arXiv:2303.13154v1 [math.QA] 23 Mar 2023

平移霍普夫代数与霍普夫堆

´托马什·布热津斯基和玛戈扎塔·赫里涅维茨卡

Abstract. 对于 Grunspan 的每个霍普夫堆或量子余扭子，都可以关联一个平移霍普夫代数。该平移霍普夫代数作用于霍普夫堆，使其成为一个 Hopf-Galois 余对象。反过来，任意 Hopf-Galois 余对象都具有自然的霍普夫堆结构，且其平移霍普夫代数与作用的 Hopf 代数同构。随后证明，这一对应建立了霍普夫堆范畴与 Hopf-Galois 余对象范畴之间的等价关系。

1. Introduction

20世纪20年代，Pr¨ufer [7] 和 Baer [1] 引入了堆。堆是简单的代数系统，由一个集合 X 和其上的三元运算 $[-,-,-]$ 构成。X公理（见下文 (2.1)）保证，任何非空堆都可以收缩为一族彼此同构的群，其中每个元素 X对应一个群；反过来，任何群都可以通过适当组合群的二元运算与逆元赋予堆运算。后一种对应构成了从群范畴到堆范畴的函子。反向而言，可以函子性地为一个非空堆赋予一个平移群，记作 Tn(X)，即所有映射 $\tau_a^b\colon X \to X, c \mapsto [c,a,b], a,b \in X$。群 Tn($X$)在 X 上自由且传递地作用，从而使 X 成为一个 Tn(X)-扭子。函子 $(X,[-,-,-]) \mapsto$ (Tn(X) X) 建立了堆范畴与扭子范畴之间的等价关系（近期讨论见 [2] ）。

本文研究 Grunspan 在 [4], 中提出的堆的线性化；他在那里称之为量子余扭子，本文则称之为霍普夫堆。采用 [10] 和 [4] 的结果（另见 [12]），我们为每个霍普夫堆 C 指定$\widehat{\ }$两个 Hopf 代数 Tn(C) 和 Tn(C)，它们作用于 C，使其成为双模余代数，并使 C 成为双伽罗瓦余对象（这一概念与 [8] 中引入的双伽罗瓦对象互为对偶）。这一对应在霍普夫堆范畴与双伽罗瓦余对象范畴之间建立了等价关系；此外，它还在与 [11] 对偶的意义下给出了一个构造，从而证明 Grunspan 映射的存在性。该映射曾被假定为量子余扭子原始定义的一部分。

本文的主要创新之处并不在于将 Grunspan[4] 和 Schauenburg [10] 与 [11] 的结果推广到对偶情形；在我们看来，这完全可以视为程式化的练习。真正的创新在于，我们给出了双伽罗瓦余对象与霍普夫堆之间对应关系的另一种描述，而这种描述似乎并未见于量子扭子的原始框架中。以 C 的线性自同态来刻画这一对应，类似于先前提到的将平移群赋予一个堆的函子，因此更接近经典几何或集合论框架中的相应构造。

日期：2023年3月24日。2020年数学主题分类：16T05；16T15；20N10。关键词与短语：量子余扭子；霍普夫堆；平移Hopf代数；Hopf-Galois 余对象。

前面提到的堆上的平移群，因此更接近经典几何或集合论框架中的平移群。

我们在域 $\mathbb{F}$ 上工作。所有余代数，通常记作 C（若为 Hopf 代数，则记作 H），均定义在 $\mathbb{F}$ 上，且余结合、具有余单位，维数至少为一。C 中的余乘法记作 Δ，余单位记作 ε。我们使用斯韦德勒记号，将余乘法写作 $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$、$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$ 等。与 C 余反的余代数，即其余乘法为 $c \mapsto \sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}$ 的余代数，记作 C^{co}。C 的类群元集合记作 $\mathsf{G}(C)$。所有代数都是含幺结合代数。与 A 反的代数记作 A^{op}。在任意 Hopf 代数中，S 表示对极。

2. Hopf heaps and translation Hopf algebra

堆是一个集合 X，并带有三元运算 $[-,-,-] \colon X^3 \to X$，使得对所有 $x_1, \dots, x_5 \in X$,

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]] = [[x_1, x_2, x_3], x_4, x_5], \quad [x_1, x_1, x_2] = x_2, \quad [x_1, x_2, x_2] = x_1. \tag{2.1}$$

集合范畴是一个幺半范畴，其幺半积为笛卡尔积，幺半单位为单元素集。由此，每个集合都以唯一方式成为一个余幺半群（余代数），其余乘法由对角映射 $x \mapsto (x, x)$ 给出，余单位则是从 X 到（固定的）单元素集的唯一映射。这两个映射显然都出现在第二和第三个方程 (2.1) 中。因此，将堆的定义扩展到向量空间的幺半范畴时，需要考虑一般的余结合、余单位余代数作为底层对象，并在 (2.1) 中适当地以余乘法和余单位替代。这便得到下面的定义，它与 [4] 中的量子扭子或 [14] 中的量子堆的定义互为对偶。

Defi义 2.1. Hopf 堆是一个余代数 C，并配有一个余代数映射

$$\chi : C \otimes C^{\mathrm{co}} \otimes C \to C, \qquad a \otimes b \otimes c \mapsto [a, b, c],$$

使得对所有 a、b、c、d、$e \in C$,

$$[[a, b, c], d, e] = [a, b, [c, d, e]], \tag{2.2a}$$

$$\sum [c_{(1)}, c_{(2)}, a] = \sum [a, c_{(1)}, c_{(2)}] = \varepsilon(c) a. \tag{2.2b}$$

Hopf 堆 (C, χ_C) 与 (D, χ_D) 之间的态射是一个余代数映射 $f \colon C \to D$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C^{\mathrm{co}} \otimes C & \xrightarrow{\chi_C} & C \\ {\scriptstyle f \otimes f \otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D \otimes D^{\mathrm{co}} \otimes D & \xrightarrow{\chi_D} & D; \end{array} \tag{2.3}$$

在元素上,

$$f([a, b, c]) = [f(a), f(b), f(c)], \qquad \text{for all } a, b, c \in C. \tag{2.4}$$

Hopf 堆 (C, χ_C) 的 Grunspan 映射是一个余代数同态 $\vartheta \colon C \to C$，满足对所有 $a, b, c, d, e \in C$,

$$[[a, b, \vartheta(c)], d, e] = [a, [d, c, b], e]. \tag{2.5}$$

（在固定域 $\mathbb{F}$ 上的）Hopf 堆范畴记作 $\mathcal{HH}$。

注 2.2. 容易计算得出，若 Grunspan 映射存在，则 Hopf 堆 (C, χ_C) 的 Grunspan 映射由以下公式给出

$$\vartheta : C \to C, \qquad c \mapsto \sum [c_{(1)}, [c_{(4)}, c_{(3)}, c_{(2)}], c_{(5)}], \tag{2.6}$$

