三阶微分方程的逆谱问题

Natalia P. Bondarenko

摘要。本文研究带有分布系数的三阶微分方程的逆谱问题。该逆问题旨在根据两个具有分离边界条件的边值问题的谱数据，恢复微分表达式系数。针对这一逆问题，我们解决了反谱理论中最基本的问题，即可解性的充要条件。此外，我们还证明了逆问题的局部可解性和稳定性。进一步地，我们得到了自伴情形下可解性的非常简单的充分条件。主要结果通过构造性方法证明，该方法将非线性逆问题化为有界无穷序列巴拿赫空间中的线性方程。未来，我们的结果可以推广到具有可积系数或分布系数的各类高阶微分算子。

关键词：逆谱问题；三阶微分算子；分布系数；充要条件；谱数据刻画；谱映射方法。

美国数学会 数学学科分类（2020年）：34A55 34B09 34B05 34E05 46F

arXiv:2303.13124v1 [math.SP] 23 Mar 2023

1 引言

本文研究三阶微分方程

$$y''' + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y' + \tau_0(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1.1}$$

其中 λ 是谱参数，$\tau_1 \in L_2(0,1)$，$\tau_0 \in W_2^{-1}(0,1)$，即 $\tau_0 = \sigma_0'$, $\sigma_0 \in L_2(0,1)$，且 L_2-函数的导数按分布的意义理解。

我们研究如何根据满足以下边界条件的方程 (1.1) 的两个边值问题 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的谱数据，恢复系数 τ_0 和 τ_1：

$$\mathcal{L}_1: \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}_2: \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{1.3}$$

近年来，具有非光滑系数和分布系数的三阶微分算子的谱理论受到学者们的广泛关注（例如参见 [1–7]）。三阶微分方程在各种物理应用中均有出现，例如用于模拟黏性液体的薄膜流动和弹性梁振动（参见 [8–10]）。三阶算子在非线性 Boussinesq方程的积分中发挥着重要作用（参见[11]）。

本文研究逆谱问题理论，该理论旨在根据微分算子的谱特征重构微分算子。反谱理论最显著的成果是在二阶斯图姆-刘维尔算子方面取得的 $-y'' +$

$q(x)y$ （参见专著 [12–15] 及其中的参考文献）。反斯图姆–刘维尔问题的基本结果是通过盖尔范德-列维坦方法 [16] 得到的。然而，这种方法对于高阶微分算子并不有效：

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}, \quad n > 2. \tag{1.4}$$

因此，研究算子 (1.4) 的反问题需要发展新的方法。Yurko [17–20] 使用谱映射方法，构建了有限区间和半直线上具有可积系数 p_k 的高阶微分算子 (1.4) 的一般逆问题理论。该方法的核心思想是将非线性反问题化归为适当巴拿赫空间中的线性方程。其主要技术工具是对称为谱映射的特定函数进行围道积分，这些函数最早出现在 Leibenson [21, 22]的论文中。Beals [23]及其研究团队研究了整条实线上高阶微分算子的反散射问题。

近年来，人们开始研究具有分布系数的高阶微分算子的逆谱问题。在 [24, 25], 中，已证明了在有限区间和半直线上恢复此类算子的唯一性定理。在 [26], 中，发展了一种求解逆谱问题的构造性方法。该方法可应用于具有正则系数或分布系数的各种微分算子类。 [24–26] 的方法依赖于对具有分布系数的微分算子进行正则化（见 [27–29]），以及谱映射方法 [20]的思想。在 [26], 的重构技术中，谱数据渐近起着重要作用；这些渐近性质是在 [30] 中使用近期于 [31]中获得的 Birkhoff 型解推导出来的。然而，据作者所知，具有分布系数的高阶微分算子的逆问题可解性充要条件（NSC）尚未得到研究。

需要充分条件问题是逆谱问题理论中最根本的问题。同时，这个问题通常也是最难研究的。举例来说，我们考虑以下关于斯图姆-刘维尔问题的著名结果：

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1.5}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(1) + Hy(1) = 0, \tag{1.6}$$

其中， $q(x)$ 是定义在 $L_2(0,1)$ 上的实值函数， h 和 H 是实常数。记 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为问题 (1.5)-(1.6) 的特征值，以及满足条件 $y_n(0) = 1$ 归一化的相应特征函数。考虑谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$，它由特征值和权数 $\alpha_n := \int_0^1 y_n^2(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$ 组成。

命题 1.1（ [14, 16]）。对于数列 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$，若其为某个形式为 (1.5)-(1.6) 的斯图姆-刘维尔问题的谱数据，则以下条件是必要充分条件：

$$\lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n \neq \lambda_m,\ n \neq m, \quad \alpha_n > 0, \tag{1.7}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{\varkappa_{n1}}{n}, \tag{1.8}$$

其中 $\omega = \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)\,dx$, $\{\varkappa_n\}\,\{\varkappa_{n1}\} \in l_2$。

命题 1.1 的突出之处在于其必要充分条件表述简洁，仅包含简单的结构性质 (1.7) 和渐近性质 (1.8)。Gelfand 和 Levitan 在其开创性论文 [16] 中首次得到了反斯图姆–刘维尔问题可解性的必要充分条件。然而， [16] 的结果与命题 1.1 略有不同，因为在 [16] 中，必要条件与充分条件之间存在差距。要满足充分性，还需要更精确的渐近性质。后来，这一差距得以消除。例如， [14] 中给出了没有这一差距的命题 1.1 的必要充分条件。这个历史案例表明，即使对于最简单的二阶算子，要得到关于谱数据的必要充分条件也需要付出相当大的努力。

对于具有正则系数的高阶微分算子 (1.4)，Yurko 已经得到了逆问题可解性的必要充分条件（见 [20, 定理 2.3.1]）。然而，与命题 1.1 相比， [20] 定理 2.3.1 中包含若干难以验证的条件。首先，它要求存在一个模型问题，其谱数据在某种意义下渐近接近给定数据。其次，要求主线性方程唯一可解。尽管对于非自伴算子，这一条件不可避免，但研究一些特殊情形仍然很重要：在这些情形下，主方程的可解性可以由某些易于验证的条件推出。第三， [20] 中微分表达式系数的重构公式呈级数形式，而且定理 2.3.1 还对事后在适当空间中验证级数收敛性提出了要求。提出最后这一要求的原因是，在定理 2.3.1 中，(1.4) 的系数 p_k 属于非希尔伯特空间。 [20], 定理 2.3.3 给出了希尔伯特空间情形下无须满足此类事后要求的必要充分条件，但未提供证明。因此，尽管 Yurko 的结果极大推动了高阶微分算子反问题理论的发展，这些结果仍非最终结论，对这类问题的研究还需继续。我们还强调，Yurko 的结果仅涉及正则系数情形。对于具有分布系数的微分算子，必要充分条件问题仍完全悬而未决。笔者认为，研究分布系数情形不仅有助于构建高阶微分算子的一般反问题理论，也有助于克服正则系数情形中出现的一些困难。

本文旨在获得三阶方程 (1.1) 的谱数据的必要充分条件。选择三阶是出于两个原因。首先，对于三阶方程 (1.1)，逆问题可解性的条件具有最简洁的形式（见定理 2.5），且不包含任何难以验证的要求。其次，三阶情形便于介绍证明技巧，该技巧今后可推广至任意阶。我们采用 Mirzoev-Shkalikov 方法 [27, 28]处理带分布系数的微分方程 (1.1)。为简单起见，我们选择阶数尽可能低的边界条件 (1.2)- (1.3)。它们类似于斯图姆-刘维尔算子的狄利克雷边界条件$y\,(0) \;=\; y\,(1) \;=\; 0$ 。其他类型的分离边界条件也可以用类似方法研究。非分离边界条件（例如周期边界条件）则有本质区别，因此需要单独研究。

作为谱数据，我们取两个边值问题 $\mathcal{L}_k$, $k = 1$ 的特征值 $\{\lambda_{n,k}\}$ 和权数 $\{\beta_{n,k}\}$ ；对于任意一对重合的特征值 $\lambda_{n,\,1} = \lambda_{n,\,2}$，还加入它们的“共同”权数 γ_n 。谱数据的严格定义见第 2 节。为求解反问题，我们使用 $[20, 26],$ 的构造性方法，将反问题归结为有界无穷序列巴拿赫空间中的所谓主方程。应用此方法，我们证明了关于一般非自伴情形下反问题可解性的必要充分条件的主定理（定理 2.3）。更确切地说，使用主方程的解，我们构造函数 τ_1 和 τ_0 ，使其成为一些

级数。随后，依据谱数据渐近性质，我们证明这些级数分别在空间 $L_2(0,1)$ 和 $W_2^{-1}(0,1)$ 中收敛。之后，我们证明，由构造出的系数 τ_0 和 τ_1 所确定的边值问题 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的谱数据，与最初给定且具有指定渐近性质和结构性质的数一致。此外，我们考察谱数据受到小扰动的情形，并得到反问题的局部可解性和稳定性（定理 2.4）。最后，我们研究自伴情形，此时函数 $\mathrm{i}\tau_0$ 和 τ_1 为实值函数。在这种情形下，我们得到反问题可解性的简单充分条件（定理 2.5）。定理 2.5 的证明中，主方程的唯一可解性（引理 6.1）起着核心作用。为证明该引理，我们发展了一种新方法；此前的研究中没有类似方法，因为奇数阶情形下的主方程可解性此前尚未得到研究。

本文的组织结构如下。第 2 节定义谱数据，陈述主要结果，并简要介绍证明策略。第 3 节研究谱数据的结构性质和渐近性质。第 4 节给出由 [26] 构造反问题主方程的方法。第 5 节证明定理 2.3 中关于必要充分条件的结论，以及定理 2.4 中关于反问题局部可解性和稳定性的结论。第 6 节讨论自伴情形，并证明定理 2.5 中关于该情形下逆问题可解性的充分条件。第 7 节简要总结本文结果，并讨论将其推广到任意阶的可能性。

本文中，我们使用以下记号：

- 撇号 $y'(x,\lambda)$ 表示关于 x 的导数，点号 $\dot{y}(x,\lambda)$ 表示关于 λ 的导数。
- $\delta_{k,\,j}$ 是克罗内克 δ。
- 在估计中，同一符号 C 用于表示与 x、λ、 n 等无关的各种正常数。
- 如果 $\lambda \to \lambda_0$

$$A(\lambda) = \sum_{k=-q}^{p} a_k(\lambda-\lambda_0)^k + o((\lambda-\lambda_0)^p),$$

则 $A_{\langle k\rangle}(\lambda_0) := a_k$。

- 除微分表达式 $\ell(y) = y''' + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y' + \tau_0(x)y$ 外，我们还考虑形式类似、但系数不同的微分表达式 $\tilde{\ell}$、 $\ell^\star$、 $\tilde{\ell}^\star$、 ℓ^N 和 $\ell^\dagger$。约定：若符号 α 表示与 ℓ 相关的对象，则符号 $\tilde{\alpha}$、 $\alpha^\star$、 $\tilde{\alpha}^\star$、 α^N 和 $\alpha^\dagger$ 分别表示与 $\tilde{\ell}$、 $\ell^\star$、 $\tilde{\ell}^\star$、 ℓ^N 和 $\ell^\dagger$ 相关的类似对象。注意，对于 ℓ、 $\tilde{\ell}$、 $\ell^\star$ 等，拟导数 $y^{[j]}$ 的定义会有所不同。

2 主要结果

我们首先对方程 (1.1) 进行正则化。按照 Mirzoev 和 Shkalikov [27, 28], 的方法，我们用拟导数来理解方程 (1.1)。下面简要介绍这一方法。

方程 (1.1) 的关联矩阵 $F(x) = [f_{k,j}(x)]_{k,\,j=1}^3$ 具有如下形式

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\sigma_0+\tau_1) & 0 & 1 \\ 0 & (\sigma_0-\tau_1) & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中， σ_0 是 τ_0的任意一个固定原函数。注意， σ_0 可以相差一个常数来选取。不过， σ_0 的选取不会影响本节下文所定义的谱数据。

拟导数由以下公式定义

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} := (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j} y^{[j-1]}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Thus

$$y^{[j]} = y^{(j)}, \quad j = 0, 1, \quad y^{[2]} = y'' + (\sigma_0 + \tau_1)y, \quad y^{[3]} = (y^{[2]})' - (\sigma_0 - \tau_1)y'.$$

定义定义域

$$\mathcal{D}_F := \{y \colon y^{[k]} \in AC[0, 1],\ k = 0, 1, 2\}.$$

由 [28] 的结果可知，对于任意 $y \in \mathcal{D}_F$，微分表达式 $\ell(y) = y''' + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y + \tau_0(x)y$ 生成一个正则广义函数，且 $\ell(y) = y^{[3]}$。因此，若函数 y 满足 $y \in \mathcal{D}_F$，且在 $(0, 1)$ 上几乎处处有 $y^{[3]} = \lambda y$，则称其为方程 (1.1) 的解。

用 $C_k(x, \lambda)$、 $k = 1$、2、3 表示满足以下初始条件的方程 (1.1) 的解

$$C_k^{[j-1]}(0, \lambda) = \delta_{k,j}, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

显然，函数 $C_k(x, \lambda)$ 唯一确定为以下初值问题的解:

$$\begin{bmatrix} C_k \\ C_k' \\ C_k^{[2]} \end{bmatrix}(0, \lambda) = \begin{bmatrix} \delta_{k,1} \\ \delta_{k,2} \\ \delta_{k,3} \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} C_k \\ C_k' \\ C_k^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\sigma_0 + \tau_1) & 0 & 1 \\ \lambda & (\sigma_0 - \tau_1) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_k \\ C_k' \\ C_k^{[2]} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.3}$$

因此，对于每个固定的 $x \in [0, 1]$、k、 $j = 1$、2、3，拟导数 $C_k^{[j-1]}(x, \lambda)$ 关于 λ 是整函数。定义整函数

$$\Delta_{1,1}(\lambda) := -\begin{vmatrix} C_2(1, \lambda) & C_3(1, \lambda) \\ C_2'(1, \lambda) & C_3'(1, \lambda) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,1}(\lambda) := -\begin{vmatrix} C_1(1, \lambda) & C_3(1, \lambda) \\ C_1'(1, \lambda) & C_3'(1, \lambda) \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\Delta_{3,1}(\lambda) := \begin{vmatrix} C_1(1, \lambda) & C_2(1, \lambda) \\ C_1'(1, \lambda) & C_2'(1, \lambda) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,2}(\lambda) := C_3(1, \lambda), \quad \Delta_{3,2}(\lambda) := C_2(1, \lambda). \tag{2.5}$$

接下来给出谱数据的定义。对于 $k = 1, 2$，用 $\{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ 表示相应边值问题 $\mathcal{L}_k$的特征值。容易验证，特征值 $\{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ 与特征函数 $\Delta_{k,k}(\lambda)$，$k = 1, 2$ 的零点重合。全文中，我们假设 $\Delta_{k,k}(\lambda)$ 的零点对于 $k = 1, 2$ 均为单零点。重特征值的情形可以借鉴论文 [33, 34], 中的方法进行研究，这些论文探讨了非自伴斯图姆-刘维尔算子的逆谱问题。然而，对于高阶微分算子，重特征值的情形在技术上要复杂得多，因此我们仅考虑单特征值的情形。尽管如此，对于某些指标 $n, p \geq 1$，$\lambda_{n,1} = \lambda_{p,2}$ 仍有可能成立。在这种情况下，我们重新排列特征值，使得 $n = p$，并定义集合

$$K := \{n \in \mathbb{N} \colon \lambda_{n,1} = \lambda_{n,2}\}. \tag{2.6}$$

对于 $n \notin K$，我们有 $\lambda_{n,\ 1} \notin \{\lambda_{p,2}\}_{p=1}^{\infty}$。

除特征值外，我们还将使用额外的谱信息。在高阶微分算子的逆问题理论中，最自然的谱特征是 Weyl-Yurko 矩阵，它推广了斯图姆-刘维尔算子的韦伊函数（见 [12,14]）。对于具有正则系数的高阶微分算子，Yurko 首次引入了 Weyl-Yurko 矩阵 [17,20]。在一般情况下，Weyl-Yurko 矩阵能够唯一确定微分算子；而例如 [21–23] 中使用的谱数据，只有在对谱施加某些限制时才足够。对于具有分布系数的微分算子，[24–26] 中使用了 Weyl-Yurko 矩阵。

对于三阶方程 (1.1)，Weyl-Yurko 矩阵定义如下：

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ M_{2,1} & 1 & 0\\ M_{3,1} & M_{3,2} & 1\end{bmatrix},\quad M_{j,k}(\lambda)=-\frac{\Delta_{j,k}(\lambda)}{\Delta_{k,k}(\lambda)},\quad 1\le k<j\le 3. \tag{2.7}$$

显然，所谓的韦伊函数 $M_{j,k}(\lambda)$、$1\le k<j\le 3$ 在 λ 中是亚纯函数，其极点与特征值 $\{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ 重合。定义权数

$$\beta_{n,k}:=-\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,k}} M_{k+1,k}(\lambda)=\frac{\Delta_{k+1,k}(\lambda_{n,k})}{\dot\Delta_{k,k}(\lambda_{n,k})},\quad n\in\mathbb{N},\ k=1,2, \tag{2.8}$$

以及 $\dot\Delta(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$。容易证明（见引理 3.1），$\beta_{n,1}\beta_{n2}=0$ 当且仅当 $n\in K$。因此，对于 $n\in K$，令 $\lambda_n:=\lambda_{n,1}$ 并定义附加权数

$$\gamma_n:=\frac{\Delta_{3,1}(\lambda_n)}{\dot\Delta_{1,1}(\lambda_n)}\quad \text{if } \beta_{n,1}=0, \tag{2.9}$$

$$\gamma_n:=\frac{C_1(1,\lambda_n)}{\dot\Delta_{2,2}(\lambda_n)}\quad \text{if } \beta_{n,2}=0. \tag{2.10}$$

若 $\beta_{n,1}=0$ 且 $\beta_{n,2}=0$，则定义 (2.9) 和 (2.10) 彼此一致。我们将两个问题 $\mathcal{L}_1$、$\mathcal{L}_2$ 的特征值与上述定义的权数一起作为反问题的谱数据。

