arXiv:2303.13187v1 [math.CV] 23 Mar 2023

CNED 集：对极值距离可数可忽略

DIMITRIOS NTALAMPEKOS

Abstract. 作者最近引入了欧几里得空间中 *CNED* 集这一类，推广了经典的 *NED* 集概念，并证明这类集合是拟共形可去的。如果将曲线族限制为与 E 相交于可数多个点的子族，且此时曲线族的共形模不受影响，则称集合 E 为 *CNED* 。我们证明，已知的若干类可去集合也属于 *CNED*，其中包括具有 σ有限 Hausdorff（$n-1$）测度的集合，以及边界上的准双曲距离可 n积的区域。因此，本文为拟共形可去性问题的诸多已知结果提供了一个统一框架，并指出*CNED* 条件也应是可去性的必要条件。我们给出闭集为（C）*NED*的一个新的充要判据。应用该判据，我们证明，可数个闭（C）*NED*集的并为（C）*NED*。因此，我们大幅扩展了已知的拟共形可去集类别。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 7 3. 曲线扰动族 13 4. 可忽略性的判据 22 5. 零测集的并集 33 6. 零测集的例子 38 7. 非零测集的例子 45 参考文献 47

1. Introduction

1.1. 定义。 在介绍我们的结果之前，我们先讨论一些背景知识。我们始终假设 $n \geq 2$。对于开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 和两个连续统 $F_1, F_2 \subset U$ ，将 U 内部连接 F_1 和 F_2 的曲线族记为$\Gamma(F_1, F_2; U)$。对于集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，我们将 $\mathbb{R}^n$ 中除端点处可能相交外不与 E相交的曲线族记为 $\mathcal{F}_0(E)$，将 $\mathbb{R}^n$ 中与 E 相交于可数多个点（不计重数）的曲线族记为 $\mathcal{F}_\sigma(E)$。

Date: 2023年3月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 30C62, 30C65；次要分类号 30C35，30C75，30C85，31A15，31B15，46E35。*Key words and phrases.* 拟共形映射，可去集，例外集，零测集，模数，极值距离。作者部分受美国国家科学基金会 DMS-2000096 项目资助。

若集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 对极值距离 是可忽略的，则对于任意一对非空且不相交的连续统 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$，我们有

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_0(E)).$$

在这种情况下，我们记作 $E \in NED$；注意，在此记法中我们省略了维数 n。反之，若存在一致常数 $M \geq 1$ 使得

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \leq M \cdot \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_0(E)),$$

我们称 E 为弱极值距离零集，并记作 $E \in NED^w$。我们指出，不要求 E 是闭的。对于闭集，NED 类与NED^w 类一致 [AS74]。

作者在 [Nta23a]中引入了$CNED$ 集合类，即对极值距离可数可忽略。若集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 满足以下条件，则称其属于$CNED$ 类:

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_\sigma(E))$$

对于每一对非空且不相交的连续统 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$。此时我们记作$E \in CNED$。与上文一样，我们也以显然的方式定义$CNED^w$ 类。同样， E 不必是闭的，且在此记法中省略了维数 n。我们在定理 4.1 中证明，对于闭集，$CNED$ 类与$CNED^w$ 类一致。模数的单调性蕴含$NED \subset CNED \subset CNED^w$.

1.2. 可忽略集的性质。Ahlfors 和 Beurling 在平面中对闭 NED 集进行了广泛研究 [AB50]，，他们证明这些集合恰好是可用于保角嵌入的闭集 $E \subset \mathbb{C}$，或者说是 S-可去的闭集；也就是说，每个从 $\mathbb{C} \setminus E$ 到 $\mathbb{C}$ 的保角嵌入都是一个 M¨obius 变换的限制。另见 Pesin 的研究 [Pes56]。等价地，在此定义中可以用拟共形映射替代保角映射。综述见[You15]。V¨ais¨al¨a 开创了高维闭 NED 集的研究 [V¨ai62]，，并证明 Hausdorff（$n-1$）测度为零的闭集属于 NED 类。Ahlfors–Beurling 的结果由 Aseev–Sy˘cev [AS74] 和 Vodopyanov–Goldshtein [VG77], 在高维中部分推广；他们证明，若闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$， $n \geq 3$属于 NED 类，则它对于拟共形嵌入是可去的。在维数 $n \geq 3$中，逆命题尚不为人所知。最后，Vodopyanov–Goldshtein[VG77], 给出了 $\mathbb{R}^n$ 中闭 NED 集的刻画，证明闭 NED 集恰好是对于 Sobolev 空间 W^1，^{n}可去的集合。有关已知结果的综述，请参阅 [Ase09] 的引言。NED 集与 Gehring–Martio [GM85]提出的拟极值距离（QED）例外集密切相关。正如前面提到的，本文研究的 NED 集不一定是闭集。

