时， $A(P)$ 是近似戈伦斯坦的。根据命题 2.3，该迹恰好是乘积 $\omega_{A(P)} \cdot \omega_{A(P)^\circ}^{-1}$。接着，命题 2.7 根据 $\mathrm{int}(C_P)$ 和 $\mathrm{ant}(C_P)$ 中的格点，给出了 ω 和 ω^{-1} 的单项式生成元。最后注意到，极大理想 $\mathfrak{m}$ 可以由单项式 $t^x s^k$生成，其中 (x,k) 是 $C_P \setminus \{0\}$中的格点。由此显然可知，当且仅当（2）成立时， P 是近似戈伦斯坦的。

接下来，我们证明（3）可由 P 的近戈伦斯坦性推出。首先，注意到（2）右端包含于 $C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}$，这是由定义可知的。因此，取这三个集合的第 1 部分，可得等式

$$P \cap \mathbb{Z}^d = (\mathrm{int}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} + \mathrm{ant}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1})_1.$$

注意，当 P 是戈伦斯坦时，$\mathrm{int}(C_P)_a \cap \mathbb{Z}^d$ 和$\mathrm{ant}(C_P)_{-a} \cap \mathbb{Z}^d$ 都是单点集；因此，结论很容易推出。否则，我们断言，对于所有$b \geqslant a+1$，$\mathrm{ant}(C_P)_{1-b} \cap \mathbb{Z}^d$ 均为空。由于当 $b < a$时$\mathrm{int}(C_P)_b$ 为空，我们便得到所需结果。

最后，我们证明当 P 具有整数分解性质时，逆命题成立。令 $(x,k) \in C_P \cap \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$。由于$P$ 具有整数分解性质，存在 x_1、.....、$x_k \in P \cap \mathbb{Z}^d$，使得 $(x,k) = (x_1,1) + \cdots + (x_k,1)$。此外，每个$x_i \in P \cap \mathbb{Z}^d$ 都可以写成 $\mathrm{int}(C_P)$ 和 $\mathrm{ant}(C_P)$ 中格点之和。因此， （2）成立，从而 P 是近似戈伦斯坦的。□

定义 3.3。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个格多面体。我们将其下取整多胞体和余数多面体定义为

$$\lfloor P \rfloor := \mathrm{conv}(\mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d) \qquad \text{and} \qquad \{P\} := \mathrm{conv}(\mathrm{ant}(C_P)_{1-a} \cap \mathbb{Z}^d),$$

分别。注意， $\lfloor P \rfloor$ 与 $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(C_P)_1 \cap \mathbb{Z}^d)$ 重合。

我们汇总这些多面体的一些简单事实，并将命题3.2 的部分内容改写为以下陈述。

引理 3.4。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个格多面体。那么：

(1) $\lfloor aP \rfloor \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : h_F(x) \geqslant 1 - ah_F$ 对所有 $F \in \mathcal{F}(P)\}$成立；(2) $\{P\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : h_F(x) \geqslant (a-1)h_F - 1$ 对所有 $F \in \mathcal{F}(P)\}$成立；(3) 若 P 是近似戈伦斯坦的，则 $P \cap \mathbb{Z}^d = \lfloor aP \rfloor \cap \mathbb{Z}^d + \{P\} \cap \mathbb{Z}^d$；(4) 若 P 具有整数分解性质且 $P \cap \mathbb{Z}^d = \lfloor aP \rfloor \cap \mathbb{Z}^d + \{P\} \cap \mathbb{Z}^d$，则 P 是近似戈伦斯坦的。

证明。 由下取整与余数多面体的定义，立即可得陈述 (1) 和 (2)。为证明陈述 (3) 和 (4)，注意到 $\mathrm{int}(C_P)_a$ 的格点与 $\lfloor aP \rfloor$ 的格点相同，而 $\mathrm{ant}(C_P)_{1-a}$ 的格点与 $\{P\}$的格点相同。然后只需将其代入命题 3.2即可。 □

下面的命题是定理 1.1的前半部分：

命题 3.5。 若 P 是近似戈伦斯坦的，则 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$。

证明。 令 $x \in \lfloor aP \rfloor$ 和 $y \in \{P\}$。根据引理 3.4的陈述 (1) 和 (2)，对于 F 的所有面 P，$h_F(x+y) \geqslant 1 - ah_F + (a-1)h_F - 1 = -h_F$。因此， $x + y \in P$。由此可得 $\lfloor aP \rfloor + \{P\} \subseteq P$。

另一方面，设 v 是 P的一个顶点。由于 P 是一个格多胞体， $v \in P \cap \mathbb{Z}^d$。因此，根据引理 3.4 的陈述 (3)，可将 v 写成 $\lfloor aP \rfloor \cap \mathbb{Z}^d$ 中的一个元素与 $\{P\} \cap \mathbb{Z}^d$中的一个元素之和。这意味着 $P \subseteq \lfloor aP \rfloor + \{P\}$。□

例 3.6。 考虑由下式给出的停止标志多面体

$$P = \mathrm{conv}\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(2,3),(1,3),(0,2),(0,1)\}.$$

首先，我们注意到 $a_P = 1$。接下来，我们可以计算下取整与余数多面体：

$$\lfloor P \rfloor = \mathrm{conv}\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\} \quad \text{and} \quad \{P\} = \mathrm{conv}\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}.$$

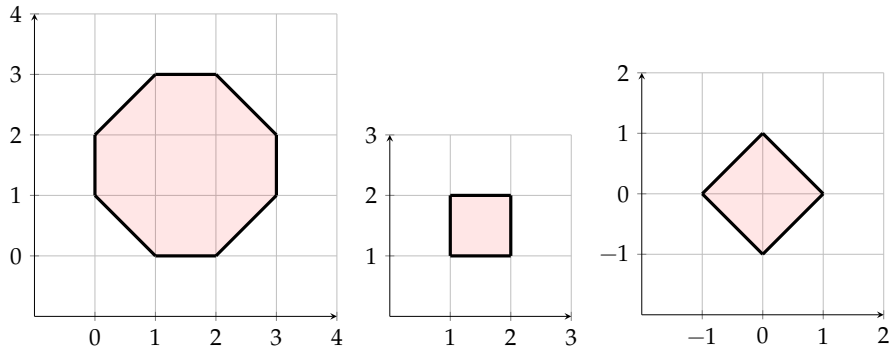


图1。停止标志多面体 P （左）及其下取整多胞体 $\lfloor P \rfloor$ （中）和余数多胞体 $\{P\}$ （右）。

通过对这些多面体取闵可夫斯基和，我们可知 P 满足命题 3.5给出的成为戈伦斯坦的必要条件，即 $P = \lfloor P \rfloor + \{P\}$。另一方面，容易验证， P 的每个格点都可以写成 $\lfloor P \rfloor$ 中的一个格点与 $\{P\}$ 中的一个格点之和。由于 P 具有整数分解性质（所有多边形都如此），引理 3.4 的陈述 (4) 告诉我们， P 是近似戈伦斯坦的。

