arXiv:2303.13179v1 [math.LO] 23 Mar 2023

不可数集、幂集与集合宇宙之间的一些结构相似性

Athanassios Tzouvaras

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，
塞萨洛尼基 541 24，希腊；电子邮件：
tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们阐明不可数基数或幂集与所有集合构成的类 V 之间的一些相似性或类比。它们主要涉及布尔代数 $\mathcal{P}(\kappa)$（其中 κ 是正则基数），以及 $\mathcal{C}(V)$（集合宇宙 V 的子类构成的类），并为它们赋予一些理想，尤其是适用于 $\mathcal{P}(\kappa)$ 的理想 $[\kappa]^{<\kappa}$，以及适用于 $\mathcal{C}(V)$ 的集合理想 V。

数学主题分类（2020）：03E05，03E20。

关键词：不可数基数、集合/类的可达理想、序关系的单子二阶语言。

1 引言

本文大致属于与 [6] 和 [8], 相同的思想脉络：一方面，它们试图阐明无限集幂集的结构；另一方面，在哲学层面上，它们表达了对幂集公理（Pow）的怀疑态度。所谓幂集公理，即断言无限集的子集集族是一个集合（而非真类）。同一思路还包括 [9], ，该文提出，最好用局部（因而是相对化的）版本取代幂集公理和替换公理（尤其是前者），从而得到整个 ZFC 的局部版本。不过，本文的研究方法有所不同：我们关注的是一般意义上的不可数集与

全集之间的关系和相似之处，而不仅仅是幂集。由于幂集的存在与不可数集的存在之间的联系似乎有些模糊，在进入论文主体之前，我想先对此作简要阐述。

众所周知，幂集与不可数集通过著名的康托尔定理密切相关：每个无限幂集都是不可数的。然而，这种联系似乎是单向的：众所周知，不可数集的存在与 Pow的失败（相对）相容。例如，如果 $M \models \mathsf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$，那么

$$H_{\omega_2}^M \models \mathrm{ZFC}^- + \text{“}\omega_1 \text{ exists”} + \text{“}\mathcal{P}(\omega) \text{ does not exist”},$$

其中 $H_{\omega_2} = \{x : |TC(x)| < \aleph_2\}$，且 $\mathsf{ZFC}^- = \mathsf{ZFC} - \{Pow\}$。因此，若 Unc表示不可数集存在，则 $\mathsf{ZFC}^- + Unc \nvdash Pow$，也就是说， Pow在 ZFC^-中相对于 Unc 是形式上独立的。

问题在于，与 M的居民不同，$H_{\omega_2}^M$的居民完全不知道不可数 ω_1 是如何产生的。 M 的居民有一种自然的方法来构造 ω_1以及其他不可数基数：他们考察 ω的所有良序组成的集族 $WO(\omega)$，它是 $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$的子集族。由于后者根据 Pow是一个集合， $WO(\omega)$也根据分离公理是一个集合。接着，他们取集合 $WO(\omega)/\cong$，即$WO(\omega)$的同构类型集合，由此得到 ω_1。但对$H_{\omega_2}^M$的居民而言， $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$只是一个真类。诚然，他们可以在$H_{\omega_2}^M$中将 $WO(\omega)$定义为$\mathcal{P}(\omega \times \omega)$的子类。但他们甚至无法定义 $WO(\omega)/\cong$，因为 ω 的每一种良序同构类型都包含连续统多个元素，因此它也是真类。于是， ω_1 成了$H_{\omega_2}^M$中一个完全偶然的对象，仿佛纯粹碰巧存在于那里。

或者，如果我们从一个模型 $N \models \mathsf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 开始，那么

$$H_{\omega_2}^N \models \mathrm{ZFC}^- + \text{“}\mathcal{P}(\omega) \text{ exists”} + \text{“}\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \text{ does not exist”},$$

而现在， $H_{\omega_2}^N$ 的居民面临的问题是，要解释不可数集 $\mathcal{P}(\omega)$ 是如何出现的，因为运算 $\mathcal{P}(x)$ 并非对所有集合都有定义。

在 ZF 中， Pow 所起的作用与皮亚诺算术（PA）的（子系统）中指数公理（Exp）所起的作用颇为相似。 Exp 是一个（用 PA 的语言表述的）句子，即 $\forall x, y \exists z (x^y = z)$，或者更简单地说， $\forall x \exists y (2^x = y)$。如果 $\mathrm{I}\Sigma_n$ 表示 PA 的一个片段，它由 PA 的初等公理以及仅限于 Σ_n 公式的归纳模式组成，那么众所周知， Exp 可在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 中证明，却无法在 $\mathrm{I}\Sigma_0$中证明。更确切地说，$\mathrm{I}\Sigma_0 < \mathrm{I}\Sigma_0 + Exp < \mathrm{I}\Sigma_1$（对于理论 T_1、 T_2， $T_1 < T_2$ 表示 T_2 严格强于 T_1）。粗略地说，相对于 $\mathrm{I}\Sigma_0$， Exp 的地位，就如同 Pow

相对于 ZF$^-$的地位；而不可数集类似于算术中的“非常大”的数。唯一的区别是，不可数集有一个精确定义（大小严格大于 $\aleph_0$的集合），而“非常大”的数则没有。直观地说，如果对于某个“很大”的 b， $a \geq 2^b$ ，那么 a 就是“非常大”的。众所周知，$\mathrm{I}\Sigma_0$ 的模型在 $+$ 和 $\cdot$ 运算下封闭，但一般而言，在乘方运算下并不封闭。尤其是，运算 x^y 在这些模型中只部分有定义。尽管如此，仍存在一些 $\mathrm{I}\Sigma_0 + \neg Exp$ 的（非标准）模型（例如参见 [5], 定理 4.3、4.4），尽管 Exp不成立，它们仍可能包含某个任意的非标准数 a对应的2^a 。由于缺少完整的乘方运算，模型中的成员只能将 2^a 的存在看作偶然现象，恰如前文提到的，在 ZFC$^-$ 的模型 $H^M_{\omega_2}$ 中，基数 ω_1 也被视为偶然存在。

前文讨论的结论是，幂集与不可数性之间的联系并非单向。事实上，如果我们每次遇到不可数集时，都会探寻其出现的原因和根源，那么二者实际上是双向依存的。

既然我们已经论证， Pow 直接或间接地导致了不可数集的存在，那么，要强化对这一公理的怀疑态度，一个合理的做法便是提出具体的数学事实，以确立不可数集与全体集合构成的全集 V之间的特定相似性或类比。这正是本文所要做的。具体而言，我们比较无限基数 κ的布尔代数 $\mathcal{P}(\kappa)$与 V的子类所构成的布尔代数 $\mathcal{C}(V)$，并指出其中的若干相似之处。这些相似之处分为三类：(a) 集合论的，(b) 代数的，以及(c) 序理论的。在比较集合论和代数方面的事实时，某些理想发挥着关键作用，即用于 $\lambda \leq \kappa$的理想 $[\kappa]^{<\lambda}$，以及特别是基数情形下的$[\kappa]^{<\kappa}$；此外还有用于 $\mathcal{C}(V)$的集合 V 所构成的理想。我们将在不同章节中分别讨论这三类相似之处。

内容概要。第 2 节讨论一种特定的集合论相似性。主要结果如下：

(a) $\mathcal{C}(V)$ 上的理想 V 以一种自然且精确定义的方式是极小的。此外，它还是这类理想中唯一的极小理想（定理 2.5）。

(b) 对每个正则基数 κ， $\mathcal{P}(\kappa)$ 上的理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 在上述意义下是极小的，而且也是这类理想中唯一的极小理想（定理 2.6）。

(c)（与 (b) 形成鲜明对比），对每个奇异基数 κ， $\mathcal{P}(\kappa)$ 上都不存在上述意义下的极小理想（定理 2.11）。

在第3节中，我们讨论代数相似性。具体而言，我们比较带有理想 $[\kappa]^{<\lambda}$ 的布尔代数 $\mathcal{P}(\kappa)$，其中任意

$\aleph_0 \leq \lambda \leq \kappa$，与带有理想 V 的布尔代数 $\mathcal{C}(V)$。利用 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈，可以证明这些结构在初等意义下等价，即 $\langle \mathcal{P}(\kappa)[\kappa]^{<\lambda} \rangle \equiv_{L_b(S)} \langle \mathcal{C}(V)\ V \rangle$，其中 $L_b(S)$ 是增添了一元谓词 $S(\cdot)$ 的布尔代数语言。

在第 4 节中，我们讨论序理论相似性。为方便起见，我们借助冯·诺伊曼的全局选择 vN，将 V 与序数类 On 等同起来，并比较一阶结构 $\langle \kappa, < \rangle$ 和 $\langle On, < \rangle$，其中 $<$ 是 On 和 κ 的自然良序（即 $\in$）。在扩展 [2] 和 [7] 的结果后，我们证明 $\langle \kappa, < \rangle \equiv_{L_{ord}} \langle On, < \rangle$，其中 L_{ord} 是序的一阶语言。我们进一步将这种等价加强为 $\langle \kappa, <, \mathsf{Cof}(\kappa) \rangle \equiv^{\forall^1_1}_{pos} \langle On, <, \mathsf{Cof}(On) \rangle$，其中 $\mathsf{Cof}(\kappa)$（分别是 $\mathsf{Cof}(On)$）表示 $\langle \kappa, < \rangle$ 的共尾子集类（分别是 $\langle On, < \rangle$ 的共尾子类），而 $\equiv^{\forall^1_1}_{pos}$ 表示关于单子（二阶）语言 L_{mon} 的所有正 $\forall^1_1$ 公式的初等等价；该语言是用集合变量和 $\in$ 扩充的 L_{ord}。