逆问题 2.1. 给定谱数据

$$\mathfrak{S}:=\big(\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2},\{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2},\{\gamma_n\}_{n\in K}\big),$$

求方程 (1.1) 的系数 $\mathcal{T}:=(\tau_0,\tau_1)$。

如果 $\tau_0\in W_2^{-1}(0,1)$、$\tau_1\in L_2(0,1)$ 且 $\Delta_{k,k}(\lambda)$ 的零点对于 $k=1$ 均为~单零点，我们就称 $\mathcal{T}\in W$。在考虑 $\mathcal{T}$ 的同时，我们还考虑另一个属于 W 类的系数对 $\tilde{\mathcal{T}}=(\tilde\tau_0,\tilde\tau_1)$。约定：若符号 α 表示与 $\mathcal{T}$ 相关的对象，则带有~波浪号的符号 $\tilde\alpha$ 表示与 $\tilde{\mathcal{T}}$ 相关的类似对象。因此，逆问题 2.1 的唯一性定理表述如下。

定理2.2. 若 $\mathfrak{S}=\tilde{\mathfrak{S}}$，则 $\mathcal{T}=\tilde{\mathcal{T}}$，即 $\tau_0=\tilde\tau_0$ 属于 $W_2^{-1}(0,1)$，$\tau_1=\tilde\tau_1$ 属于 $L_2(0,1)$。因此，属于 W 类的系数 $\mathcal{T}$ 由谱数据 $\mathfrak{S}$ 唯一确定。

逆问题 2.1 可以通过 [26] 方法构造性地求解。也就是说，反问题可以归结为以下形式的线性主方程

$$(I-\tilde R(x))\psi(x)=\tilde\psi(x),\quad x\in[0,1], \tag{2.11}$$

在无穷有界序列空间 m 中。主方程的构造过程已在第 4 节 ˜ 中详细给出。这里仅指出，对于每个固定的 $x \in [0,1]$， $\psi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是 ˜ m(R) 中的元素： $m \to m$ 是一个紧线性算子，而 I 是 m 中的单位算子。˜ ˜ 元素 $\psi(x)$ 和算子 $R(x)$ 由谱数据 $\mathfrak{S}$ 构造，而 $\psi(x)$ 是未知元素，它与方程 (1.1) 的系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$ 有关。因此，求解主方程 (2.11) 后，可以求得 $\psi(x)$，进而用它得到反问题的解。

现在我们可以陈述关于逆问题可解性的充要条件的主定理。

定理 2.3. 对于数值 $\mathfrak{S} = \left(\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2},\ \{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2},\ \{\gamma_n\}_{n\in K}\right)$ 要成为与 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$ 相对应的谱数据，必须且只须满足以下条件：

1. 对于 $n \geq 1$, $k = 1,2$，以下渐近公式成立：

$$\lambda_{n,k} = (-1)^{k+1}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(n + \frac{1}{6} - \frac{\theta}{2\pi^2 n} + \frac{\varkappa_n}{n}\Big)\right)^3, \quad \beta_{n,k} = 3\lambda_{n,k}\left(1 + \frac{\varkappa_{n1}}{n}\right), \qquad (2.12)$$

$$where\ \theta = \int_0^1 \tau_1(x)\,dx,\ \{\varkappa_n\}, \{\varkappa_{n1}\} \in l_2.$$

2. $\lambda_{n,\ k} \neq \lambda_{n_0,\ k_0}$ 若 $n \neq n_0$； $\beta_{n,\ 1}\beta_{n,\ 2} = 0$ 当且仅当 $n \in K$； $\gamma_n \neq 0$ 对于 $n \in K$.

˜3. 对每个固定的 $x \in [0,1]$，主方程的算子 $(I - R(x))$： $m \to m$ 存在有界逆算子。(2.11)

定理 2.3 的第一个条件意味着，可以对数值 $\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2}$ 进行编号，使渐近公式 (2.12) 成立。这样的编号并不唯一，因为渐近性质只能确定充分大的特征值的顺序。我们固定一个满足这一性质且同时满足条件 $n = p$ if $\lambda_{n,1} = \lambda_{p,2}$ 的编号。该编号根据 (2.6) 确定集合 K 。由渐近性质 (2.12) 可知，当 n 充分大时，数值 $\{\lambda_{n,k}\}$ 彼此分离，因此集合 K 是有限的，并且对充分大的特征值，单重性假设自动成立。因此，这一假设并不是很严格。

下面简要介绍定理 2.3 的证明策略。必要性的证明包括研究第 3 节中谱数据的结构性质和渐近性质。第三个条件的必要性已在 [26] 中证明。充分性的证明基于˜对逆问题 2.1 的构造性求解。由于算子 $(I - R(x))$ 可逆，主方程 (2.11) 有唯一解 $\psi(x) \in m$。使用 $\psi(x)$ 的分量，我们根据 [26] 中推导出的重构公式构造函数 τ_0 和 τ_1 。我们证明 $\tau_0 \in W_2^{-1}(0,1)$ 和 $\tau_1 \in L_2(0,1)$。最后，我们证明最初给定的数值 $\mathfrak{S}$ 是方程 (1.1) 在所构造系数 τ_0 和 τ_1 下的谱数据。最后这一步在技术上最为困难。我们需要检验某些构造出的级数是方程 (1.1) 的解，并且满足特定的边界条件。然而，这些级数的导数并不收敛，因此不能直接代入方程 (1.1)。为克服这些困难，我们采用逼近方法，该方法在第 5 节中有详细介绍。

注意，定理 2.3 包含主方程唯一可解性的条件（条件 3）。这类条件通常是非自伴算子所要求的。例如，在研究非自伴斯图姆-刘维尔算子时也会出现类似条件

（见 [14,定理 1.6.3]）。然而，研究特殊情形也很重要，在这些情形下，条件 3 可以由一些易于验证的条件推导出来。本文考虑以下两种情形：

1. 谱数据的小扰动。

2. 自伴情形。

对于小扰动情形，我们得到以下关于逆问题 2.1 的局部可解性与稳定性的定理。

定理 2.4. 假设 $\mathcal{T} = (\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1) \in W$ 且 $K = \varnothing$。那么，存在 $\varepsilon > 0$（它取决于 $\mathcal{T}$），使得对于任意满足不等式的复数 $\mathfrak{S} := \{\lambda_{n,k}, \beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2}$

$$d(\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}) := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,2} \left(n^{-1}|\lambda_{n,k} - \tilde{\lambda}_{n,k}| + n^{-2}|\beta_{n,k} - \tilde{\beta}_{n,k}|\right)^2} \le \varepsilon, \tag{2.13}$$

存在系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$，使得 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathcal{T}$的谱数据。此外，

$$\|\tau_1 - \tilde{\tau}_1\|_{L_2(0,1)} \le Cd(\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}), \quad \|\tau_0 - \tilde{\tau}_0\|_{W_2^{-1}(0,1)} \le Cd(\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}), \tag{2.14}$$

其中常数 $C > 0$ 仅取决于 $\mathcal{T}$和 ε。

$K \ne \varnothing$ 情形需要单独研究，因为相等的特征值 $\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2}$可能在谱受到小扰动时分裂。为了证明 (2.13) 蕴含定理 2.3 的条件 1–3。

现在转而讨论自伴情形。假设函数 $\mathrm{i}\tau_0(x)$ 和 $\tau_1(x)$ 为实值。于是，边值问题 $\mathcal{L}_k$、$k = 1$、2 的特征值可以编号为

$$\lambda_{n,1} = -\overline{\lambda_{n,2}}, \quad \beta_{n,1} = -\overline{\beta_{n,2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

严格来说，微分表达式 $\ell(y) = y''' + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y' + \tau_0(x)y$乘以 i 后成为自伴的。此时，边值问题 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 互为伴随，因此它们的谱互为复共轭。然而，为了保持与先前研究 [20, 26], 中记号的相似性，我们不乘以 i。因此， $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的谱关于虚轴对称。

鉴于 (2.15)，只需考虑谱 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n := \lambda_{n,1}$, $\beta_n := \beta_{n,1}$。与前文一样，假设 $\Delta_{1,1}(\lambda)$ 的零点 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均为单零点。由于特征值按照 (2.15) 编号，可能出现 $\lambda_{n,1} = \lambda_{p,2}$ for $n \ne p$, 即 $\lambda_n = -\overline{\lambda_p}$。然而，我们将给出逆问题可解性的充分条件，并且还假设 $\lambda_n \ne -\overline{\lambda_p}$ for $n \ne p$。无论如何，对某些 $n \in \mathbb{N}$，可能有 $\lambda_n = -\overline{\lambda_n}$，此时 $\beta_n = 0$ 和 $\gamma_n > 0$，其中 γ_n 可由 (2.9) 或 (2.10) 定义。显然 $K = \{n \in \mathbb{N}\colon\ \lambda_n = -\overline{\lambda_n}\}$。因此，定义谱数据

$$\mathfrak{S}^+ := \left(\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus K}, \{\gamma_n\}_{n\in K}\right). \tag{2.16}$$

我们称 $\mathcal{T} \in W^+$，如果 $\tau_1 \in L_2(0, 1)$、$\tau_0 \in W_2^{-1}(0, 1)$、函数 $\mathrm{i}\tau_0(x)$ 和 $\tau_1(x)$ 均为实值。

定理 2.5. 设 $\mathfrak{S}^+$ 为满足以下条件的 (2.16) 形式的任意数：

1. 数值 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus K}$ 满足 $k = 1$的渐近性质 (2.12)。

2. 当 $n \neq p$时， $\lambda_n \neq \lambda_p$ 和 $\lambda_n \neq -\overline{\lambda_p}$；对于 $n \in \mathbb{N} \setminus K$，
$\beta_n \neq 0$。3. 当 $n \in \mathbb{N}$ 时，$\operatorname{Re}\lambda_n \geq 0$；当 $n \in K$时， $\gamma_n > 0$。

那么，存在唯一的系数对 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W^+$，其谱数据为 $\mathfrak{S}^+$。

值得注意的是，定理 2.5 并不要求主方程可解。其唯一可解性是在第 6 节中使用定理 2.5 的条件 1–3 证明的。证明基于特殊亚纯函数的构造、在 λ-平面上的围道积分，以及留数定理的应用。我们强调，这种构造是全新的，与偶数阶微分算子的情形不同。对于偶数阶，边值问题 $\mathcal{L}_k$ 的数量为奇数，且中间问题是自伴的。因此，可以采用类似于研究二阶算子时的思路。对于奇数阶，则不存在这样的“中间”自伴问题。因此，我们对两个谱施加条件 $\operatorname{Re}\lambda_n \geq 0$，使它们被虚轴分隔开来。这种分隔在证明中起着重要作用。

3 谱数据的性质

本节研究谱数据 $\mathfrak{S}$ 的结构和渐近性质。此外，我们根据 [26] 的结果推导出唯一性定理（定理2.2）。此外，我们定义魏尔解 $\Phi_k(x,\lambda)$ 和 $\Phi_k^\star(x,\lambda)$，$k = 1, 2, 3$，它们在反问题的研究中发挥着重要作用。我们建立了魏尔解与谱数据之间的关系。

考虑第 1 节中针对具有系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$ 的方程 (1.1) 定义的边值问题 $\mathcal{L}_k$, $k = 1, 2$。

引理 3.1. $\beta_{n,1}\beta_{n,2} = 0$ 当且仅当 $n \in K$。对于 $n \in K$, $\gamma_n \neq 0$。如果 $\beta_{n,1} = \beta_{n,2} = 0$，那么定义 (2.9) 和 (2.10) 彼此一致。

证明。假设 $\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2} =: \lambda_n$。那么 $\Delta_{1,1}(\lambda_n) = \Delta_{2,2}(\lambda_n) = 0$。因此，关系式 (2.4)-(2.5) 推出 $C_3(1, \lambda_n) = 0$ 且 $C_2(1, \lambda_n)C_3'(1, \lambda_n) = 0$。考虑以下两种可能的情况：

Case 1. $C_2(1, \lambda_n) = 0$，即 $\Delta_{3,2}(\lambda_n) = 0$。因此，韦伊函数 $M_{3,2}(\lambda) = \Delta_{3,2}(\lambda)\,\Delta_{2,2}(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_n$ 处解析，所以 $\beta_{n,2} = 0$。注意，在这种情况下，$C_1(1, \lambda_n) \neq 0$。否则$C_1(1, \lambda_n) = C_2(1, \lambda_n) = C_3(1, \lambda_n) = 0$，这是不可能的，因为函数 $C_k(x, \lambda_n)$,$k = 1, 2, 3$ 构成方程 (1.1) 的基本解系。因此 $\gamma_n = C_1(1, \lambda_n)\,\dot{\Delta}_{2,2}(\lambda_n) \neq 0$。

Case 2. $C_3'(1, \lambda_n) = 0$ 意味着 $\Delta_{2,1}(\lambda_n) = 0$，因此韦伊函数 $M_{2,1}(\lambda) = \Delta_{2,1}(\lambda)\,\Delta_{1,1}(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_n$ 处解析。因此 $\beta_{n,1} = 0$。于是

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' & C_3' \\ C_1^{[2]} & C_2^{[2]} & C_3^{[2]} \end{vmatrix}(1, \lambda_n) = -C_1^{[2]}(1, \lambda_n)\Delta_{1,1}(\lambda_n) + C_2^{[2]}(1, \lambda_n)\Delta_{2,2}(\lambda_n) + C_3^{[2]}(1, \lambda_n)\Delta_{3,1}(\lambda_n) = 1.$$

由于 $\Delta_{1,1}(\lambda_n) = \Delta_{2,1}(\lambda_n) = 0$，因此 $\Delta_{3,1}(\lambda_n) \neq 0$，所以 $\gamma_n = \Delta_{3,1}(\lambda_n)\,\dot{\Delta}_{1,1}(\lambda_n) \neq 0$。如果还满足$\beta_{n,2} = 0$，那么 $C_2(1, \lambda_n) = 0$。因此，

$$\Delta_{3,1}(\lambda_n) = C_1(1, \lambda_n)C_2'(1, \lambda_n), \quad \dot{\Delta}_{1,1}(\lambda_n) = \dot{C}_3(1, \lambda_n)C_2'(1, \lambda_n).$$

因此，在这种情况下，$\Delta_{3,1}(\lambda_n)\,\dot{\Delta}_{1,1}(\lambda_n) = C_1(1,\lambda_n)\,\dot{\Delta}_{2,2}(\lambda_n)$，也就是说，$\gamma_n$的定义 (2.9) 和 (2.10) 彼此等价。

可以类似地证明 $\beta_{n,1} \neq 0$ 以及 $\beta_{n,2} \neq 0$，若 $n \notin K$。 □

回忆一下，在我们的假设下，特征值 $\{\lambda_{n,k}\}$ 是 Weyl-Yurko 亚纯矩阵函数的简单极点。考虑洛朗级数

$$M(\lambda) = \frac{M_{\langle -1\rangle}(\lambda_{n,k})}{\lambda - \lambda_{n,k}} + M_{\langle 0\rangle}(\lambda_{n,k}) + M_{\langle 1\rangle}(\lambda_{n,k})(\lambda - \lambda_{n,k}) + \dots,$$

并定义权矩阵

$$\mathcal{N}(\lambda_{n,k}) := (M_{\langle 0\rangle}(\lambda_{n,k}))^{-1} M_{\langle -1\rangle}(\lambda_{n,k}). \tag{3.1}$$

命题3.2（[26]）。假设 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$ 和 $\tilde{\mathcal{T}} = (\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1)$ 属于 W，且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$k = 1, 2$，均有 $\lambda_{n,k} = \tilde{\lambda}_{n,k}$，$\mathcal{N}(\lambda_{n,k}) = \tilde{\mathcal{N}}(\lambda_{n,k})$。那么在 $W_2^{-1}(0,1)$ 中以及在 $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$ 的意义下，$\tau_0 = \tilde{\tau}_0$。因此，谱数据 $\{\lambda_{n,k}, \mathcal{N}(\lambda_{n,k})\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}$ 唯一确定方程 (1.1) 的系数 τ_0 和 τ_1。

下面的引理建立了权矩阵 $\mathcal{N}(\lambda_{n,k})$ 与权数 $\beta_{n,k}$, γ_n 之间的关系。

引理3.3。以下关系成立：

$$n \notin K: \quad \mathcal{N}(\lambda_{n,1}) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{n,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}(\lambda_{n,2}) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{n,2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$n \in K: \quad \mathcal{N}(\lambda_n) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{n,1} & 0 & 0 \\ \gamma_n & \beta_{n,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

证明。将关系式 (3.1) 写成逐元素形式，可得

$$\mathcal{N}(\lambda_{n,k}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_{2,1,\langle -1\rangle} & 0 & 0 \\ M_{3,1,\langle -1\rangle} - M_{3,2,\langle 0\rangle} M_{2,1,\langle -1\rangle} & M_{3,2,\langle -1\rangle} & 0 \end{bmatrix} (\lambda_{n,k}).$$

根据定义 (2.8)，$M_{k+1,\,k\langle -1\rangle}(\lambda_{n,k}) = -\beta_{n,k}$, $k = 1,2$。采用与引理 3.1 的证明类似的方法可得

$$M_{3,1,\langle -1\rangle}(\lambda_{n,k}) - M_{3,2,\langle 0\rangle}(\lambda_{n,k}) M_{2,1,\langle -1\rangle}(\lambda_{n,k}) = -\begin{cases} \gamma_n, & n \in K, \\ 0, & n \notin K. \end{cases}$$

至此，证明完毕。 □

命题3.2与引理3.3共同推出了定理2.2，该定理说明如何根据谱数据 $\mathfrak{S} = (\{\lambda_{n,k}\}, \{\beta_{n,k}\}, \{\gamma_n\})$ 唯一恢复$\mathcal{T}$。

接下来讨论谱数据的渐近性质。

引理3.4. 特征值$\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2}$ 和权数$\{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2}$ 满足渐近关系式(2.12)。