因此必定唯一。

事实上，与 [11], 即将给出的结果中所述情形类似，Hopf 堆总是存在（唯一的）Grunspan 映射（见推论 3.9）。

公式 (2.6)、Hopf 堆同态的余代数映射性质以及 (2.4) 保证了同态与 Grunspan 映射可交换，也就是说，若 $f : C \to D$ 是 Hopf 堆同态，其对应的 Grunspan 映射分别为 ϑ_C 和 ϑ_D，则

$$f \circ \vartheta_C = \vartheta_D \circ f. \tag{2.7}$$

例 2.3. 若 H 是 Hopf 代数，则 H 是 Hopf 堆，其运算为$[a, b, c] = aS(b)c$。此时 Grunspan 映射就是对极的平方，即 $\vartheta = S \circ S$。

反过来，给定一个 Hopf 堆 (C, χ)，对任意 $x \in \mathsf{G}(C)$，余代数 C 都可赋予 Hopf 代数结构，其单位元为 x，并具有乘法和对极，

$$ab = [a, x, b], \qquad S(a) = [x, a, x].$$

这个 Hopf 代数记作 $\mathrm{H}_x(C)$。容易验证，与 Hopf 代数 $\mathrm{H}_x(C)$ 相关联的 Hopf 堆等于 C。

这些例子仿照了群与堆之间的标准对应关系。

The 本文所分析的关键对象在以下定义中引入 .

D定义 2.4. 设 (C, χ) 是一个 Hopf 堆。对所有 $a, b \in C$，线性映射

$$\tau_a^b : C \to C, \qquad c \mapsto \chi(c \otimes a \otimes b) = [c, a, b],$$

称为右 (a, b)-平移。所有右 (a, b)-平移张成的空间记作 $\mathrm{Tn}(C)$，即，

$$\mathrm{Tn}(C) := \mathbb{F}\langle \tau_a^b \mid a, b \in C \rangle.$$

对称地，线性映射

$$\sigma_b^a : C \to C, \qquad c \mapsto \chi(a \otimes b \otimes c) = [a, b, c],$$

称为左 (a, b)-平移，它们张成的空间记为$\widehat{\ }\mathrm{Tn}(C)$。

下文我们将重点讨论右平移；关于左平移的相应结果（我们将在总结中简要提及）可通过对称论证得到。以下引理归纳了 (a, b)-平移的基本性质。

引理 2.5. 设 (C, χ) 是一个 Hopf 堆。那么，对于所有的 $a, b, c, d \in C$，

$$\Delta(\tau_a^b(c)) = \sum \tau_{a_{(2)}}^{b_{(1)}}(c_{(1)}) \otimes \tau_{a_{(1)}}^{b_{(2)}}(c_{(2)}), \tag{2.8a}$$

$$\sum \tau_{a_{(1)}}^{[a_{(2)}, b, c]} = \varepsilon(a) \tau_b^c, \tag{2.8b}$$

$$\sum \tau_{a_{(1)}}^{a_{(2)}} = \varepsilon(a) \mathrm{id}, \tag{2.8c}$$

$$\tau_c^d \circ \tau_a^b = \tau_a^{[b,c,d]}. \tag{2.8d}$$

此外，如果 Grunspan 映射 ϑ 存在，那么

$$\sum \tau_{a_{(2)}}^{[\vartheta(a_{(1)}),b,c]} = \varepsilon(a)\tau_b^c, \tag{2.9a}$$

$$\sum \tau_{a_{(2)}}^{\vartheta(a_{(1)})} = \varepsilon(a)\mathrm{id}, \tag{2.9b}$$

$$\tau_c^d \circ \tau_a^{\vartheta(b)} = \tau_{[c,b,a]}^d. \tag{2.9c}$$

证明。(2.8a) 式直接由 χ 是余代数映射这一事实得出。为证明 (2.8b)，计算

$$\begin{aligned}\sum \tau_{a_{(1)}}^{[a_{(2)},b,c]}(d) &= \sum [d, a_{(1)}, [a_{(2)}, b, c]] \\ &= \sum [[d, a_{(1)}, a_{(2)}], b, c] = \varepsilon(a)[d, b, c] = \varepsilon(a)\tau_b^c(d),\end{aligned}$$

由方程 (2.2) 得出。此外，采用 (2.5) 后，我们得到

$$\begin{aligned}\sum \tau_{a_{(2)}}^{[\vartheta(a_{(1)}),b,c]}(d) &= \sum [d, a_{(2)}, [\vartheta(a_{(1)}), b, c]] = \sum [[d, a_{(2)}, \vartheta(a_{(1)})], b, c] \\ &= \sum [d, [b, a_{(1)}, a_{(2)}], c] = \varepsilon(a)[d, b, c] = \varepsilon(a)\tau_b^c(d),\end{aligned}$$

这就证明了 (2.9a)。

由于首先由 (2.2b) 可知，方程 (2.8c) 和 (2.9b) 可由 (2.8b) 和 (2.9a) 得出，

$$\sum \tau_{a_{(1)}}^{a_{(2)}} = \varepsilon(a)\mathrm{id},$$

因此，其次，

$$\varepsilon(a)\mathrm{id} = \sum \tau_{a_{(1)}}^{a_{(2)}} = \sum \tau_{a_{(1)}}^{[a_{(2)},a_{(3)},a_{(4)}]} = \sum \tau_{a_{(2)}}^{[\vartheta(a_{(1)}),a_{(3)},a_{(4)}]} = \sum \tau_{a_{(2)}}^{\vartheta(a_{(1)})},$$

由 (2.8b) 和 (2.9a)，并再次由 (2.2b) 得出。

最后，等式 (2.8d) 和 (2.9c) 由 (2.2a) 和 (2.5) 得出。 □

引理 2.5 中的等式 (2.8d) 特别表明，Tn(C) 在复合运算下封闭。此外，由于域上的任何非零余代数至少有一个余单位非零的元素，(2.8c) 表明 id $\in$Tn(C)。

定理 2.6. 设 (C, χ) 是一个 Hopf 堆。

(1) 空间 Tn(C) 是一个双代数，其乘法由反向复合给出，余乘法为 Δ，余单位为 ε:

$$\Delta(\tau_a^b) = \sum \tau_{a_{(2)}}^{b_{(1)}} \otimes \tau_{a_{(1)}}^{b_{(2)}}, \qquad \varepsilon(\tau_a^b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \tag{2.10}$$