最后，我们指出，余数多胞体 $\{P\}$ 是自反的。这并非巧合，正如我们将在命题3.13中证明的那样。

3.2. **一个充分条件**。 本小节将探讨使格多胞体成为近似戈伦斯坦多胞体的充分条件；特别地，我们将证明定理1.1的后半部分。

我们首先指出，命题 3.5 的逆命题一般并不成立。

例3.7 （比较 [19, 例1。1]）。 设 $f = \frac{1}{3}(e_1 + \cdots + e_6) \in \mathbb{R}^6$，其中 e_1，……，e_6 是格 $\mathbb{Z}^6$的一组基。定义一个新的格 $L \coloneqq \mathbb{Z}^6 + f \cdot \mathbb{Z}$，并考虑格多胞体

$$Q \coloneqq \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_6, e_1 - f, \ldots, e_6 - f\}$$

相对于格 L而言。令 $P \coloneqq 2Q$。由于 $\lfloor P \rfloor = \{P\} = Q$，容易看出 $P = \lfloor P \rfloor + \{P\}$，满足命题 3.5 关于近戈伦斯坦性的必要条件。

另一方面， Q 不具有整数分解性质。特别地， $2Q \cap L \neq (Q \cap L) + (Q \cap L)$。因此， $P = 2Q$不满足引理 3.4 中陈述 (3) 的必要条件，所以 P 不是近似戈伦斯坦的。

因此，为了确保 P 具有近戈伦斯坦性，我们需要对其作出更多假设。这引出了下面的结果，即定理 1.1 的后半部分：

定理 3.8。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是满足 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ 的格多胞体。那么存在某个整数 $K \geqslant 1$ （取决于 P），使得对于所有 $k \geqslant K$，多面体 kP 都是近似戈伦斯坦的。

为了证明上述结论，我们依赖几个关键要素。第一个要素是将反身情形中的已知结果推广到此处，这些结果见 [12]。

引理 3.9。设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是满足 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$的格多胞体。则以下结论成立：

(1) $kP = \lfloor (k + a - 1)P \rfloor + \{P\}$, *for all* $k \geqslant 1$;
(2) $\lfloor k'P \rfloor = \lfloor aP \rfloor + (k' - a)P$, *for all* $k' \geqslant a$.

在给出证明之前，为便于比较，我们先将这些陈述限制在自反情形下。首先，我们有 $a = 1$。接着，由于 $\lfloor P \rfloor$ 是原点， $P = \{P\}$。因此，对于自反多胞体，陈述 (1) 等价于 $kP = \lfloor kP \rfloor + P$。约去 P后，我们得到陈述 (2) 的自反版本： $\lfloor kP \rfloor = (k-1)P$。

引理 3.9的证明。 设 $k \geqslant 1$ 是一个整数。在整个证明中，我们反复使用引理 3.4的陈述 (1) 和 (2) 中出现的两个不等式。我们还使用 P 及其膨胀体的面表示中出现的不等式。

我们首先证明命题 (1) 中的“$\supseteq$”部分，即证明

$$kP \supseteq \lfloor (k+a-1)P \rfloor + \{P\}, \text{ for all } k \geqslant 1. \tag{4}$$

设 $x \in \lfloor (k+a-1)P \rfloor$ 和 $y \in \{P\}$。那么，对 P的所有面 F，都有

$$n_F(x+y) \geqslant (1-(k+a-1)h_F) + ((a-1)h_F - 1) = -kh_F。$$

因此， $x+y \in kP$。

接下来，我们注意到 $kP = (k-1)P + \lfloor aP \rfloor + \{P\}$。将其代入 (4) 中，然后从两边消去 $\{P\}$，得到 $\lfloor (k+a-1)P \rfloor \subseteq (k-1)P + \lfloor aP \rfloor$。

现在我们来证明上述包含关系的反向包含。令 $x \in (k-1)P$ 和 $y \in \lfloor aP \rfloor$。于是，$n_F(x+y) \geqslant -(k-1)h_F + (1-ah_F) = 1-(k+a-1)h_F$。因此， $x+y \in \lfloor (k+a-1)P \rfloor$。由此，我们得到等式 $\lfloor (k+a-1)P \rfloor = (k-1)P + \lfloor aP \rfloor$。令 $k' \coloneqq k+a-1$，即可得到陈述 (2)。在等式两边加上 $\{P\}$，即可得到陈述 (1)。□

证明定理3.8 的主要依据是 Haase 和 Hofmann 的一个结果，它使我们能够保证引理3.4 中陈述 (4) 的第二个条件成立。

定理 3.10 ([6, 定理 4.2])。 设 P， $Q \subset \mathbb{R}^d$ 是有理多胞体，且其法扇$\mathcal{N}(P)$ 是 P 的法扇的细化；$\mathcal{N}(Q)$ 。 Q此外，假设对于每条边 E， P对应的面 E' 的 Q 格长度 $\ell_{E'}$满足 $\ell_E \geqslant d\ell_{E'}$。则 $(P+Q) \cap \mathbb{Z}^d = (P \cap \mathbb{Z}^d) + (Q \cap \mathbb{Z}^d)$。

为了保证引理 3.4中陈述的条件 (4)，我们需要以下结果：

定理 3.11 ([27, 定理 1.3.3])。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个格多胞体。则 $(d-1)P$ 具有整数分解性质。