证明. 除了(1.1)之外，考虑方程

$$y''' + 2\tau_1^0 y' = \lambda y, \quad x \in (0,1),$$

其中 $\tau_1^0 = \int \tau_1(x)\ dx$，相应的谱数据为 $\{\lambda_{n,k}^0, \beta_{n,k}^0\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2}$ 由边界条件 (1.2) 和 (1.3) 生成。$\{\lambda_{n,k}^0, \beta_{n,k}^0\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2}$ 的渐近性质可通过标准方法求得（例如参见 [32, 第二章]）：

$$\lambda_{n,k}^0 = (-1)^{k+1}(\rho_{n,k}^0)^3, \quad \rho_{n,k}^0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(n + \frac{1}{6} - \frac{\tau_1^0}{2\pi^2 n} + O\big(n^{-2}\big)\right),$$
$$\beta_{n,k}^0 = 3\lambda_{n,k}^0\left(1 + O\big(n^{-2}\big)\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1,2.$$

应用 [30] 中的定理1.2和6.4，并考虑关系式 $\int_0^1 (\tau_1 - \tau_1^0)(x)\ dx = 0$，可得

$$\lambda_{n,k} = (-1)^{k+1}\rho_{n,k}^3, \quad \rho_{n,k} - \rho_{n,k}^0 = \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \beta_{n,k} - \beta_{n,k}^0 = n^2\varkappa_{n1},$$
$$\{\varkappa_n\}, \{\varkappa_{n1}\} \in l_2, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 1,2.$$

由此得出该引理的结论。 □

将满足以下边界条件的方程 (1.1) 的所谓魏尔解记为 $\Phi_k(x,\lambda)$、$k = 1$、2、3：

$$\Phi_k^{[j-1]}(0,\lambda) = \delta_{k,j}, \quad j = \overline{1,k}, \quad \Phi_k^{[3-j]}(1,\lambda) = 0, \quad j = \overline{k+1,3}.$$

容易证明

$$\Phi_k(x,\lambda) = C_k(x,\lambda) + \sum_{j=k+1}^{3} M_{j,k}(\lambda)C_j(x,\lambda), \quad k = 1,2,3. \tag{3.2}$$

因此，解 $\Phi_1(x,\lambda)$ 和 $\Phi_2(x,\lambda)$ 分别在 λ 中为亚纯函数，其极点为 $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^{\infty}$。解 $\Phi_3(x,\lambda) \equiv C_3(x,\lambda)$ 在 λ中为整函数。使用 (3.2)、(2.7)、(2.8) 和 (2.9)，可以很容易地建立魏尔解与谱数据之间的以下联系。

引理 3.5. 以下关系成立：

$$\Phi_2'(1,\lambda_{n,1}) = 0, \quad \Phi_3(1,\lambda_{n,2}) = 0, \quad n \notin K,$$
$$\beta_{n,1} = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1}} \Phi_1'(0,\lambda_{n,1}), \quad \beta_{n,2} = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,2}} \Phi_2^{[2]}(0,\lambda), \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\Phi_3(1,\lambda_n) = \Phi_3'(1,\lambda_n) = 0, \quad \gamma_n = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} \Phi_1^{[2]}(0,\lambda), \quad n \in K,\ \textit{if}\ \beta_{n,1} = 0.$$

魏尔解 $\Phi_k(x,\lambda)$ 的显著特点是其在 $|\lambda| \to \infty$ 时的行为。为了描述这种行为，令 $\lambda = \rho^3$，并将 ρ-平面划分为扇区 $\Gamma_s = \left\{\rho \in \mathbb{C}:\ \arg\rho \in \left(\frac{\pi(s-1)}{3}, \frac{\pi s}{3}\right)\right\}$, $s = 1, 6$。在每个固定扇区 Γ_s 中，将方程 $\omega^3 = 1$ 的根 $\{\omega_k\}_{k=1}^3$ 按如下方式编号

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) < \operatorname{Re}(\rho\omega_2) < \operatorname{Re}(\rho\omega_3), \quad \rho \in \Gamma_s. \tag{3.3}$$

显然，对于 $\rho \in \overline{\Gamma_s}$，不等式 (3.3) 变为非严格不等式。

引理 3.6. 在每个闭扇形 $\overline{\Gamma_s}$ 中，满足以下估计

$$|\Phi_k^{[j]}(x,\rho^3)| \le C|\rho|^{j-k+1}|\exp(\rho\omega_k x)|, \quad k=1,2,3,\ j=0,1,2,\ x\in[0,1],\ |\rho|\ge\rho^*.$$

引理 3.6 的证明基于将魏尔解按 Birkhoff 型解的基本解系展开。这类展开的估计见 [24, 引理 3] 和 [26, 命题 2]，适用于任意阶微分算子。值得指出的是，引理 3.6 中的估计与正则系数微分算子情形下的估计相似（见 [20]中的公式 (2.1.20)），证明过程也没有本质区别。因此，我们省略引理 3.6 的证明。

除 $F(x)$ 外，考虑矩阵函数

$$F^\star(x) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\sigma_0-\tau_1) & 0 & 1 \\ 0 & -(\sigma_0+\tau_1) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

它定义了拟导数

$$z^{[0]} := z, \quad z^{[k]} := (z^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f^\star_{k,j} z^{[j-1]}, \quad k=1,2,3, \tag{3.5}$$

定义域

$$\mathcal{D}_{F^\star} := \{z\colon z^{[k]}\in AC[0,1],\ k=0,1,2\},$$

以及微分表达式 $\ell^\star(z) = -z^{[3]}$。类似于 $C_k(x,\lambda)$ 和 $\Phi_k(x,\lambda)$，我们定义方程 $\ell^\star(z) = \lambda z$ 的解 $C_k^\star(x,\lambda)$ 和 $\Phi_k^\star(x,\lambda)$，$k=1$，2，3，它们满足初始条件

$$C_k^{\star[j-1]}(0,\lambda) = \delta_{k,j}, \quad k,j=1,2,3,$$

以及边界条件

$$\Phi_k^{\star[j-1]}(0,\lambda) = \delta_{k,j}, \quad j=\overline{1,k}, \quad \Phi_k^{\star[3-j]}(1,\lambda)=0, \quad j=\overline{k+1,3},$$

分别，其中使用拟导数 (3.5)。以下关系与 (3.2) 类似，成立：

$$\Phi_k^\star(x,\lambda) = C_k^\star(x,\lambda) + \sum_{j=k+1}^{3} M^\star_{j,k}(\lambda) C_j^\star(x,\lambda), \quad k=1,2,3,$$

其中 $M^\star_{j,\,k}(\lambda)$ 是 Weyl-Yurko 矩阵 $M^\star(\lambda)$ 的分量，与 $M(\lambda)$ 类似。

$M(\lambda)$ 与 $M^\star(\lambda)$ 之间的关系已在 [26] 的第 2 节中建立。特别地，对于三阶情形，[26] 的引理 2 推出以下命题。

命题 3.7. $M_{2,\,1}(\lambda) \equiv M^\star_{3,\,2}(\lambda)$, $M_{3,\,2}(\lambda) \equiv M^\star_{2,\,1}(\lambda)$, and $M^\star_{3,\,1}(\lambda) - M^\star_{2,\,1}M_{2,\,1}(\lambda) + M_{3,\,1}(\lambda) \equiv 0$。

推论 3.8. 函数 $M^\star_{3,\,2}(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_{n,\,1}$ 处有简单极点，使得 $\beta_{n,\,1}\ne 0$，而函数 $M^\star_{2,\,1}(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_{n,\,2}$ 处有简单极点，使得 $\beta_{n,\,2}\ne 0$。此外，

$$\beta_{n,1} = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1}} M^\star_{3,2}(\lambda), \quad \beta_{n,2} = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,2}} M^\star_{2,1}(\lambda),$$

$$\textit{if } \beta_{n,1}=0\colon \quad \gamma_n = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M_{3,1}(\lambda) = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}(M^\star_{3,1}(\lambda) - M^\star_{2,1}M_{2,1}(\lambda)),$$

$$\textit{if } \beta_{n,2}=0\colon \quad \gamma_n = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}(M_{3,1}(\lambda) - M^\star_{2,1}(\lambda)M_{2,1}(\lambda)) = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M^\star_{3,1}(\lambda).$$

因此，函数 $\Phi_1^\star(x,\lambda)$ 和 $\Phi_2^\star(x,\lambda)$ 在 λ 上分别为亚纯函数，其简单极点分别为 $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^\infty$；而 $\Phi_3^\star(x,\lambda)$ 在 λ 上为整函数。

4 主方程

本节给出逆问题 2.1 的主方程。一般形式下带有分布系数的高阶微分算子的主方程已在 [26] 中推导。这里，我们引入必要的记号，并将 [26] 的结果应用于我们的情形。

考虑具有系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$ 以及谱数据 $\mathfrak{S}$ 的方程 (1.1)。~任取满足以下条件的系数 $\tilde{\mathcal{T}} = (\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1)$:

1. $\int_0^1 \tau_1(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{\tau}_1(x)\,dx.$
2. $\tilde{\mathcal{T}} \in W.$
3. $\{\tilde{\lambda}_{n,1}\} \cap \{\tilde{\lambda}_{n,2}\} = \varnothing$, that is, $\tilde{K} = \varnothing.$
4. $\tilde{\lambda}_{n,k} \neq \lambda_{n_0,k_0}$, $n, n_0 \in \mathbb{N}$, $k, k_0 = 1, 2.$

我们称 $\tilde{\mathcal{T}}$为模型问题。可以证明，对于任意满足定理 2.3 的条件 1 和 2 的值 $\int_0^1 \tau_1(x)\,dx$ 和$\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2}$，存在具有上述1性质的模型问题。事实上，为满足条件 1，可以取 $\tilde{\tau}_1 := \int \tau_1(x)\,dx$ 和$_0\tilde{\tau}_0 := 0$。如果条件 2–4 不满足，可以对谱数据作微小平移，使其满足这些条件。另一方面，条件 2–4 并非关键条件。如果其中某些条件不成立，主要结果仍然有效，但主方程的形式会略有不同。

~注意，系数为 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}$ 的问题具有不同的拟导数。回忆，与 $\mathcal{T}$ 相关的拟导数由 (2.1) 给出的关联~矩阵 $F(x)$ 的分量通过 (2.2) 定义。与 $\mathcal{T}$ 相关的拟导数则由以下关联矩阵类似地生成:

$$\tilde{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\tilde{\sigma}_0 + \tilde{\tau}_1) & 0 & 1 \\ 0 & (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_1) & 0 \end{bmatrix}, \qquad (\tilde{\tau}_0 = \tilde{\sigma}_0').$$

~类似于 $F^\star(x)$（见 (3.4)），定义矩阵函数 $F^\star(x)$、相应的拟导数等。对于 $y \in \mathcal{D}_{\tilde{F}}$ 和 $z \in \mathcal{D}_{\tilde{F}^\star}$，定义拉格朗日括号

$$\langle z, y\rangle := z^{[2]}y - z'y' + zy^{[2]},$$

其中 $z^{[2]} = z'' + (\tilde{\sigma}_0 + \tilde{\tau}_1)z$，$y^{[2]} = y'' - (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_1)y$。若 y 和 z 分别满足关系 $\tilde{\ell}(y) = \mu y^{\tilde{}}$ 和 $\ell^\star(z) = \lambda z$，则

$$\frac{d}{dx}\langle z, y\rangle = (\mu - \lambda)zy. \tag{4.1}$$

记

$$\tilde{D}_{k,j}(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle \tilde{\Phi}_k^\star(x,\lambda), \tilde{\Phi}_j(x,\mu)\rangle}{\mu - \lambda}, \quad k, j = 1, 2, 3, \tag{4.2}$$
$$\tilde{D}_{k,j,\langle 0\rangle}(x,\lambda,\mu_0) = (\tilde{D}_{k,j}(x,\lambda,\mu))_{\langle 0\rangle,\,\mu=\mu_0}.$$

˜ ˜使用（4.1）以及 $\Phi_k^\star$ 和 Φ_j 在 $x=0$处的初始条件，我们得到

$$\tilde{D}_{k,j}(x,\lambda,\mu)=\int_0^x \tilde{\Phi}_k^\star(t,\lambda)\tilde{\Phi}_j(t,\mu)\,dt,\quad (k,j)=(2,3),(3,2),(3,3), \tag{4.3}$$

$$\tilde{D}_{2,2}(x,\lambda,\mu)=\frac{1}{\lambda-\mu}+\int_0^x \tilde{\Phi}_2^\star(t,\lambda)\tilde{\Phi}_2(t,\mu)\,dt. \tag{4.4}$$

引入以下记号

$$\begin{gathered}
V:=\{(n,k,\varepsilon)\colon n\in\mathbb{N},\ k=1,2,\ \varepsilon=0,1\},\\
\lambda_{n,k,0}:=\lambda_{n,k},\quad \lambda_{n,k,1}:=\tilde{\lambda}_{n,k},\quad \beta_{n,k,0}:=\beta_{n,k},\quad \beta_{n,k,1}:=\tilde{\beta}_{n,k},\\
\varphi_{n,k,\varepsilon}(x):=\Phi_{k+1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon}),\quad \tilde{\varphi}_{n,k,\varepsilon}(x):=\tilde{\Phi}_{k+1}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon}),\quad (n,k,\varepsilon)\in V,\\
\tilde{G}_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)}(x):=\begin{cases}(\beta_{n,2,0}\tilde{D}_{2,k_0+1,\langle 0\rangle}-\gamma_n\tilde{D}_{3,k_0+1})(x,\lambda_{n,2,0},\lambda_{n_0,k_0,\varepsilon_0}), & \text{if } n\in K,\ k=2,\ \varepsilon=0,\\ (-1)^k\beta_{n,k,\varepsilon}\tilde{D}_{4-k,k_0+1}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon},\lambda_{n_0,k_0,\varepsilon_0}), & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{gathered} \tag{4.5}$$

˜注意，函数 $\Phi_2(x,\lambda)$ 和 $\Phi_2(x,\lambda)$ 分别具有极点 $\{\lambda_{n,2,0}\}$ 和 $\{\lambda_{n,2,1}\}$，而函数 $\Phi_3(x,\lambda)$ 和 $\Phi_3(x,\lambda)$ 是整函数，因此在 $\tilde{\varphi}_{n,k,\varepsilon}(x)$ 的定义中不需要 $\langle 0\rangle$ ；除 $n\in K, k=1,\varepsilon=0$ 外，在所有情况下， $\langle 0\rangle$ 都可以从 $\varphi_{n,k,\varepsilon}(x)$ 的定义中去掉。类似地，根据 (4.3) 和 (4.4),

$$\tilde{D}_{k,j}(x,\lambda,\mu)\ \textit{is analytic for}\ \begin{cases}\lambda\neq\lambda_{n,1,1},\ \mu\neq\lambda_{n,2,1},\ \lambda\neq\mu, & (k,j)=(2,2),\\ \lambda\neq\lambda_{n,1,1}, & (k,j)=(2,3),\\ \mu\neq\lambda_{n,2,1}, & (k,j)=(3,2),\\ \text{all }\lambda\text{ and }\mu, & (k,j)=(3,3).\end{cases}$$

˜因此，对于 (n,k,ε)、(n_0,k_0,ε_0)，函数 $G_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)}(x)$ 定义正确；而 $\in V$仅在 $n\in K$、$(n,k,\varepsilon)=(n,2,0)$、$(n_0,k_0,\varepsilon_0)=(n,1,0)$ 时是必要的。

以下命题已在 [26]中使用围道积分法证明。

命题 4.1（ [26]）。对于（n_0,k_0,ε_0） $\in V$, $x\in[0,1]$，以下关系成立:

$$\varphi_{n_0,k_0,\varepsilon_0}(x)=\tilde{\varphi}_{n_0,k_0,\varepsilon_0}(x)+\sum_{(n,k,\varepsilon)\in V}(-1)^\varepsilon\varphi_{n,k,\varepsilon}(x)\tilde{G}_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)}(x). \tag{4.6}$$

关系式 (4.6) 可视为关于 $\varphi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$ 的无限线性方程组，其中（n,k,ε） $\in V$。元素 $\tilde{\varphi}_{n_0,\ k_0,\ \varepsilon_0}(x)$ 和 $G_{(n,k,\varepsilon),\ (n_0,k_0,\varepsilon_0)}(x)$ 通过使用模型问题 $\mathcal{T}$ 以及两个问题的谱数据 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{S}$ 构造，而元素 $\varphi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$ 与所求系数 $\mathcal{T}$有关。因此，方程组 (4.6) 可用于求解逆问题 2.1。然而，将 (4.6) 用作反问题的主方程并不方便，因为 (4.6) 中的级数仅以“带括号”的方式收敛:

$$\sum_{(n,k,\varepsilon)\in V}=\sum_{(n,k)}\left(\sum_{\varepsilon=0,1}(\dots)\right).$$

因此，在 [26], 中，方程组 (4.6) 已被转化为巴拿赫空间 m 中的一个有界无穷序列线性方程。下面给出这一变换。

~定义数值 $\{\xi_n\}$，用于刻画谱数据 $\mathfrak{S}$ 与 $\mathfrak{S}$之间的“差异”：

$$\xi_n := \sum_{k=1,2} (n^{-2}|\lambda_{n,k} - \tilde{\lambda}_{n,k}| + n^{-3}|\beta_{n,k} - \tilde{\beta}_{n,k}|), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

由渐近性质 (2.12) 可得 $\{n\xi_n\} \in l_2$。根据 [26], 的引理 7，以下估计成立：

$$|\varphi_{n,k,\varepsilon}(x)| \le Cw_{n,k}(x), \quad |\varphi_{n,k,0}(x) - \varphi_{n,k,1}(x)| \le Cw_{n,k}(x)\xi_n, \tag{4.8}$$

其中

$$w_{n,k}(x) := n^{-k}\exp(-xl\cot(k\pi/n)),$$

且常数 C 与 x、n、k 和 ε 无关。

引入以下记号

$$\begin{bmatrix}\psi_{n,k,0}(x)\\ \psi_{n,k,1}(x)\end{bmatrix} := w_{n,k}^{-1}(x)\begin{bmatrix}\xi_n^{-1} & -\xi_n^{-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{n,k,0}(x)\\ \varphi_{n,k,1}(x)\end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{R}_{(n_0,k_0,0),(n,k,0)}(x) & \tilde{R}_{(n_0,k_0,0),(n,k,1)}(x)\\ \tilde{R}_{(n_0,k_0,1),(n,k,0)}(x) & \tilde{R}_{(n_0,k_0,1),(n,k,1)}(x)\end{bmatrix} :=$$
$$\frac{w_{n,k}(x)}{w_{n_0,k_0}(x)}\begin{bmatrix}\xi_{n_0}^{-1} & -\xi_{n_0}^{-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{G}_{(n,k,0),(n_0,k_0,0)}(x) & \tilde{G}_{(n,k,1),(n_0,k_0,0)}(x)\\ \tilde{G}_{(n,k,0),(n_0,k_0,1)}(x) & \tilde{G}_{(n,k,1),(n_0,k_0,1)}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_n & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