$CNED$ 集与拟共形映射之间的关系在[Nta23a]中得以揭示。我们陈述主定理的一个特例。

定理 1.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭 *CNED* 集。那么，任何在 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 上拟共形的 $\mathbb{R}^n$ 上的同胚，在 $\mathbb{R}^n$上都是拟共形的。

事实上，在 [Nta23a 的定理 1.2] 中，并未假设集合 E 是闭的；在这种情况下，必须使用度量定义或其变体，对 f 在集合 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 上的拟共形性作适当解释。

满足定理 1.1 结论的闭集 E 称为拟共形同胚的可去集，也称*QCH*-可去集。它与上文讨论的 S-可去集的区别在于，此处研究的是 $\mathbb{R}^n$ 上的整体同胚，而非 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 的拓扑嵌入。此外，请注意，如果一个平面

集合是 S-可去的，那么它也是QCH-可去的。尽管我们通过 Ahlfors–Beurling [AB50] 在二维中对前一类集合已有令人满意的刻画，但即便在二维，刻画QCH-可去集仍是一个众所周知的难题。当前的工作表明，$CNED$ 集或许能够提供一种刻画。

有许多与QCH-可去集相关的开放问题，其中之一是局部可去性 [Bis94，问题 4], [Nta19，问题 2]: 如果一个闭集 E 是QCH-可去的，那么开集 Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 的每个拓扑嵌入，若在 $\Omega \setminus E$中是拟共形的，是否在 Ω 中也是拟共形的? 对于 $CNED$ 集， [Nta23a，定理 1.2]给出了肯定的答案。

另一个开放问题是，两个QCH-可去闭集的并集是否可去 [JS00]。对于不相交的集合，答案是肯定的；但一般而言，对于相交的集合，目前仅在全不连通集和拟圆的情形下得到了解答 [You16，定理 4]。我们在此证明，闭 NED 集与闭 $CNED$ 集的可数并分别是NED 集和$CNED$集。

定理 1.2. 设 E_i, $i \in \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可数闭子集族。

(i) *If* E_i *is NED for each* $i \in \mathbb{N}$, *then* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ *is NED* .

(ii) *If* E_i *is CNED for each* $i \in \mathbb{N}$, *then* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ *is CNED* .

若可数个闭NED 集的并是闭集，则该结果可由贝尔范畴定理 [You15, 第 4]节推出。对于非闭并集，情况要复杂得多，因为它们甚至可能是稠密的。证明见第 5 节，并依赖于第 4 节对NED 集和$CNED$集的一种精细刻画。这里先对这一刻画作一个粗略表述。

定理 1.3. 闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 ***NED***（分别为 ***CNED***）集，当且仅当对于每个 n-可积度量 $\rho\, ds$, $\mathbb{R}^n$ 中几乎每条路径 γ 都可以通过任意小的扰动予以改变，使扰动的 ρ 长度任意小，并避开该集合 E （分别与集合 E 相交于可数多个点）。

精确表述见定理 4.1。这一刻画的另一项应用是连续 Sobolev 函数关于 $CNED$ 集的可去性。证明见第 4.4 节。

定理 1.4. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭 ***CNED*** 集。那么，每个连续函数$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 若满足 $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n \setminus E)$，则属于 $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$。

1.3. **零测集的例子**。到目前为止，我们已了解一些一般的QCH-可去集类别。首先，Besicovitch [Bes31] 证明，在二维中，σ有限 Hausdorff $(n-1)$ 测度的集合是可去集；Gehring [Geh62] 则证明了这一结论在高维中也成立。因此，我们可以说，这类集合出于可求长性 方面的原因而可去。