现在我们可以给出证明了。

定理 3.8的证明。 我们首先希望找到一个合适的 K，使其满足

$$kP \cap \mathbb{Z}^d = \lfloor kP \rfloor \cap \mathbb{Z}^d + \{kP\} \cap \mathbb{Z}^d, \text{ for all } k \geqslant K.$$

观察引理3.9的命题 (2)，可知 $(k-a)P$ 是 $\lfloor kP \rfloor$的闵可夫斯基加项；因此，我们得到 $\lfloor kP \rfloor$的边长的一个粗略下界：当 $k \geqslant a$时， $\lfloor kP \rfloor$ 的每条边 E的格长度均为 $\ell_E \geqslant k-a$。记 L 的最大边长为 $\{aP\}$，并令$K \coloneqq dL + a$。注意，当 $k \geqslant a$时，多面体 $\{kP\}$与 $\{aP\}$重合。因此，对所有 $k \geqslant K$， $\lfloor kP \rfloor$ 的每条边 E 的格长度均为 $\ell_E \geqslant k-a \geqslant dL$。

此外，引理3.9 的命题 (2) 表明，当 $k \geqslant a+1$时，法扇 $\mathcal{N}(\lfloor kP \rfloor)$与 $\mathcal{N}(P)$重合。因此， $\mathcal{N}(\lfloor kP \rfloor)$ 是 $\{kP\}$的法扇的细化。于是，我们可以应用定理 3.10，得到 $kP \cap \mathbb{Z}^d = \lfloor kP \rfloor \cap \mathbb{Z}^d + \{kP\} \cap \mathbb{Z}^d$。

最后，由于 a， $L \geqslant 1$，我们得出 $K \geqslant d-1$。因此，根据定理3.11，我们有 kP 具有整数分解性质。因此，由引理3.4的陈述 (4)，我们可以得出 kP 对所有$k \geqslant K$都是近似戈伦斯坦的。□

注 3.12。如果一个分次环 R 是穿孔谱上的戈伦斯坦 [8] ，则称其为穿孔谱上的戈伦斯坦，当 $\mathrm{tr}(\omega_R)$包含$\mathbf{m}^k$ 对某个整数 $k \geqslant 0$成立。如果 $k = 0$，这就是戈伦斯坦条件；如果 $k = 1$，这就是近似戈伦斯坦条件。现在，对于一个格多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，可以证明，若存在一个正整数 K 使得 $kP \cap \mathbb{Z}^d$ 对所有 $k \geqslant K$都与 $(\mathrm{int}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} + \mathrm{ant}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1})_k$一致，则其埃尔哈特环 $A(P)$ 是穿孔谱上的戈伦斯坦。因此，利用定理3.8，不难证明，所有满足 P 的格多胞体 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ 都是穿孔谱上的戈伦斯坦。

3.3. **近似戈伦斯坦多胞体的分解**。 本小节首先证明定理 1.2。由此自然引出一个问题：近似戈伦斯坦多胞体是否可以分解为戈伦斯坦多胞体的闵可夫斯基和（问题 3.15 和 3.16）。我们证明定理1.3，由此得以系统地构造近似戈伦斯坦

多胞体的例子。随后，我们利用这一结果找到问题 3.15 和 3.16的一个反例。最后，我们以一项关于不可分解的近戈伦斯坦多胞体的结果结束本节。

定理 3.13 (定理 1.2)。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个满足 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ 的格多胞体。那么我们有

$$\lfloor aP \rfloor = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \, h_F(x) \geqslant 1 - ah_F \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P) \right\} \text{ and}$$
$$\{P\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \, h_F(x) \geqslant (a-1)h_F - 1 \text{ for all } F \in \mathcal{F}(P) \right\}.$$

特别地，等式右边的多面体都是格多胞体。此外，如果 $a = 1$，那么 $\{P\}$是一个自反多胞体。

证明。 分别将右边的两个多面体记为 Q_1 和 Q_2。显然， $\lfloor aP \rfloor = \operatorname{conv}(Q_1 \cap \mathbb{Z}^d)$ 且 $\{P\} = \operatorname{conv}(Q_2 \cap \mathbb{Z}^d)$。因此， $\lfloor aP \rfloor \subseteq Q_1$ 且$\{P\} \subseteq Q_2$。最终，我们要证明反向包含，但首先必须证明一个中间等式： $P = Q_1 + Q_2$。设 $x \in Q_1$ 和 $y \in Q_2$。那么，对于 P的所有面 F，我们都有 $h_F(x+y) \geqslant 1 - ah_F + (a-1)h_F - 1 = -h_F$。因此， $x + y \in P$，从而 $Q_1 + Q_2 \subseteq P$。反过来，若将此与假设 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$结合起来，便可得出事实上$P = Q_1 + Q_2$。

现在我们利用上述等式得到 $\lfloor aP \rfloor = Q_1$ 和 $\{P\} = Q_2$，如下所示。反设 $Q_1 \not\subseteq \lfloor aP \rfloor$，即存在一个顶点 v 属于 Q_1，但不属于 $\lfloor aP \rfloor$。选取一个法向量 $n \in (\mathbb{R}^d)^*$，使其在 Q_1 上的最小值 h_1 仅在 v 处取得（即 n 位于内法扇 $\mathcal{N}(Q_1)$ 中与 v对应的锥 σ_v 的内部）。记 n 在 Q_2 上的最小取值为 h_2。那么， n在 P 上的最小取值为 $h_1 + h_2$。然而，对于所有 $x \in \lfloor aP \rfloor$ 和 $y \in \{P\}$，都有 $n(x+y) > h_1 + h_2$。这与 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$矛盾。因此， Q_1 的顶点与 $\lfloor aP \rfloor$的顶点重合；特别地， $\lfloor aP \rfloor = Q_1$。类似地，我们得到 $\{P\} = Q_2$。

接下来，由定义可知， $\lfloor aP \rfloor$ 和 $\{P\}$ 是格多胞体，因此我们注意到，在这种情况下， Q_1 和 Q_2 也是格多胞体。

最后，假设我们处于 P 有内部格点的情形，即 $a = 1$。将其代入第二个等式，我们看到余数多胞体 $\{P\}$ 确实是自反的，因为它的所有面都位于高度1处。