对所有 a、$b \in C$。

(2) 如果 (C, χ) 存在 Grunspan 映射 ϑ，那么 Tn(C) 是一个带有对极的 Hopf 代数

$$S(\tau_a^b) = \tau_b^{\vartheta(a)}, \tag{2.11}$$

对所有 $a, b \in C$。

(3) 若 $f: C \to D$ 是霍普夫堆的态射，则函数

$$\mathrm{Tn}(f): \mathrm{Tn}(C) \to \mathrm{Tn}(D), \qquad \tau_a^b \mapsto \tau_{f(a)}^{f(b)}, \tag{2.12}$$

是一个双代数映射，因此只要 Grunspan 映射存在，它就是 Hopf 代数同态。

(4) 赋值 $C \mapsto \mathrm{Tn}(C)$，$f \mapsto \mathrm{Tn}(f)$ 定义了一个从 Hopf 堆范畴（带有 Grunspan 映射）到双代数范畴（分别为 Hopf 代数范畴）的函子。

证明。(1) 根据复合性质 (2.8d)，$\mathrm{Tn}(C)$ 中的乘法（记作并置）可写为

$$\tau_a^b \tau_c^d = \tau_a^{[b,c,d]}, \qquad \text{for all } a,b,c,d \in C. \tag{2.13}$$

Δ 的余结合性和余乘性以及余单位性质可由 (2.10) 及 χ 是保余单位余代数同态这一事实立即推出。Δ 的含幺性则是 (2.8c) 的结果。

(2) 若 Grunspan 映射 ϑ 存在，则我们可利用 (2.9c) 和 (2.9b) 得到

$$\sum S(\tau_{a_{(2)}}^{b_{(1)}})\tau_{a_{(1)}}^{b_{(2)}} = \sum \tau_{a_{(1)}}^{b_{(2)}} \circ \tau_{b_{(1)}}^{\vartheta(a_{(2)})} = \sum \tau_{[a_{(1)},a_{(2)},b_{(1)}]}^{b_{(2)}} = \varepsilon(a)\varepsilon(b)\mathrm{id}$$

and

$$\sum \tau_{a_{(2)}}^{b_{(1)}} S(\tau_{a_{(1)}}^{b_{(2)}}) = \sum \tau_{b_{(2)}}^{\vartheta(a_{(1)})} \circ \tau_{a_{(2)}}^{b_{(1)}} = \sum \tau_{a_{(2)}}^{[b_{(1)},b_{(2)},\vartheta(a_{(1)})]} = \varepsilon(a)\varepsilon(b)\mathrm{id}.$$

因此，S 是对极，且 $\mathrm{Tn}(C)$ 是一个 Hopf 代数，如前所述。

(3) 由于 f 是余代数映射，

$$\begin{aligned}\Delta\left(\mathrm{Tn}(f)(\tau_a^b)\right) &= \sum \tau_{f(a)_{(2)}}^{f(b)_{(1)}} \otimes \tau_{f(a)_{(1)}}^{f(b)_{(2)}} \\ &= \sum \tau_{f(a_{(2)})}^{f(b_{(1)})} \otimes \tau_{f(a_{(1)})}^{f(b_{(2)})} = (\mathrm{Tn}(f) \otimes \mathrm{Tn}(f)) \circ \Delta\left(\tau_a^b\right),\end{aligned}$$

and

$$\varepsilon(\mathrm{Tn}(f)(\tau_a^b)) = \varepsilon(f(a))\varepsilon(f(b)) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(\tau_a^b).$$

因此 $\mathrm{Tn}(f)$ 是余代数映射。再由 f 的余代数映射性质可知，对所有$a \in C$,

$$\mathrm{Tn}(f)(\varepsilon(a)\mathrm{id}) = \sum \mathrm{Tn}(f)\left(\tau_{a_{(1)}}^{a_{(2)}}\right) = \varepsilon(a)\mathrm{id},$$

因此，$\mathrm{Tn}(f)(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$。(2.13) 与 (2.4) 结合可得 $\mathrm{Tn}(f)$ 的乘性。具体而言，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tn}(f)(\tau_a^b\tau_c^d) = \mathrm{Tn}(f)(\tau_a^{[b,c,d]}) &= \tau_{f(a)}^{f([b,c,d])} \\ &= \tau_{f(a)}^{[f(b),f(c),f(d)]} = \tau_{f(a)}^{f(b)}\tau_{f(c)}^{f(d)} = \mathrm{Tn}(f)(\tau_a^b)\mathrm{Tn}(f)(\tau_c^d).\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Tn}(f)$ 是一个双代数同态。

最后，如果 Grunspan 映射存在，那么对所有 $a, b \in C$,

$$\mathrm{Tn}(f)(S(\tau_a^b)) = \mathrm{Tn}(f)\left(\tau_b^{\vartheta(a)}\right) = \tau_{f(b)}^{f(\vartheta(a))} = \tau_{f(b)}^{\vartheta(f(a))} = S\left(\mathrm{Tn}(f)\left(\tau_a^b\right)\right),$$

其中倒数第二个等式由（2.7）得出。因此，$\mathrm{Tn}(f)$ 是一个 Hopf 代数映射，正如所述。

(4) $\mathrm{Tn}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ 这一事实以及对态射复合的保持显然。因此，Tn 是一个函子，如所声称的那样。

□

$\widehat{\ }$注记 2.7. 通过对称论证，Hopf 堆 C 的左 (C,a)-平移空间 Tn(b) ϑ，带有 Grunspan 映射，是一个具有运算的 Hopf 代数，对所有$\frown\sigma^a_b, \sigma^c_d \in$ Tn(C) 均成立，

$$\sigma^a_b\sigma^c_d = \sigma^a_b \circ \sigma^c_d = \sigma^{[a,b,c]}_d, \tag{2.14a}$$

$$\Delta(\sigma^a_b) = \sum \sigma^{a_{(1)}}_{b_{(2)}} \otimes \sigma^{a_{(2)}}_{b_{(1)}}, \qquad \varepsilon(\sigma^a_b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \qquad S(\sigma^a_b) = \sigma^{\vartheta(b)}_a. \tag{2.14b}$$

$\widehat{\ }$显然的余代数同构 Tn(C) $\to$ Tn(C)，$\sigma^a_b \mapsto \tau^a_b$只有在阿贝尔 Hopf 堆的情形下才是 Hopf 代数同构 $\widehat{\ }$Tn(C)$^{\mathrm{op}} \cong$ Tn(C)，也就是说，当且仅当对所有 $a, b, c \in C$, $[a, b, c] = [c, b, a]$ 均成立。尽管如此，与右平移的情形类似，赋值

$$\widehat{\mathrm{Tn}}(-) : C \mapsto \widehat{\mathrm{Tn}}(C), \qquad \left(C \xrightarrow{f} D \right) \mapsto \left(\widehat{\mathrm{Tn}}(C) \xrightarrow{\widehat{\mathrm{Tn}}(f)} \widehat{\mathrm{Tn}}(D) \quad \sigma^a_b \mapsto \sigma^{f(a)}_{f(b)} \right),$$