其次，众所周知，具有良好几何性质的集合（例如拟圆）在二维中是可去的。更一般地，在所有维数中，John 区域、H¨older 区域以及具有 n-可积准双曲距离的区域的边界都是可去的 [Jon95, JS00,KN05]。粗略地说，这些集合要么没有向外尖点，要么有一些向外尖点，但平均而言数量不多。因此，这些集合出于几何 方面的原因而可去。

最后，由于 [AB50] 在二维中以及 [AS74、VG77] 在高维中的结果，NED 集合也是可去的。因此，可以说，NED 集合是可去的

因为从势论 的意义上说，它们很小。注意，所有NED 集合在二维中必然都是全不连通的。

这三类集合在某种意义上彼此奇异。具体而言，有些可求长集几何性质不佳，但从位势理论的角度看却很大。例如，考虑一条可求长曲线，其内向尖点和向外尖点组成的集合是稠密的。同样，也有些集合几何性质良好，不可求长，但在位势理论意义下很大。比如，取一个豪斯多夫维数大于 1 的拟圆。最后，也有些集合在位势理论意义下很小，但从可求长性的角度看却很大，且几何性质不佳。例如，考虑一个零测度且豪斯多夫维数为 1 的康托尔集 $E \subset \mathbb{R}$，再取集合 $E \times E$；根据 [AB50 定理10]，它是一个NED 集合，因为它在坐标方向上的投影均为零测度。

一个自然的问题是，能否调和这三个不同的领域？换言之，是否存在一个共同原因，使上述所有类别的集合都是QCH-可去的？我们对这个问题给出了肯定的回答。

定理 1.5。 以下集合在 $\mathbb{R}^n$ 中属于 *CNED* 类。

(i) ***NED*** 类集合。(ii) 具有有限 σ 维豪斯多夫$(n-1)$测度的集合。

(iii) 具有 n 可积准双曲距离的区域边界。

(iii) 中的集合类在第 6.1 节定义并讨论，证明也在该节给出。该类包括拟圆、John 区域的边界以及 H¨older 区域的边界。如前所述，**(i)** 是显然的；然而，其他结论都是新的。用于证明 **(ii)** 的技巧使我们能够将 V¨ais¨al¨a [V¨ai62], 的一个结果推广到非闭集：若闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的豪斯多夫 $(n-1)$ 测度为零，则它属于 NED类。

定理 1.6。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个豪斯多夫$(n-1)$测度为零的集合。那么 E 是 ***NED***。

定理 1.5 **(ii)** 和定理 1.6 在第 3 节中借助曲线扰动族这一概念得以证明；参见定理 3.11。粗略地说，这类曲线族包含一条曲线的几乎所有平行平移以及几乎所有径向线段。本节的主要定理是定理 3.4，它断言：若将一个曲线族限制为与某个曲线扰动族的交集，其模数不受影响。

结合定理 1.1、1.2 和 1.5，我们得到如下可去性结果。

定理 1.7。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，可分解为可数多个集合 E_i、 $i \in \mathbb{N}$，其中每个集合都包含于某个闭集中，而该闭集要么是 ***NED***，要么具有 σ-有限的豪斯多夫$(n-1)$-测度，要么是一个具有 n-可积准双曲距离的区域的边界。那么 E 是 ***CNED*** 且 ***QCH***-可去的。

我们还给出了一些进一步的例子。我们在定理 6.6 中证明，投影到每条坐标轴上的投影都具有零测度的平面集（不一定是闭集）是NED^w，这推广了 Ahlfors–Beurling 关于闭集的一个结果 [AB50, 定理10]。下文定理 6.6 的证明将用到定理 1.9。在第 6.3 节中，我们给出一个由 Sierpi´nski 构造的不可测$CNED$ 集。