~并定义 $\psi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$，其定义与 $\psi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$ 类似。

为简洁起见，令 $\psi_v(x) := \psi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$，$\tilde{\psi}_v(x) := \tilde{\psi}_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$，$R_{v_0,\ v}(x) := R_{(n_0,k_0,\varepsilon_0),\ (n,\ k,\ \varepsilon)}(x)$，$v = (n, k, \varepsilon)$，$v_0 = (n_0, k_0, \varepsilon_0)$，$v$，$v_0 \in V$。于是，关系式 (4.6) 可改写如下：

$$\psi_{v_0}(x) = \tilde{\psi}_{v_0}(x) + \sum_{v\in V}\tilde{R}_{v_0,v}(x)\psi_v(x), \quad v_0 \in V \tag{4.11}$$

在 [26], 中已得到以下估计：

$$|\psi_v(x)|, |\tilde{\psi}_v(x)| \le C, \quad |\tilde{R}_{v_0,v}(x)| \le \frac{C\xi_n}{|n-n_0|+1}, \quad v, v_0 \in V, \tag{4.12}$$

由 (4.12) 可知，(4.11) 中的级数关于 $x \in [0,1]$ 绝对且一致收敛。

考虑有界无穷序列 $\alpha = [\alpha_v]_{v\in V}$ 构成的巴拿赫空间 m，其范数为~$\|\alpha\|_m = \sup_{v\in V}|\alpha_v|$。显然，对于每个固定的 $x \in [0,1]$，$\psi(x)$ $\psi(x) \in m$。定义线性算子~$R(x) = [R_{v_0,v}(x)]_{v_0,\ v\in V}$，它作用于元素 $\alpha = [\alpha_v]_{v\in V} \in m$，规则如下：

$$[\tilde{R}(x)\alpha]_{v_0} = \sum_{v\in V}\tilde{R}_{v_0,v}(x)\alpha_v, \quad v_0 \in V. \tag{4.13}$$

本节的主要结果表述如下。

~命题 4.2（ [26]）。对于每个固定的 $x \in [0,1]$，线性算子 $R(x)$ 在 m 中是紧算子，并且可以用有限秩算子逼近。此外，以下关系成立

$$(I - \tilde{R}(x))\psi(x) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in [0,1], \tag{4.14}$$

其中，I 是 m 中的单位算子。

关系式 (4.14) 称为逆问题 2.1 的主方程。它在下一节定理 2.3、2.4 和 2.5 的证明中起着重要作用。

5 定理 2.3 和定理 2.4 的证明

本节证明定理 2.3，该定理给出了反问题可解性的充要条件。然后，作为推论，我们得到定理 2.4，讨论局部可解性和稳定性。

设 $\mathfrak{S} = (\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2},\ \{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2},\ \{\gamma_n\}_{n\in K})$ 是方程 (1.1) 在系数为 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$ 时相应边值问题的谱数据。定理 2.3 中条件 1 和 2（渐近性质以及谱数据的结构性质）的必要性由引理 3.1 和引理 3.4 给出。主方程 (4.14) 中算子 $(I - R(x))$ 的可逆性已在 [26] 中得到证明。当微分表达式系数已知时，逆算子 $(I - \tilde{R}(x))^{-1}$ 已被显式求出（见 [26] 中的定理 1）。因此，定理 2.3 的必要性部分已得到证明。故本节着重证明充分性。

设 $\mathfrak{S}$ 为满足定理 2.3 中条件 1–3 的任意一组数。我们需要证明存在某些系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$，使得数列 $\mathfrak{S}$ 是其谱数据。下面概述证明过程。

1. 构造主方程 (4.14) 的解 $\psi(x)$，并研究其性质。

2. 使用 $\psi(x)$ 的各分量，通过重构公式 (5.4) 和 (5.5) 求出函数 τ_0 和 τ_1。

3. 我们证明 $\tau_0 \in W_2^{-1}(0, 1)$ 和 $\tau_1 \in L_2(0, 1)$（引理 5.1）。

4. 我们证明，最初给定的数 $\mathfrak{S}$ 是方程 (1.1) 在所构造的系数 τ_0 和 τ_1 下的谱数据（引理 5.2）。为此，使用逼近方法。

   (a) 我们通过 (5.9) 和 (5.10) 定义“截断”谱数据 $\mathfrak{S}^N$，并证明相应主方程唯一可解，该方程可化为有限线性方程组（引理 5.3）。(b) 我们仿照 τ_1 和 τ_0 分别构造函数 τ_1^N 和 τ_0^N，并通过公式 (5.19) 构造函数 $\Phi_k^N(x, \lambda)$、$k = 1$、2、3。随后，我们证明 $\Phi_k^N(x, \lambda)$ 是魏尔解，且 $\mathfrak{S}^N$ 是 $\mathcal{T}^N = (\tau_0^N, \tau_1^N)$ 的谱数据（引理 5.5 和引理 5.6）。考虑“截断”数据 $\mathfrak{S}^N$ 的优点在于，$\Phi_k^N(x, \lambda)$ 的级数是有限的，因此可以很容易地将这些函数代入系数为 $\mathcal{T}^N$ 的方程 (1.1)。(c) 我们证明 $\tau_1^N \to \tau_1$ 和 $\tau_0^N \to \tau_0$ 属于与 $N \to \infty$ 相同的相应空间（引理 5.7 ）。(d) 我们证明谱数据关于 τ_1 和 τ_0 的稳定性（引理 5.8）。(e) 由此可知 $\mathfrak{S}^N \to \mathfrak{S}$，引理 5.2 的证明至此完成。

˜现在开始详细证明。根据条件 3，算子 $(I - R(x))$ 存在有界逆算子。因此，对于每个固定的 $x \in [0, 1]$，主方程 (4.14) 在 m 中有唯一解：

$$\psi(x) = (I - \tilde{R}(x))^{-1}\tilde{\psi}(x), \quad \psi(x) = [\psi_v(x)]_{v\in V}.$$

˜ ˜注意，关于分量 $\psi_v(x)$ 和 $R_{v_0,\ v}(x)$ 的估计 (4.12) 与具有正则势 $q \in L_2$ 的斯图姆-刘维尔算子的相应估计类似（参见例如 [14, 第 1.6 节.1]）。

因此，重复 [14], 中引理 1.6.7 的证明过程，我们很容易证明，主方程解的分量$\psi_v(x)$具有以下性质:

$$\psi_v(x) \in C^1[0,1], \quad |\psi^{(\nu)}(x)| \le Cn^\nu, \qquad |\psi_v(x) - \psi_v(x)| \le C\chi_n, \qquad |\psi'_v(x) - \psi'_v(x)| \le C, \tag{5.1}$$

其中 $v = (n,k,\varepsilon) \in V$, $x \in [0,1]$, $\nu = 0, 1$, 且

$$\chi_n := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(|n-k|+1)^2} \right)^{1/2}, \quad \{\chi_n\} \in l_2.$$

使用 th 这些分量 $\psi_v(x)$，通过求逆公式 (4.9 构造函数 $\varphi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$):

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n,k,0}(x) \\ \varphi_{n,k,1}(x) \end{bmatrix} = w_{n,k}(x) \begin{bmatrix} \xi_n & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{n,k,0}(x) \\ \psi_{n,k,1}(x). \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

由 (5.1) 可得

$$\left.\begin{gathered} \varphi_{n,k,\varepsilon}(x) \in C^1[0,1], \quad |\varphi^{(\nu)}_{n,k,\varepsilon}(x)| \le Cw_{n,k}(x)n^\nu, \quad |\varphi^{(\nu)}_{n,k,0}(x) - \varphi^{(\nu)}_{n,k,1}(x)| \le Cw_{n,k}(x)n^\nu\xi_n, \\ |\varphi^{(\nu)}_{n,k,\varepsilon}(x) - \tilde{\varphi}^{(\nu)}_{n,k,\varepsilon}(x)| \le Cw_{n,k}(x)\chi_n^{1-\nu}, \\ |\varphi^{(\nu)}_{n,k,0}(x) - \varphi^{(\nu)}_{n,k,1}(x) - \tilde{\varphi}^{(\nu)}_{n,k,0}(x) + \tilde{\varphi}^{(\nu)}_{n,k,1}(x)| \le Cw_{n,k}(x)\xi_n\chi_n^{1-\nu}, \end{gathered}\right\} \tag{5.3}$$

对于 $(n,k,\varepsilon) \in V$, $\nu = 0, 1$, $x \in [0,1]$.

使用函数 $\varphi_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$，通过重构公式求出 τ_1 和 τ_0 （见第 4.3] 节 [26, ）：

$$\tau_1 := \tilde{\tau}_1 - \frac{3}{2} \sum_V (-1)^\varepsilon (\varphi'_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} + \varphi_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}'_{n,k,\varepsilon}), \tag{5.4}$$

$$\tau_0 := \tilde{\tau}_0 - \hat{\tau}'_1 - 3\frac{d}{dx} \sum_V (-1)^\varepsilon \varphi'_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} - 2\hat{\tau}_1 \sum_V (-1)^\varepsilon \varphi_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}, \tag{5.5}$$

其中 $\hat{}\tau_1 = \tau_1 - \tilde{\tau}_1$,

$$\eta_{n,k,\varepsilon}(x) := \begin{cases} (\beta_{n,2,0}\tilde{\Phi}^\star_2 - \gamma_n\tilde{\Phi}^\star_3)(x, \lambda_{n,2,0}), & n \in K,\ k = 2,\ \varepsilon = 0, \\ (-1)^k\beta_{n,k,\varepsilon}\tilde{\Phi}^\star_{4-k}(x, \lambda_{n,k,\varepsilon}), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.6}$$

函数 $\tilde{\eta}_{n,\ k,\ \varepsilon}(x)$ 由模型问题和谱数据 $\mathfrak{S}$ 定义，因此可以像 (4.8) 那样进行估计:

$$\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \in C^1[0,1], \quad |\tilde{\eta}^{(\nu)}_{n,k,\varepsilon}(x)| \le Cw^{-1}_{n,k}(x)n^\nu, \quad |\tilde{\eta}^{(\nu)}_{n,k,0}(x) - \tilde{\eta}^{(\nu)}_{n,k,1}(x)| \le Cw^{-1}_{n,k}(x)n^\nu\xi_n, \tag{5.7}$$

对于 $(n,k,\varepsilon) \in V$, $\nu = 0, 1$, $x \in [0,1]$。

引理 5.1. 级数 (5.4) 在 $L_2(0, 1)$ 中收敛，公式 (5.5) 定义了 $W_2^{-1}(0, 1)$ 的函数。

证明。将（5.4）中的级数表示为两个级数之和

$$\mathscr{S}_1 := \sum_V (-1)^\varepsilon ((\varphi'_{n,k,\varepsilon} - \tilde{\varphi}'_{n,k,\varepsilon})\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} + (\varphi_{n,k,\varepsilon} - \tilde{\varphi}_{n,k,\varepsilon})\tilde{\eta}'_{n,k,\varepsilon}),$$

$$\mathscr{S}_2 := \sum_V (-1)^\varepsilon (\tilde{\varphi}'_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} + \tilde{\varphi}_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}'_{n,k,\varepsilon}).$$

显然,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_1 = \sum_{(n,k)} \big(&(\varphi'_{n,k,0} - \varphi'_{n,k,1} - \tilde{\varphi}'_{n,k,0} + \tilde{\varphi}'_{n,k,1})\tilde{\eta}_{n,k,0} + (\varphi'_{n,k,1} - \tilde{\varphi}'_{n,k,1})(\tilde{\eta}_{n,k,0} - \tilde{\eta}_{n,k,1}) \\ &+ (\varphi_{n,k,0} - \varphi_{n,k,1} - \tilde{\varphi}_{n,k,0} + \tilde{\varphi}_{n,k,1})\tilde{\eta}'_{n,k,0} + (\varphi_{n,k,1} - \tilde{\varphi}_{n,k,1})(\tilde{\eta}'_{n,k,0} - \tilde{\eta}'_{n,k,1}) \big).\end{aligned}$$

使用估计式 (5.3) 和 (5.7)，我们得到

$$|\mathscr{S}_1| \le C \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n + C \sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n \chi_n. \tag{5.8}$$

回忆一下，$\{n\xi_n\} \in l_2$ 且 $\{\chi_n\} \in l_2$。因此，(5.8) 右端的两个级数均收敛，所以级数 $\mathscr{S}_1$ 关于 $x \in [0,1]$绝对且一致收敛。对于级数 $\mathscr{S}_2$，由 [26]中的引理 8 可知，它在 L_2(0, 1) 中收敛。因此，(5.4) 中关于 $\tau_1(x)$ 的级数在 L_2(0, 1) 中收敛。

因此 $\hat{}\tau'_1 \in W_2^{-1}$(0, 1)。我们来研究 (5.5) 中其他项的收敛性。级数$\sum_V \varphi'_{n,\,k,\,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,\,k,\,\varepsilon}$ 可形式地表示为 $(\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)$，其中

$$\mathscr{T}_1 := \sum_V (\varphi'_{n,k,\varepsilon} - \tilde{\varphi}'_{n,k,\varepsilon})\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}, \quad \mathscr{T}_2 := \sum_V \tilde{\varphi}'_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}.$$

级数 $\mathscr{T}_1$与 $\mathscr{S}_1$类似，关于 $x \in [0,1]$绝对且一致收敛。根据 [26], 中的引理 8，级数 $\mathscr{T}_2$ 在 L_2(0, 1) 中收敛，其正则化常数为 $a_{n,\,k,\,\varepsilon}$:

$$\sum_V (\tilde{\varphi}'_{n,k,\varepsilon}(x)\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}(x) - a_{n,k,\varepsilon}) \in L_2(0,1).$$

无论如何，由于式 (5.5) 中的求导，常数 $a_{n,k,\varepsilon}$ 并不重要。级数 $\sum(-1)^\varepsilon \varphi_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}$ 在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛。因此，由式 (5.5) 定义的函数 $\tau_0 V$属于 W_2^{-1}(0, 1)。

□

现在考虑方程 (1.1)，其系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$ 由式 (5.4)–(5.5) 根据最初给定的数据 $\mathfrak{S}$定义。为了完成定理 2.3 的证明，还需证明以下引理。

引理 5.2。 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$ 的谱数据。

对于充分大的 $N \in \mathbb{N}$ ($N \ge \max K$)，定义数据

$$\mathfrak{S}^N := (\{\lambda^N_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2}, \{\beta^N_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=1,2}, \{\gamma_n\}_{n\in K}), \tag{5.9}$$

$$\lambda^N_{n,k} := \begin{cases} \lambda_{n,k}, & n \le N, \\ \tilde{\lambda}_{n,k}, & n > N, \end{cases} \qquad \beta^N_{n,k} := \begin{cases} \beta_{n,k}, & n \le N, \\ \tilde{\beta}_{n,k}, & n > N. \end{cases} \tag{5.10}$$

使用相同的模型问题 $\tilde{\mathcal{T}}$ 和数据 $\mathfrak{S}^N$（而非 $\mathfrak{S}$），重复第 4 节中的论证。这样，我们得到的不是无限系统 (4.11)，而是有限线性方程组

$$\psi^N_{v_0}(x) = \tilde{\psi}_{v_0}(x) + \sum_{v\in V^N} \tilde{R}_{v_0,v}(x)\psi^N_v(x), \quad v_0 \in V^N, \quad x \in [0,1], \tag{5.11}$$

其中

$$V^N := \{(n,k,\varepsilon) \in V \colon n \le N\}.$$

引理 5.3. 对于每个充分大的 N，方程组 (5.11) 对每个 $x \in [0,1]$ 都有唯一解。

证明。考虑一个辅助算子

$$\tilde{R}^N(x) = [\tilde{R}^N_{v_0,v}(x)]_{v_0,v\in V} \colon m \to m,$$
$$\tilde{R}^N_{(n_0,k_0,\varepsilon_0),(n,k,\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0, & n > N, \\ \tilde{R}_{(n_0,k_0,\varepsilon_0),(n,k,\varepsilon)}(x), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.12}$$

显然，算子 $\tilde{R}^N(x)$ 是有限秩的，并且算子 $(I - \tilde{R}^N(x))$ 存在有界逆算子，当且仅当方程组 (5.11) 的矩阵非奇异。

使用 (4.12) 和 (5.12)，我们得到估计

$$\|\tilde{R}(x) - \tilde{R}^N(x)\|_{m\to m} \le \sup_{n_0\ge 1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{C\xi_n}{|n-n_0|+1} \le \frac{C}{N}\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} (n\xi_n)^2}.$$

回忆 $\{n\xi_n\} \in l_2$。因此

$$\|\tilde{R}(x) - \tilde{R}^N(x)\|_{m\to m} = o\left(N^{-1}\right), \quad N \to \infty.$$

由于算子 $(I-\tilde{R}(x))$ 存在有界逆算子，因此当 N 充分大时，算子 $(I-\tilde{R}^N(x))$ 也存在有界逆算子。由此，方程 (5.11) 有唯一解。 □

引理 5.3 的证明直接推出以下推论。

推论 5.4. 有限系统 (5.11) 的解 $\{\psi^N_v(x)\}_{v\in V^N}$ 可作为方程的解 $\psi^N(x) \in m$ 中指标为 $v \in V^N$ 的分量求得

$$(I - \tilde{R}^N(x))\psi^N(x) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in [0,1],$$

其中，算子 $\tilde{R}^N(x)$ 由 (5.12) 定义。此外，以下估计成立：

$$\|R(x) - \tilde{R}^N(x)\|_{m\to m} \le \varepsilon_N, \quad \varepsilon_N = o\left(N^{-1}\right), \quad N \to \infty.$$