是从 Hopf 堆范畴（配备 Grunspan 映射）到双代数范畴（分别为 Hopf 代数范畴）的函子。

定义 2.8. 对于 Hopf 堆 (C, χ)，Tn(C) 称为右平移 Hopf$\widehat{\ }$代数，Tn(C) 称为左平移 Hopf 代数。

$\widehat{\ }$注记 2.9. 先验地，Tn(C) 和 Tn(C) 只是双代数；然而，鉴于接下来的推论 3.4，事后可知二者都是 Hopf 代数，因此这一术语是合理的。

命题 2.10. 设 (C, χ) 是一个 Hopf 堆。那么，对所有 $x \in$ G(C),

$$\mathrm{H}_x(C) \cong \mathrm{Tn}(C) \cong \widehat{\mathrm{Tn}}(C),$$

$\widehat{\ }$作为双代数。因此，Tn(C) 和 Tn(C) 是 Hopf 代数。

证明. 考虑映射

$$\varphi : \mathrm{H}_x(C) \to \mathrm{Tn}(C), \qquad a \mapsto \tau^a_x. \tag{2.15}$$

由于 x 是类群元素，该映射是余代数同态。利用 (2.13) 和 (2.8c)，可立即得出 φ 是代数同态。结合 (2.8b)，以及 H$_x$(C) 中对极和右平移 Hopf 代数 Tn(C) 中对极的定义，可以验证，对所有 $a \in C$

$$\varphi(S(a)) = \tau^{S(a)}_x = \tau^{[x,a,x]}_x = \tau^x_a.$$

反过来，我们定义映射

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Tn}(C) \to \mathrm{H}_x(C), \qquad \tau^b_a \mapsto [x, a, b].$$

于是，对所有 $a, b \in C$,

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(\tau^b_a) = \tau^{[x,a,b]}_x = \tau^x_x \tau^b_a = \varepsilon(x)\tau^b_a = \tau^b_a,$$

and

$$\varphi^{-1} \circ \varphi(a) = [x, x, a] = \varepsilon(x)a = a.$$

因此，φ^{-1} 是双代数代数映射 φ的逆映射。

同构 H_x(C) $\cong$ $\widehat{\mathrm{Tn}}$(C) 由 $a \mapsto \sigma^a_x$ 给出。

对于最后一个断言，由于 $H_x(C)$ 是一个 Hopf 代数，其对极 S 可以通过相应的双代数同构 $\widehat{\ }$ 导出到 Tn(C) 和 Tn(C)。例如，Tn(C) 的对极为

$$S(\tau_a^b) = \varphi \circ S \circ \varphi^{-1}(\tau_a^b) = \tau^x_{[x,a,b]},$$

对所有 $a, b \in C$，均有 □

3. Hopf 堆与 Hopf-Galois 余对象

设 H 是一个 Hopf 代数。回忆一下，余代数 C 是右 H-模余代数，当且仅当 C 是一个右 H-模，并且对所有 $h \in H$, $c \in C$,

$$\Delta(c \cdot h) = \sum c_{(1)} \cdot h_{(1)} \otimes c_{(2)} \cdot h_{(2)}, \qquad \varepsilon(c \cdot h) = \varepsilon(c)\varepsilon(h), \tag{3.1}$$

其中，元素之间的点表示 H 对 C的作用。左 H-模余代数的定义与此对称。类似于定义为具有平凡余不变量的 Hopf-Galois 扩张 [5], 和双伽罗瓦扩张 [8], 的 Hopf-Galois 对象和双伽罗瓦对象，霍普夫–伽罗瓦余对象定义为第 4] 节中具有平凡不变量的霍普夫–伽罗瓦余扩张[13,。

定义 3.1. 右 H-模余代数 C 是右 Hopf-Galois 余对象，如果

(a) ker $\varepsilon = \mathbb{F}\langle c \cdot h - c\varepsilon(h) \mid c \in C, h \in H \rangle$,

(b) 典范映射

$$\mathrm{can} : C \otimes H \to C \otimes C, \qquad c \otimes h \mapsto \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \cdot h, \tag{3.2}$$

是一个同构。

左 Hopf-Galois 余对象以对称的方式定义。若一个余代数 C 既是 Hopf 代数的右 Hopf-Galois 余对象，又是其左 Hopf-Galois 余对象，且这些 Hopf 代数在 C 上的作用彼此可交换（即，C 是一个双模余代数），则称其为双伽罗瓦余对象。

顺便指出，双伽罗瓦余对象的概念从属于 Hopf-Galois 余对象的概念，因为正如 [8], 中的对偶框架所示，每个（右）Hopf-Galois 余对象都会导出一个 Hopf 代数，使其成为双伽罗瓦余对象。这一构造遵循将结构群或规范群胚与主丛相联系的 Ehresmann 关联（概述、历史背景和参考文献见 [6] ），因此所得的 Hopf 代数称为 Ehresmann-Schauneburg Hopf 代数。我们现在概述这一构造。

设 C 是一个右 H-Hopf-Galois 余对象，其典范同构为 can。余平移映射 τ: $C \otimes C \to H$ 由以下公式定义

$$\tau = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{can}^{-1}. \tag{3.3}$$

余平移映射 (3.3) 的以下性质（参见例如 [3, 第 34.17] 节）在下文中起着关键作用。对于所有 a、$b \in C$、$h \in H$,

$$\varepsilon(\tau(a \otimes b)) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \tag{3.4a}$$

$$\sum \tau(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) = \varepsilon(a) 1_H, \tag{3.4b}$$

$$\tau(a \otimes b \cdot h) = \tau(a \otimes b)h, \tag{3.4c}$$

$$\sum a_{(1)} \cdot \tau(a_{(2)} \otimes b) = \varepsilon(a)b. \tag{3.4d}$$

子空间

$$I = \mathbb{F}\langle a \otimes b\varepsilon(c) - \sum a \cdot \tau(b \otimes c_{(1)}) \otimes c_{(2)} \mid a, b, c \in C \rangle \subseteq C \otimes C, \tag{3.5}$$

是 $C^{\mathrm{co}} \otimes C$ 中的一个余理想。余代数 $\mathsf{E}(C, H) := C^{\mathrm{co}} \otimes C/I$ 是一个带单位元、乘法和对极的 Hopf 代数

(3.6)

$$1 = \overline{\sum e_{(1)} \otimes e_{(2)}}, \quad \overline{a \otimes b}\ \overline{c \otimes d} = \overline{a \cdot \tau(b \otimes c) \otimes d}, \quad S(\overline{a \otimes b}) = \overline{\sum a \cdot \tau(b \otimes e_{(1)}) \otimes e_{(2)}},$$