本文的研究成果已应用于圆域刚性问题。黎曼球面 $\mathbb{C}$ 中的连通开集 Ω 称为圆域 ，如果 Ω 的每个边界分支都是一个圆或一个点。一个圆

域 Ω 称为共形刚性的，如果从 Ω 到另一个圆域的每个共形映射都是 $\mathbb{C}$ 上某个莫比乌斯变换在 Ω 上的限制。He–Schramm [HS94]证明，边界具有 σ-有限豪斯多夫一维测度的圆域是刚性的。后来，Younsi 和作者 [NY20] 证明了具有二次可积拟双曲距离的圆域是刚性的（如定理 1.5 (iii) 所述）。人们猜想，圆域的刚性等价于其边界的QCH-可去性。下一个结果涵盖了所有先前的结果，并为这一猜想提供了有力证据。

定理 1.8 ([Nta23b])。 如果圆域中点边界分支的每个紧子集都是 *CNED* 集，那么该圆域在共形意义下是刚性的。

证明尤其运用了定理 1.2，以及定理 4.1 中给出的$CNED$集的刻画。

1.4. 非零测集的例子。 我们指出，定理 1.2 并未要求这些闭集 E_i 的并集是闭集。然而，如果不假设每个集合 E_i 都是闭集，定理的两种情形都不成立。

定理 1.9。 存在博雷尔 *NED* 集 E_1、$E_2 \subset \mathbb{R}^2$，使得 $E_1 \cup E_2$ 是一个既不是 *NED* 集，也不是 *CNED* 集，亦非 *QCH* 可去的闭集。

证明见第 7 节。可以如下构造一个更基本的 NED 示例。Tukia [Tuk89] 给出了一个满测度集合 $E_1 \subset [0,1]$的示例，该集合可通过拟共形映射从 $\mathbb{C}$ 映到实数轴上的一个一维测度为零的集合。注意，根据定理 1.6，一维测度为零的集合是 NED 集合，而根据推论 4.2，这类 NED 集合在拟共形映射下保持不变。因此，E_1 是 NED 集合。此外，$E_2 = [0,1] \setminus E_1$ 也是 NED 集合，因为它的测度为零。然而，$E_1 \cup E_2 = [0,1]$不是全不连通的，因此它不是 NED 集合。

与 NED 集合相比，构造非 CNED 集合要困难得多。为了证明定理 1.9，我们采用现有文献中的工具，尤其是 Wu [Wu98], 的一项工作，来构造 NED 集合 E_1 和 E_2，使得 $E_1 \cup E_2$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个康托尔集与 $[0,1]$的乘积。这类集合不是 QCH-可去的（见 [Car51] 或 [Nta20]的引言），因此根据定理 1.1，它们不是 CNED 集合；在这个简单情形下，可以直接证明这一点。

作为定理 1.9 和 [Nta23a, Theorem 1.2], 的推论，我们得到，拟共形性的度量定义下的例外集的并集不一定是例外集。这里，H_f 表示映射 f 的度量畸变；参见 [Nta23a]。

推论 1.10。 存在博雷尔集 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$，使得 $E_1 \cup E_2$ 是闭集，并且对于每个 $i \in \{1,2\}$，每个 $\mathbb{R}^2$ 到自身的同胚 f 满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus E_i} H_f(x) < \infty$$

都是拟共形的，但存在一个 $\mathbb{R}^2$ 到自身的同胚 g，它在 $\mathbb{R}^2 \setminus (E_1 \cup E_2)$ 中是拟共形的，而在 $\mathbb{R}^2$中不是拟共形的。

最后，我们以关于不可去集的一些评论结束引言。在二维中，已知所有正面积集合都不是QCH-可去的[KW96]。存在豪斯多夫维数为 1 的若尔当曲线，它们是不可去的[Kau84,Bis94]。此外，正如上文所述，若 $C \subset \mathbb{R}$ 是一个康托尔集，则 $C \times [0,1]$ 不可去。更有趣的是，Wu [Wu98] 证明，若 $E, F \subset \mathbb{R}$ 是康托尔集且 $E \notin NED$，则 $E \times F$ 不可去；反过来则不成立