一些记号约定。为了讨论V 的子类，我们需要在类理论（而非 ZFC）中工作，例如带选择公理的 G¨odel-Bernays 理论 GBC。因此，本文的基础理论将始终是 GBC 或 ZFC。关于在 GBC 中所有 V 的子类构成的集族 $\mathcal{C}(V)$，它实际上是一个“虚拟的”即句法实体，因为若要将其作为外延对象纳入理论，就需要三阶集合论。不过这并不是一个严重的问题。我们总能用模型论术语来处理 $\mathcal{C}(V)$，也就是说，设想我们在 GBC 的任意模型 $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{M} \rangle$ 中工作，其中 M 包含集合，而 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathfrak{M}$ 的类。那么 $V^{\mathfrak{M}} = M$，而 $\mathcal{C}(V)^{\mathfrak{M}} = \mathcal{M}$。因此，$\mathcal{C}(V)$ 只是类变量的值域，并且与 $\mathcal{P}(A)$ 一样，是一个原子布尔代数。另一方面，当我们讨论 $\mathcal{C}(V)$ 的理想时，这些理想是集族 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}(V)$，它们总是由一个含有一个自由类变量的公式 $\phi(X)$ 定义。

我们在上文已经使用了记号 $[\kappa]^{<\lambda}$。一般而言，对于任意集合 A 和基数 $\kappa \leq |A|$，我们令

$$[A]^{<\kappa} = \{x \subseteq A : |x| < \kappa\}^1, \quad [A]^{\leq\lambda} = \{x \subseteq A : |x| \leq \lambda\}.$$

此外，鉴于 AC，我们可以将每个幂集 $\mathcal{P}(A)$与一个基数2^κ对应起来，并将 $\mathcal{P}(2^\kappa)$记作 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$，将 $[2^\kappa]^{<\lambda}$ 记作 $[\mathcal{P}(A)]^{<\lambda}$，以此类推。

[1]这个集合通常也记作 $\mathcal{P}_\kappa(A)$。

2 集合宇宙与正则基数之间的集合论相似性：可达理想的极小性与唯一性

全文中，大写字母 X, Y 用作 GBC 语言中的类变量，而小写字母 x, y 表示集合（类的元素）。对于两个类 X,Y，令 $|X| = |Y|$ 表示 X 与 Y等势，也就是说，它们之间存在一个双射。公理 vN 断言所有真类都等势，或者等价地说 $|V| = |On|$。遵循引言中约定的记法，我们将 $2^{\aleph_0}$ 记作 $\mathcal{P}(\omega)$，一般地，将 2^{κ} 记作 $\mathcal{P}(\kappa)$。

可定义类通常由带有集合变元的公式 $\phi(x)$ 生成，即 $X = \{x : \phi(x)\}$。但也允许类的类，前提是它们由带有类自由变元的公式 $\phi(X)$ 定义。我们用花体字母 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ 表示这类，并将其视为句法对象，也就是说，$\mathcal{I}, \mathcal{J}$ 可以看作公式，而写作 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ 时，我们仅指 $(\forall X)(\mathcal{I}(X) \to \mathcal{J}(X))$。对于任何这样的 $\mathcal{I}$，都有 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}(V)$，其中 $\mathcal{C}(V)$ 是 V 的所有子类组成的类。给定一个类 X，$\mathcal{C}(X)$ 上的理想（或 X 上的理想）是一个类 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}(X)$，满足：

(i) 若 $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$，则 $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{I}$；(ii) 若 $Y \in \mathcal{I}$ 且 $Z \subseteq Y$，则 $Z \in \mathcal{I}$；(iii) $\mathcal{I}$ 是真理想，即 $X \notin \mathcal{I}$。

显然，V 是 $\mathcal{C}(V)$的理想。

2.1 类和集合关于理想的可达性

类 X 上的（全）预序是一种二元关系 4，它具有自反性、传递性和全性；其中，全性是指对于所有 x，$y \in X$ $x \preccurlyeq y$或 $y \preccurlyeq x$。$x \prec y$ 表示 $x \preccurlyeq y$ 和 $x \neq y$。若再加入反对称性，预序便成为线性序。为避免平凡情形，以下始终假设，没有预序类 $\langle X, \preccurlyeq \rangle$ 具有最大元。给定预序 $\langle X, \preccurlyeq \rangle$ 和 $x \in X$，$\preccurlyeq_x$ 表示由 x确定的X 的初始段，即 $\preccurlyeq_x = \{y \in X : y \preccurlyeq x\}$。若一个 $Y \subseteq X$ 满足以下条件，则称其相对于 4 有界：存在 $x \in X$ 使得 $Y \subseteq \preccurlyeq_x$。无界的 $Y \subseteq X$也称为共尾。对于 X的每个预序 4，X 的有界子集构成 $\mathcal{C}(X)$的一个自然理想，记作 $Seg(4)$，也就是说

$$Seg(\preccurlyeq) = \{Y \subset X : \exists x \in X(Y \subseteq \preccurlyeq_x)\}.$$

由于 $\langle X, \preccurlyeq \rangle$ 没有最大元，因此理想 $Seg(4)$ 是真理想。

定义 2.1（GBC 或 ZFC）设 $\mathcal{I}$ 是类或集合 X上的理想。

(1) 如果存在 X 的一个预序 4，使得 $Seg(4) \subseteq \mathcal{I}$，则称 $\mathcal{I}$ 是 X 的可达理想，或称 X 是 $\mathcal{I}$-可达的。在这种情况下，称 4 为 $\mathcal{I}$-预序。

(2) 如果理想 $\mathcal{I}$ 是 X 的可达理想，并且对于任意理想 $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}, X$，$\mathcal{J}$ 都不是可达的，则称 $\mathcal{I}$ 是 X 的极小可达理想，或简称极小理想。

显然，X 的每个预序 4 都是一个 $Seg(4)$-预序。请注意，尽管前述定义可以在 GBC 或 ZFC 中表达（当 X 和 $\mathcal{I}$ 是可定义对象时），但这并不意味着在这些理论中，对于给定的 X 和 $\mathcal{I}$，也能判定 (a) X 是否是 $\mathcal{I}$-可达的，以及 (b) $\mathcal{I}$ 是否是 X 的极小理想。这些通常是相对事实，取决于我们所处的 GBC/ZFC 模型。例如，正如下文将要看到的，当且仅当 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 时，基数 $2^{\aleph_0}$ 才能由其可数子集构成的理想 $[2^{\aleph_0}]^{\leq \aleph_0}$ 可达。此外，在后一种情况下，$[2^{\aleph_0}]^{\leq \aleph_0}$ 是 $2^{\aleph_0}$ 的唯一极小可达理想。更一般地，如果 $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中成立且 $\aleph_\alpha$ 是正则的，那么 $[2^{\aleph_0}]^{<\aleph_\alpha}$ 就是 $\mathfrak{M}$ 中 $2^{\aleph_0}$ 的唯一极小可达理想。相反，如果 $\aleph_\alpha$ 是奇异的，那么 $2^{\aleph_0}$ 是 $[2^{\aleph_0}]^{<\aleph_\alpha}$-可达的，但 $2^{\aleph_0}$ 没有极小可达理想。

另一方面，根据正则公理以及由此在全集上诱导的 V-预序 $x \preccurlyeq_r y \Leftrightarrow rank(x) \leq rank(y)$，类 V 无论底层模型如何，都是 V-可达的。[2] 类似地，对于每个正则基数 κ，都可以证明 κ 是 $[\kappa]^{<\kappa}$-可达的。更重要的是，下面将证明：理想 V 和 $[\kappa]^{<\kappa}$ 都是 (a) 极小可达理想，并且 (b) 分别是 V 和任意正则 κ 的唯一极小可达理想。

毋庸置疑，对于 V，以及任意基数 κ，都存在大量可达理想，它们具有 $Seg(4)$ 的形式，其中 4 是 V 或 κ 上的各种预序，因此，证明这类理想的极小者存在，进而证明唯一极小者存在，绝非易事。例如，将 κ 划分为有限或无限多个部分，再将这些部分重新排列成任意全序，同时保持每个部分原有的序。这样便得到 κ 上的一个全序，进而得到与之对应的一个可达理想。

根据定义 2.1，如果模型 $\mathfrak{M}$ 中的类 X 对理想 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{I}$-可达的，那么 $\mathfrak{M}$ 中存在 X 的一个预序 [4]，使得每个

[2]事实上，正是由于这一事实，我们才在上文给出的可达性 2.1 定义中使用预序，而不是全序或良序。

X 的 ^{4}-有界集合都属于 $\mathcal{I}$，即，

$$\mathfrak{M} \models (\forall Y \subseteq X)(Y \text{ is } \preccurlyeq\text{-bounded} \rightarrow Y \in \mathcal{I}). \tag{1}$$

这个定义显然允许理想 $\mathcal{I}$ 也包含 X 的无界子集。不过，若 $\mathcal{I}$ 是极小的，则 (1) 的逆命题也成立。具体而言，有如下结论。

引理 2.2 设 $\mathfrak{M} \models$ 满足 GBC，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中可定义类 X 的极小可达理想。那么，对于 X 的任意 $\mathcal{I}$-预序 $\preccurlyeq \in \mathfrak{M}$：

$$\mathfrak{M} \models (\forall Y \subseteq X)(Y \textit{ is } \preccurlyeq\textit{-bounded } \leftrightarrow \ Y \in \mathcal{I}).$$