□

相反，当 P 没有内部点时，余数多胞体 $\{P\}$ 甚至不一定是戈伦斯坦的。

例3.14。 考虑多面体

$$P = \operatorname{conv}\{(0,0,0),(2,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}.$$

我们可以验证， P是近似戈伦斯坦的，并且具有整数分解性质，但余数多胞体 $\{P\}$ 不是戈伦斯坦的。然而，$\{P\}$ 可以写成以下多面体的闵可夫斯基和:

$$\operatorname{conv}\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)\} \quad \text{and} \quad \operatorname{conv}\{(-1,-1,-1),(-1,-1,0)\},$$

它们都是戈伦斯坦的。

在研究某些受限类别多面体的近戈伦斯坦性时，我们也发现了类似的现象。这促使我们提出以下问题。

问题 3.15. 如果 P 是近似戈伦斯坦的，那么我们能否将 $P = P_1 + \cdots + P_s$ 写成某些戈伦斯坦格多胞体 $P_1, \ldots, P_s$ 的形式?

我们回顾一下，若 P 是（闵可夫斯基）不可分解的，则 P 不是单点集；并且若存在格多胞体 P_1 和 P_2，使得 $P = P_1 + P_2$，那么 P_1 或 P_2 必为单点集。注意，若 P 不是单点集，那么我们可以将 $P = P_1 + \cdots + P_s$ 写成某些不可分解格多胞体 $P_1, \ldots, P_s$ 的形式。

那么，问题 3.15 可以改述为:

问题 3.16. 如果 P 以一个不可分解的非戈伦斯坦格点多胞体作为闵可夫斯基加项，那么 P 是否不是近似戈伦斯坦的?

这个问题对于整数分解性质 $(0,1)$-多胞体有肯定答案，这一点将在第 4 节证明。本节余下部分将建立一些工具，以便高效构造近戈伦斯坦多胞体。随后，我们将在例 3.19 中运用这些工具，回答问题3.15 和 3.16。

定理 3.17 （定理1.3）。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个近戈伦斯坦多胞体。那么存在一个自反多胞体 $Q \subset \mathbb{R}^d$ 使得

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n(u) \geqslant -h_n \text{ for all } n \in \partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^*\right\},$$

其中 h_n 为整数。此外，由 $n \in \operatorname{vert}(Q^*)$ 定义的不等式是不可约冗余的。此外，近戈伦斯坦多胞体的面数有一个上界，该上界仅取决于维数 d。

在开始证明之前，先给出下面这个引理会很有帮助。

引理 3.18. 设 P 是满足 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$的格多胞体。那么 $aP = \lfloor aP \rfloor + \{aP\}$。此外，$\{aP\} = (a-1)P + \{P\}$。

证明。 我们首先要证明 $(a-1)P + \{P\} \subseteq \{aP\}$。设 $x \in (a-1)P$ 且 $y \in \{P\}$。于是，由引理 3.4 (2)，$n_F(x+y) \geqslant -(a-1)h_F + (a-1)h_F - 1 = -1$对所有面 F 属于 P。因此，$x+y \in \{aP\}$。所以，$(a-1)P + \{P\} \subseteq \{aP\}$。

在包含关系两边加上 $\lfloor aP \rfloor$，得到 $aP \subseteq \lfloor aP \rfloor + \{aP\}$。

接下来，我们希望证明上述包含关系的反向包含。设 $z \in \lfloor aP \rfloor$ 和 $w \in \{aP\}$。那么，对于 P 的所有面 F，都有 $n_F(z+w) \geqslant (1-ah_F) - 1 = -ah_F$。因此，$z+w \in aP$。所以，$\lfloor aP \rfloor + \{aP\} \subseteq aP$。结合这两个包含关系，得到所需的等式：$aP = \lfloor aP \rfloor + \{aP\}$。

此外，我们得到 $\lfloor aP \rfloor + \{P\} + (a-1)P = \lfloor aP \rfloor + \{aP\}$。由于凸集的闵可夫斯基加法满足消去律，我们可以在等式两边消去 $\lfloor aP \rfloor$，从而得到等式 $\{aP\} = (a-1)P + \{P\}$。□

定理3.17的证明。 我们希望研究（内）法扇 $\mathcal{N}(P)$，它的本原射线生成元全部位于 $\partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^*$某个自反多胞体 $Q \subset \mathbb{R}^d$之中就足以证明所需结论。由于伸缩不会影响法扇，我们可以转而考察 aP 的法扇。现在，根据引理 3.18，aP 可以分解为 $\lfloor aP \rfloor$ 和 $\{aP\}$的闵可夫斯基分解。因此，$\mathcal{N}(aP)$ 是 $\mathcal{N}(\lfloor aP \rfloor)$ 和 $\mathcal{N}(\{aP\})$的公共细化。根据命题3.13，我们得到 $Q := \{aP\}$ 是一个自反多胞体。因此，$\mathcal{N}(Q)$ 的本原射线生成元是自反多胞体 $Q^* \subset (\mathbb{R}^d)^*$的顶点；特别地，它们是位于 Q^*边界上的格点。

接下来，我们考察来自 $\lfloor aP \rfloor$的 $\mathcal{N}(aP)$ 的贡献。设 $n \in (\mathbb{Z}^d)^*$ 是 $\mathcal{N}(\lfloor aP \rfloor)$的一个本原射线生成元。根据余数多胞体的定义，对所有 $x \in Q$，都有 $n(x) \geqslant -1$。但这意味着 n 属于 Q^*。因此，由于 $n \neq 0$ 且 Q 是自反的，我们得到 $n \in \partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^*$。由此我们已经证明，$\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(aP)$ 的本原射线生成元包含 Q^* 的顶点，并且它们都属于 $\partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^*$。

最后，我们注意到，近戈伦斯坦多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的面数有上界 $c_d := \sup_Q |\partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^*|$，其中 Q 遍历所有 d 维自反多胞体。由于每个维数 d 下的自反多胞体只有有限多个，并且所有多胞体都只有有限个边界点，因此我们看到 c_d 是一个有限数。□