因为NED 集的长度可能为正 [AB50]。最近，作者研究了具有无限多个补连通分支的分形的可去性问题，并证明谢尔宾斯基地毯和所有谢尔宾斯基地毯均不可去 [Nta19, Nta21]。作者与 Wu [NW20]将后一结果推广到更高维的地毯，即所谓的谢尔宾斯基空间。

垫片和地毯属于填充余集这一一般类别。 $\mathcal{P}$ 中的一个填充是由有界连通开集组成的集合 D_i, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，满足：对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $D_i \subset D_0$；对于 i, 都有 $D_i \cap D_j = \emptyset$， $j \in \mathbb{N}$ 且 $i \neq j$。填充 $\mathcal{P}$ 的余集是集合

$$\overline{D_0} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i.$$

我们将在下文看到，在许多情况下，这类余集并非$CNED$。

命题 1.11。 设 $\mathcal{P} = \{D_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个填充，并且对于 $i \neq j$, i, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$， $\partial D_i \cap \partial D_j$ 都是可数的。那么 $\mathcal{P}$ 的余集不是 *CNED*。

此前已有观察指出，平面中的这类余集的豪斯多夫维数可以为 1，但其豪斯多夫一维测度并非 σ-有限 [MN22]。命题 1.11 涵盖了谢尔宾斯基 ′垫片和所有谢尔宾斯基 ′地毯。

1.5. **未解决问题**。 根据本文的结果，自然会提出以下问题。解决这一问题将回答许多与可去集相关的未解决问题。

问题 1.12。 *QCH*-可去集是否与闭 *CNED* 集相同？

我们还针对$CNED$ 集提出了一系列问题。

问题 1.13。 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非$CNED$闭集，是否存在一个 $\mathbb{R}^n$ 的同胚，它在 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 上是拟共形的，并将 E 映射到一个具有正 n-测度的集合？

若此问题的答案为肯定，则问题 1.12 也将得到解决，因而此前提到的局部可去性问题以及可去集的并的可去性问题等也将得到解决。对于平面中的闭NED 集，相应问题的答案已知是肯定的，这是 Ahlfors–Beurling [AB50] 的结果：如果 $E \notin NED$，那么存在一个保角嵌入f：$\mathbb{R}^2 \setminus E \to \mathbb{R}^2$，使得 $f(\mathbb{R}^2 \setminus E)$ 的补集具有正面积。

问题 1.14。 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非$CNED$闭集，是否存在一个非$CNED$的全不连通闭子集 E？

如果是，那么只需针对全不连通集回答问题 1.13，这可能更容易处理。注意，平面中的NED 集已经是全不连通的，因此研究这些集会更容易。

问题 1.15。 连续 $W^{1,\,n}$ 函数的可去集是否与闭 *CNED* 集相同？

这个问题的动机来自定理 1.4。显然，如果问题 1.12 的答案是肯定的，那么答案也会是肯定的；在这种情况下，QCH-可去集将与连续 $W^{1,\,n}$ 函数的可去集一致。这是 [Bis94,JS00] 中讨论的另一个开放问题。

致谢。 作者谨向 Hrant Hakobyan 和 Malik Younsi 致谢，感谢他们提出的意见。

2. 预备知识

2.1. 符号与定义。我们用 $|x-y|$ 表示点 x 与 $y \in \mathbb{R}^n$ 之间的欧几里得距离。对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $0 \le r < R$，我们用 $B(x,R)$ 表示开球 $\{y \in \mathbb{R}^n\colon |x-y| < R\}$，用 $A(x;r,R)$ 表示开环域 $\{y \in \mathbb{R}^n\colon r < |x-y| <R\}$。相应的闭球和闭环域分别记为 $B(x,r)$ 和 $A(x;r,R)$。若 B 是一个开（分别为闭）球，则对于 $\lambda > 0$，我们用 λB 表示与 B 中心相同、半径乘以 λ 的开（分别为闭）球。我们还定义 $S^{n-1}(x, r) = \partial B(x,r)$。集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的开 ε-邻域记为 $N_\varepsilon(E)$。