证明。一个方向由定义 2.1 得出。反过来，假设存在 X 的一个 $\mathcal{I}$-预序 $\preccurlyeq \in \mathfrak{M}$，使得 $\mathcal{I}$ 包含一个在 $\langle X, \preccurlyeq\rangle$ 中无界的集合 $Y_0 \subseteq X$。那么 $\mathcal{I}$ 就不是 X 的极小可达理想。因为 X 是 Seg(4)-可达的，且 Seg(4) $\subsetneq \mathcal{I},$，因为 $Y_0 \in \mathcal{I} \backslash Seg$ (4)。⊣

V 的可达理想 V 的极小性与唯一性

定理 2.3 (GBC) 类 V 是 V 的极小可达理想。

证明。根据 GBC 的正则公理，关系 $x \preccurlyeq y$ iff $rank(x) \leq rank(y)$ 是一个 V-预序，因此 V 在 GBC 中是 V-可及的。为证明 V 的极小性，设 $\mathcal{J}$ 是 V 上任意一个满足 $\mathcal{J} \subsetneq V$ 的理想。只需证明 V 不可 $\mathcal{J}$-及。反设成立，设 $\preccurlyeq_1$ 是 V 上的一个预序，使得对每个 $x \in V$，都有 41,$_x \in J$。取一个 $z \in V \backslash \mathcal{J}$。如果 z 在 $\langle V$ 中共尾，那么 $\preccurlyeq_1\rangle$，$V = \bigcup_{x \in z} \preccurlyeq_{1,x}$；又由于对每个 x，都有 41, $_x \in \mathcal{J} \subseteq V$，根据替换公理和并集公理，$\bigcup_{x \in z} \preccurlyeq_{1,x} = V$ 将是一个集合，这就产生了矛盾。另一方面，如果 z 在 $\langle V$ 中不共尾，那么对某个 x，应有 $\preccurlyeq_1\rangle$，$z \subseteq \preccurlyeq_{1,x}$，因此 $z \in \mathcal{J}$，因为 41,$_x \in \mathcal{J}$，再次产生矛盾。⊣

事实上，V 不仅是 V的一个极小可达理想，而且是唯一的极小可达理想。首先，我们需要选择公理 AC的以下一个简单推论。这个结论颇为人所熟知，不过为了方便读者，我们仍在此给出证明。

引理 2.4（GBC）设 X 是一个真类。那么对每个基数 κ，都存在集合 $b \subset X$，使得 $|b| = \kappa$。

证明。给定真类 X，令 $R = \{rank(x) : x \in X\}$。 R 是一个序数真类，而在 GB 中，对每个这样的类，都存在严格递增枚举 $R = \{\alpha_\xi : \xi \in On\}$，即存在双射 $F : On \to R$，使得 $\xi < \zeta \Leftrightarrow F(\xi) < F(z)$。（证明如下：令 S 为满足以下条件的集合函数 f 所成的类：$dom(f) = \xi \in On$，$rng(f) \subset R$，且对每个 $\delta \in dom(f)$，都有 $f(\delta) = \min(R \backslash \{f(\gamma) : \gamma < \delta\})$。$S$ 由一个正则公式定义，因此是 GB 中的一个类。然后按如下方式定义 $F : On \to R : F(\xi) = \alpha \Leftrightarrow (\exists f \in S)(\xi \in dom(f) \wedge f(\xi) = \alpha)$。）如果 $d_\xi = X \cap (V_{\alpha_\xi + 1} \backslash V_{\alpha_\xi})$，那么 $\{d_\xi : \xi \in On\}$ 是一个由非空互不相交集合组成的真类。令 $s = \{d_\xi : \xi < \kappa\}$。$s$ 是一个由非空集合组成的集合，因此根据 AC，它有一个选择函数f。如果 $b = f[s]$，那么 b 就符合要求。⊣

定理 2.5 (GBC) V 是 V的唯一极小可达理想。

证明。为导出矛盾，假设 $\mathcal{I} \neq V$ 是 V的另一个极小可达理想。则不可能有 $V \subseteq \mathcal{I}$；因为既然 $\mathcal{I} \neq V$，那就意味着 $V \subsetneq \mathcal{I},$，这与 $\mathcal{I}$的极小性矛盾。因此$V \not\subseteq \mathcal{I}$。取一个集合 $a \in V \backslash \mathcal{I}$，并固定 V的一个 $\mathcal{I}$-预序 4。（请记住，全文使用的所有预序都没有最大元。）只需构造 V的一个预序 $\preccurlyeq_1$，使得 $Seg(\preccurlyeq_1) \subsetneq \mathcal{I},$，从而与 $\mathcal{I}$的极小性矛盾。

首先注意，集合 $a \in V \backslash \mathcal{I}$必须在 $\langle V$中共尾，$\preccurlyeq \rangle$；否则，对某个 x，有$a \subseteq \preccurlyeq_x$，因而 $a \in \mathcal{I}$，因为 $\preccurlyeq_x \in \mathcal{I}$。此外，对某个 $x \in a$，$\preccurlyeq_x$ 必须是真类，否则 $V = \bigcup_{x \in a} \preccurlyeq_x$ 会是一个集合。固定一个元素 $x_0 \in a$，使得 $\preccurlyeq_{x_0}$ 是真类，并令 $X = \preccurlyeq_{x_0}$。再令$Y = V \backslash X$ 为由 x_0确定的$(V, 4)$的终段。于是我们可以写作

$$V = X \uplus Y \tag{2}$$

对于将初始段和终段作有序不交并，而 x_0 将 $\langle V, \preccurlyeq \rangle$ 分开的情形。我们将构造一个预序 $\preccurlyeq_1$，使得若 $J = Seg(\preccurlyeq_1)$，则 $J \subsetneq \mathcal{I}$。令 $a^* = a \cap Y$。由于 a 在 4 中共尾且为无限（因为 4 没有最大元），a^* 也如此。令 $|a^*| = \kappa$，并令 $a^* = \{y_\xi : \xi < \kappa\}$。利用引理 2.4，从真类 X 中选取子集 b，使得 $|b| = |a^*| = \kappa$，并令 $b = \{z_\xi : \xi < \kappa\}$。思路是将 b 从 X 中切分出来，并使其在新的预序 $\preccurlyeq_1$，中共尾，同时让 4 在 V 的其余部分上保持不变。若定义 $\preccurlyeq_1$，使得 $\preccurlyeq_1$ 在 $V \backslash b$ 上与 4 一致，而 b 和 a^* 相对于 $\preccurlyeq_1$ 都共尾趋近于 V（且彼此共尾），便可实现这一点。因此令

$$R = [\preccurlyeq \cap (V \backslash b)^2] \cup \{\langle y_\xi, z_\xi \rangle, \langle z_\xi, y_\xi \rangle : \xi < \kappa\},$$

并令 $\preccurlyeq_1$ 为二元关系 R 的传递闭包，即，若存在 y 使得 $\langle x,y\rangle$ 和 $\langle y,z\rangle$ 属于 $\preccurlyeq_1$，则 $\langle x,z\rangle \in \preccurlyeq_1$。根据此定义，对所有 $\xi<\kappa$，都有 $y_\xi \preccurlyeq_1 z_\xi$ 和 $z_\xi \preccurlyeq_1 y_\xi$；并且 $\preccurlyeq_1$ 是 V 上的一个预序，它与 (2) 类似，将 V 分解为有序并

$$V=(X\backslash b)\uplus(Y\cup b), \tag{3}$$

其中 $X\backslash b$、Y和 b 两两不相交。此外，$a^*\subseteq Y$，因此 $a^*\cap b=\emptyset$和 a^* 在 $\langle V$中共尾，$\preccurlyeq_1\rangle$。令

$$\mathcal{J}=Seg(\preccurlyeq_1)=\{Z:(\exists w)(Z\subseteq\preccurlyeq_{1,w})\}.$$

我们先证明 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$。令 $Z\in\mathcal{J}$，并令$Z\subseteq\preccurlyeq_1$、$_w$，其中某个 w。我们将证明 $Z\in\mathcal{I}$。根据（3）中将 V 表示为有序并的图示，Z可写成不相交并 $Z=X_1\cup X_2\cup x_3$，其中 $X_1\subseteq X\backslash b$、$X_2\subseteq Y$和 $x_3\subseteq b$。由于 $X\backslash b$ 和 b 已经属于 $\mathcal{I}$，可得 X_1、$x_3\in\mathcal{I}$。剩下要证明 $X_2\in\mathcal{I}$。我们有 $X_2\subseteq Y$且 $X_2\subseteq\preccurlyeq_1$、$_w$。显然，$w\in Y$或 $w\in b$。若 $w\in Y$，那么由于 4 和 $\preccurlyeq_1$ 在 Y上一致，我们有 $X_2\subseteq\preccurlyeq_w$，因此 $X_2\in\mathcal{I}$，因为 4 是一个 $\mathcal{I}$-预序。假设 $w\in b$，于是某个 $\xi<\kappa$ 使得 $w=z_\xi$。根据定义，$z_\xi\preccurlyeq_1 y_\xi$，其中 $y_\xi\in a^*\subseteq Y$，即 $y_\xi\in Y$。那么 $X_2\subseteq\preccurlyeq_1$、$_{z_\xi}\subseteq\preccurlyeq_1$、$_{y_\xi}$。由于如前所述 $y_\xi\in Y$，故 $X_2\subseteq\preccurlyeq_{y_\xi}$，从而再次得到 $X_2\in\mathcal{I}$。因此，Z 的三个部分 X_1、X_2、x_3 都属于 $\mathcal{I}$，进而 $Z\in\mathcal{I}$。这就证明了 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$。另一方面，$b\notin\mathcal{J}$，因为它在 $\preccurlyeq_1$, 中共尾，而 $b\in\mathcal{I}$ 是 X 的子集，且 X 属于 $\mathcal{I}$。因此 $\mathcal{J}\subsetneq\mathcal{I}$。这与 $\mathcal{I}$ 的极小性矛盾，证明至此完成。⊣