使用解 $\psi^N(x)$ 的分量，定义函数

$$\begin{bmatrix} \varphi^N_{n,k,0}(x) \\ \varphi^N_{n,k,1}(x) \end{bmatrix} := w_{n,k}(x) \begin{bmatrix} \xi_n & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^N_{n,k,0}(x) \\ \psi^N_{n,k,1}(x), \end{bmatrix} \quad n \le N, \tag{5.13}$$

$$\tau^N_1 := \tilde{\tau}_1 - \frac{3}{2}\sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon}((\varphi^N_{n,k,\varepsilon})'\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} + \varphi^N_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}'_{n,k,\varepsilon}), \quad \hat{\tau}^N_1 := \tau^N_1 - \tilde{\tau}_1, \tag{5.14}$$

$$\tau^N_0 := \tilde{\tau}_0 - (\hat{\tau}^N_1)' - 3\frac{d}{dx}\sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon}(\varphi^N_{n,k,\varepsilon})'\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} - 2\hat{\tau}^N_1 \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon}\varphi^N_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}, \tag{5.15}$$

分别类似于公式 (5.2)、(5.4) 和 (5.5)。考虑以下方程、关联矩阵、相应的拟导数以及定义域：

$$y''' + (\tau^N_1 y)' + (\tau^N_1)'y + \tau^N_0 y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{5.16}$$
$$F^N(x) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\sigma^N_0 + \tau^N_1) & 0 & 1 \\ 0 & (\sigma^N_0 - \tau^N_1) & 0 \end{bmatrix},$$

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} := (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j}^N y^{[j-1]}, \quad k = 1,2,3, \tag{5.17}$$
$$\mathcal{D}_{F^N} := \{y\colon y^{[k]} \in AC[0,1],\ k = 0,1,2\},$$

其中

$$\sigma_0^N := \tilde{\sigma}_0 - \hat{\tau}_1^N - 3\sum_{V^N}(-1)^{\varepsilon}(\varphi_{n,k,\varepsilon}^N)'\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} - 2\int_0^x \hat{\tau}_1^N \sum_{V^N}(-1)^{\varepsilon}\varphi_{n,k,\varepsilon}^N \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\, dx. \tag{5.18}$$

此外，定义函数

$$\Phi_{k_0}^N(x,\lambda) := \tilde{\Phi}_{k_0}(x,\lambda) + \sum_{(n,k,\varepsilon)\in V^N}(-1)^{\varepsilon}\varphi_{n,k,\varepsilon}^N(x)\tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0}(x,\lambda), \quad k_0 = 1,2,3, \tag{5.19}$$

其中

$$\tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0}(x,\lambda) = \begin{cases} (\beta_{n,2,0}\tilde{D}_{2,k_0} - \gamma_n \tilde{D}_{3,k_0})(x,\lambda_{n,2,0},\lambda), & \text{if } n\in K,\ k=2,\ \varepsilon = 0, \\ (-1)^k \beta_{n,k,\varepsilon}\tilde{D}_{4-k,k_0}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon},\lambda), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.20}$$

显然，

$$\Phi_{k+1,\langle 0\rangle}^N(x,\lambda_{n,k,\varepsilon}) = \varphi_{n,k,\varepsilon}^N(x), \quad (n,k,\varepsilon)\in V^N. \tag{5.21}$$

在接下来的两个引理中，我们证明 $\Phi_k^N(x,\lambda)$、$k=1$、2、3 是方程 (5.16) 的魏尔解。

引理 5.5. 对于充分大的 N, $k=1$、2、3 和 $\lambda \notin \{\lambda_{n,j}\}\cup\{\tilde{\lambda}_{n,j}\}$，有 $\Phi_k^N(.,\lambda) \in \mathcal{D}_{F^N}$ and $(\Phi_k^N)^{[3]} = \lambda\Phi_k^N$，其中拟导数由 (5.17) 定义。

证明。回忆 $\tilde{\Phi}_k\ .\ \lambda \in \mathcal{D}_{\tilde{F}}$ $\tilde{\Phi}_k\ .\ \lambda \in W_1^2[0,1]$ $k = 1\ 2\ 3$ $\tilde{\psi}_v \in (\ ,\ )$, $W_1^2[0,1]$ $\tilde{R}_{v_0\ v} \in W_1^3[0,1]$ $v_0\ v \in V^N$ $\tilde{\psi}_v^N$ 5 11 so $(\ ,\ )$, , , . 因此，and ,for , . 于是，有限系统 $(\ .\ )$ 的解的分量属于 $W_1^2[0,1]$。因此，$\varphi_{n\ ,k,\varepsilon}^N, \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \in W_1^2[0,1]$ and $\tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0} \in W_1^3[0,1]$ for $(n,k,\varepsilon) \in V^N$, $k_0 = 1, 2, 3$. 使用 (5.14)、(5.15) 和 (5.19)，我们得出 $\hat{}$ $\tau_1^N \in W_1^1[0,1]$, $\hat{}\tau_0^N := \tau_0^N - \tilde{\tau}_0 \in L_1(0,1)$，且 $\Phi_k^N(.,\lambda) \in W_1^2[0,1]$。

由 (4.1)、(4.2)、(5.6) 和 (5.20) 可得

$$\tilde{P}'_{(n,k,\varepsilon),k_0}(x) = \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}(x)\tilde{\Phi}_{k_0}(x).$$

在下面的证明中，为简洁起见，我们省略上标 N 以及参数 (x) 和 (x,λ)。因此，对 (5.19) 求导可得

$$\begin{aligned} \Phi'_{k_0} &= \tilde{\Phi}'_{k_0} + \sum_{V^N}(-1)^{\varepsilon}\left(\varphi'_{n,k,\varepsilon}\tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0} + \varphi_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\tilde{\Phi}_{k_0}\right) \\ \Phi''_{k_0} &= \tilde{\Phi}''_{k_0} + \sum_{V^N}(-1)^{\varepsilon}\left(\varphi''_{n,k,\varepsilon}\tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0} + 2\varphi'_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\tilde{\Phi}_{k_0} + \varphi_{n,k,\varepsilon}(\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\tilde{\Phi}_{k_0})'\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

使用由 (5.17) 给出的拟导数，对于Φ_{k_0} 和 $\varphi_{n,\ k,\ \varepsilon}$，关系式 (5.18)、(5.19)、(5.22) 以及 $\tilde{\Phi}_{k_0}^{[2]} = \tilde{\Phi}''_{k_0} - (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_1)\ \tilde{\Phi}_{k_0}$，我们得到

$$\Phi_{k_0}^{[2]} = \tilde{\Phi}_{k_0}^{[2]} + \sum_{V^N}(-1)^{\varepsilon}\left(\varphi_{n,k,\varepsilon}^{[2]}\tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0} - \varphi'_{n,k,\varepsilon}\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\tilde{\Phi}_{k_0} + \varphi_{n,k,\varepsilon}(\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\tilde{\Phi}_{k_0})'\right)$$

$$- 2\int_0^x \hat{\tau}_1 \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} \varphi_{n,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\, dx\, \tilde{\Phi}_{k_0}. \tag{5.23}$$

为简便起见，假设 $K = \varnothing$。相反的情形只需作少量技术性修改。于是 (5.21) 推出 $\Phi_{k_0+1}(x, \lambda_{n_0,\ k_0,\ \varepsilon_0}) = \varphi_{n_0,\ k_0,\ \varepsilon_0}(x)$，因此我们得到

$$\varphi^{[2]}_{n_0,k_0,\varepsilon_0} = \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} \varphi^{[2]}_{n,k,\varepsilon} \tilde{G}_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)} + r_{n_0,k_0,\varepsilon_0}, \quad (n_0, k_0, \varepsilon_0) \in V^N, \tag{5.24}$$

其中 $\tilde{G}_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)}$ 由 (4.5) 定义，并且

$$\begin{aligned} r_{n_0,k_0,\varepsilon_0} := \tilde{\varphi}^{[2]}_{n_0,k_0,\varepsilon_0} &- \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} \Big(\varphi'_{n,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \tilde{\varphi}_{n_0,k_0,\varepsilon_0} - \varphi_{n,k,\varepsilon} (\tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \tilde{\varphi}_{n_0,k_0,\varepsilon_0})' \Big) \\ &- 2\int_0^x \hat{\tau}_1 \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} \varphi_{n,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}\, dx\, \tilde{\varphi}_{n_0,k_0,\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

由于 $\tilde{\varphi}_{n_0,k_0,\varepsilon_0} \in \mathcal{D}_F$，因此 $\tilde{\varphi}^{[2]}_{n_0,k_0,\varepsilon_0} \in AC[0,1]$，从而 $r_{n_0,k_0,\varepsilon_0} \in AC[0,1]$。因此，关系式 (5.24) 可视为与 (5.11) 类似的有限线性方程组，其矩阵可逆且属于 $W_1^3[0,1]$ 类，右端属于 $AC[0,1]$类。因此，$\varphi^{[2]}_{n,k,\varepsilon} \in AC[0,1]$。由 (5.23) 可知，这意味着 $\Phi^{[2]}_{k_0} \in AC[0,1]$。因此 $\Phi^N_{k_0} \in \mathcal{D}_{F^N}$, $k_0 = 1, 2, 3$。

因此，我们可以对 (5.23) 求导并求得三阶拟导数。使用关系式 (5.14) 和 (5.15) 进行化简后，得到

$$\begin{aligned} \Phi^{[3]}_{k_0} = \tilde{\Phi}^{[3]}_{k_0} &+ \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} \Big(\varphi^{[3]}_{n,k,\varepsilon} \tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0} \\ &+ \varphi_{n,k,\varepsilon} \big(\tilde{\eta}''_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}_{k_0} - \tilde{\eta}'_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}'_{k_0} + \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}''_{k_0} + 2\tilde{\tau}_1 \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}_{k_0} \big) \Big), \end{aligned} \tag{5.25}$$

其中，拟导数 $\Phi^{[3]}_{k_0}$ 和 $\varphi^{[3]}_{n,\ k,\ \varepsilon}$ 由关联矩阵 $F^N(x)$ 给出，而 $\tilde{\Phi}^{[3]}_{k_0}$ 由 $F(x)$ 给出。注意

$$\tilde{\eta}''_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}_{k_0} - \tilde{\eta}'_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}'_{k_0} + \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}''_{k_0} + 2\tilde{\tau}_1 \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} \tilde{\Phi}_{k_0} = \langle \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}, \tilde{\Phi}_{k_0} \rangle = (\lambda - \lambda_{n,k,\varepsilon}) \tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0}. \tag{5.26}$$

关系式 (5.19)、(5.25) 和 (5.26) 合起来可得

$$\Phi^{[3]}_{k_0} - \lambda \Phi_{k_0} = \tilde{\Phi}^{[3]}_{k_0} - \lambda \tilde{\Phi}_{k_0} + \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} (\varphi^{[3]}_{n,k,\varepsilon} - \lambda_{n,k,\varepsilon}) \tilde{P}_{(n,k,\varepsilon),k_0}. \tag{5.27}$$

考虑关系式 $\tilde{\Phi}^{[3]}_{k_0} = \lambda \tilde{\Phi}_{k_0}$ 并令 $\lambda = \lambda_{n_0,\ k_0,\ \varepsilon_0}$，得到线性代数方程组

$$(\varphi^{[3]}_{n_0,k_0,\varepsilon_0} - \lambda_{n_0,k_0,\varepsilon_0} \varphi_{n_0,k_0,\varepsilon_0}) = \sum_{V^N} (-1)^{\varepsilon} (\varphi^{[3]}_{n,k,\varepsilon} - \lambda_{n,k,\varepsilon} \varphi_{n,k,\varepsilon}) \tilde{G}_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)}, \quad (n_0, k_0, \varepsilon_0) \in V^N.$$

由于该方程组是齐次的，且其矩阵非奇异，因此我们得出 $\varphi^{[3]}_{n\ k,\ ,\ \varepsilon} = \lambda_{n,\ k,\ \varepsilon} \varphi_{n,\ k,\ \varepsilon}$，$(n, k, \varepsilon) \in V^N$。因此，由 (5.27) 可知 $\Phi^{[3]}_{k_0} = \lambda \Phi_{k_0}$。 □

引理 5.6. 对于充分大的 N，函数 $\Phi^N_k(x, \lambda)$、$k = 1$、2、3 满足边界条件

$$(\Phi^N_k)^{(j-1)}(0, \lambda) = \delta_{k,j}, \quad j = \overline{1, k}, \qquad (\Phi^N_k)^{(3-j)}(1, \lambda) = 0, \quad j = \overline{k+1, 3}. \tag{5.28}$$

因此，$\Phi^N_k(x, \lambda)$、$k = 1$、2、3 是方程 (5.16) 的魏尔解。此外，$\mathfrak{S}^N$ 是 $\mathcal{T}^N$ 的谱数据。

证明。我们重点证明在 $x = 1$处的边界条件 (5.28)，这在技术上更为复杂。在 $x = 0$ 处的边界条件 (5.28) 可通过直接计算验证。为简洁起见，我们省略上标 N。为简单起见，考虑以下情况：$\beta_{n,\,1} = \beta_{n,\,2} = 0$ 对所有 $n \in K$ 均成立。其他情况则需要进行技术性修改。

Step 1。我们来证明

$$\Phi_2^{(\nu)}(1, \lambda_{n,1,0}) = 0, \ \ n = \overline{1, N} \setminus K, \qquad \Phi_3^{(\nu)}(1, \lambda_n) = 0, \ \ n \in K, \quad \nu = 0, 1. \tag{5.29}$$

使用关系式 (5.19)、(5.21) 和 $\Phi_2(1, \lambda) = 0$，可得

$$\begin{aligned}\Phi_2(1,\lambda) = &- \sum_{(n,1,\varepsilon)\in V^N} (-1)^{\varepsilon} \beta_{n,1,\varepsilon} \tilde{D}_{3,2}(1, \lambda_{n,1,\varepsilon}, \lambda) \Phi_2(1, \lambda_{n,1,\varepsilon}) \\ &+ \sum_{(n,2,\varepsilon)\in V^N} (-1)^{\varepsilon} \beta_{n,2,\varepsilon} \tilde{D}_{2,2}(1, \lambda_{n,2,\varepsilon}, \lambda) \Phi_3(1, \lambda_{n,2,\varepsilon}) - \sum_{n\in K} \gamma_n \tilde{D}_{3,2}(1, \lambda_n, \lambda) \Phi_3(1, \lambda_n),\end{aligned} \tag{5.30}$$

其中 $\lambda_n = \lambda_{n,\,1,\,0} = \lambda_{n,\,2,\,0}$ 对于 $n \in K$。使用 (4.2)、(4.1) 以及关系式 $\Phi_2(1, \lambda) = 0$，$\Phi_2^{\star}(1, \lambda) = 0$，可得

$$\tilde{D}_{2,2}(1, \lambda_{n,2,\varepsilon}, \lambda) = -\frac{\tilde{\Phi}^{\star[1]}(1, \lambda_{n,2,\varepsilon}) \tilde{\Phi}_2'(1, \lambda)}{\lambda - \lambda_{n,2,\varepsilon}}, \tag{5.31}$$

$$\tilde{D}_{3,2}(1, \lambda_{n,1,\varepsilon}, \lambda) = -\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star[1]}(1, \lambda_{n,1,\varepsilon}) \tilde{\Phi}_2'(1, \lambda) - \tilde{\Phi}_3(1, \lambda_{n,1,\varepsilon}) \tilde{\Phi}_2^{[2]}(1, \lambda)}{\lambda - \lambda_{n,1,\varepsilon}}$$

注意到 $\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1, \lambda_{n,\,2,\,1}) = 0$，$\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_{n,\,1,\,1}) = 0$。此外，对于 $\lambda = \lambda_{n_0,\,1,\,1}$，有 $\tilde{\Phi}_2'(1, \lambda_{n_0,\,1,\,1}) = 0$，因此

$$\tilde{D}_{2,2}(1, \lambda_{n,2,\varepsilon}, \lambda_{n_0,1,1}) = 0, \quad \tilde{D}_{3,2}(1, \lambda_{n,1,1}, \lambda_{n_0,1,1}) = 0 \quad \text{if } n_0 \neq n. \tag{5.32}$$

可以证明

$$\beta_{n,1,1} \tilde{D}_{3,2}(1, \lambda_{n,1,1}, \lambda_{n,1,1}) = 1.$$

因此，(5.30) 意味着

$$\begin{aligned}\Phi_2(1, \lambda_{n_0,1,1}) = &- \sum_{n=1}^{N} \beta_{n,1,0} \frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_{n,1,0}) \tilde{\Phi}_2^{[2]}(1, \lambda_{n_0,1,1})}{\lambda_{n_0,1,1} - \lambda_{n,1,0}} \Phi_2(1, \lambda_{n,1,0}) \\ &+ \Phi_2(1, \lambda_{n_0,1,1}) - \sum_{n\in K} \gamma_n \frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_n) \tilde{\Phi}_2^{[2]}(1, \lambda_{n_0,1,1})}{\lambda_{n_0,1,1} - \lambda_n} \Phi_3(1, \lambda_n), \quad n_0 = \overline{1, N}.\end{aligned}$$

化简该关系式，我们得到

$$\sum_{n=1}^{N} \beta_{n,1,0} \frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_{n,1,0}) \Phi_2(1, \lambda_{n,1,0})}{\lambda_{n_0,1,1} - \lambda_{n,1,1}} + \sum_{n\in K} \gamma_n \frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_n) \Phi_3(1, \lambda_n)}{\lambda_{n_0,1,1} - \lambda_n} = 0, \quad n_0 = \overline{1, N}.$$

因此，以下辅助函数

$$\mathcal{G}_1(\lambda) := \sum_{n=1}^{N} \beta_{n,1,0} \frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_{n,1,0}) \Phi_2(1, \lambda_{n_0,1,1})}{\lambda - \lambda_{n,1,1}} + \sum_{n\in K} \gamma_n \frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1, \lambda_n) \Phi_3(1, \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} \tag{5.33}$$