其中 $e \in C$ 是满足 $\varepsilon(e) = 1$ 的任意元素，而 $\overline{a \otimes b}$ 表示 $a \otimes b \in C \otimes C$ 在 $\mathsf{E}(C, H)$ 中的等价类。

类似于 [9]，可得

引理 3.2. 设 H 是一个双代数，C 是满足定义 3.1 中条件 (a) 和 (b) 的右 H-模余代数。那么 H 是一个 Hopf 代数。

证明. 证明对偶化了 [9] 的论证。设 $e \in C$ 满足 $\varepsilon(e) = 1$。定义

$$S : H \to H, \qquad h \mapsto \sum \tau(e_{(1)} \cdot h \otimes e_{(2)}), \tag{3.7}$$

其中 τ 是余平移映射。于是,

$$\sum S(h_{(1)})h_{(2)} = \sum \tau(e_{(1)} \cdot h_{(1)} \otimes e_{(2)})h_{(2)} = \sum \tau(e_{(1)} \cdot h_{(1)} \otimes e_{(2)} \cdot h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H,$$

由 (3.4c) 和 (3.4b) 结合 (3.1) 得出。

等式 $\sum h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H$ 可通过考察同构的应用而得出

$$\Pi : \mathrm{Hom}(C \otimes H, H) \to \mathrm{Hom}^C(C \otimes H, C), \quad \Pi(f)(c \otimes h) = \sum c_{(1)} \cdot f(c_{(2)} \otimes h),$$

其中 $\mathrm{Hom}^C(C \otimes H, C)$ 表示从 $C \otimes H$ 到 C 的所有左 C-余模映射所构成的空间，将其作用于映射

$$f(c \otimes h) = \varepsilon(c)\varepsilon(h)1_H \quad \& \quad g(c \otimes h) = \sum h_{(1)}\tau(c_{(1)} \cdot h_{(2)} \otimes c_{(2)}),$$

可得一个等式。顺便指出，Π 的逆映射由下式给出

$$\Pi^{-1}(f)(c \otimes h) = \sum \tau(c_{(1)} \otimes f(c_{(2)} \otimes h)),$$

对所有 $f \in \mathrm{Hom}^C(C \otimes H, C)$。 □

定理 3.3. 设 (C, χ) 是一个 Hopf 堆。那么：

(1) C 是右平移 Hopf 代数 $\mathsf{Tn}(C)$ 上的右 Hopf-Galois 余对象，其作用为：对于所有 $\tau_a^b \in \mathsf{Tn}(C)$ 和 $c \in C$,

$$c \cdot \tau_a^b = \tau_a^b(c) = [c, a, b].$$

此外，$\mathsf{E}(C, \mathsf{Tn}(C)) \cong \mathsf{Tn}(C)$。

(2) C 是左平移 Hopf 代数 $\mathsf{Tn}(C)$ 上的左 Hopf-Galois 余对象，其作用为：对于所有 $\sigma_b^a \in \mathsf{Tn}(C)$ 和 $c \in C$,

$$\sigma_b^a \cdot c = \sigma_b^a(c) = [a, b, c].$$

(3) C 是一个 $(\mathsf{Tn}(C), \mathsf{Tn}(C))$-双伽罗瓦余对象。

证明。由于 Tn(C) 对 C 的作用由求值给出，且 Tn(C) 中的乘法由反向复合 C 给出，因此 C 是一个右 Tn(C)-模。条件 (3.1) 由堆运算是余代数映射这一事实得出。具体而言，(3.1) 中的第一条尤其是 (2.8a) 和 Tn(C) 中余乘法定义的直接推论。

显然，$\mathbb{F}\langle c\cdot\tau_a^b-c\varepsilon(\tau_a^b)\mid a,b,c\in C\rangle\subseteq\ker\varepsilon$。反之，若 $x\in\ker\varepsilon$，则对于所有满足 $\varepsilon(a)=1$ 的 $a\in C$，

$$\begin{aligned}x=\varepsilon(a)x-\varepsilon(x)a&=\sum\big(\varepsilon(x_{(2)})\varepsilon(a)x_{(1)}-[x_{(1)},x_{(2)},a]\big)\\&=\sum\left(\varepsilon(\tau^a_{x_{(2)}})x_{(1)}-x_{(1)}\cdot\tau^a_{x_{(2)}}\right),\end{aligned}$$

这证明了反向包含关系。

典范映射 (3.2) 是一个线性同构，其逆映射为

$$\mathrm{can}^{-1}:C\otimes C\to C\otimes\mathrm{Tn}(C),\qquad a\otimes b\mapsto\sum a_{(1)}\otimes\tau^b_{a_{(2)}}. \tag{3.8}$$

事实上，一个方向上

$$\mathrm{can}\circ\mathrm{can}^{-1}(a\otimes b)=\sum a_{(1)}\otimes\tau^b_{a_{(3)}}(a_{(2)})=\sum a_{(1)}\otimes[a_{(2)},a_{(3)},b]=a\otimes b,$$

由 (2.2b) 可得，而在另一方向上

$$\begin{aligned}\mathrm{can}^{-1}\circ\mathrm{can}(c\otimes\tau^b_a)&=\sum c_{(1)}\otimes\tau^{\tau^b_a(c_{(3)})}_{c_{(2)}}=\sum c_{(1)}\otimes\tau^{[c_{(3)},a,b]}_{c_{(2)}}\\&=\sum c_{(1)}\otimes\varepsilon(c_{(2)})\tau^b_a=c\otimes\tau^b_a,\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由 (2.8b) 得出。因此，C 是 Tn(C) 上的右 Hopf-Galois 余对象。

鉴于典范映射 (3.8) 的逆映射形式，余平移映射可写为

$$\tau:C\otimes C\to\mathrm{Tn}(C),\qquad a\otimes b\mapsto\tau^b_a. \tag{3.9}$$

因此，生成 Ehresmann-Schauenburg Hopf 代数 E(C, Tn(C)) 的余理想 I 为

$$I=\mathbb{F}\langle a\otimes b\varepsilon(c)-\sum[a,b,c_{(1)}]\otimes c_{(2)}\mid a,b,c\in C\rangle.$$

考虑线性映射

$$\varphi:\mathrm{E}(C,\mathrm{Tn}(C))\to\widehat{\mathrm{Tn}}(C),\qquad\overline{a\otimes b}\mapsto\sigma^a_b. \tag{3.10}$$

映射 φ 是良定义的，因为类似于 (2.8b)，容易验证对于所有 a、b、$c\in C$，

$$\sum\sigma^{[a,b,c_{(1)}]}_{c_{(2)}}=\varepsilon(c)\sigma^a_b, \tag{3.11}$$

这立即意味着对于所有 $\sum_i a_i\otimes b_i\in I$、$\sum_i\sigma^{a_i}_{b_i}=0$.