现在，我们将详细说明如何构造近似戈伦斯坦多胞体。首先，选取一个自反多胞体 $Q \subset \mathbb{R}^d$。然后，选取 Q^* 的边界格点中（可能为空的）一个子集 S'，其中不包含 Q^* 的顶点。接着，对每个 $n \in S := S' \cup \operatorname{vert}(Q^*)$，选取高度 $h_n \in \mathbb{Z}$。构造由 $n(x) \geqslant -h_n$ 定义的多胞体 P'，其中对所有 $n \in S$，并断言这些不等式均非冗余。接下来，我们可以将 P' 放大至 rP'，使其成为包含一个内部格点的格多胞体。根据构造，其余数多胞体 $\{rP'\}$ 与自反多胞体 Q 重合。实际上，rP' 可以分解为 $\lfloor rP' \rfloor$ 与

$\{rP'\}$，但我们尚未证明这一点始终成立。最后，我们可以利用定理 3.8 将 rP'进一步放大至 $P := krP'$，使得 $P = \lfloor P \rfloor + \{P\}$是近似戈伦斯坦的。

例 3.19。 考虑多面体

$$P = \operatorname{conv}\{(-4,-3,-4),(-3,-1,-3),(-2,-2,-3),(0,1,4),(0,4,1),(3,1,1)\}.$$

注意， P 有许多内部格点，因此我们肯定属于情形 $a_P = 1$。它的下取整多胞体为

$$\lfloor P \rfloor = \operatorname{conv}\{(-3,-2,-3),(0,3,1),(0,1,3),(2,1,1)\}.$$

这是一个不可分解的单纯形，并非戈伦斯坦多胞体。它的余数多胞体为

$$\{P\} = \operatorname{conv}\{(-1,-1,-1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

显然它是自反的。我们有 $P = \lfloor P \rfloor + \{P\}$。我们使用 Magma [3] 验证 $P \cap \mathbb{Z}^3 = (\lfloor P \rfloor \cap \mathbb{Z}^3) + (\{P\} \cap \mathbb{Z}^3)$ 并且 P 具有整数分解性质。因此，根据引理 3.4， P 是一个近戈伦斯坦多胞体。它不能分解为戈伦斯坦多胞体的闵可夫斯基和；因此，我们可以对问题 3.15 和 3.16 给出否定回答。

本节最后给出以下关于不可分解多胞体的近戈伦斯坦性的定理。该定理在第 $(0,1)$ 节对近戈伦斯坦多胞体的刻画中发挥重要作用 4。

定理 3.20. 设 P 是不可分解的格多胞体。那么， P 是近似戈伦斯坦的，当且仅当 P 是戈伦斯坦的。

证明。 戈伦斯坦性蕴含近戈伦斯坦性，这一点已经显而易见，因此我们只需证明逆命题。假设 P 是近似戈伦斯坦的。根据命题 3.5，有 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$。由于 P 不可分解，因此或者（i） $\lfloor aP \rfloor$ 是单点集，或者（ii） $\{P\}$ 是单点集。

我们先处理情形（i）。考虑 aP。由引理 3.18， $aP = \lfloor aP \rfloor + \{aP\}$。因此， aP 是 $\{aP\}$的一个平移。根据命题 3.13， $\{aP\}$ 是自反的。因此， P 是戈伦斯坦的。

情形（ii）的论证类似。考虑 $\{aP\}$。由引理 3.18， $\{aP\} = (a-1)P + \{P\}$。命题 3.13 说明 $\{aP\}$ 是自反的；因此， $(a-1)P$ 是某个自反多面体的平移。但这显然荒谬，因为这意味着 $(a-1)P$ 有一个内部格点，这与 P 的余度为 a相矛盾。因此，这种情形不可能发生。

□

4. 近似戈伦斯坦 $(0,1)$多胞体

本节讨论 $(0,1)$多胞体的情形。我们给出了具有整数分解性质的近似戈伦斯坦 $(0,1)$多胞体的刻画。此外，我们还刻画了满足奇圈条件的图的近似戈伦斯坦边多胞体，以及近似戈伦斯坦图拟阵多胞体。

4.1. 近似戈伦斯坦 $(0,1)$多胞体的刻画。

引理 4.1. 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 $(0,1)$多胞体。那么，经过坐标变换后，我们可以写成 $P = P_1 \times \cdots \times P_s$， 其中 $P_1, \ldots, P_s$是一些不可分解的 $(0,1)$多胞体。

证明。 如第3节所述，我们可以写成 $P = P'_1 + \cdots + P'_s$， 其中 $P'_1, \ldots, P'_s$。

首先，我们证明可以选择 P'_1、 P'_s，使它们成为 $(0,1)$-多面体。假设我们可以将 $P = P'_1 + P'_2$ 写成某些格多胞体 P'_1 和 P'_2。那么，对于任意 $v \in P'_1 \cap \mathbb{Z}^d$ 以及任意 $u \in P'_2 \cap \mathbb{Z}^d$， $v+u$ 都是一个 $(0,1)$-向量。因此，对于任意 $i \in [d]$， $\pi_i(P'_1 \cap \mathbb{Z}^d)$ 可以取以下形式之一： (i) $\{w_i\}$ 或 (ii) 对某个 $w_i \in \mathbb{Z}$， $\{w_i, w_i+1\}$。在情形 (i) 中， $\pi_i(P'_2 \cap \mathbb{Z}^d)$ 等于 $\{-w_i\}$、 $\{-w_i+1\}$ 或 $\{-w_i, -w_i+1\}$。在情形 (ii) 中， $\pi_i(P'_2 \cap \mathbb{Z}^d)$ 等于 $\{-w_i\}$。因此，在

所有情形下， $P_1' - w$ 和 $P_2' + w$ 都是 $(0,1)$-多面体，并且有 $P = (P_1' - w) + (P_2' + w)$，其中$w = (w_1, \ldots, w_d)$。

此外，若我们可以将 $P = P_1' + P_2'$写成某些 $(0,1)$-多面体 P_1'和 P_2'的形式，那么可以看出，对于任意 $i \in [d]$， $\pi_i(P_1')$或 $\pi_i(P_2')$必有一个等于 $\{0\}$。因此，经过坐标变换后，我们可以将 $P = P_1 \times P_2$ 写成某些 $(0,1)$-多面体 P_1 和 P_2的形式。□