我们用记号 m_n 表示 $\mathbb{R}^n$中的 n维勒贝格测度，用 m_n^* 表示外 n维勒贝格测度，并用 $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx$ 或简写为 $\int \rho$ 表示勒贝格可测扩展函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ 的勒贝格积分（若其存在）。对于这样的函数 ρ，若 B 是一个可测集，且 $m_n(B) \in (0,\infty)$，则定义

$$\fint_B \rho = \frac{1}{m_n(B)} \int_B \rho.$$

为简便起见，扩展函数均简称为函数。假定非负函数的取值属于 $[0,\infty]$。

集合 E 的基数记为 $\#E$。对于量 A 和 B，若存在常数 $c > 0$ 使得 $A \le cB$，则记作$A \lesssim B$。若常数 c 依赖于我们希望特别强调的另一个量 H，则改记为$A \le c(H)B$ 或 $A \lesssim_H B$。此外，若 $A \lesssim B$ 且$B \lesssim A$，则使用记号 $A \simeq B$。与前文一样，我们记作 $A \simeq_H B$，以强调隐含常数对量 H 的依赖。陈述中的所有常数均假定为正数，即使未明确说明；不同陈述中也可能用同一个字母表示不同的常数。

对于 $s \ge 0$ s维豪斯多夫测度 $\mathscr{H}^s(E)$，集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 定义为

$$\mathscr{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}^s_\delta(E),$$

其中

$$\mathscr{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{ c(s) \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_j)^s : E \subset \bigcup_j U_j,\ \operatorname{diam}(U_j) < \delta \right\}$$

其中 $c(s) > 0$ 为归一化常数，使得 n维豪斯多夫测度与 $\mathbb{R}^n$中的勒贝格测度一致。注意，$c(1) = 1$。量 $\mathscr{H}^s_\delta(E)$，$\delta \in (0,\ \infty]$，称为 s维豪斯多夫 δ内容。如果 $\delta = \infty$，我们就将此量称为 E的 s维豪斯多夫内容。我们将用到一个标准事实：

$$\mathscr{H}^s(E) = 0 \text{ if and only if } \mathscr{H}^s_\infty(E) = 0.$$

注意，若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连通集，则（参见 [BBI01，引理 2.6.1，第 53] 页）

$$\mathscr{H}^1(E) \ge \mathscr{H}^1_\infty(E) = \operatorname{diam}(E).$$

引理 2.1 ([Boj88])**.** 设 $p \geq 1$ 和 $\lambda > 0$。假设 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族球，且 a_i、$i \in \mathbb{N}$ 是一个非负数序列。那么

$$\left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \chi_{\lambda B_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c(n,p,\lambda)\left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \chi_{B_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

2.2. 可求长路径。路径或曲线是一个连续函数 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$，其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个紧致区间。路径 γ 的迹是其像 $\gamma(I)$，记作 $|\gamma|$。路径 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 的端点是点 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$，并且我们令 $\partial\gamma = \{\gamma(a)\ \gamma(b)\}$。若对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $\#\widetilde{\gamma}^{-1}(x) \leq \#\gamma^{-1}(x)$，则称路径 $\widetilde{\gamma}$ 是路径 γ 的弱子路径。特别地，这意味着 $|\widetilde{\gamma}| \subset |\gamma|$。路径 $\widetilde{\gamma}$ 是路径 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ 的（强）子路径，若 $\widetilde{\gamma}$ 是 γ 在 I 的某个闭子区间上的限制。注意，强子路径总是弱子路径，但反之不然。若路径 γ 是单射，则称其为简单路径。等价地，对于每个 $x \in |\gamma|$，都有 $\#\gamma^{-1}(x) = 1$。众所周知，每条路径都有一条端点相同的简单弱子路径 [Wil70，定理 31.2，第 219] 页。

若 γ 是一条路径，$E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合，那么如果 γ 避开 集合 E，我们就称其为避开该集合；如果 $E \cap |\gamma|$ 是有限集，则称其与 E 相交于有限个点（例如）；注意，后一种情况下我们不考虑重数。

若 $\gamma_i\colon [a_i,b_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ 是满足 $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ 的路径，则可定义这两条路径的拼接为路径 $\gamma\colon [a_1,b_2] \to \mathbb{R}^n$，使得$\gamma|_{[a_1,b_1]} = \gamma_1$ 且 $\gamma|_{[a_2,b_2]} = \gamma_2$。若 x，$y \in \mathbb{R}^n$，则将从 x 到 y 的线段记为 $[x,y]$。