显然，φ 是余代数映射。由 (3.11) 可知，对所有 $a\in C$，$\sum\sigma^{a_{(1)}}_{a_{(2)}}=\varepsilon(a)\mathrm{id}$，因此 φ 是保幺的。它也是乘法的，因为

$$\varphi\left(\overline{a\otimes b}\,\overline{c\otimes d}\right)=\sigma^{[a,b,c]}_d=\sigma^a_b\sigma^c_d=\varphi\left(\overline{a\otimes b}\right)\varphi\left(\overline{c\otimes d}\right),$$

由 (2.14a)、(3.6) 和 (3.9) 得出。

根据构造， φ 是满射。它也是单态射，因为 $\sum_i \overline{a_i \otimes b_i} \in \ker \varphi$ 当且仅当对所有 $c \in C$， $\sum_i [a_i, b_i, c] = 0$。特别地，对于任意 $c \in \ker \varepsilon$，

$$0 = \sum_i [a_i, b_i, c_{(1)}] \otimes c_{(2)} = \sum_i [a_i, b_i, c_{(1)}] \otimes c_{(2)} - \sum_i a_i \otimes b_i \varepsilon(c),$$

即 $\sum_i \overline{a_i \otimes b_i} = 0$。

总之， φ是所需的双代数同构。

命题（2）可通过对称论证证明，也可利用这一事实：任意右 H-Hopf-Galois 余对象 C 都是一个 (E(C, H) H) 双伽罗瓦余对象，再应用断言（1）。同理，命题（3）也随之成立。我们仅指出，$\widehat{\ }$(Tn(C), Tn(C))-双模性质由 (2.2a) 得出，因为对于所有 $a, b, c, d, x \in C$

$$(\sigma_b^a \cdot x) \cdot \tau_c^d = [[a, b, x], c, d] = [a, b, [x, c, d]] = \sigma_b^a \cdot (x \cdot \tau_c^d).$$

定理的证明至此完成。 □

$\widehat{\ }$推论 3.4。Tn(C) 和 Tn(C) 都是 Hopf 代数。

证明。由定理 3.3 和引理 3.2 可立即得出。我们只指出，鉴于 (3.7)，Tn(C) 中的对极为

$$S(\tau_a^b) = \sum \tau^{e_{(2)}}_{[e_{(1)}, a, b]}, \tag{3.12}$$

对所有满足 $\varepsilon(e) = 1$ 的 a、 $b \in C$ 和 $e \in C$，均成立。

$\widehat{\ }$由于双代数 Tn(C) 与 Hopf 代数 E(C,Tn(C)) 同构，它通过该同构继承了一个对极，因而成为 Hopf 代数。 □

定理 3.5. 设 H 是一个 Hopf 代数，且 C 是一个右 H-Hopf-Galois 余对象。那么， C 在运算下是一个带有 Grunspan 映射的 Hopf 堆

$$\chi_{(C,H)} : C \otimes C^{\mathrm{co}} \otimes C \to C, \qquad a \otimes b \otimes c \mapsto a \cdot \tau(b \otimes c), \tag{3.13}$$

其中 τ 是余平移映射 (3.3)。此外， $H \cong$Tn(C) 作为 Hopf 代数同构。

证明。该定理是定理 3.3 以及 Grunspan [4] 和 Schauenburg [10], [11], 的结果的推论，但也可以直接证明。

性质 (3.4c) 保证运算 (3.13) 满足条件 (2.2a)。方程 (3.4b) 和 (3.4d) 可推出 (2.2b) 成立。根据 (3.4a)，映射 $\chi_{(C,H)}$ 是保余单位的。由下式对所有 a、 $b \in C$ 均成立，可知它也是余乘的，

$$\Delta(\tau(a \otimes b)) = \sum \tau(a_{(2)} \otimes b_{(1)}) \otimes \tau(a_{(1)} \otimes b_{(2)}). \tag{3.14}$$

证明 (3.14) 需要一些代数技巧。首先，定义如下映射；由于 C 是右 H-模余代数，该映射是一个右 C-余作用，

$$\varrho : C \otimes H \to C \otimes H \otimes C, \qquad a \otimes h \mapsto \sum a_{(1)} \otimes h_{(1)} \otimes a_{(2)} \cdot h_{(2)}.$$

于是，

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \mathrm{can} = (\mathrm{can} \otimes \mathrm{id}) \circ \varrho,$$

因此我们得到

$$(\mathrm{can}^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) = \varrho \circ \mathrm{can}^{-1}. \tag{3.15}$$

接下来，注意到对于所有的 $a, b \in C$,

$$\mathrm{can}^{-1}(a\otimes b) = \sum a_{(1)}\otimes\tau(a_{(2)}\otimes b). \tag{3.16}$$

将 (3.15) 与 (3.16) 结合，我们得到

$$\begin{aligned}\sum \tau(a_{(2)}\otimes b_{(1)})\otimes a_{(1)}\otimes b_{(2)} &= \sum \tau(a_{(3)}\otimes b)_{(1)}\otimes a_{(1)}\otimes a_{(2)}\cdot\tau(a_{(3)}\otimes b)_{(2)}\\ &= \sum \tau(a_{(2)}\otimes b)_{(1)}\otimes \mathrm{can}\left(a_{(1)}\otimes\tau(a_{(2)}\otimes b)_{(2)}\right)\end{aligned}$$

现在对这个等式应用 $\mathrm{id}\otimes\tau$，即可得到等式 (3.14)。

定义线性映射

$$\varphi_{(C,H)} : \mathrm{Tn}(C) \to H, \qquad \tau_a^b \mapsto \tau(a\otimes b).$$

注意，这个映射是良定义的，因为对于所有 $c \in C$，$\tau_a^b(c) = 0$ 当且仅当对于所有 $c \in C$，$0 = [c, a, b] = c\cdot\tau(a\otimes b)$。特别地，对于所有 $c \in C$,

$$0 = \sum c_{(1)}\otimes c_{(2)}\cdot\tau(a\otimes b) = \mathrm{can}(c\otimes\tau(a\otimes b)),$$

这意味着 $\tau(a\otimes b) = 0$，因为典范映射是一个同构。

映射 $\varphi_{(C,H)}$ 有逆映射，

$$\varphi_{(C,H)}^{-1} : H \to \mathrm{Tn}(C), \qquad h \mapsto \tau_{e_{(1)}}^{e_{(2)}\cdot h},$$

其中 e 是 C 的任意元素，满足 $\varepsilon(e) = 1$。事实上，$\varphi_{(C,H)}\circ\varphi^{-1}{}_{C\ (,H)} = \mathrm{id}$ 可由 (3.4c) 和 (3.4b) 得出，而另一个恒等式 $\varphi^{-1}{}_{(C,H)}\circ\varphi_{(C,H)} = \mathrm{id}$ 则是引理 2.5 中 (2.8b) 的推论。