基数上的可达理想的极小性与唯一性

在考察幂集上的可达理想，也就是基数 2^κ 上的可达理想之前，我们必须先考察一般不可数基数上的可达理想。我们将看到，在这个问题上，正则基数与奇异基数之间存在显著差异。我们先讨论正则基数。

定理 2.6（ZFC）设 κ 是一个不可数基数，$<$ 是其自然良序。则:

(a) $Seg(<)=[\kappa]^{<\kappa}$ 当且仅当 κ 是正则的。(b) 若 κ 是正则的，则 $[\kappa]^{<\kappa}$ 是 κ 的一个极小可达理想。(c) 此外，若 κ 是正则的，则 $[\kappa]^{<\kappa}$ 是 κ 的唯一极小可达理想。

证明。（a）首先，对于每个 κ, $Seg(<)\subseteq[\kappa]^{<\kappa}$。假设 κ 是正则的且 $x\in[\kappa]^{<\kappa}$。那么 x 在 $\langle\kappa$ 中有界，$<\rangle$，因此 $x\in Seg(<)$，所以 $[\kappa]^{<\kappa}\subseteq$

$Seg(<)$，因此 $Seg(<) = [\kappa]^{<\kappa}$。反过来，若 κ 不是正则的，则存在 $x \subset \kappa$ 在 $\langle \kappa$ 中共尾，$<\rangle$ 满足 $|x| < \kappa$。因此 $x \in [\kappa]^{<\kappa} \backslash Seg(<)$，从而 $Seg(<) \subsetneq [\kappa]^{<\kappa}$。

(b) 设 κ 是正则的，并假设 $[\kappa]^{<\kappa}$ 对于 κ 不是极小的，即存在一个理想 $\mathcal{I} \subsetneq [\kappa]^{<\kappa}$ 和一个针对 κ 的 $\mathcal{I}$- 预序 4。取 $x \in [\kappa]^{<\kappa} \backslash \mathcal{I}$。那么 x 在 $\langle \kappa$ 中共尾，$\preccurlyeq\rangle$，因为否则对某个 $\xi \in \kappa$ 有 $x \subseteq \preccurlyeq_\xi \in \mathcal{I}$，从而 $x \in \mathcal{I}$，矛盾。这意味着 $\kappa = \bigcup_{\xi \in x} \preccurlyeq_\xi$。但对每个 ξ，$|\preccurlyeq_\xi| < \kappa$ $\preccurlyeq_\xi \in \mathcal{I} \subseteq [\kappa]^{<\kappa}$ $|x| < \kappa$，因为，并且。这显然与 κ 的正则性矛盾。

(c) 设 κ 是正则的。证明 $[\kappa]^{<\kappa}$ 是 κ 的唯一极小理想，与定理 2.5 中关于 V 的相应结论的证明相当类似，因此我们只作简要概述。设 $\mathcal{I} \neq [\kappa]^{<\kappa}$ 是 κ 的另一个极小可达理想，并固定一个 κ 的 $\mathcal{I}$-预序 4。若 $[\kappa]^{<\kappa} \subseteq \mathcal{I}$，则 $[\kappa]^{<\kappa} \subsetneq \mathcal{I}$，因此 $\mathcal{I}$ 不会是极小的。所以 $[\kappa]^{<\kappa} \not\subseteq \mathcal{I}$。取 $a \in [\kappa]^{<\kappa} \backslash \mathcal{I}$。那么，如同定理 2.5 的证明，$a$ 在 $\langle \kappa$ 中共尾，$\preccurlyeq\rangle$，且对某个 $x \in a$，$|\preccurlyeq_x| = \kappa$。因为 $\kappa = \bigcup_{x \in a} \preccurlyeq_x$，且 $|a| < \kappa$，所以若对所有 $x \in \kappa$ 都有 $|\preccurlyeq_x| < \kappa$，则 κ 将是奇异的。固定这样一个 $x_0 \in \kappa$，并令 $X = \preccurlyeq_{x_0}$，于是 $|X| = \kappa$，$Y = \kappa \backslash X$，且 $a^* = a \cap Y$。令 $|a^*| = \lambda < \kappa$，并取满足 $|b| = |a^*| = \lambda$ 的 $b \subset X$。再令 $a^* = \{y_\xi : \xi < \lambda\}$，以及 $|b| = \{z_\xi : \xi < \lambda\}$。我们完全仿照定理 2.5 中的方式，定义 κ 的一个预序 $\preccurlyeq_1$，使 b 在 $\langle \kappa$ 中共尾，$\preccurlyeq_1\rangle$，并使 κ 写成

$$\kappa = (X \backslash b) \uplus (Y \cup b),$$

其中 $X \backslash b$、Y 和 b 两两不相交。若 $\mathcal{J} = Seg(\preccurlyeq_1)$，则如前所示，$\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I},$，这与 $\mathcal{I}$的极小性矛盾。⊣

现在谈到幂集时，定理 2.6 (c)让位于以下变体，该变体断言的是相容性而非可证明性。

定理 2.7 (ZFC) 对任意 $\kappa \geq \aleph_0$ 和任意正则 $\lambda > \kappa$，相信 $[2^\kappa]^{<\lambda}$ 是2^κ上唯一的极小可达理想是（相对）相容的。

证明。众所周知，以下命题与 ZFC 相容：$\lambda > \kappa$ 是正则的，且 $2^\kappa = \lambda$。这是通过标准的 Cohen 强迫扩张 $\mathfrak{m}$ 得到的，在该扩张中 $\lambda = 2^\kappa$ 仍然是正则的。因此，由定理 2.6 (c)可知，在 $\mathfrak{m}$中，$[2^\kappa]^{<\lambda} = [\lambda]^{<\lambda}$ 是 2^κ上唯一的极小可达理想。⊣

接下来我们讨论奇异基数的 $\mathcal{I}$-可达性。首先回顾一下，对于每个预序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$，$\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的共尾数记作 cof(A, 4)，它是满足以下条件的最小基数 λ：存在一个集合 $X \subseteq A$，使得 $|X| = \lambda$,

并且 $\langle X, \preccurlyeq \rangle$ 是良序的，且在 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中共尾。显然，对于每个没有最大元的无限集预序 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$，cof($A$, 4) 都是无限正则基数。因此，我们立即得到以下结论。

事实 2.8 若 κ 是奇异基数，那么对于 κ 的任意预序 4，都存在一个正则 $\lambda < \kappa$，使得 cof(κ, 4) $= \lambda$。

注意，对于任意 κ，无论它是正则还是奇异，cof(κ, 4) 都不一定等于 cf(κ)。cof(κ,4) 很大程度上取决于 4，可能小于或大于 cf(κ)。例如，对于每个 κ，都存在一个 4，使得 cof(κ, 4) $= \aleph_0$。另一方面，cf($\aleph_{\omega_1}$) $= \aleph_1$，但我们很容易找到 $\aleph_{\omega_1}$ 的序，使其共尾数为 $\aleph_n > \aleph_1$。更一般地，给定任意正则 λ 和 $\kappa > \lambda$，我们都能找到 κ 上的一个预序 $\preccurlyeq_\lambda$，使得 cof($\kappa, \preccurlyeq_\lambda$) $= \lambda$。（这可以通过将 κ 划分为 λ 个互不相交的部分 $x_i, i < \lambda$ 来实现，例如借助一个满射 $f : \kappa \to \lambda$，然后通过对各部分 x_i 作全序来定义 $\preccurlyeq_\lambda$，使得 $x_i \prec_\lambda x_j$ 当且仅当 $i < j$。）

接下来我们证明，即使 κ 是奇异的，对于每个 $\lambda < \kappa$，κ 都不是 $[\kappa]^{<\lambda}$-可达的，也就是说，不存在 κ的 $[\kappa]^{<\lambda}$-预序。这是基于以下事实。

引理 2.9 设 κ 是一个不可数基数，且令 $\aleph_0 \leq \lambda < \kappa$。对于 κ的每个预序 4，都存在一个 $x \in \kappa$ 使得 $|\preccurlyeq_x| \geq \lambda$。

证明。反设对于给定的 $\lambda < \kappa$，存在 κ 的一个预序 4，使得对每个 $x \in \kappa$ 都有 $|\preccurlyeq_x| < \lambda$。对每个 $x \in \kappa$，令 $[x] = \{y \in \kappa : x \preccurlyeq y \ \& \ y \preccurlyeq x\}$，并令 $\kappa/\sim = \{[x] : x \in \kappa\}$。那么 4（本质上）是 $\kappa/\sim$上的一个线性序。由于对所有 x 都有 $|\preccurlyeq_x| < \lambda$，我们得到对所有 $x \in \kappa$都有 $|[x]| < \lambda$，因此 $|\kappa/\sim| = \kappa$。所以只需对线性有序集 $\langle \kappa/\sim, \preccurlyeq \rangle$证明该断言。为简单起见，我们从每个类 $[x]$中选取一个元素 s_x，并令 $S = \{s_x : x \in \kappa\}$。于是$|S| = \kappa$，我们将对同构集 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$证明该断言。现在，要么$S$ 包含一个基数为 λ的共尾子集 Y，要么不包含。第一种情况下$S = \bigcup_{s \in Y} \preccurlyeq_s$，其中 $|Y| = \lambda$ 且 $|\preccurlyeq_s| < \lambda$，对每个 $s \in Y$均成立。但这样一来$|S| = \lambda$，矛盾。在另一种情况下，S 不包含任何基数为 λ的共尾集。因此，若我们选取一个满足 $|Y| = \lambda$的 $Y \subseteq S$，那么就存在一个$s \in S$ 使得 $Y \subseteq \preccurlyeq_s$。但这样一来 $|\preccurlyeq_s| \geq \lambda$，再次产生矛盾。⊣