的零点为 $\{\lambda_{n_0,1,1}\}_{n_0=1}^{N}$。同时， $\mathcal{G}_1(\lambda)$ 的极点为 $\{\lambda_{n_0,1,0}\}_{n_0=1}^{N}$ （包括 $\lambda_n=\lambda_{n,1,0}$对于 $n\in K$）。因此，以下函数在 λ 上是整函数:

$$\mathcal{G}_1^{\diamond}(\lambda):=\mathcal{G}_1(\lambda)\prod_{n=1}^{N}\frac{(\lambda-\lambda_{n,1,0})}{(\lambda-\lambda_{n,1,1})}.$$

显然，当 $|\lambda|\to\infty$ 时， $|\mathcal{G}_1(\lambda)|\to 0$ ，因此当 $|\lambda|\to\infty$ 时， $|\mathcal{G}_1^{\diamond}(\lambda)|\to 0$。由刘维尔定理， $\mathcal{G}_1^{\diamond}(\lambda)\equiv 0$，因此 $\mathcal{G}_1(\lambda)\equiv 0$。于是

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1,1}}\mathcal{G}_1(\lambda)=\beta_{n,1,0}\tilde{\Phi}_3^{\star}(1,\lambda_{n,1,0})\Phi_2(1,\lambda_{n,1,0})=0\quad\Rightarrow\quad\Phi_2(1,\lambda_{n,1,0})=0,\quad n=\overline{1,N}\setminus K,$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\mathcal{G}_1(\lambda)=\gamma_n\tilde{\Phi}_3^{\star}(1,\lambda_n)\Phi_3(1,\lambda_n)=0\quad\Rightarrow\quad\Phi_3(1,\lambda_n)=0,\quad n\in K.$$

类似地，考虑导数 $\Phi_2'(1,\lambda_{n_0,\ 1,\ 1})$，可得关于 $\nu=1$.STEP 2 的关系式 (5.29)。下面证明

$$\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1})=0,\quad n\le N,\qquad\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0})=0,\quad n=\overline{1,N}\setminus K.\tag{5.34}$$

将 $\lambda=\lambda_{n_0,\ 1,\ 0}$ 代入 (5.30)，得到关系式

$$\begin{aligned}\Phi_2(1,\lambda_{n_0,1,0})=&-\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,1}\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star[1]}(1,\lambda_{n,1,1})\tilde{\Phi}_2'(1,\lambda_{n_0,1,0})}{\lambda_{n_0,1,0}-\lambda_{n,1,1}}\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1})\\&-\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,2,0}\frac{\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\tilde{\Phi}_2'(1,\lambda_{n_0,1,0})}{\lambda_{n_0,1,0}-\lambda_{n,2,0}}\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0})=0.\end{aligned}$$

因此，对于 $n_0=\overline{1,N}\setminus K$，有

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,1}\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star[1]}(1,\lambda_{n,1,1})\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1})}{\lambda_{n_0,1,0}-\lambda_{n,1,1}}+\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,2,0}\frac{\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0})}{\lambda_{n_0,1,0}-\lambda_{n,2,0}}=0.\tag{5.35}$$

利用 (5.19)、(5.21) 和 (5.29)，得到

$$\begin{aligned}\Phi_3(1,\lambda)=\tilde{\Phi}_3(1,\lambda)&+\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,1}\tilde{D}_{3,3}(1,\lambda_{n,1,1},\lambda)\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1})\\&+\sum_{(n,2,\varepsilon)\in V^N}(-1)^{\varepsilon}\beta_{n,2,\varepsilon}\tilde{D}_{2,3}(1,\lambda_{n,2,\varepsilon},\lambda)\Phi_3(1,\lambda_{n,2,\varepsilon}).\end{aligned}\tag{5.36}$$

~ ~令 $\lambda=\lambda_{n_0,2,1}$。使用关系式 (4.1)、(4.2)， $\Phi_3(1,\lambda_{n_0,2,1})=0$， $\Phi_3^{\star}(1,\lambda_{n,1,1})=0$，$\tilde{\Phi}_2(1,\lambda)\equiv 0$，以及 $\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n_0,2,1})=0$，可得

$$\tilde{D}_{3,3}(1,\lambda_{n,1,1},\lambda_{n_0,1,0})=-\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1,\lambda_{n,1,1})\tilde{\Phi}_3'(1,\lambda_{n_0,2,1})}{\lambda_{n_0,2,1}-\lambda_{n,1,1}},$$

$$\tilde{D}_{2,3}(1,\lambda_{n,2,0},\lambda_{n_0,2,1})=-\frac{\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\tilde{\Phi}_3'(1,\lambda_{n_0,2,1})}{\lambda_{n_0,2,1}-\lambda_{n,2,0}},$$

$$\beta_{n,2,1}\tilde{D}_{2,3}(1,\lambda_{n,2,1},\lambda_{n_0,2,1})=\begin{cases}-1, & n=n_0,\\ 0, & n\ne n_0.\end{cases}$$

将这些关系代入 (5.36)，得

$$\Phi_3(1,\lambda_{n_0,2,1}) = -\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,1}\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star}(1,\lambda_{n,1,1})\tilde{\Phi}_3'(1,\lambda_{n_0,2,1})}{\lambda_{n_0,2,1}-\lambda_{n,1,1}}\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1}) - \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,2,0}\frac{\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\tilde{\Phi}_3'(1,\lambda_{n_0,2,1})}{\lambda_{n_0,2,1}-\lambda_{n,2,0}}\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0}) + \Phi_3(1,\lambda_{n_0,2,1}).$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,1}\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star[1]}(1,\lambda_{n,1,1})\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1})}{\lambda_{n_0,2,1}-\lambda_{n,1,1}} + \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,2,0}\frac{\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0})}{\lambda_{n_0,2,1}-\lambda_{n,2,0}} = 0, \quad n_0 = \overline{1,N}.$$

将后一个关系与 (5.35) 比较，我们得出以下辅助函数的零点为 $\{\lambda_{n_0,1,0}\}_{n_0=1,\ N\setminus K}$ 和 $\{\lambda_{n_0,2,1}\}_{n_0=1}^{N}$:

$$\mathcal{G}_2(\lambda) := \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,1}\frac{\tilde{\Phi}_3^{\star[1]}(1,\lambda_{n,1,1})\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1})}{\lambda-\lambda_{n,1,1}} + \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,2,0}\frac{\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0})}{\lambda-\lambda_{n,2,0}}.$$

与此同时， $\mathcal{G}_2(\lambda)$ 的极点为 $\{\lambda_{n,1,1}\}_{n=1}^{N}$ 和 $\{\lambda_{n,2,0}\}_{n=1,\ N\setminus K}$ （回忆一下，$\beta_{n,\ 2,\ 0}=0$对于 $n\in K$）。仿照由 (5.33) 定义的 $\mathcal{G}_1(\lambda)$，对函数 $\mathcal{G}_2(\lambda)$ 进行类似分析，可得$\mathcal{G}_2(\lambda)\equiv 0$。因此

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1,1}}\mathcal{G}_2(\lambda) = \beta_{n,1,1}\tilde{\Phi}_3^{\star[1]}(1,\lambda_{n,1,1})\Phi_2(1,\lambda_{n,1,1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2(1,\lambda_{n,1,1}) = 0, \quad n\le N,$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,2,0}}\mathcal{G}_2(\lambda) = \beta_{n,2,0}\tilde{\Phi}_2^{\star[1]}(1,\lambda_{n,2,0})\Phi_3(1,\lambda_{n,2,0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_3(1,\lambda_{n,2,0}) = 0, \quad n = \overline{1,N}\setminus K.$$

Step 3。下面证明 $\Phi_2(1,\lambda)\equiv 0$、$\Phi_1(1,\lambda)\equiv 0$，以及 $\Phi_1'(1,\lambda)\equiv 0$。

回忆假设 $\beta_{n,\ 1,\ 0}=\beta_{n,\ 2,\ 0}=0$ 对于 $n\in K$。使用 (5.31)，得到 $D_{2,\ 2}(1,\lambda_{n,\ 2,\ 1},\lambda)=0$ 对于 $\lambda\neq\lambda_{n,\ 2,\ 1}$。因此，使用 (5.30)，并考虑到 (5.29)、(5.34)，可得$\Phi_2(1,\lambda)\equiv 0$。使用 (5.19)、(5.21)、边界条件 $\tilde{\Phi}_1^{(\nu)}(1,\lambda)=0$, $\nu=0,1$，以及关系

$$\tilde{D}_{2,1}^{(\nu)}(1,\mu,\lambda)\equiv 0,\ \nu=0,1, \quad \tilde{D}_{3,1}'(1,\mu,\lambda)\equiv 0,$$

经过简单验证可得

$$\Phi_1(1,\lambda) = -\sum_{(n,1,\varepsilon)\in V^N}(-1)^{\varepsilon}\beta_{n,1,\varepsilon}\tilde{D}_{3,1}(1,\lambda_{n,1,\varepsilon},\lambda)\Phi_2(1,\lambda_{n,1,\varepsilon}) - \sum_{n\in K}\gamma_n\tilde{D}_{3,1}(1,\lambda_n,\lambda)\Phi_3(1,\lambda_n),$$

$$\Phi_1'(1,\lambda) = -\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,1,0}\tilde{D}_{3,1}(1,\lambda_{n,1,0},\lambda)\Phi_2'(1,\lambda_{n,1,0}) - \sum_{n\in K}\gamma_n\tilde{D}_{3,1}(1,\lambda_n,\lambda)\Phi_3'(1,\lambda_n).$$

考虑到 (5.29) 和 (5.34)，我们得出 $\Phi_1(1,\lambda)\equiv\Phi_1'(1,\lambda)\equiv 0$。

Step 4。综述步骤 1–3 的结果，可得 $\Phi_k^N(x,\lambda)$, $k=1,2,3$ 满足边界条件 (5.28)。结合引理 5.5，这意味着 $\Phi_k^N(x,\lambda)$,$k=1,2,3$ 是方程 (5.16) 的魏尔解。接下来只需证明 $\mathfrak{S}^N$ 是相应的谱数据。为此，只需证明引理 3.5 中关于 $\Phi_k^N(x,\lambda)$ 和 $\mathfrak{S}^N$ 的关系。与之前一样，我们省略上标 N。

我们来证明，对于 $n \in \mathbb{N} \setminus K$，有 $\Phi_2(1, \lambda_{n,\,1}^N) = 0$。对于 $n \le N$，此关系已在步骤 1 中证明。对于 $n > N$，由 (5.30) 使用 (5.29)、(5.34) 和 (5.32)，可得 $\Phi_2(1, \lambda_{n,\,1}^N) = \Phi_2(1, \lambda_{n,\,1,\,1}) = 0$。

由此可得 自 (5.19)、(5.21) 以及 Φ_2 和 Φ_3 在 $x = 0$ 处的边界条件 t

$$\Phi_1'(0,\lambda) = \tilde{\Phi}_1'(0,\lambda) - \sum_{(n,1,\varepsilon)\in V^N} (-1)^{\varepsilon} \beta_{n,1,\varepsilon} \tilde{D}_{3,1}(0, \lambda_{n,1,\varepsilon}, \lambda).$$

使用 (4.2) 和 (4.1)，我们可得

$$\tilde{D}_{3,1}(0, \lambda_{n,1,\varepsilon}, \lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_{n,1,\varepsilon}}.$$

因此

$$\Phi_1'(0,\lambda) = \tilde{\Phi}'(0,\lambda) - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\beta_{n,1}}{\lambda - \lambda_{n,1}} - \frac{\tilde{\beta}_{n,1}}{\lambda - \tilde{\lambda}_{n,1}} \right),$$
$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1}} \Phi_1'(0,\lambda) = -\beta_{n,1},\ n \le N, \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=\tilde{\lambda}_{n,1}} \Phi_1'(0,\lambda) = -\tilde{\beta}_{n,1},\ n > N.$$

引理 3.5 的其他关系也可类似推导，由此完成证明。 □

引理 5.6 推出引理 5.2 关于“截断”谱数据 $\mathfrak{S}^N$ 的断言。要推广到一般情形 $\mathfrak{S}$，我们使用逼近方法。

引理 5.7。设 τ_1、τ_0、τ_1^N 和 τ_0^N 分别由公式 (5.4)、(5.5)、(5.14) 和 (5.15) 定义。那么

$$\lim_{N\to\infty} \|\tau_1^N - \tau_1\|_{L_2(0,1)} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \|\tau_0^N - \tau_0\|_{W_2^{-1}(0,1)} = 0.$$

证明。回忆一下，$\psi(x)$ 和 $\psi^N(x)$ 分别是主方程 $(I - \tilde{R}(x))\psi(x) = \tilde{\psi}(x)$ 和 $(I - \tilde{R}^N(x))\psi^N(x) = \tilde{\psi}(x)$ 的解，算子 $\tilde{R}(x)$ 和 $\tilde{R}^N(x)$ 满足估计 $\|\tilde{R}(x) - \tilde{R}^N(x)\|_{m\to m} \le \varepsilon_N$，其中 $\varepsilon_N = o(N^{-1})$、$N \to \infty$（见推论 5.4）。因此，对于充分大的 N，有 $\|\psi(x) - \psi^N(x)\|_m \le C\varepsilon_N$。函数 $\varphi_{n、k、\varepsilon}$ 以及 $\varphi^N_{n、k、\varepsilon}$、$n \le N$ 分别由 $\psi(x)$ 和 $\psi^N(x)$ 通过相应的公式 (5.2) 和 (5.13) 得到。因此，对于 $(n,k,\varepsilon) \in V^N$, $\nu = 0, 1$，可以得到以下估计

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_{n,k,\varepsilon}^{(\nu)}(x) - (\varphi_{n,k,\varepsilon}^N)^{(\nu)}(x)| &\le C n^{\nu} w_{n,k}(x) \varepsilon_N, \\ |\varphi_{n,k,0}^{(\nu)}(x) - \varphi_{n,k,1}^{(\nu)}(x) - (\varphi_{n,k,0}^N)^{(\nu)}(x) + (\varphi_{n,k,1}^N)^{(\nu)}(x)| &\le C n^{\nu} w_{n,k}(x) \xi_n \varepsilon_N, \end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

其中常数 C 不依赖于 N、x、n、k 和 ε。

级数 $(\tau_1 - \tau_1^N)$ 可表示为和式 $-\frac{3}{2}$ $(\mathscr{T}_1^N + \mathscr{T}_2^N)$，其中

$$\mathscr{T}_1^N := \sum_{(n,k,\varepsilon)\in V^N} (-1)^{\varepsilon} \big((\varphi_{n,k,\varepsilon}' - (\varphi_{n,k,\varepsilon}^N)') \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} + (\varphi_{n,k,\varepsilon} - \varphi_{n,k,\varepsilon}^N) \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}' \big),$$
$$\mathscr{T}_2^N := \sum_{(n,k,\varepsilon)\in V\setminus V^N} (-1)^{\varepsilon} (\varphi_{n,k,\varepsilon}' \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon} + \varphi_{n,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{n,k,\varepsilon}').$$

使用估计 (5.7) 和 (5.37)，我们得到

$$|\mathscr{T}_1^N| \le C\varepsilon_N \sum_{n=1}^{N} (n\xi_n) \le CN\varepsilon_N.$$

因此，$\mathscr{T}_1^N \to 0$ 当 $N \to \infty$ 时，关于 $x \in [0,1]$一致地成立。此外，由引理 5.1 可知 $\lim_{N\to\infty} \|\mathscr{T}_2^N\|_{L_2(0,1)} = 0$。这就完成了对 $(\tau_1 - \tau_1^N)$ 的证明。对 $(\tau_0 - \tau_0^N)$ 的证明类似。

□

引理 5.8. 设 τ_1和 τ_1^N, $N \geq 1$ 是 $L_2(0,1)$ 上的任意函数，且当 $N \to \infty$ 时， $\tau_1^N \to \tau_1$ 属于 $L_2(0,1)$；再设 τ_0 和 τ_0^N, $N \geq 1$ 是 $W_2^{-1}(0,1)$ 上的任意函数，且当 $N \to \infty$ 时，$\tau_0^N \to \tau_0$ 属于 $W_2^{-1}(0,1)$。那么，对于固定的指标 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{1,2\}$，以下断言成立：

1. 设 $\lambda_{n,k}$ 是问题 $\mathcal{L}_k$ 的一个重数为 $m_{n,k}$ 的特征值，该问题的系数为 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$。设 $d_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \lambda_{n,k}| \leq \delta\}$ 是一个半径充分小的圆盘 $\delta > 0$，其中不包含 $\mathcal{L}_k$ 的其他特征值，除了 $\lambda_{n,k}$。那么，对于每个充分大的 N，具有系数 $\mathcal{T}^N = (\tau_0^N, \tau_1^N)$ 的类似问题 $\mathcal{L}_k^N$ 在圆盘 d_δ 内恰有 $m_{n,k}$ 个特征值（按重数计）。

2. 设 $\lambda_{n,k}$ 是 $\mathcal{L}_k$的一个单特征值。相应的问题 $\mathcal{L}_k^N$ 具有单特征值 $\lambda_{n,k}^N$，使得当 $N \to \infty$时，$\lambda_{n,k}^N \to \lambda_{n,k}$。此外，当 $N \to \infty$时，$\beta_{n,k}^N \to \beta_{n,k}$。3. 假设问题 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 有一个公共单特征值 $\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2} = \lambda_n$，问题 $\mathcal{L}_1^N$和 $\mathcal{L}_2^N$对每个充分大的 N都有一个公共单特征值 $\lambda_{n,1}^N = \lambda_{n,2}^N = \lambda_n^N$，当 $N \to \infty$时，$\beta_{n,1} = \beta_{n,1}^N = 0$，且对所有充分大的 N，$\lambda_n^N \to \lambda_n$（或对所有充分大的 N，$\beta_{n,2} = \beta_{n,2}^N = 0$）。那么当 $N \to \infty$时，$\gamma_n^N \to \gamma_n$。

引理 5.8 的证明采用了众所周知的方法，用以获得谱数据对边值问题系数的连续依赖性（参见 [35]）。近年来，这种方法已在各类微分算子中得到积极发展（例如参见 [6,36]）。因此，这里简要概述引理 5.8 的证明。