路径 γ 的长度是函数 γ 的全变差，记为 $\ell(\gamma)$。若路径长度有限，则称其为可求长路径。设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 是一条路径，$s\colon [c,d] \to [a,b]$ 是一个递增或递减的连续满射。那么路径 $\gamma \circ s\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ 称为 γ 的重新参数化（由函数 s 给出）。每条可求长路径 γ 都存在唯一的重新参数化 $\widetilde{\gamma}\colon [0,\ell(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$，该重新参数化由递增函数给出，且对所有 $t \in [0,\ell(\gamma)]$，都有 $\ell(\widetilde{\gamma}|_{[0,t]}) = t$。路径 $\widetilde{\gamma}$ 称为 γ 的弧长参数化。

若 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个博雷尔函数，且 γ 是可求长路径，则可以利用 γ 的弧长参数化来定义线积分 $\int_\gamma \rho\, ds$；参见[V¨ai71，第 1 章，第 8–9]页。也就是说，若 $\gamma\colon [0,\ell(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ 按弧长参数化，则

$$\int_\gamma \rho\, ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho(\gamma(t))\, dt.$$

下面汇总线积分的一些性质。

引理 2.2。设 γ 是一条可求长路径，$\widetilde{\gamma}$ 是 γ 的一个弱子路径，且 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个博雷尔函数。以下陈述成立。

(i) $\displaystyle\int_\gamma \rho\, ds = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\#\gamma^{-1}(x)\, d\mathscr{H}^1(x).$

(ii) $\displaystyle\int_{|\gamma|} \rho\, d\mathscr{H}^1 \leq \int_\gamma \rho\, ds$ *with equality if* γ *is simple.*

(iii) $\displaystyle\int_{\widetilde{\gamma}} \rho\, ds \leq \int_\gamma \rho\, ds.$

（iv）若 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是一个博雷尔集，且 $\mathscr{H}^1$（$G \cap |\gamma|$） $= 0$，则

$$\int_{\gamma} \rho \, ds = \int_{\gamma} \rho \chi_{\mathbb{R}^n \setminus G} \, ds.$$

特别地，上述结论对 $\rho = 1$ 也成立，此时 $\int_{\gamma} \rho \, ds = \ell(\gamma)$。

证明。 (i) 部分由 [Fed69, 定理 2.10.13, 第 177] 页得出。(ii) 中的不等式和等式由 (i) 得出。由于 $\widetilde{\gamma}$ 是 γ 的一个弱子路径，我们有 $\#\widetilde{\gamma}^{-1}(x) \leq \#\gamma^{-1}(x)$。因此 (i) 蕴含 (iii)。(iv) 也可由 (i) 得出，只需注意到对于 $x \notin G \cap |\gamma|$，有 $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus G}(x) \#\gamma^{-1}(x) = \#\gamma^{-1}(x)$，故对于 $\mathscr{H}^1$-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 也成立。□

2.3. **模数**。 设 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个曲线族。博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ 对路径族 Γ 是可容许的，如果

$$\int_{\gamma} \rho \, ds \geq 1$$

对所有可求长路径 $\gamma \in \Gamma$。对于 $p \geq 1$，我们将 p-模数 定义为 Γ 的

$$\operatorname{Mod}_p \Gamma = \inf_{\rho} \int \rho^p,$$

其中下确界取遍所有对于 Γ 的可容许函数 ρ。按照约定，若 Γ 不存在可容许函数，则 $\operatorname{Mod}_p \Gamma = \infty$。注意，不可求长路径不会影响模数。因此，我们将假设，在接下来的讨论中出现的模数为零的 p 族包含所有不可求长路径。我们将使用以下关于模数的标准事实：