推论 2.10 设 $\aleph_0 \leq \lambda < \kappa$。那么对于每个 $\mathcal{I} \subseteq [\kappa]^{<\lambda}$，$\kappa$ 都不是 $\mathcal{I}$-可达的，即不存在 κ 的 $\mathcal{I}$-预序。

证明。若 4 是 κ 的 $[\kappa]^{<\lambda}$-预序，那么 $|\preccurlyeq_x| < \lambda$ 对每个 $x \in \kappa$ 都成立，这与 2.9 矛盾。⊣

下一个定理与定理 2.6 (c)形成鲜明对比。

定理 2.11 (ZFC) 若 κ 是奇异基数，则 κ上不存在极小可达理想。特别地，对于 κ， $Seg(<)$ 不是极小的。

证明。设 κ 是奇异基数。我们必须证明，对每个 κ上的预序 4， Seg(4) 都不是极小的。也就是说，存在一个 κ 上的预序 $\preccurlyeq_1$ ，使得 $Seg(\preccurlyeq_1) \subsetneq Seg(4)$。值得注意的是， $\preccurlyeq_1$ 的构造完全遵循定理 2.5 和定理 2.6 (c)的证明中相应构造的相同步骤，尽管后两个定理所声称的方向与本定理恰恰相反。

固定 κ 上的一个预序 4，并令 $\lambda =$ 为 cof(κ, 4)。由事实 2.8， $\lambda < \kappa$。此外，由引理 2.9，存在 $x_0 \in \kappa$ ，使得 $|\preccurlyeq_{x_0}| \geq \lambda$。我们仿照定理 2.5 和定理 2.6 (c)的证明来构造 $\preccurlyeq_1$。具体而言，令 $X =\preccurlyeq_{x_0}$，取满足 $|b| = \lambda$的 $b \subseteq X$ ，并令 $Y = \kappa \backslash X$。再取一个满足 $|a| = \lambda$的集合 a ，它在 4 下良序，序型为 λ，且 $\langle a, \preccurlyeq\rangle$ 在 $\langle\kappa$中共尾。因此可以将$a = \{\alpha_\xi$ 写作 $\xi < \lambda\}$，其中 $\alpha_\xi \prec \alpha_\zeta \Leftrightarrow \xi < \zeta$。不失一般性，可以假设 $a \subseteq Y$。令 $b = \{\beta_\xi : \xi < \lambda\}$。如同前面的证明，我们从 X 中截取 b ，使其在 a中共尾。具体来说，我们令

$$R = [\preccurlyeq \cap (\kappa \backslash b)^2] \cup \{\langle\alpha_\xi, \beta_\xi\rangle, \langle\beta_\xi, \alpha_\xi\rangle : \xi < \lambda\}.$$

此外，我们令 $\preccurlyeq_1 =$ 为二元关系 R的传递闭包。于是 $\preccurlyeq_1$ 满足要求。正如定理 2.5 的证明中那样，我们看到 $Seg(\preccurlyeq_1) \subseteq Seg(4)$，而另一方面，$b \in Seg(4) \backslash Seg(\preccurlyeq_1)$。因此 $Seg(\preccurlyeq_1) \subsetneq Seg(4)$，证明至此完成。⊣

作为定理 2.7 的补充，我们有如下结论。

定理 2.12（ZFC）对于任意基数 $\kappa \geq \aleph_0$，相信不存在 2^κ的极小可达理想是相容的。

证明。给定 $\kappa \geq \aleph_0$，众所周知，以下命题与 ZFC 相容： $\kappa <$cf(λ) $< \lambda$ 且 $2^\kappa = \lambda$。取任意满足$\kappa <$ cf(λ) $< \lambda$的奇异基数 λ ，若 $\mathfrak{M}$ 是通过一种使得 $2^\kappa = \lambda$的 κ-cc 强迫得到的 ZFC模型，那么 λ 在 $\mathfrak{M}$中仍为奇异基数。因此，由定理 2.11 可知，在 $\mathfrak{M}$ 中， 2^κ不存在极小可达理想。⊣

3 配备理想的 $\mathcal{P}(\kappa)$ 与 $\mathcal{C}(V)$ 的代数相似性

给定无限基数 $\lambda \leq \kappa$，令 $\langle \mathcal{P}(\kappa)\ [\kappa]^{<\lambda}\rangle$ 和 $\langle \mathcal{C}(V)\ V\rangle$ 分别为 κ 和 V的所有子集族构成的布尔代数，并分别配备理想 $[\kappa]^{<\lambda}$ 和V，它们表示这些代数中的某些“小集合／类”。这些结构的语言为 $L_b(S) = L_b \cup \{S\}$，其中 L_b 是布尔代数的语言，而 $S(\cdot)$是一个一元谓词符号，用来表示理想中的元素。本节旨在证明以下结论。

定理 3.1（GBC）对于所有无限基数 $\lambda \leq \kappa$，$\langle \mathcal{P}(\kappa)[\kappa]^{<\lambda}\rangle \equiv_{L_b(S)} \langle \mathcal{C}(V)\ V\rangle$。特别地，对于 $\kappa = 2^\lambda$，我们得到 $\langle \mathcal{P}(2^\lambda)[2^\lambda]^{\leq\lambda}\rangle \equiv_{L_b(S)} \langle \mathcal{C}(V)\ V\rangle$。

已知任意两个幂集布尔代数都是初等等价的。这是关于具有相同“不变量”的代数的一般结果的一个简单推论（见 [3, 第 296], §18 节）。然而，这里的代数都配备了理想，因此需要更强有力的论证。证明方法是应用 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈（例如见 [4], 第 52 页及后页）。下面简要回顾一些定义。

设 L 是一种一阶语言，$\mathcal{M} = \langle M、\ \ldots\rangle$、$\mathcal{N} = \langle N、\ \ldots\rangle$ 是两个 L 结构。我们首先定义 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 之间的无限博弈。这是一种双人博弈，记作 $G_\omega(\mathcal{M},\mathcal{N})$。两位玩家分别称为 I 和 II，他们在第 1、2、..... 阶段进行对局，每个阶段交替选择 i，即元素 $a_i \in M$ 和 $b_i \in N$。一局对局由 ω 个阶段组成。玩家 I 可以从 M 或 N 中选择一个元素，然后玩家 II 必须从另一个结构中选取一个元素作出回应。因此，如果玩家 I 选择 $a_i \in M$（分别地，$b_i \in N$），那么玩家 II 必须选择 $b_i \in N$（分别地，$a_i \in M$）。如果 $f = \{\langle a_i, b_i\rangle :\ i = 1、2、\ldots\}$ 是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的部分嵌入的图，则玩家 II 赢得该局对局。否则，玩家 I 获胜。在 $G_\omega(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 中，玩家 II 的策略是一个函数 τ，满足：对于每个 i，如果 $u_1、$ .....、u_i 是玩家 I 的前 i 步，那么玩家 II 的第 i 步为 $\tau(u_1,\ldots..,u_i)$。如果对于玩家 I 的任意一列行动 $u_1、u_2、$ ....., 玩家 II 遵循策略 τ 时都能赢得该局对局，那么策略 τ 就是玩家 II 的获胜策略。

现在，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 之间的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e（E-F）博弈属于上述一般形式的博弈，但它只包含有限个阶段，而非无限多个阶段。如果博弈在第 n 阶段后结束，则记为 $G_n(\mathcal{M},\mathcal{N})$。玩家 II 或玩家 I 的获胜策略定义与之前相同。E-F 博弈可用于刻画两个结构的初等等价。具体而言，以下结论成立。

定理 3.2（[4, 定理 2.4.6]）设 L 是一种不含函数符号的有限语言，且 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 L-结构。那么，对于所有 $n > 0$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ 当且仅当玩家 II 在博弈 $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 中拥有获胜策略。

我们将利用 3.2 证明定理 3.1。在证明中，我们需要下面这个可在 GB 中证明的简单事实。

引理 3.3 (GB) 每个真类都可以划分为两个不相交的真子类。

证明。设 X 是一个真类，并像引理 2.4 中那样，考虑类 $R = \{rank(x) : x \in X\}$，它是真类，并且可以按其自然良序写成 $R = \{\alpha_\xi : \xi \in On\}$。令 $R_0 = \{\alpha_\xi : \xi$ 为极限序数 $\}$，且 $R_1 = \{\alpha_\xi : \xi$ 为后继序数 $\}$。如果对 $i = 0, 1$ 我们令 $X_i = \{x \in X : rank(x) \in R_i\}$, X_0, X_1，这就是所需的划分。$\dashv$