现在，我们给出本节的主要定理。

定理 4.2. 设 P 是一个具有整数分解性质的 $(0,1)$-多面体。那么， P 是近似戈伦斯坦的，当且仅当可以将 $P = P_1 \times \cdots \times P_s$ 写成某些戈伦斯坦 $(0,1)$- 多面体 P_1、 ……、 P_s 的形式，其中 $|a_{P_i} - a_{P_j}| \leqslant 1$ 满足$1 \leqslant i < j \leqslant s$。

证明。由引理 4.1 可知，我们可以将 $P = P_1 \times \cdots \times P_s$ 写成若干不可分解的$(0,1)$-多面体 P_1、……、P_s。因此，我们有 $k[P] \cong k[P_1] \# \cdots \# k[P_s]$。注意，若 P 具有整数分解性质，那么对每个 $i \in [s]$， P_i 也具有整数分解性质，且 $A(P)$ （分别为 $A(P_i)$）与 $k[P]$ （分别为 $k[P_i]$）一致。因此，由于 P 是近似戈伦斯坦的，$k[P]$ 是近似戈伦斯坦的，进而由引理 2.6 (1) 可知 $k[P_i]$ 也是近似戈伦斯坦的。此外， P_i 是近似戈伦斯坦的。由于 P_i 是不可分解的，根据定理 3.20， P_i 是戈伦斯坦的。此外，由 [10, 推论 2.8] 可知，对于 $1 \leqslant i < j \leqslant s$，有 $|a_{P_i} - a_{P_j}| \leqslant 1$。

逆命题也可由 [10, 推论 2.8] 得出。 □

由此定理，我们立即得到以下推论：

推论 4.3。 问题 *3.15* 对整数分解性质 $(0,1)$-多胞体成立。

推论 4.4。 设 P 是整数分解性质 $(0,1)$-多面体。若 $\mathbf{k}[P]$ 是近似戈伦斯坦的，则 $\mathbf{k}[P]$ 是分次的。

证明。 由引理 2.6 (2) 和定理4.2可立即得出。 □

定理 4.2 的结果可应用于许多类 $(0,1)$-多面体，例如序多胞体和稳定集多胞体。

序多胞体由偏序集构造而成，最初由 Stanley [24], 引入。设 Π 是一个配备偏序关系 $\preceq$的偏序集。偏序集 Π 的序多胞体的埃尔哈特环称为 Π的 Hibi 环，记作 $k[\Pi]$。众所周知，Hibi 环是标准分次的（[11]）。对于子集 $I \subset P$，若 I满足：对任意 p，如果 $p \in I$ 且 $q \preceq p$，那么 $q \in I$，则称 I 为 P 的偏序集理想。根据 [24],， $\mathbb{R}^\Pi$ 中偏序集理想的特征向量恰好是Π 的序多胞体的顶点（因此序多胞体是 $(0,1)$-多面体）。由此可知，偏序集 Π 的序多胞体不可分解，当且仅当 Π 连通。文献 [8]研究了 Hibi 环的近戈伦斯坦性。研究表明，$k[\Pi]$ 是近似戈伦斯坦的，当且仅当 Π 是纯连通偏序集 Π_1、……、Π_q 的不交并，且其中任意两个偏序集的秩之差至多为 1。此外，在这种情况下，$k[\Pi_i]$ 是戈伦斯坦环，且 $k[\Pi] \cong k[\Pi_1] \# \cdots \# k[\Pi_s]$。因此，可以由定理 4.2 得出其刻画。

稳定集多胞体由 Chv´atal [4], 引入，来源于图。对于顶点集为 $V(G)$ 、边集为 $E(G)$ 的有限简单图 G ，其稳定集多胞体记作 Stab_G，定义为 $\mathbb{R}^{V(G)}$ 中 G 的稳定集的特征向量的凸包，因此 Stab_G 是一个 $(0,1)$-多面体。这里，若 S 是 $V(G)$ 的子集，且对任意 v、$u \in S$, $\{v,u\} \notin E(G)$，则称其为稳定集。这意味着，当且仅当 G 连通时，Stab_G 不可分解。稳定集多胞体在完美图上的性质良好。例如，若 G 是完美图，则 Stab_G 具有整数分解性质（参见 [21]）。此外，文献 [14, 18] 已给出了完美图的近似戈伦斯坦稳定集多胞体的刻画。设 G 是一个完美图，其连通分支为 G_1、……、G_s，并令 δ_i 表示 G_i 的团的最大基数。众所周知，当且仅当每个 G_i 的极大团具有相同基数，且对 $1 \leqslant i < j \leqslant s$， $|\delta_i - \delta_j| \leqslant 1$ 时，Stab_G 才是近似戈伦斯坦的。在此情形下，与序多胞体的情形一样，$k[\mathrm{Stab}_{G_i}]$ 是戈伦斯坦的，且 $k[\mathrm{Stab}_G] \cong k[\mathrm{Stab}_{G_1}] \# \cdots \# k[\mathrm{Stab}_{G_s}]$。因此，也可以利用定理 4.2 得到其刻画。

此外，利用这一定理，我们可以研究其他类别的 $(0,1)$-多面体的近戈伦斯坦性。

4.2. **近似戈伦斯坦边多胞体**。 首先，我们定义图的边多胞体和边环。有关边环的介绍，请参阅 [7, 第 5] 节以及 [28, 第 10 章和 11] 。

设 G 是一个顶点集为 $V(G) = \{1, \ldots, d\}$、边集为 $E(G)$的有限简单图。给定一条边 $e = \{i, j\} \in E(G)$，令 $\rho(e) := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$，其中 $\mathbf{e}_i$ 表示 i中的第 i 个单位向量，其中 $i \in [d]$。我们如下定义 G 的边多胞体 P_G：

$$P_G = \operatorname{conv}\{\rho(e) : e \in E(G)\}.$$

P_G 的环面环称为 G的边环，记作 $\mathbf{k}[G]$，而非 $\mathbf{k}[P_G]$。

设 $G_1, \ldots, G_s$ 是 G的连通分支。根据边多胞体的定义，我们可以看出 $\mathbf{k}[G] \cong \mathbf{k}[G_1] \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}[G_s]$。因此，在考虑近似戈伦斯坦边多胞体的刻画时，我们可以假设 G 是连通的。