引理 5.8 的证明。回忆一下，特征值 $\{\lambda_{n,k}\}$ 与特征函数 $\Delta_{k,k}(\lambda)$ 的零点重合，这些特征函数由函数 $C_k^{[j]}(1,\lambda)$ 的若干行列式构成（见公式 (2.4) 和 (2.5)）。根据解 $C_k(x,\lambda)$、$k = 1$、2、3 的定义可知，它们的拟导数向量满足初值问题 (2.3)，其中 $\sigma_0(x)$ 是 $\tau_0(x)$ 的一个固定原函数，因此 σ_0 和 τ_1 属于 $L_2(0,1)$。显然，函数 $C_k^{[j]}(1,\lambda)$、$k = 1$、2、3、$j = 0$、1、2 关于系数 (σ_0, τ_1) 连续，并关于 λ 解析。因此，由 (2.4) 和 (2.5) 定义的函数 $\Delta_{j,k}(\lambda)$、$1 \leq k < j \leq 3$ 也具有同样的性质。

假设 $k \in \{1,2\}$ 是固定的。设 $\lambda_{n,k}$ 是 $\Delta_{k,k}(\lambda)$ 的一个重数为 $m_{n,k}$ 的零点，并设圆盘 d_δ 满足本引理的条件。显然，存在常数 $c_0 > 0$，使得在 d_δ 的边界上，$|\Delta_{k,k}(\lambda)| \geq c_0$。根据本引理的假设，当 $N \to \infty$ 时，$\tau_0^N \to \tau_0$ 属于 $W_2^{-1}(0,1)$。因此，由于 σ_0 是 τ_0 的一个固定原函数，可以选取函数 τ_0^N 的原函数 σ_0^N，使得当 $N \to \infty$ 时，$\sigma_0^N \to \sigma_0$ 属于 $L_2(0,1)$。由上述论证可知，当 $N \to \infty$ 时，$\Delta_{k,k}^N(\lambda) \to \Delta_{k,k}(\lambda)$ 一致地关于 $\lambda \in d_\delta$ 成立。因此

$$|\Delta_{k,k}^N(\lambda) - \Delta_{k,k}(\lambda)| < c_0, \quad \lambda \in d_\delta,$$

对于所有足够大的 N 值，由鲁歇定理可知，$\Delta_{k,k}^N(\lambda)$ 在 d_δ 中恰有 $m_{n,k}$ 个零点（按重数计）。这证明了该引理的第一个断言。

回忆一下，权数 $\beta_{n,k}$ 和 γ_n 分别由 (2.8) 和 (2.9)-(2.10) 定义，是由 $C_k^{[j]}(1,\lambda)$ 组成的某些亚纯函数的留数。这意味着引理的断言 2 和 3 成立。

□

引理 5.2 的证明。考虑由初始给定的数据 $\mathfrak{S}$ 通过公式 (5.4) 和 (5.5) 分别构造的函数 τ_1 和 τ_0。记相应问题 $\mathcal{L}_k$, $k = 1, 2$ 对方程 (1.1) 的特征值为 $\{\lambda^\bullet_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N}}$。我们要证明特征值 $\{\lambda^\bullet_{n,k}\}$ 与数据 $\mathfrak{S}$中的值 $\{\lambda_{n,k}\}$ 相同。为此，考虑由 (5.9) 定义的数据 $\mathfrak{S}^N$，以及由公式 (5.14) 和 (5.15) 分别构造的函数 τ_1^N和 τ_0^N。根据引理 5.7，当 $N \to \infty$时，$\tau_1^N \to \tau_1$属于 $L_2(0, 1)$，且 $\tau_0^N \to \tau_0$属于 $W_2^{-1}(0, 1)$。引理 5.6 表明，$\mathfrak{S}^N$是 $\mathcal{T}^N = (\tau_0^N, \tau_1^N)$ 的谱数据，特别地，$\{\lambda^N_{n,k}\}_{n=1}^\infty$ 是问题 $\mathcal{L}_k^N$ 对于 $k = 1, 2$ 的特征值。根据引理 5.8 的第一个断言，$\mathcal{L}_k^N$的特征值收敛于 $\mathcal{L}_k$的特征值，即，对于每个固定的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k = 1, 2$，当 $N \to \infty$时，$\lambda^N_{n,k} \to \lambda^\bullet_{n,k}$。与此同时，由 (5.10) 可知，当 $N \to \infty$时，$\lambda^N_{n,k} \to \lambda_{n,k}$。因此，$\lambda^\bullet_{n,k} = \lambda_{n,k}$。于是，问题 $\mathcal{L}_k$, $k = 1, 2$ 具有简单谱，因此 $\mathcal{T}$的谱数据 $\mathfrak{S}^\bullet$ 具有与 $\mathfrak{S}$类似的结构:

$$\mathfrak{S}^\bullet = \big(\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}, \{\beta^\bullet_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}, \{\gamma^\bullet_n\}_{n\in K}\big).$$

依次应用引理 5.8 的第二和第三个断言以及 (5.9) 和 (5.10)，我们得出 $\beta^\bullet_{n,k} = \beta_{n,k}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $k = 1,2$ 以及 $\gamma^\bullet_n = \gamma_n$ 对 $n \in K$成立。至此，证明完成。

□

引理 5.2 完成了定理 2.3 的证明。

˜定理 2.4 的证明。设 $\mathcal{T}$满足定理 2.4 的假设。则，根据必要性，定理 2.3 的条件 1 和 ˜ ˜ ˜ ˜2 对 $\mathcal{T}$的谱数据 $\mathfrak{S} = \{\lambda_{n,k}, \beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}$ 成立。因此，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，不等式 (2.13) 意味着定理 2.3 的条件 1 和 2 对 $\mathfrak{S} = \{\lambda_{n,k}, \beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}$成立。使用 ˜数据 $\mathfrak{S}$ 和模型问题 $\mathcal{T}$构造主方程 (4.14)。比较 (2.13) 和 (4.7)，我们得出

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(n\xi_n)^2} \le d(\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}) \le \varepsilon. \tag{5.38}$$

使用 (4.12) 和 (5.38)，我们得到如下估计

$$\|\tilde{R}(x)\|_{m\to m} \le \sup_{n_0\ge 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C\xi_n}{|n - n_0| + 1} \le C\varepsilon.$$

因此，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，对于所有 $x \in [0, 1]$，都有 $\|\tilde{R}(x)\|_{m\to m} \le \frac{1}{2}$。于是，˜算子 $(I - R(x))$ 存在有界逆算子。因此，数据 $\mathfrak{S}$ 满足定理 2.3 的条件 1–3。这意味着存在系数 $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$，使得 $\mathfrak{S}$ 是谱数据 ($K = \varnothing$)。

利用 (5.38) 并按照引理 5.1 的证明过程，可以很容易地证明估计 (2.14)。

□

6 自伴情形

本节旨在证明定理 2.5，该定理给出了逆问题可解性的充分条件。证明的核心是引理 6.1，它讨论了主方程 (4.14) 的唯一可解性。

我们先介绍一些预备知识。除了具有系数 $\mathcal{T}=(\tau_0,\tau_1)\in W$ 的方程 (1.1) 外，再考虑具有系数 $\mathcal{T}^\dagger=(-\overline{\tau_0},\overline{\tau_1})$ 的类似方程：

$$\ell^\dagger(y)=y'''+(\overline{\tau_1(x)}y)'+\overline{\tau_1(x)}y'-\overline{\tau_0(x)}y=\lambda y,\quad x\in(0,1).$$

相应的拟导数由关联矩阵导出

$$F^\dagger(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \overline{\sigma_0}-\overline{\tau_1} & 0 & 1\\ 0 & -(\overline{\sigma_0}+\overline{\tau_1}) & 0\end{bmatrix}.$$

显然，$F^\dagger(x)=F^\star(\overline{x})$，其中 $F^\star(x)$ 已在 (3.4) 中定义。因此，方程 $\ell^\dagger(y)=\lambda y$ 和 $\ell^\star(z)=\lambda z$ 的解 $y(x,\lambda)$ 与 $z(x,\lambda)$ 之间存在一一对应关系 $y(x,\lambda)=z(x,-\overline{\lambda})$。因此 $M^\dagger_{j,\,k}(\lambda)=M^\star_{j,\,k}(-\overline{\lambda})$，$1\le k<j\le 3$。使用推论 3.8，我们得到 $\mathcal{T}^\dagger$ 和 $\mathcal{T}$ 的谱数据之间的如下关系：

$$\lambda^\dagger_{n,1}=-\overline{\lambda_{n,2}},\quad \lambda^\dagger_{n,2}=-\overline{\lambda_{n,1}},\quad \beta^\dagger_{n,1}=-\overline{\beta_{n,2}},\quad \beta^\dagger_{n,2}=-\overline{\beta_{n,1}},\quad \gamma^\dagger_n=\overline{\gamma_n}. \tag{6.1}$$

现在假设 $\mathrm{i}\tau_0(x)$ 和 $\tau_1(x)$ 是实值函数。那么 $\mathcal{T}^\dagger=\mathcal{T}$，因此 (6.1) 推出

$$\lambda_{n,1}=-\overline{\lambda_{n,2}},\quad \beta_{n,1}=-\overline{\beta_{n,2}}.$$

与前文一样，我们假设每个 $k\in\{1,2\}$ 的特征值 $\{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^\infty$ 都是单重的。然而，特征值顺序发生了变化。由于我们假设 $\lambda_{n,\,1}=-\lambda_{n,\,2}$，那么 $\lambda_{n,\,1}=\lambda_{p,\,2}$ 并不一定意味着 $n=p$。因此，我们需要对 γ_n 的定义作一些修改。

令 $\lambda_n:=\lambda_{n,1}$, $\beta_n:=\beta_{n,1}$，并定义指标集

$$K^+:=\{n\in\mathbb{N}\colon \exists p=p(n)\ s.t.\ \lambda_n=-\overline{\lambda_p}\}.$$

若 $\beta_n=0$，则由公式 (2.9) 定义 γ_n。若 $n\in K^+$ 且 $\beta_n\ne 0$，则 $\lambda_{p(n),2}=\lambda_{n,1}$ 且 $\beta_{p(n),\,2}=-\overline{\beta_{p(n)}}=0$，因此我们由 (2.10) 定义 γ_n。由 (6.1) 可得，对于 $n\in K^+$，$\gamma_n=\overline{\gamma_{p(n)}}$。若 $n=p(n)$，则 λ_n 是纯虚数，$\beta_n=0$，γ_n 是实数；此外，还可以证明 $\gamma_n>0$。我们的主要目标是证明定理 2.5，因此下文仅讨论对所有 $n\in K^+$ 均有 $n=p(n)$ 的情形。显然，在这种情况下，$K=K^+$。

下面着手证明定理 2.5。任取满足定理 2.5 假设的数 $\mathfrak{S}^+=(\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty,\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus K},\{\gamma_n\}_{n\in K})$。记

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_{n,1}:=\lambda_n,\quad \lambda_{n,2}=-\overline{\lambda_n},\quad n\in\mathbb{N},\\ \beta_{n,1}:=\beta_n,\quad \beta_{n,2}:=-\overline{\beta_n},\quad n\in\mathbb{N}\setminus K,\\ \beta_{n,1}:=0,\quad \beta_{n,2}:=0,\quad N\in K.\end{array}\right\} \tag{6.2}$$

考虑数据 $\mathfrak{S}=(\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2},\ \{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\ k=1,\ 2},\ \{\gamma_n\}_{n\in K})$。选择一个模型问题 $\tilde{\mathcal{T}}=(\tilde\tau_0,\tilde\tau_1)$，使其满足第 4 节的条件以及附加条件：$\mathrm{i}\tilde\tau_0(x)$ 和 $\tilde\tau_1(x)$ 为实值。按照第 4 节的步骤，构造算子 $R(x)\colon\ m\to m$，并~元素 $\psi(x)\in m$，然后考虑主方程 (4.14)。为了证明定理 2.5，关于主方程唯一可解性的以下引理至关重要。

引理 6.1. 在定理 2.5 的条件下，对于每个固定的 $x\in[0,1]$，主方程 (4.14) 有唯一解。

˜证明. 令 $x \in [0,1]$ 固定。根据命题 4.2，算子 $R(x)$ 具有逼近性质。因此，依据弗雷德霍姆定理，只需证明齐次方程

$$(I - \tilde{R}(x))\zeta(x) = 0, \tag{6.3}$$

在 m 中有唯一解 $\zeta(x) = 0$。

设 $\zeta(x) = [\zeta_v(x)]_{v\in V} \in m$ 是方程 (6.3) 的一个解。那么

$$\zeta_{v_0}(x) = \sum_{v\in V} \tilde{R}_{v_0,v}(x)\zeta_v(x), \quad |\zeta_{v_0}(x)| \le C, \quad v_0 \in V.$$

仿照 (5.2)，定义

$$\begin{bmatrix} z_{n,k,0}(x) \\ z_{n,k,1}(x) \end{bmatrix} := w_{n,k}(x) \begin{bmatrix} \xi_n & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{n,k,0}(x) \\ \zeta_{n,k,1}(x) \end{bmatrix}.$$

因此，对于齐次方程 (6.3)，$\zeta_{n,k,\varepsilon}(x)$ 是 $\psi_{n,k,\varepsilon}(x)$ 的对应形式，而 $z_{n,k,\varepsilon}(x)$ 是 $\varphi_{n,k,\varepsilon}(x)$ 的对应形式。因此，我们有

$$z_{n_0,k_0,\varepsilon_0}(x) = \sum_{(n,k,\varepsilon)\in V} (-1)^{\varepsilon} z_{n,k,\varepsilon}(x)\tilde{G}_{(n,k,\varepsilon),(n_0,k_0,\varepsilon_0)}(x), \quad (n_0,k_0,\varepsilon_0) \in V, \tag{6.4}$$

$$|z_{n,k,\varepsilon}(x)| \le Cw_{n,k}(x), \quad |z_{n,k,0}(x) - z_{n,k,1}(x)| \le Cw_{n,k}(x)\xi_n, \quad (n,k,\varepsilon) \in V. \tag{6.5}$$

使用 (4.5)，并考虑到当 $k \in K$ 时 $\beta_{n,k,0} = 0$，我们可以用以下方程组代替 (6.4)：

$$\begin{aligned} z_{n_0,k_0,\varepsilon_0}(x) = &\sum_{(n,k,\varepsilon)\in V^-} (-1)^{\varepsilon+k}\beta_{n,k,\varepsilon}\tilde{D}_{4-k,k_0+1}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon},\lambda_{n_0,k_0,\varepsilon_0})z_{n,k,\varepsilon}(x) \\ &- \sum_{n\in K} \gamma_n \tilde{D}_{3,k_0+1}(x,\lambda_n,\lambda_{n_0,k_0,\varepsilon_0})z_n(x), \qquad (n_0,k_0,\varepsilon_0) \in V^-, \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} z_{n_0}(x) = &\sum_{(n,k,\varepsilon)\in V^-} (-1)^{\varepsilon+k}\beta_{n,k,\varepsilon}\tilde{D}_{4-k,3}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon},\lambda_{n_0})z_{n,k,\varepsilon}(x) \\ &- \sum_{n\in K} \gamma_n \tilde{D}_{3,3}(x,\lambda_n,\lambda_{n_0})z_n(x), \qquad n_0 \in K, \end{aligned} \tag{6.7}$$

其中

$$V^- := V \setminus \{(n,k,0)\colon n \in K,\, k = 1,2\}, \quad z_n(x) := z_{n,2,0}(x), \quad n \in K.$$

显然，若方程组 (6.6)–(6.7) 的解 $(\{z_{n,k,\varepsilon}(x)\}_{(n,k,\varepsilon)\in V^-}, \{z_n(x)\}_{n\in K})$ 为零，
t那么 (6.4) 的解 $\{z_{n,k,\varepsilon}(x)\}_{(n,k,\varepsilon)\in V}$ 也为零，$\zeta(x)$ 亦然。下面证明这一点。考虑函数

$$Z_{k_0}(x,\lambda) := \sum_{(n,k,\varepsilon)\in V^-} (-1)^{\varepsilon+k}\beta_{n,k,\varepsilon}\tilde{D}_{4-k,k_0}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon},\lambda)z_{n,k,\varepsilon}(x) - \sum_{n\in K} \gamma_n \tilde{D}_{3,k_0}(x,\lambda_n,\lambda)z_n(x) \tag{6.8}$$

对于 $k_0 = 1$、2、3。由 (6.6) 和 (6.7)，可得

$$Z_{k+1}(x,\lambda_{n,k,\varepsilon}) = z_{n,k,\varepsilon}(x), \quad (n,k,\varepsilon) \in V^-, \qquad Z_3(x,\lambda_n) = z_n(x), \quad n \in K. \tag{6.9}$$

此外，函数 $Z_3(x,\lambda)$ 关于 λ 是整函数，而函数 $Z_1(x,\lambda)$ 和 $Z_2(x,\lambda)$ 是亚纯函数，分别具有简单极点 $\{\lambda_{n,1,0}\}_{n\in N}$ 和 $\{\lambda_{n,2,0}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus K}$。计算表明

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,k,0}} Z_k(x,\lambda) = -\beta_{n,k,0}z_{n,k,0}(x), \quad (n,k,0) \in V^-, \tag{6.10}$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Z_1(x,\lambda) = -\gamma_n z_n(x), \quad n \in K. \tag{6.11}$$

固定 $\delta > 0$。使用引理 3.6、(2.12)、(4.2)、(5.7)、(6.5) 和 (6.8)，我们得到估计

$$|Z_{k_0}(x,\rho^3)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,2} \frac{C\xi_n |\rho|^{-(k_0-1)} |\exp(\rho\omega_{k_0} x)|}{|\rho - \rho_{n,k}^0| + 1}, \quad \rho \in \overline{\Gamma_{s,\delta}}, \quad k_0 = 1,2,3, \tag{6.12}$$

$$\Gamma_{s,\delta} := \{\rho \in \Gamma_s \colon |\rho| \ge \delta,\ |\rho - \rho_{n,k}^0| \ge \delta,\ n \in \mathbb{N},\ k = 1,2\}, \tag{6.13}$$