定理 3.1 的证明。固定无限基数 $\lambda \leq \kappa$，并令 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P}(\kappa), [\kappa]^{<\lambda} \rangle$ 和 $\mathcal{N} = \langle \mathcal{C}(V), V \rangle$。（记住，我们总可以认为自己是在 GBC 的一个模型 $\mathfrak{K} = \langle K, \mathcal{K} \rangle$ 中工作，其中 $V^{\mathfrak{K}} = K$ 且 $\mathcal{C}(V)^{\mathfrak{K}} = \mathcal{K}$，因此在此情形下 $\mathcal{N} = \langle \mathcal{K}, K \rangle$。）为了符合定理 3.2 中关于结构的语言必须是关系语言这一条件，我们将取布尔代数的语言 L_b 为 $L_b = \{\sqsubseteq\}$（而不是更常用的代数语言 $\{+, \cdot, -, 0, 1\}$）。根据定理 3.2，我们必须证明，对于每个 n，玩家 II 在 $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 中有获胜策略。事实上，我们可以证明，玩家 II 不仅在有限博弈 $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 中有获胜策略，在无限博弈 $G_\omega(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 中也有获胜策略。要看出这一点，只需对每个 n，定义在前 n 个阶段完成后玩家 II 的行动。由于我们的底结构 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是布尔代数，每个代数的任意有限子集 A 都会生成一个有限布尔子代数，而该子代数完全由其原子集合确定；这些原子是 A 中元素的交。每当玩家从底代数中选择一个新元素时，该元素便通过细分原子集合，将先前的子代数扩展为一个更大的有限子代数。因此，在我们的情形中，博弈的每个阶段并非通过从每个代数中各添入一个新元素对而由前一阶段得到，而是通过添入若干个对应于新生成原子的元素对而得到。所以，我们可以将博弈的各轮视为部分嵌入 $f_i : C_i \to D_i$, $i \geq 1$, 其中 C_i, D_i 分别是 $\mathcal{P}(\kappa)$ 和 $\mathcal{C}(V)$ 的有限布尔子代数，并且对每个 i, $f_i \subsetneq f_{i+1}$。此外，f_i 通过保持理想来保留谓词 $S(\cdot)$，即满足条件

(*) For every $a \in C_i$, $a \in [\kappa]^{<\lambda} \Leftrightarrow f_i(a) \in V$.

假设博弈的前 n 轮已经完成，也就是说，对所有 $i \leq n$，满足 (*) 的嵌入 $f_i : C_i \to D_i$ 均已定义；并假设玩家 I 在第 $(n+1)$ 轮开始时选择某个 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$ 或某个 $b \in \mathcal{C}(V)$。我们必须定义玩家 II 的应答：若玩家 I 选择 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$，则应答为一个 $b \in \mathcal{C}(V)$；若玩家 I 选择 $b \in \mathcal{C}(V)$，则应答为一个 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$；并且要定义 f_n 的扩展 $f_{n+1} : C_{n+1} \to D_{n+1}$，使得 $\langle a, b\rangle \in f_{n+1}$，且 f_{n+1} 满足 (*)。不失一般性，假设 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$。我们将说明如何定义 b 和 f_{n+1}，这也就描述了玩家 II 的获胜策略。若玩家 I 一开始选择的是一个 $b \in \mathcal{C}(V)$，而玩家 II 应选择 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$，则可用非常类似的策略来描述。

玩家 II 的策略：设 $c_1, \ldots, c_k$ 是代数 C_n 的原子，它们构成 κ 的一个划分。于是 $f_n(c_1) \ldots, f_n(c_k)$ 是 D_n 的原子，它们构成 V 的一个划分。对于每个 $i = 1, \ldots, k$，令 $x_i = c_i \cap a$ 和 $x'_i = c_i \cap (\kappa \backslash a)$，并令

$$X = \{x_i, x'_i \neq \emptyset : i = 1, \ldots, k\}.$$

X 是 κ 的一个新划分，它细化了 c_i 的划分，并确定了 $\mathcal{P}(\kappa)$ 的有限子代数 C_{n+1}，使得 $a \in C_{n+1} \supseteq C_n$。为了定义 f_{n+1} 和 $f_{n+1}(a) = b$，显然只需对所有 $x_i, x'_i \in X$ 定义 $f_{n+1}(x_i) = y_i$ 和 $f_{n+1}(x'_i) = y'_i$，使得 y_i, y'_i 构成 $f_n(c_i)$ 的一个合适划分。特别是，我们必须有

$$|x_i| < \lambda \ (|x'_i| < \lambda) \Leftrightarrow y_i \in V \ (y'_i \in V). \tag{4}$$

若对于某些 i、$c_i \subseteq a$ 或 $c_i \subseteq \kappa \backslash a$，则分别有 $x_i = c_i$ 或 $x'_i = c_i$，其中 f_n 已定义。因此，若 $x_i = c_i$ 或 $x'_i = c_i$，我们只需令 $f_{n+1}(x_i) = f_n(c_i)$，且 $f_{n+1}(x'_i) = f_n(c_i)$。在其他所有情况下，x_i、x'_i 构成 c_i 的真划分，我们根据 x_i 和 x'_i 的基数考虑以下情形。

1) $|x_i|$、$|x'_i| \geq \lambda$。于是 $|c_i| \geq \lambda$，因此由 (*) 可知，对于 f_n，$f_n(c_i)$ 是一个真类。在这种情况下，利用引理 3.3，只需取 y_i、y'_i 为 $f_n(c_i)$ 的互补真子类。

2) $|x_i| < \lambda$ 和 $|x'_i| \geq \lambda$（反之亦然）。于是 $|c_i| \geq \lambda$，因此 $f_n(c_i)$ 是一个真类。选取 $\emptyset \neq y_i \subseteq f_n(c_i)$ 为一个集合，并令 $y'_i = f_n(c_i) \backslash y_i$。特别地，若 x_i 有限，则选取 y_i 使得 $|y_i| = |x_i|$。

3) $|x_i|$、$|x'_i| < \lambda$。于是 $|c_i| < \lambda$。因此 $f_n(c_i)$ 是一个集合。如果 x_i、x'_i 都是无限的，我们任取无限的 y_i、y'_i，使它们构成 $f_n(c_i)$ 的一个划分。如果

如果 x_i 或/和 x'_i 是有限的，我们就取划分 y_i、y'_i，使得相应地 $|y_i| = |x_i|$ 或/和 $|y'_i| = |x'_i|$。（这总是可行的，即使 c_i 是有限的。因为玩家 II 在前面的阶段也采用了相同的策略，所以如果 c_i 是有限的，该策略就会得到 $f_n(c_i)$，使得 $|f_n(c_i)| = |c_i|$。）令

$$Y = \{y_i, y'_i : i = 1, \ldots, k\}.$$

Y 是子代数 $D_{n+1} \supseteq D_n$ 的原子集合，且函数 $f_{n+1} : C_{n+1} \to D_{n+1}$ 满足 $f_{n+1}(x_i) = y_i$ 和 $f_{n+1}(x'_i) = y'_i$，它诱导出一个扩展 f_n 的部分同构。因此，显然 f_{n+1} 满足（4）。它也满足上文的条件（*）。因为根据（4），f_{n+1} 已经对 C_{n+1} 的原子满足（*）。现在，若 x 是 C_{n+1} 的任意元素，且 z_1、.....、z_m 是 C_{n+1} 中小于 x 的原子，那么 $x = z_1 \cup \cdots \cup z_m$，因此 $f_{n+1}(x) = f_{n+1}(z_1) \cup \cdots \cup f(z_m)$。所以显然，$|x| < \lambda$ 当且仅当对所有 $i = 1$、.....、m 都有 $|z_i| < \lambda$；当且仅当对所有 $i = 1$、.....、m，$f_{n+1}(z_i)$ 是一个集合；当且仅当 $f_{n+1}(x)$ 是一个集合。因此，f_{n+1} 满足（*）。

至此，玩家 II 的策略描述完毕。接下来需要证明该策略是制胜策略，也就是说，所有这些 f_i 都是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的部分嵌入。具体而言，只需证明以下断言：

断言。令 F 为所有由 E-F 博弈定义的从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的有限函数所成的集合，其中玩家 II 遵循上述策略。那么，每个 $f \in F$ 都是部分嵌入；也就是说，对于 $L_b(S)$ 的任意 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$，以及满足 $a_1, \ldots, a_n \in dom(f)$ 的任意 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{P}(\kappa)$，

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(f(a_1), \ldots, f(a_n)). \tag{5}$$

断言的证明。我们通过对 ϕ 的长度进行归纳，证明 (5) 对每个 $f \in F$ 和每个 ϕ 都成立。$L_b(S)$ 的原子公式是 $x \sqsubseteq y$ 和 $S(x)$，显然，所有 $f \in F$ 都保持序关系 $\sqsubseteq$。此外，我们已经看到，每个 $f \in F$ 都满足条件 (*)，因此对于每个 $a \in dom(f)$

$$\mathcal{M} \models S(a) \Leftrightarrow a \in [\kappa]^{<\lambda} \Leftrightarrow f(a) \in V \Leftrightarrow \mathcal{N} \models S(f(a)).$$

对于所有 $f \in F$，逻辑联结词对应的归纳步骤都很直接，而唯一非平凡的归纳步骤是量词步骤。因此，给定一个 $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$，我们假设所有 $f \in F$ 都满足关于 ϕ 的 (5)，并证明这对 $\exists x \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ 也成立，也就是说，对所有 $a_1, \ldots, a_n \in dom(f)$

$$\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \exists x \phi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n)). \tag{6}$$

假设对于给定的 $a_1, \ldots, a_n$，有 $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, a_1, \ldots, a_n)$，且属于 $dom(f)$。那么，对于某个 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$，有 $\mathcal{M} \models \phi(a, a_1, \ldots, a_n)$。现在，根据定义，$f$ 是某个