此外，对于连通图 G, P_G，其具有整数分解性质当且仅当 G 满足奇圈条件；换言之，对于任意一对没有公共顶点的奇圈 C 和 C'，都存在一条边$\{v, v'\}$，使得 $v \in V(C)$ 和 $v' \in V(C')$ （见 [20, 23]）。

文献 [22]研究了戈伦斯坦边多胞体。现在我们给出近似戈伦斯坦边多胞体的刻画。

推论 4.5。 设 G是满足奇圈条件的连通简单图。那么， G的边多胞体 P_G 是近似戈伦斯坦的，当且仅当 P_G 是戈伦斯坦的，或者 G是完全二分图 $K_{n,\,n+1}$，其中 $n \geqslant 2$。

证明。若 P_G 是近似戈伦斯坦的，则由定理 4.2 可知，我们可以写成 $P_G = P_1 \times \cdots \times P_s$，其中 $(0,1)$-多胞体 P_1，……，P_s均为不可分解的戈伦斯坦多胞体。于是，由于 $P_G \subset \{(x_1, \ldots\ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 + \cdots + x_d = 2\}$，我们有 $s \leqslant 2$，其中 $d = |V(G)|$。若 $s = 1$，则 P_G 是戈伦斯坦的。若 $s = 2$，我们可以看到，$P_1 = \operatorname{conv}\{e_1, \ldots\ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$，且 $P_2 = \operatorname{conv}\{e_1, \ldots\ldots, e_{d-n}\} \subset \mathbb{R}^{d-n}$，其中某个 $1 < n < d-1$。因此，我们有 $G = K_{n,\,d-n}$；根据 [14, 命题 1.5]可知，对于任意 $1 < n < d-1$，$P_{K_{n,d-n}}$ 是近似戈伦斯坦的，当且仅当 $d - n \in \{n, n+1\}$。由于$P_{K_{n,n}}$ 是戈伦斯坦的，故得到所需结果。□

4.3. **近似戈伦斯坦图拟阵多胞体**。 我们先给出拟阵的若干等价定义之一。

定义 4.6。 设 E 为有限集，且 $\mathcal{B}$ 是 E 的幂集的子集，满足以下性质：

(1) $\mathcal{B} \neq \varnothing$。(2) 若 A、$B \in \mathcal{B}$ 满足 $A \neq B$ 和 $a \in A \setminus B$，则存在某个 $b \in B \setminus A$ 使得 $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$。

则称元组 $M = (E, \mathcal{B})$ 为一个拟阵，其底集为 E，基集为 $\mathcal{B}$。

现在设 $G = (V, E)$ 为一个多重图。与 G 关联的图拟阵是拟阵 M_G，其底集为边集 E，其基恰好是 E 的子集中能够在 G中生成一棵生成树的那些子集。给定两个拟阵 $M_E = (E, \mathcal{B}_E)$ 和 $M_F = (F, \mathcal{B}_F)$，它们的直和 $M_E \oplus M_F$ 是一个底集为 $E \sqcup F$ 的拟阵；对于 $M_E \oplus M_F$的每个基 B，都存在基 $B_E \in \mathcal{B}_E$ 和 $B_F \in \mathcal{B}_F$，使得 $B = B_E \sqcup B_F$。如果拟阵 M无法作这样的分解，我们就称其为不可约。

底层多重图为 G 的图拟阵不可约，当且仅当其底层图是 2-连通的。如果它不可约，其不可约分量恰好对应于 G 的 2-连通分量。

对于任意拟阵 $M = (E, \mathcal{B})$，我们可以将其定义为拟阵基多胞体（或简称基多胞体）：

$$B_M = \operatorname{conv}\left\{\sum_{b \in B} e_b : B \in \mathcal{B}\right\} \subset \mathbb{R}^{|E|}$$

其中， e_b 是 b 对应的 $\mathbb{R}^{|E|}$ 中的关联向量。如果 B_M 来自图拟阵 M_G，我们就称其为 B_G。

拟阵基多胞体的另一种定义如下。

定义4.7 ([5, 节 4])。 若存在正整数 $(0,1)$-多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 满足以下条件，则称其为 （拟阵）基多胞体： 存在正整数 h 使得每个顶点 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 均满足 $\sum_{i=1}^{d} v_i = h$，且 P 的每条边（即一维面）都是向量 $e_i - e_j$ 的平移，其中 $i \neq j$。

在[5, 定理4.1] 中证明了，这一定义确实等价于上文给出的基多胞体定义，而且相应的拟阵是唯一确定的。由此得到以下两个引理。

引理4.8。 设 G 是一个多重图，且 $G_1, \ldots G_n$ 是它的2-连通分支。那么 B_G 可写成基多胞体 B_{G_1}, ..., B_{G_n} 的直积。反过来，若 B_G 可写成多面体 $P_1, \ldots, P_n$ 的直积，且其中没有任何一个 P_i 本身是直积，那么这些多面体对应于 G的2-连通分支 $G_1, \ldots, G_n$ 的基多胞体。

证明。 第一条显然成立。

逆命题可由两个关键见解推出。首先，若与某个（不一定是图拟阵的）拟阵 M 相关联的基多胞体 B_M可以写成直积 $P_1 \times P_2$，则 P_1 和 P_2 也都是基多胞体。其次，若图拟阵 M_G 可以写成直和 $M_1 \oplus M_2$，则 M_1 和 M_2 也都是图拟阵，且分别对应于 G 的子图，这些子图至多有一个公共顶点。

第一个见解可由基多胞体的另一种定义推出：B_M 的每条边都对应于 P_1 中的一条边和 P_2 中的一个顶点，反之亦然。因此， P_1 和 P_2 也必定满足该定义，从而成为基多胞体，并且其底层拟阵唯一，分别为 M_1 和M_2。第二个见解是一个经典结果，除其他出处外，还可见于 [26,引理 8.2。2]。□

以下命题是 Whi 所提出的一项经典结果的多面体版本 te.