其中，$\{\omega_k\}_{k=1}^3$ 是方程 $\omega^3 = 1$ 的根，按照（3.3）编号；$\rho_{n,k}^0 = \sqrt[3]{\lambda_{n,k}^0} \in \overline{\Gamma_s}$，$\{\lambda_{n,k}^0\}$ 是问题 $\mathcal{L}_k^0$（零系数为 $\mathcal{T} = (0,0)$）的特征值。考虑函数

$$\mathcal{B}_1(x,\lambda) := -Z_1(x,\lambda)\overline{Z_3(x,-\overline{\lambda})}, \quad \mathcal{B}_2(x,\lambda) := -Z_2(x,\lambda)\overline{Z_2(x,-\overline{\lambda})}. \tag{6.14}$$

鉴于 $Z_k(x,\lambda)$、$k = 1$、2、3的解析性质，函数 $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$和 $\mathcal{B}_2(x,\lambda)$在 λ 中是亚纯函数，其简单极点分别为 $\{\lambda_{n,1,0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和$\{\lambda_{n,k,0}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus K,\,k=1,2}$。使用（6.9）、（6.10）和（6.11），可得留数:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1,0}} \mathcal{B}_1(x,\lambda) &= \beta_{n,1,0} z_{n,1,0}(x)\overline{z_{n,2,0}(x)} =: r_n(x), \quad n \in \mathbb{N}\setminus K,\\
\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} \mathcal{B}_1(x,\lambda) &= \gamma_n z_n(x)\overline{z_n(x)}, \quad n \in K,\\
\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,1,0}} \mathcal{B}_2(x,\lambda) &= -\overline{\beta_{n,2,0} z_{n,2,0}(x)} z_{n,1,0}(x) = r_n(x), \quad n \in \mathbb{N}\setminus K,\\
\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n,2,0}} \mathcal{B}_2(x,\lambda) &= \beta_{n,2,0} z_{n,2,0}(x)\overline{z_{n,1,0}(x)} = -\overline{r_n(x)}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus K.
\end{aligned}$$

估计（6.12）与（6.14）一起推出

$$|\mathcal{B}_j(x,\rho^3)| \le \frac{C}{|\rho|^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1,2}\frac{\xi_n}{|\rho - \rho_{n,k}^0| + 1}\right)^2 \le \frac{C}{|\rho|^4}, \quad \rho \in \overline{\Gamma_{s,\delta}}, \quad j = 1,2. \tag{6.15}$$

考虑围道 $\mathcal{C}_R := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = R\}$，其半径 R 充分大，使得$\lambda = \rho^3 \in \mathcal{C}_R$ 蕴含$\rho \in \Gamma_{s,\delta}$，其中某个 $s \in \{1,2\}$ 以及固定的 $\delta > 0$。于是

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathcal{C}_R} \mathcal{B}_1(x,\lambda)\, d\lambda = 0.$$

应用留数定理，我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus K} r_n(x) + \sum_{n\in K} \gamma_n |z_n(x)|^2 = 0. \tag{6.16}$$

由于 $\gamma_n > 0$，因此

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus K} r_n(x) \le 0. \tag{6.17}$$

用 $\mathcal{C}_R^+$ 表示弧 $\{\lambda \in \mathcal{C}_R\colon \operatorname{Re}\lambda \ge 0\}$，并考虑轮廓 $\mathcal{C}_R^0 = \mathcal{C}_R^+ \cup [-\mathrm{i}R, \mathrm{i}R]$，其为逆时针环绕（见图1）。根据估计（6.15），我们有

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}_R^+} \mathcal{B}_2(x,\lambda)\, d\lambda = 0.$$

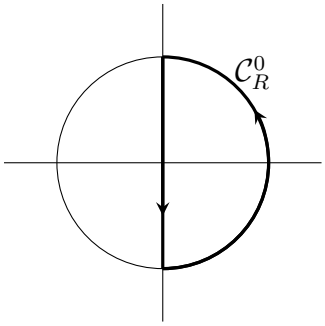


图1. 轮廓 $\mathcal{C}_R^0$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\mathcal{C}_R^0}\mathcal{B}_2(x,\lambda)\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathcal{B}_2(x,\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma_2(x,\mathrm{i}\tau)|^2\,d\tau\geq 0. \tag{6.18}$$

留数定理可得

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\mathcal{C}_R^0}\mathcal{B}_2(x,\lambda)\,d\lambda=\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus K}r_n(x).$$

考虑到不等式 (6.17) 和 (6.18)，我们得出 $\Gamma_2(x,\lambda)\equiv 0$ 对于 $\mathrm{i}\lambda\in\mathbb{R}$。根据解析延拓原理，有 $\Gamma_2(x,\lambda)\equiv 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$。关系式 (6.10) 和 $\beta_{n,2,0}\neq 0$ 表明 $z_{n,2,0}(x)=0$ 对于 $n\in\mathbb{N}\setminus K$。由 (6.9) 可得 $z_{n,1,\varepsilon}(x)=Z_2(x,\lambda_{n,1,\varepsilon})=0$ 对于 $(n,1,\varepsilon)\in V^-$。于是，关系式 (6.16) 表明

$$\sum_{n\in K}\gamma_n|z_n(x)|^2=0.$$

因此，对于 $n\in K$，有 $z_n(x)=0$。根据 (6.9)，整函数 $\Gamma_3(x,\lambda)$ 的零点为 $\{\lambda_{n,2,0}\}_{n\in\mathbb{N}}$。考虑无穷乘积

$$P(\lambda):=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n,2,0}}\right).$$

使用渐近性质 (2.12)，可以证明

$$|P(\rho^3)|\geq C|\rho|^{-2}|\exp(\rho\omega_3)|,\quad \rho\in\overline{\Gamma_{s,\delta}}. \tag{6.19}$$

显然，函数 $Z_3(x,\lambda)/P(\lambda)$ 是整函数。关于 $k_0=3$ 的估计 (6.12) 和 (6.19) 表明

$$\left|\frac{Z_3(x,\rho^3)}{P(\rho^3)}\right|\leq\frac{C}{|\rho|},\quad \rho\in\overline{\Gamma_{s,\delta}}.$$

由刘维尔定理可知，$Z_3(x,\lambda)\equiv 0$，因此 $z_{n,2,1}(x)=Z_3(x,\lambda_{n,2,1})=0, n\in\mathbb{N}$。于是，对于所有 $(n,k,\varepsilon)\in V$，$z_{n,k,\varepsilon}(x)=0$。这就得到了该引理所要证明的结论。 □

定理 2.5 的证明。由定理 2.5 的假设和引理 6.1 可知，数据 $\mathfrak{S}$ 满足定理 2.3 的条件。根据定理 2.3，存在具有谱数据 $\mathfrak{S}$ 的系数 $\mathcal{T}=(\tau_0,\tau_1)\in W$。接下来需要证明 $\mathcal{T}\in W^+$，即 $\mathrm{i}\tau_0(x)\in\mathbb{R}$, $\tau_1(x)\in\mathbb{R}$。为此，考虑系数 $\mathcal{T}^\dagger=(-\overline{\tau_0},\overline{\tau_1})$ 及其对应的谱数据 $\mathfrak{S}^\dagger$。回忆一下，谱数据 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{S}^\dagger$ 由 (6.1) 联系起来。由于 (6.2) 成立且 $\gamma_n\in\mathbb{R}$, $n\in K$，我们得到 $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^\dagger$。根据唯一性定理（定理 2.2），这意味着 $\mathcal{T}=\mathcal{T}^\dagger$，证明至此完成。

□

7 结论

本文给出了三阶微分方程 (1.1) 的逆问题可解性的充要条件。我们使用 Mirzoev 和 Shkalikov [27, 28] 的正则化方法处理方程 (1.1)。主要结果（定理 2.3）的证明基于 [20, 26] 的构造性方法。该方法将逆问题归结为巴拿赫空间——有界无穷序列空间中的线性主方程 (4.14)m_o。我们的必要充分条件包括谱数据的渐近性质和结构性质，以及主方程唯一可解这一要求。此外，我们还研究了两种能够满足这一要求的特殊情形。第一种情形是谱数据的小扰动。对这一情形的研究推出了定理 2.4，该定理论述了逆谱问题的局部可解性和稳定性。第二种情形是自伴情形。对于这种情形，我们证明了定理 2.5，该定理给出了关于谱数据的非常简单的充分条件。

本文的结果可以推广到由如下形式的微分表达式生成的各类高阶微分算子

$$\begin{aligned}\ell_s(y) :=& y^{(s)} + \sum_{k=0}^{\lfloor s/2\rfloor-1} (\tau_{2k}(x)y^{(k)})^{(k)} \\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor (s-1)/2\rfloor-1} \big((\tau_{2k+1}(x)y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x)y^{(k+1)})^{(k)}\big), \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中 $s \geq 3$，系数 $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{s-2}$ 可以是可积的，也可以是分布；记号 $\lfloor a\rfloor$表示将实数 a 向下取整。然而，这种推广并非易事，还会带来额外的困难。下面讨论其中一些困难。

如果系数 $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{s-2}$ 足够光滑，那么谱数据渐近中会包含大量常系数（例如，参见 [20]）：

$$\sqrt[s]{\lambda_{n,k}} = \sum_{j=-1}^{p} c_{j,k} n^{-j} + n^{-(p+1)} \varkappa_{n,k}, \quad \beta_{n,k} = n^{r_k} \left(\sum_{j=0}^{p-1} b_{j,k} n^{-j} + n^{-(p+1)} \varkappa^0_{n,k} \right).$$

常数 $c_{j,\,k}$ 和 $b_{j,\,k}$ 与系数 $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{s-2}$有关，而求出这些关系是一个技术性的代数问题。此外，为了得到必要充分条件，必须设计一种算法，以确定给定的数值 $c_{j,\,k}$ 和 $b_{j,\,k}$ 是否可能成为某个边值问题的谱数据渐近中的系数。因此，出于技术上的考虑，研究分布系数 $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{s-2}$的情形更为方便。

需要指出的是，Mirzoev-Shkalikov 正则化适用于以下情形：$\tau_\nu = \sigma_\nu^{(i_\nu)}$, $i_{2k+j} = l-k-j$, $l = \lfloor s/2\rfloor$, $k \geq 1$, $j = 0, 1$, $\sigma_\nu \in L_2(0, 1)$，当 $s = 2l$且 $\sigma_\nu \in L_1(0, 1)$ 时，当 $s = 2l+1$（见 [27, 28]）。对于奇异阶数更高的微分表达式系数，目前尚无正则化结果。然而，在 Mirzoev-Shkalikov 情形下，若 $s \geq 3$，以及在奇异阶数较低的情形下（例如，$s = 2l$ 且对所有 $\nu = 0, s-2$，$\sigma_\nu \in L_2(0, 1)$ ~~或~~ $\sigma_\nu \in W_2^{-1}(0, 1)$），则需要逐步恢复系数 $\sigma_{s-2}, \sigma_{s-3}, \ldots, \sigma_1, \sigma_0$（见 [26]）。这使得难以得到关于谱数据的必要充分条件，因为每一步都需要施加额外要求。

自伴情形下主方程可解性的证明（定理 2.5）可以推广到任意奇数阶。对于偶数阶，证明方法将有所不同。在 [18], 中，已经证明了半直线上具有正则系数的微分算子

对于任意偶数阶都具有唯一可解性。对于有限区间，目前尚无此类结果。对于奇数阶，据作者所知，本文对主方程可解性的证明是全新的，在以往的研究中没有类似结果。

当然，可以用更高阶的分离边界条件替换边界条件 (1.2) 和 (1.3)。但这样一来，就会出现恢复边界条件系数的问题；对于分布系数微分算子而言，这并非易事。例如，考虑带有位势 $q \in W_2^{-1}(0, 1)$ 和罗宾边界条件的斯图姆–刘维尔方程 (1.5)

$$y^{[1]}(0) - hy(0) = 0, \quad y^{[1]}(1) + Hy(1) = 0,$$

其中 $y^{[1]} := y' - \sigma y$, $q = \sigma'$。因此，无法根据谱数据唯一恢复这两个系数 h 和 H （见 [37]），因为谱数据在平移 $\sigma := \sigma + c$, $h := h - c$, $H := H + c$ 下保持不变。对于更高阶情形，情况则更为丰富。唯一性问题已在 [25], 中得到研究，而边界条件系数的重构还需要另行考察。

资助。本研究得到俄罗斯科学基金会 21-71-10001号资助, https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/。

参考文献

[1] Braeutigam, I.N.; Polyakov, D.M. 关于三阶微分算子特征值渐近性质的研究，《圣彼得堡数学杂志》31 (2020), no. 4, 585–606.[2] Korotyaev, E.L. 三阶微分算子的共振，《数学分析及其应用杂志》478 (2019), no. 1, 82–107.[3] Uˇgurlu, E. 正则三阶边值问题，《应用数学与计算》343 (2019), 247–257.[4] Uˇgurlu, E. 一些奇异三阶边值问题，《数学方法与应用科学》43 (2020), no. 5, 2202–2215.[5] Badanin, A.; Korotyaev, E.L. 与Boussinesq方程相关的三点条件三阶算子，《应用分析》100 (2021), no. 3, 527–560.[6] Zhang, H.-Y.; Ao, J.-J.; Mu, D. 依赖特征参数的边界条件下不连续三阶边值问题的特征值，《数学分析及其应用杂志》506 (2022), no. 2, 125680.[7] Zhang, M.; Li, K.; Wang, Y. 奇异三阶微分算子的正则逼近，《数学分析及其应用杂志》521 (2023), no. 1, 126940.[8] Greguˇs, M. 《三阶线性微分方程》，Springer，Dordrecht (1987).[9] Bernis, F.; Peletier, L.A. 涉及三阶常微分方程的两个排水流问题，《SIAM数学分析杂志》27 (1996), no. 2, 515–527.

[10] Tuck, E.O.; Schwartz, L.W. 与排水流和涂覆流相关的若干三阶常微分方程的数值与渐近研究，《SIAM评论》32 (1990), no. 3, 453–469.[11] McKean, H. 圆上的Boussinesq方程，《纯粹与应用数学通讯》34 (1981), no. 5, 599–691.[12] Marchenko, V.A. 《斯图姆-刘维尔算子及其应用》，Birkhäuser (1986).[13] Levitan, B.M. 《Sturm-Liouville逆问题》，VNU科学出版社，乌得勒支 (1987).[14] Freiling, G.; Yurko, V. 《Sturm-Liouville逆问题及其应用》，纽约州亨廷顿：Nova Science出版社 (2001).[15] Kravchenko, V.V. 《Sturm-Liouville正逆问题》，Birkh¨äuser，尚 (2020).[16] Gel’fand, I.M.; Levitan, B.M. 根据谱函数确定微分方程，《苏联科学院通报》，数学辑 15 (1951), 309-360 [俄文版].[17] Yurko, V.A. 根据Weyl矩阵恢复半直线上的非自伴微分算子，《苏联数学文集》72 (1992), no. 2, 413–438.[18] Yurko, V.A. 关于半轴上自伴微分算子的确定，《数学札记》57 (1995), no. 3, 310–318.[19] Yurko, V. 微分算子谱分析的逆问题及其应用，《数学科学》98 (2000), no. 3, 319–426.[20] Yurko, V.A. 《逆问题理论中的谱映射方法》，逆问题与病态问题丛书，乌得勒支，VNU科学 (2002).[21] Leibenson, Z.L. 高阶常微分算子的谱分析逆问题，《莫斯科数学会会刊》15 (1966), 70–144；英文译本见《莫斯科数学会汇刊》15 (1966).[22] Leibenson, Z.L. 边值问题组变换的谱展开，《莫斯科数学会会刊》25 (1971), 15–58；英文译本见《莫斯科数学会汇刊》25 (1971).[23] Beals, R. 直线上的常微分算子逆问题，《美国数学杂志》107 (1985), no. 2, 281–366.[24] Bondarenko, N.P. 带分布系数的任意阶微分算子的逆谱问题，《数学》9 (2021), no. 22, Article ID 2989.[25]Bondarenko, N.P. 具有不同奇异阶数分布系数的线性微分算子，《数学方法与应用科学》(2022)，在线发表，数字对象标识符：http://doi.org/10.1002/mma.8929[26] Bondarenko, N.P. 根据谱数据重构高阶微分算子，《数学》10 (2022), no. 20, Article ID 3882 (32 pp.)[27] Mirzoev, K.A.; Shkalikov, A.A. 带分布系数的偶数阶微分算子，《数学札记》99 (2016), no. 5, 779–784.

[28] Mirzoev, K.A.; Shkalikov, A.A. 带分布系数的奇数阶常微分算子，预印本（2019年），arXiv:1912.03660 [math.CA].[29] Vladimirov, A.A. 关于奇异微分算子定义的一种方法，预印本（2017年），arXiv:1701.08017 [math.SP].[30]Bondarenko, N.P. 带分布系数的高阶微分算子的谱数据渐近性质，《数学科学》（2023年），在线发表。数字对象标识符：https://doi.org/10.1007/s10958-022-06118-x[31] Savchuk, A.M.; Shkalikov, A.A. 带分布系数的常微分方程解的渐近分析，《数学文集》211（2020年），第11期，1623–1659.[32] Naimark, M.A.《线性微分算子》，第2版，Nauka，莫斯科（1969年）；第1版英文译本，第I、II部分，Ungar，纽约（1967年，1968年）。[33] Buterin, S.A. 有限区间上非自伴斯图姆-刘维尔算子的逆谱问题，《数学分析及其应用杂志》335（2007年），第1期，739–749.[34] Buterin, S.A.; Shieh, C.-T.; Yurko, V.A. 带狄利克雷边界条件的非自伴二阶微分算子的逆谱问题，《边值问题》（2013年），2013:180.[35] Kong, Q.; Zettl, A. 正则斯图姆-刘维尔问题的特征值，《微分方程杂志》131，第1期，1–19.[36] Zhang, H.-Y.; Ao, J.-J.; Bo, F.-Z. 带分布势的四阶边值问题的特征值，《AIMS数学》7（2022年），第5期，7294–7317.[37] Hryniv, R.O.; Mykytyuk, Y.V. 带奇异势的斯图姆-刘维尔算子的逆谱问题，《反问题》19（2003年），第3期，665–684。

Natalia Pavlovna Bondarenko，萨拉托夫国立大学力学与数学系，
阿斯特拉汉斯卡亚街83号，萨拉托夫410012，俄罗斯，电子邮箱：
bondarenkonp@info.sgu.ru