E-F 博弈中的第 a_1 阶段，该博弈由 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$进行，因此 a 可以作为玩家 I 在该博弈第 $(n+1)$ 阶段的行动。随后，玩家 II 按照上述策略作出回应，选取一个 $b \in \mathcal{C}(V)$，并将 f 扩展为 $g \supseteq f \cup \{\langle a, b\rangle\}$，使得 $g \in F$。根据归纳假设，g 对 ϕ满足 (5)，因此 $\mathcal{N} \models \phi(g(a)\ g(a_1) \ldots, g(a_n))$，或者 $\mathcal{N} \models \phi(b, f(a_1) \ldots, f(a_n))$，从而 $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, f(a_1) \ldots, f(a_n))$。这就证明了 (6) 中的 "⇒"。反过来，假设对于某个 $b \in \mathcal{C}(V)$，有 $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, f(a_1) \ldots, f(a_n))$ 和 $\mathcal{N} \models \phi(b, f(a_1) \ldots, f(a_n))$。如前所述，$b$ 也可以作为玩家 I 在第 $(n+1)$ 阶段的行动，随后玩家 II 选择一个 $a \in \mathcal{P}(\kappa)$，并选取 $g \supseteq f \cup \{\langle a, b\rangle\}$，使得 g属于 F。于是 $\mathcal{N} \models \phi(g(a)\ g(a_1) \ldots, g(a_n))$，根据归纳假设，$\mathcal{M} \models \phi(a, a_1, \ldots, a_n)$，由此可得 $\mathcal{M} \models \exists x \phi(a_1, \ldots, a_n)$。这就证明了断言，并完成了定理的证明。⊣

定理 3.1 所揭示的结构 $\langle \mathcal{P}(\kappa)\ [\kappa]^{<\lambda}\rangle$ 与 $\langle \mathcal{C}(V)\ V\rangle$ 之间的相似性具有相当鲜明的代数特征，因为它讨论的是带有理想的布尔代数。不过，这种相似性也可以转述为一种更具集合论风格的表述，即使用集合论语言的表述。具体而言，底集 κ 和类 V 的元素可以视为原子（或原子元素），而 $\mathcal{P}(\kappa)$ 和 $\mathcal{C}(V)$ 则可以视为原子集合/类的集族。因此，令 $L_1(S)$ 为由 $\in$、$S(\cdot)$、表示原子元素的变量 $p, q, \ldots$，以及表示集合的变量 $x, y, \ldots$ 组成的语言。$L_1(S)$ 的原子公式为：$p = q$, $p \in x$，以及 $S(x)$。预期的 $L_1(S)$-结构是用于集合的 $\langle \kappa, \mathcal{P}(\kappa)\ [\kappa]^{<\lambda}\rangle$，以及用于全集的 $\langle V, \mathcal{C}(V)\ V\rangle$。不过，这里有一个技术问题：两类实体——原子和集合——应当彼此不相交，而 $\kappa \cap \mathcal{P}(\kappa) \neq \emptyset$（$V$ 也同样如此）。我们可以通过使用 κ 和 V的适当副本来绕过这一障碍。具体来说，我们令

$$\kappa^* = \{\langle x, 0\rangle : x \in \kappa\} \text{ and } V^* = \{\langle x, 0\rangle : x \in V\}.$$

于是 $\kappa^* \cap \mathcal{P}(\kappa^*) = \emptyset$ 和 $V^* \cap \mathcal{C}(V^*) = \emptyset$。在这种编码下，$L_b(S)$ 结构 $\langle \mathcal{P}(\kappa)\ [\kappa]^{<\lambda}\rangle$ 和 $\langle \mathcal{C}(V)\ V\rangle$ 分别与 $\langle \mathcal{P}(\kappa^*)\ [\kappa^*]^{<\lambda}\rangle$和 $\langle \mathcal{C}(V^*)\ \mathcal{P}(V^*)\rangle$同构，其中 $\mathcal{P}(V^*)$ 是 V^* 的子集类。于是根据定理 3.1，我们有：对于所有无限基数 $\lambda \leq \kappa$

$$\langle \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda}\rangle \equiv_{L_b(S)} \langle \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*)\rangle. \tag{7}$$

根据 (7)，我们可以很容易地推导出以下结论。

定理 3.4 对所有无限的 $\lambda \leq \kappa$,

$$\langle \kappa^*, \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda}\rangle \equiv_{L_1(S)} \langle V^*, \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*)\rangle.$$

证明。定义一个解释 $\phi \mapsto \phi^+$ ，将 $L_1(S)$ 的原子公式映射到 $L_b(S)$ 的公式，如下所示：分别固定 $L_1(S)$ 中用于原子和集合的变量枚举 p_n、x_n、$n \in \mathbb{N}$，并固定 $L_b(S)$ 中的变量枚举 y_n、$n \in \mathbb{N}$。$L_1(S)$ 的原子公式为 $p_i = p_j$、$p_i \in x_j$ 和 $S(x_j)$。定义

(a) $(p_i = p_j)^+ := (y_{2i} = y_{2j})$, (b) $(p_i \in x_j)^+ :$
$= Atom(y_{2i}) \wedge y_{2i} \sqsubseteq y_{2j+1}$, (c) $S(x_j)^+ = S($
$y_{2j+1})$,

其中 $Atom(y)$ 是 $L_b(S)$ 中表示"y 是一个原子"的公式。按照预期，这种解释也扩展到 $L_1(S)$ 的所有公式。（由上面的 (a)-(c) 可知，变量 p_i 翻译为 y_{2i}，而 x_j 翻译为 y_{2j+1}。当然，这种翻译也决定了量词的解释。）于是很容易看出，对于所有 $\phi \in L_1(S)$,

$$\langle \kappa^*, \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda} \rangle \models \phi \;\Leftrightarrow\; \langle \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda} \rangle \models \phi^+,$$

and

$$\langle V^*, \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*) \rangle \models \phi \Leftrightarrow \langle \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*) \rangle \models \phi^+.$$

由 (7),

$$\langle \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda} \rangle \models \phi^+ \Leftrightarrow \langle \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*) \rangle \models \phi^+,$$

因此

$$\langle \kappa^*, \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda} \rangle \models \phi \;\Leftrightarrow \langle V^*, \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*) \rangle \models \phi.$$

⊣

事实上，定理3.1和定理3.4本质上等价，因为从定理3.4证明定理3.1，也可以通过定义一个反向解释$\phi \mapsto \phi'$ 来得到：将 $L_b(S)$ 的原子公式映射为 $L_1(S)$ 的公式，定义如下：

$(x \sqsubseteq y)' := \forall p(p \in x \to p \in y)$、$($
$x = y)' := (x = y)$，以及$S(x)' := S$
(x)。

将这一解释推广到所有公式，可得：对于 $L_b(S)$的每个 ϕ ，

$$\langle \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda} \rangle \models \phi \;\Leftrightarrow\; \langle \kappa^*, \mathcal{P}(\kappa^*), [\kappa^*]^{<\lambda} \rangle \models \phi'$$

and

$$\langle \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*) \rangle \models \phi \Leftrightarrow \langle V^*, \mathcal{C}(V^*), \mathcal{P}(V^*) \rangle \models \phi'.$$

因此，3.4 蕴含 3.1。

4 不可数基数与序数类的序理论相似性

根据选择公理，每个不可数集合 A 都可以与一个不可数基数 κ等同；根据全局选择公理 vN，全集 V可以与序数类 On等同。然而，这些等同为 A 和 V增添了结构，即 κ 和 On上的良序，我们用相同的符号 $<$表示它们。鉴于选择原则的自然性，比较不可数 κ、λ对应的一阶结构 $\langle\kappa、<\rangle$、$\langle\lambda、<\rangle$，以及 $\langle\kappa、<\rangle$和 $\langle On、<\rangle$，是合理的。本节将说明如何将 [7] 的主要结果（定理 2.1）推广到 $\langle On、<\rangle$上。该结果指出，对于所有不可数基数，线性序的单子正理论都相同。

[7] 的出发点是以下结果，它是 [2,推论 44]的一个特例：

定理 4.1（[7, 定理 1.1]）对于所有不可数基数 κ， λ， $\langle\kappa,\ <\rangle \equiv_{L_{ord}} \langle\lambda,\ <\rangle$，其中 $L_{ord} = \{\prec\}$ 是序的一阶语言。

请记住，序数的序关系 $<$ 是良序，也就是说，它是一个二阶性质；而等价关系 $\equiv_{L_{ord}}$ 只涉及 $<$的一阶性质。定理 4.1 实际上是 [2]的推论 44 的结果，而且，基本上，我们在 [7]中用来论证该定理的同一论证，也可以用来论证以下推广。

定理 4.2 对于每个不可数基数 κ， $\langle\kappa,\ <\rangle \equiv_{L_{ord}} \langle On,\ <\rangle$。

证明。（略）根据 [2], 的推论 44，对于任意序数 $\alpha, \beta, \langle\alpha, <\rangle \equiv\langle\beta$，当且仅当 α, β 模 ω^ω同余时成立；也就是说，存在 ξ, η, δ，使得 $\delta < \omega^\omega, \alpha = \omega^\omega \cdot \xi + \delta$，$\beta = \omega^\omega \cdot \eta + \delta$，并且 $\xi = \eta = 0$或 $\xi \neq 0$ 且$\eta \neq 0$.[3] 由于对于所有基数 $\kappa, \lambda > \omega$，$\kappa = \omega^\omega \cdot \kappa$和 $\lambda = \omega^\omega \cdot \lambda$，因此可得 κ, λ 模 ω^ω同余。这就证明了定理 4.1。