引理4.9 ([29, 定理 1])。 拟阵基多胞体具有整数分解性质。

通过将拟阵与其基多胞体相对应，我们现在可以定义拟阵的戈伦斯坦性、近戈伦斯坦性和层性。在 [13] 和 [15], 中，人们找到了针对图拟阵戈伦斯坦性的构造性图论判据。由于两个余度相同的戈伦斯坦多胞体的直积仍是戈伦斯坦的，因此该刻画以 2-连通图的形式给出。

命题 4.10 ([15, 定理 2.22 和 2.25])。 设 G 是一个2-连通多重图。则以下条件等价。

(1) B_G 是戈伦斯坦的，余度为 $a = 2$(2) G要么是2-圈，要么 G可以由团 K_4 的副本以及[15]中的构造 *2.15* 得到。

以下条件也等价。

(1) B_G 是戈伦斯坦的，且余度为 $a > 2$(2) G 可以由圈 C_a 的若干副本以及文献[15] 中的构造 *2.15*、*2.17*、*2.18* 得到，其中$\delta = a$。

因此，近戈伦斯坦图拟阵的完整刻画是定理4.2 和命题 4.10的直接推论。

推论 4.11。 设 G 是一个多重图，其 2-连通分支为 $G_1, \ldots, G_n$，则以下条件等价。

(1) B_G 是近似戈伦斯坦的(2) B_{G_1}、……、B_{G_n} 是戈伦斯坦的，其余度分别为 a_1、……、a_n，其中 $|a_i - a_j| \leqslant 1$ 对于 $1 \leqslant i < j \leqslant s$。

参考文献

[1] Victor Batyrev。具有给定 h*-多项式的格多胞体。arXiv:0602593，2006。[2] Victor Batyrev 和 Benjamin Nill。镜像对称的组合学方面。当代数学，452：35–66，2008。[3] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust。Magma 代数系统。I. 用户语言。《符号计算杂志》，24(3-4)：235–265，1997。计算代数与数论（伦敦，1993）。[4] V Chv´atal。与图相关的某些多胞体。《组合理论杂志》B辑，18：138–154，1975。[5] Israel M Gelfand、R Mark Goresky、Robert D MacPherson 和 Vera V Serganova。组合几何、凸多面体与舒伯特胞腔。《数学进展》，63(3)：301–316，1987。[6] Christian Haase 和 Jan Hofmann。凸正规（对）多胞体。《加拿大数学通报》，60(3)：510–521，2017。[7] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi 和 Hidefumi Ohsugi。二项式理想，第279卷。施普林格，2018。[8] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi 和 Dumitru I Stamate。典范模的迹。《以色列数学杂志》，233：133–165，2019。[9] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi 和 Dumitru I Stamate。数值半群环的典范迹理想与剩余。载于《半群论坛》，第103卷，第550–566页。施普林格，2021。[10] J¨urgen Herzog、Fatemeh Mohammadi 和 Janet Page。度量 Hibi 环和正规仿射半群环的非戈伦斯坦轨迹。《代数杂志》，540：78–99，2019。[11] Takayuki Hibi。分配格、仿射半群环与具有直化律的代数。《交换代数与组合学》，11：93–109，1987。[12] Takayuki Hibi。有理凸多胞体的对偶多胞体。《组合学》，12：237–240，1992。[13] Takayuki Hibi、Michał Laso´n、Kazunori Matsuda、Mateusz Michałek 和 Martin Vodiˇcka。戈伦斯坦图拟阵。《以色列数学杂志》，243(1)：1–26，2021。[14] Takayuki Hibi 和 Dumitru I Stamate。由有限图产生的近似戈伦斯坦环。《电子组合学杂志》，第 P3–28 页，2021。[15] Max K¨olbl。由多重图得到的戈伦斯坦图拟阵。《组合学年刊》，24(2)：395–403，2020。[16] Sora Miyashita。齐次整环的层性与近戈伦斯坦性。arXiv:2206.00552，2022。[17] Sora Miyashita。小余维的近似戈伦斯坦射影单项式曲线。arXiv:2302.04027，2023。[18] Mitsuhiro Miyazaki。h-完美图的稳定集多胞体的埃尔哈特环在去心谱上为戈伦斯坦及其近似戈伦斯坦性质。arXiv:2201.02957，2022。[19] Mircea Mustat¸a 和 Sam Payne。埃尔哈特多项式与弦状贝蒂数。《数学年刊》，333：787–795，2005。[20] Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。由有限图产生的正规多胞体。《代数杂志》，207(2)：409–426，1998。[21] Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。逆字典序初始理想全为平方自由的凸多胞体。《美国数学会会刊》，129(9)：2541–2546，2001。[22] Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。特殊单纯形与戈伦斯坦托环。《组合理论杂志》A辑，113：718–725，2006。[23] Aron Simis、Wolmer V Vasconcelos 和 Rafael H Villarreal。关于图的理想理论。《代数杂志》，167(2)：389–416，1994。[24] Richard P Stanley。两个偏序集多胞体。《离散与计算几何》，1：9–23，1986。[25] Richard P Stanley。组合学与交换代数，第41卷。施普林格科学与商业媒体，2007。[26] Klaus Truemper。拟阵分解，第6卷。Citeseer，1992。[27] N Viˆet、Joseph Gubeladze 和 W Bruns。正规多胞体、三角剖分与 Koszul 代数。《纯粹与应用数学杂志》，485：123–160，1997。[28] Rafael H Villarreal。单项式代数，第238卷。纽约 Marcel Dekker，2001。[29] Neil L White。拟阵的基单项式环。《数学进展》，24(2)：292–297，1977。

(T. Hall) 诺丁汉大学数学科学学院，英国
电子邮箱：pmyth1@nottingham.ac.uk

(M.K¨olbl) 大阪大学信息科学与技术研究生院纯粹与应用数学系，日本大阪吹田 565-0871电子邮箱：max.koelbl@ist.osaka-u.ac.jp

(K.Matsushita) 大阪大学信息科学与技术研究生院纯粹与应用数学系，日本大阪吹田 565-0871电子邮箱：k-matsushita@ist.osaka-u.ac.jp

（S. Miyashita）大阪大学信息科学与技术研究生院纯粹与应用数学系，日本大阪府吹田市 565-0871电子邮箱地址：u804642k@ecs.osaka-u.ac.jp