$\varphi_{(C,H)}$ 的乘性可由 (3.4c) 得出，因为

$$\varphi_{(C,H)}\left(\tau_a^b\tau_c^d\right) = \varphi_{(C,H)}\left(\tau_a^{[b,c,d]}\right) = \tau(a\otimes b\cdot\tau(c\otimes d)) = \tau(a\otimes b)\tau(c\otimes d).$$

φ的含幺性是引理 2.5 中 (2.8c) 和 (3.4b) 的推论。最后，根据 (3.14)（余乘性）和 (3.4a)（余单位性），$\varphi_{(C,H)}$是一个余代数映射。因此，$\varphi_{(C,H)}$ 是所需的 Hopf 代数同构。

尚需证明 Grunspan 映射的存在性。在根据 (2.6) 推导该映射的必要形式之前，我们先证明余平移映射满足以下等式：

$$\tau(a\cdot\tau(b\otimes c)\otimes d) = S\tau(b\otimes c)\tau(a\otimes d), \tag{3.17}$$

对所有 a、b、c、$d \in C$。首先，对所有 $a \in C$ 和 g、$h \in H$，计算

$$\sum \mathrm{can}(a\cdot g_{(1)}\otimes S(g_{(2)})h) = \sum a_{(1)}\cdot g_{(1)}\otimes a_{(2)}\cdot g_{(2)}S(g_{(3)})h = \sum a_{(1)}\cdot g\otimes a_{(2)}\cdot h.$$

对等式两边应用 τ，可得

$$\varepsilon(a)S(g)h = \sum \tau(a_{(1)}\cdot g\otimes a_{(2)}\cdot h).$$

令 $g = \tau(b\otimes c)$，得到

$$\varepsilon(a)S\tau(b\otimes c)h = \sum \tau(a_{(1)}\cdot\tau(b\otimes c)\otimes a_{(2)}\cdot h).$$

，将此等式应用于 $\sum a_{(1)}\otimes\tau(a_{(2)}\otimes d)$ 而非 $a\otimes h$，我们得出
因此

$$\begin{aligned} S\tau(b\otimes c)\tau(a\otimes d) &= \sum \varepsilon(a_{(1)})S\tau(b\otimes c)\tau(a_{(2)}\otimes d) \\ &= \sum \tau(a_{(1)}\cdot\tau(b\otimes c)\otimes a_{(2)}\cdot\tau(a_{(3)}\otimes d)) \\ &= \tau(a\cdot\tau(b\otimes c)\otimes d), \end{aligned}$$

其中最后一个等式由（3.4d）得出。

由（3.17）、（2.6）和（3.13），我们可以预期 Grunspan 映射具有如下形式:

$$\vartheta : C\to C, \qquad c\mapsto \sum c_{(1)}\cdot S\tau(c_{(3)}\otimes c_{(2)}). \tag{3.18}$$

现在只需检查性质（2.5）是否成立。

我们首先证明余平移映射的另一个性质，即对所有 b、$c\in C$，

$$\sum \tau(b\otimes c_{(1)})S\tau(c_{(3)}\otimes c_{(2)}) = S\tau(c\otimes b). \tag{3.19}$$

为此，我们来考虑映射

$$\psi : C\otimes C\otimes C\to H, \qquad b\otimes c\otimes a\mapsto \sum \tau(b\otimes a_{(1)})S\tau(c\otimes a_{(2)}). \tag{3.20}$$

于是，对所有的 $h\in H$,

$$\psi(b\otimes c\otimes a\cdot h) = \sum \tau(b\otimes a_{(1)})h_{(1)}Sh_{(2)}S\tau(c\otimes a_{(2)}) = \varepsilon(h)\psi(b\otimes c\otimes a),$$

根据 C 是右 H-模余代数以及性质 (3.4c)。鉴于定义 3.1 中的条件 (a)，存在映射 ψ：$C\otimes C\to H$，使得对所有的 a、b、$c\in C$,

$$\bar\psi(b\otimes c\varepsilon(a)) = \psi(b\otimes c\otimes a) = \sum \tau(b\otimes a_{(1)})S\tau(c\otimes a_{(2)}).$$

特别地,

$$\bar\psi(b\otimes c) = \sum \bar\psi(b\otimes c_{(2)}\varepsilon(c_{(1)})) = \sum \tau(b\otimes c_{(1)})S\tau(c_{(3)}\otimes c_{(2)})$$

and

$$\bar\psi(b\otimes c) = \sum \bar\psi(b_{(1)}\otimes c\varepsilon(b_{(2)})) = \sum \tau(b_{(1)}\otimes b_{(2)})S\tau(c\otimes b_{(3)}) = S\tau(c\otimes b),$$

由 (2.10) 可知，因此 (3.19) 得证。

最后，我们可以计算

$$\begin{aligned} [[a,b,\vartheta(c)],d,e] &= \sum a\cdot\tau(b\otimes c_{(1)})S\tau(c_{(3)}\otimes c_{(2)})\tau(d\otimes e) \\ &= a\cdot S\tau(c\otimes b)\tau(d\otimes e) = [a,[d,c,b],e], \end{aligned}$$

其中，第一个等式由 (3.19) 得出，第二个等式则由 (3.17) 得出。至此，定理得证。 □

定义 3.6. 设 (C,H) 是 H 上的右 Hopf-Galois 余对象 C，(D,H) 是 K 上的右 Hopf-Galois 余对象 D。从 (C,H) 到 (D,K) 的态射是满足以下条件的一对映射 (f,g):

(a) f： $C\to D$ 是余代数同态，(b) g： $H\to K$ 是 Hopf 代数同态,

(c) 对所有 $c \in C$ 和 $h \in H$,

$$f(c \cdot h) = f(c) \cdot g(h). \tag{3.21}$$

右 Hopf-Galois 余对象范畴记作 $\mathcal{HG}$

引理 3.7. 若 (f, g) 是从 Hopf-Galois 余对象 (C, H) 到 (D, K) 的态射，则

$$\tau_D \circ (f \otimes f) = g \circ \tau_C, \tag{3.22}$$

其中，τ_C 是 (C, H) 的余平移映射，τ_D 是 (D, K) 的余平移映射。

证明. 对所有 $c \in C$ 和 $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\tau_D \circ (f \otimes f) \circ \mathrm{can}_C(c \otimes h) &= \tau_D \left(\sum f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \cdot h) \right) \\
&= \tau_D \left(\sum f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} \cdot g(h) \right) \\
&= \tau_D \circ \mathrm{can}_D(f(c) \otimes g(h)) \\
&= \varepsilon(c) g(h) = g \circ \tau_C \circ \mathrm{can}_C(c \otimes h),
\end{aligned}$$