关于当前断言的论证，我们可以毫无谬误风险地在这一特定情形下将 On 视为“最大（极限）序数”，并以显而易见的方式将序数的通常（右）乘法扩展到 $On \cup \{On\}$。具体而言，正如对于任意 α 和任意极限 β，我们

[3]重要通知：在我准备 [7], 时，Doner教授曾好意通过私人通信告知我， [2], 第51页给出的 *congruence modulo* ω^ω 定义有误。正确的定义如上所述，可见 [1, 第 6]页。

有 $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$，只需定义 $\alpha \cdot On = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < On\}$即可。于是显然 $\omega^\omega \cdot On = On$，因此对于每个不可数基数 κ， κ 和 On模 ω^ω同余。再次将 [2] 的推论 44应用于 $\langle \kappa, < \rangle$ 和$\langle On, < \rangle$，即可得证。（关于模 ω^ω 同余关系为何蕴含良序集合或类的初等等价，详情请参阅 [2]，尤其是"弱良序"（定义 2）理论、"典范序型"的概念（定义 39），以及将这些概念与初等等价序数联系起来的定理 41。）⊣

接下来，我们将推广 [7]，的主定理。该定理确立了一种比定理 4.1 所述相似性强得多的相似性，使其适用于每个不可数基数与 On 之间。首先需要引入一些术语和记号。

首先，我们将此前用于结构 $\langle \kappa, < \rangle$ 的序语言 $L_{ord} = \{\prec\}$（其中个体变量为小写字母 $x, y, z, \ldots$）扩展为单子（二阶）语言 L_{mon}，它通过加入 $\in$ 和大写集合变量 $X, Y, Z, \ldots$ 得到增强，即 L_{ord}。不含集合变量量词的 L_{mod} 公式称为正规公式。形如 $\forall X \phi$ （分别为 $\exists X \phi$）的公式，其中 ϕ 为正规公式，称为 $\forall_1^1$ （分别为 $\exists_1^1$）公式。 $\mathcal{L}_{mon}$ 的标准解释是结构 $\langle A, <, \mathcal{P}(A) \rangle$，其中 $\langle A, < \rangle$ 是一个有序集，用以解释 L_{ord} 的公式，而 $\mathcal{P}(A)$ 是集合变量的值域。不过，也存在更一般的解释。它们的形式为$\langle A, <, \mathcal{A} \rangle$，其中 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(A)$。 $\mathcal{A}$ 可以是某个"较小"集合的类，即 $\mathcal{P}(A)$ 的一个理想；也可以反过来，是某个"大"集合的类。这些大集合通常是 $\langle A, < \rangle$ 中的共尾集合，因此我们令

$$\mathrm{Cof}(A) = \{X \subseteq A : X \text{ is cofinal in } \langle A, < \rangle\}.$$

A 也可以是真类，而 $\mathcal{A}$ 是由 A 的子类构成的类。当我们处理一个真类形式的有序集族（例如 On）时，为了对集合变量 X、 Y 作出解释，我们必须再次在类理论中进行讨论。因此，按照惯例，我们将所有 On 的子类构成的集族记为 $\mathcal{C}(On)$。特别是，下面我们将讨论上文 $\mathrm{Cof}(\kappa)$ 的类比，它

$$\mathrm{Cof}(On) = \{X \subseteq On : X \text{ is cofinal in } \langle On, < \rangle\}$$

由 On 的真子类组成。

定义 4.3 设 $\phi(X)$ 是 $\mathcal{L}_{mon}$ 的一个正则公式，至多含有一个（自由）集合变量 X。若 $\phi(X)$ 属于满足以下条件的最小公式类，则称它在 X 中为正（或简称为正）：
(a) 包含所有公式

L_{ord} 的公式，(b) 包含原子公式 $x \in X$，且 (c) 对逻辑运算 $\wedge$、$\vee$ 以及一阶量词 $\exists$ 和 $\forall$ 封闭。

[7] 的主要结果是，对于所有不可数基数 κ，结构 $\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle$ 关于 L_{mod}的正公式 $\forall_1^1$ 初等等价。

定理 4.4（[7,定理 2.1]）在 ZFC 中，以下结论成立：对于所有不可数基数 κ, λ,

$$\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle \equiv_{pos}^{\forall_1^1} \langle \lambda, <, \mathrm{Cof}(\lambda)\rangle,$$

也就是说，对于每个正的 $\phi(X)$,

$$\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle \models (\forall X)\phi(X) \Leftrightarrow \langle \lambda, <, \mathrm{Cof}(\lambda)\rangle \models (\forall X)\phi(X).$$

这里我们将 4.4 加强为以下结论。

定理 4.5（GBC）对于每个不可数基数 κ,

$$\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle \equiv_{pos}^{\forall_1^1} \langle On, <, \mathrm{Cof}(On)\rangle.$$

证明。（略述）证明完全沿用 4.4 的证明思路，并基于 Y. Moschovakis 所发现的L_{mod} 的正（正规）公式的句法形式。具体而言，每个在 X 中为正的公式$\phi(X)$，对于所有$X \neq A$，在任意结构 $\langle A, <, \mathcal{P}(A)\rangle$ 上都等价于一个具有前束范式 $(\overline{Q}\overline{w})(\forall u)(\theta(\overline{w}, u) \rightarrow u \in X)$ 的公式，其中 $\overline{w} = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle$ 是一串变量，$\overline{Q} = \langle Q_1, \ldots, Q_n\rangle$ 是一串量词，而 $\theta(\overline{w}, u)$ 是无量词的。（注意，由于 $\phi(X)$ 不含集合量词，上述 $\phi(X)$ 的前束范式在每个结构 $\langle A, <, \mathcal{A}\rangle$上也有效，其中 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$。）鉴于对 $\forall_1^1$ 正公式的上述句法刻画，证明分为若干种情形，分别对应于变量串 $\overline{Q}\overline{w}$ 的不同形式，以及 θ 作为原子式和否定原子式的布尔组合时的不同形式。随后，通过穷尽检查所有这些情形，可以证明我们基本上能够将 $(\forall X)\phi(X)$ 的真值归约为一个一阶公式的真值。但根据定理 4.2，这意味着 $(\forall X)\phi(X)$ 在 $\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle$ 与 $\langle On, <, \mathrm{Cof}(On)\rangle$ 之间是绝对的。⊣

如果我们在 GB $+ vN$ 中工作，且存在 On 与 V之间的双射，那么 On 的良序就会传递为 V 的良序，因此有以下结论。

推论 4.6 在 GB$+vN$ 中可以证明，存在 $\prec$ 对V 的良序，使得对于每个不可数基数 κ,

$$\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle \equiv^{\forall^1_1}_{pos} \langle V, \prec, \mathrm{Cof}(V)\rangle.$$

关于定理 4.5 在结构 $\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle$ 与 $\langle On, <, \mathrm{Cof}(On)\rangle$ 不可区分性方面是否最优，以及关于不可数 κ, λ 时结构 $\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle$ 与 $\langle \lambda, <, \mathrm{Cof}(\lambda)\rangle$ 的类似问题，读者可参阅[7]中的相关讨论：目前尚不清楚 $\langle \kappa, <, \mathrm{Cof}(\kappa)\rangle$ 与 $\langle \lambda, <, \mathrm{Cof}(\lambda)\rangle$ 是否在所有 $\forall^1_1$ 和 $\exists^1_1$ 公式下都不可区分。我们所知道的是，结构 $\langle \omega_1, <, \mathrm{Cof}(\omega_1)\rangle$ 与 $\langle \omega_2, <, \mathrm{Cof}(\omega_2)\rangle$ 可以由一个形如 $(\forall x)(\exists X)\psi$ 的句子 ϕ_{ω_1} 区分，其中 ψ 是正规但非正的（参见 [7]的第 5 节）。这很容易推广到所有 ω_m, ω_n。更进一步， ϕ_{ω_1} 也能区分结构 $\langle \omega_1, <, \mathrm{Cof}(\omega_1)\rangle$ 与 $\langle On, <, \mathrm{Cof}(On)\rangle$。

致谢 谨向匿名审稿人致谢，其意见帮助我澄清了一些含糊之处，并显著改善了本文的呈现。

参考文献

[1] J.E. Doner, 《序数在扩展算术中的可定义性》, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 96（1972年）, 50页。[2] J.E. Doner、A. Mostowski 和 A. Tarski, 《良序的初等理论——元数学研究》, 载于: Logic Colloquium '77, A. Macintyre、L. Pacholski 和 J. Paris（编）, North Holland, 1978年, 第1–54页。[3] S. Koppelberg, 《布尔代数的元数学》, 载于: 布尔代数手册, J.D. Monk 和 R. Bonnet（编）, 第1卷, Elsevier Science Publishers B.V., 1989年, 第287–307页。[4] D. Marker, 《模型论: 导论》, Springer, 2002年。[5] R. Parikh, 《算术中的存在性与可行性》, J. Symb. Logic 36（1971年）, 第3期, 494–508页。[6]A. Tzouvaras, 《低复杂度正集算子》, Math. Log. Quar. 49（2003年）, 第3期, 284–292页。

[7]A. Tzouvaras, 《不可数基数在大集合上具有相同的单子正理论》, Fund. Math. 181（2004），第2期，125–142页。[8] A. Tzouvaras, 《幂集运算有何特别之处？》, Arch. Math. Logic 43（2004），第6期, 723–737页。[9] A. Tzouvaras, 《公理的局部化》, Arch. Math. Logic 49（2010），第5期，571–601页。