因为 f 是余代数映射，由 (3.21) 以及余平移映射的定义 (3.3) 可得。由典范映射 can_C. □ 的双射性，结论成立。

综上，我们得到以下结果:

定理 3.8. 函子

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ga}: &\mathcal{HH} \to \mathcal{HG}, \qquad (C, \chi) \mapsto (C, \mathrm{Tn}(C)), \quad f \mapsto (f, \mathrm{Tn}(f)), \\
\mathrm{He}: &\mathcal{HG} \to \mathcal{HH}, \qquad (C, H) \mapsto (C, \chi_{(C,H)}), \quad (f, g) \mapsto f,
\end{aligned}$$

构成一对逆等价，建立了霍普夫堆范畴与右 Hopf-Galois 余对象范畴之间的等价。

证明. 引理 3.7 保证 He 是一个函子。具体而言，若 (f, g) 是从 (C, H) 到 $\to (D, K)$ 的 Hopf-Galois 余对象态射，则 $f \circ \chi_{(C,H)} = \chi_{(D,K)} \circ (f \otimes f \otimes f)$。容易验证 $\chi_{(C,\mathrm{Tn}(C))} = \chi$，因此 $\mathrm{He} \circ \mathrm{Ga} = \mathrm{id}$。由定理 3.5,

$$\mathrm{Ga} \circ \mathrm{He}(C, H) = (C, \mathrm{Tn}(C)) \cong (C, H),$$

因此，所需的 $\mathcal{HH}$ 中的对象同构由这一对 $(\mathrm{id}^{\varphi_{(C,H)}})$ 给出。确实，这是 $\mathcal{HH}$ 中的一个态射，因为对所有 $a, b, c \in C$,

$$a \cdot \tau_b^c = [a, b, c] = a \cdot \tau(b \otimes c) = a \cdot \varphi_{(C,H)} \left(\tau_b^c \right).$$

这个同构的自然性，也就是说，以下 $\mathcal{HH}$ 中图表的交换性

$$\begin{array}{ccc}
(C, \mathrm{Tn}(C)) & \xrightarrow{(\mathrm{id}, \varphi_{(C,H)})} & (C, H) \\
{\scriptstyle (f, \mathrm{Tn}(f))} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (f, g)} \\
D, \mathrm{Tn}(D)) & \xrightarrow{(\mathrm{id}, \varphi_{(D,K)})} & (D, K),
\end{array}$$

等价于

$$g \circ \varphi_{(C,H)} = \varphi_{(D,K)} \circ \mathrm{Tn}(f).$$

同样，这由引理 3.7 得出。具体而言，对于所有 a、$b \in C$，

$$g \circ \varphi_{(C,H)}\left(\tau_a^b\right) = g\left(\tau_C(a \otimes b)\right) = \tau_D(f(a) \otimes f(b)) \\ = \varphi_{(D,K)}\left(\tau_{f(b)}^{f(a)}\right) = \varphi_{(D,K)} \circ \mathrm{Tn}(f)\left(\tau_a^b\right).$$

这就完成了该定理的证明。 □

结合全文的讨论，我们得到 [11] 的主要结果的以下对偶版本。

推论 3.9. 每个 Hopf 堆都存在 Grunspan 映射。

证明. 根据定理 2.6，可以为任意 Hopf 堆 (C, χ) 关联一个双代数 Tn(C)。根据定理 3.3，它具有 Hopf-Galois 余对象，因此是一个 Hopf 代数（见推论 3.4）。定理 3.5 保证相应的 Hopf 堆 $(C, \chi_{(C,\mathrm{Tn}(C))})$ 存在 Grunspan 映射；又由于 $\chi_{(C,\mathrm{Tn}(C))} = \chi$ 根据定理 3.8（的证明），结论得证。具体而言，Grunspan 映射定义如下：

$$\vartheta : C \to C, \qquad c \mapsto \sum [c_{(1)}, [e_{(1)}, c_{(3)}, c_{(2)}], e_{(2)}],$$

其中 $e \in C$ 是满足 $\varepsilon(e) = 1$的任意元素。 □

Acknowledgements

本研究部分由波兰国家科学中心资助，资助编号为 2019/35/B/ST1/01115。

References

[1] R. Baer，《关于簇概念的引入》，《纯粹与应用数学杂志》160 (1929)，199–207。[2] S. Breaz、T. Brze´nski、B. Rybo lowicz 和 P. Saracco，《模堆与仿射空间》，arXiv:2203.07268 (2022)[3] T. Brzezi´nski 和 R. Wisbauer，《余环与余模》，剑桥大学出版社，剑桥 (2003)。[4] C. Grunspan，《量子扭子》，《纯粹与应用代数杂志》184 (2003)，229–255。[5] H. F. Kreimer 和 M. Takeuchi，《Hopf 代数与代数的伽罗瓦扩张》，《印第安纳大学数学杂志》30 (1981)，675–692。[6] J. Pradines，《循 Ehresmann 的足迹：从群几何到群胚几何》，[载于：]《流形的几何与拓扑》，Banach 中心出版物，76，华沙，2007，87–157。[7] H. Pr¨ufer，《阿贝尔群理论 I：基本性质》，《数学杂志》20 (1924)，165–187。[8] P. Schauenburg，《Hopf 双伽罗瓦扩张》，《代数通讯》24 (1996)，3797–3825。[9] P. Schauenburg，《容许 Hopf-Galois 扩张的双代数是 Hopf 代数》，《美国数学会会刊》125 (1997)，83–85。[10] P. Schauenburg，《量子扭子与 Hopf-Galois 对象》，arXiv:math/0208047 (2002)[11] P. Schauenburg，《公理更少的量子扭子》，arXiv:math/0302003 (2003)[12] P. Schauenburg，《Hopf-Galois 与双伽罗瓦扩张》，载于《伽罗瓦理论、Hopf 代数与半阿贝尔范畴》，Fields 研究所通讯，43，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州 (2004)，第 469–515 页。[13] H.-J. Schneider，《任意 Hopf 代数的主齐性空间》，《以色列数学杂志》72 (1990)，167–195。[14] Z. ˇSkoda，《量子堆、cops 与堆范畴》，《数学通讯》12 (2007)，1–9。

Department of Mathematics, Swansea University,
Swansea University Bay Campus,Fabian Way, Swansea, Swansea SA1 8EN, U.K.
Faculty of Mathematics, University of Białystok, K. Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok, Poland电子邮箱：T.Brzezinski@swansea.ac.uk

Faculty of Mathematics, University of Białystok, K. Ciołkowskiego 1M, 15-245Białystok, Poland电子邮箱地址：margitt@math.uwb.edu.pl