(M1) Mod_p 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有曲线空间上的外测度。特别地，它满足单调性和可数次可加性。(M2) 若族 Γ_1 中的每条路径都有一个子路径属于族 Γ_2，则 $\operatorname{Mod}_p \Gamma_1 \leq \operatorname{Mod}_p \Gamma_2$。(M3) 若 Γ_0 是一个路径族且 $\operatorname{Mod}_p \Gamma_0 = 0$，则在 Γ_0 中有弱子路径的路径族 γ 的模数也为零（由引理 2.2 (iii) 得出）。此外，含有重新参数化后落在 Γ_0 中的路径所构成的族，其模数也为零。(M4) 若 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ 是一个博雷尔函数，且 $\rho = 0$ 几乎处处成立，则对于满足 $\int_{\gamma} \rho \, ds > 0$ 的路径族 Γ_0 中的路径 γ，有 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$。(M5) 模数 Mod_p 满足串联定律：若 Γ_i、$i \in \mathbb{N}$ 是分别支撑在互不相交的博雷尔集中的曲线族，则

$$\operatorname{Mod}_p \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Mod}_p \Gamma_i.$$

(M6) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个集合，且 $m_n(E) = 0$。设 Γ_0 为满足 $\mathscr{H}^1(|\gamma| \cap E) > 0$ 的路径 γ 族。则 $\operatorname{Mod}_p \Gamma_0 = 0$。(M7) 对于 $p = n$，模数 Mod_n 在共形映射下保持不变。(M8) 设 $\Gamma = \Gamma(A(x; r, R))$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中连接环域 $A(x; r, R)$ 的边界分支的曲线族。则

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma = \omega_{n-1} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{1-n}.$$

这里 ω_{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积。关于模数以及这些事实的证明，更多详情请参见 [V¨ai71，第 1] 章，以及 [HKST15，第 5.2–5.3] 节。

对于路径 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，我们将 $\gamma + x$ 定义为路径 $I \ni t \mapsto \gamma(t) + x$。

引理 2.3. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的路径族，且 $\operatorname{模}_p \Gamma = 0$。

(i) 对于每条可求长路径 γ，以及几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，有 $\gamma + x \notin \Gamma$。(ii) 对于每条平行于方向 $v \in \mathbb{R}^n$ 的线段 L，以及 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $x \in \{v\}^\perp$，有 $L + x \notin \Gamma$。(iii) 对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $w \in S^{n-1}(0,1)$，定义 $\gamma_w(t) = x + tw$, $t \geq 0$。那么对于 $0 < r < R$，对 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $w \in S^{n-1}(0,1)$，有 $\gamma_w|_{[r,R]} \notin \Gamma$。

证明. 对于每对于 (i)，都存在为 $\mathbb{R}$ 函数的一条可求长路径，并函数长参数。令 ρ^p 对于 $r > 0$ 和 G_r 为满足 $\gamma + x \in \Gamma$ 的 $x \in B(0,\ r)$ 的集合。我们还固定 $R > 0$，使得当 $x \in B(0,\ r)$ 时，$|\gamma + x| \subset B(0,\ R)$。于是，由切比雪夫不等式和富比尼定理可得

$$\begin{aligned} m_n^*(G_r) &\leq m_n\left(\left\{x \in B(0,r) : \int_{\gamma+x} \rho\, ds \geq 1\right\}\right) \leq \int_{B(0,r)} \int_0^{\ell(\gamma)} \rho(\gamma(t)+x)\, dt dx \\ &= \int_0^{\ell(\gamma)} \int_{B(0,r)} \rho(\gamma(t)+x)\, dx dt \leq \ell(\gamma)\|\rho\|_{L^1(B(0,R))}. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon \to 0$，我们有 $\|\rho\|_{L^p(B(0,\ R))} \to 0$，因此 $\|\rho\|_{L^1(B(0,\ R))} \to 0$。这表明，对于所有 $r > 0$，$m_n(G_r) = 0$。因此，对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $\gamma + x \notin \Gamma$。

对于 (ii)，令 G_r 为满足 $L + x \in \Gamma$ 的 $x \in B(0, r)$ 的集合。那么

$$\mathscr{H}^{n-1}(G_r) \leq \mathscr{H}^{n-1}\left(\left\{x \in B(0,r) \cap \{v\}^\perp : \int_{L+x} \rho\, ds \geq 1\right\}\right) \leq \|\rho\|_{L^1(D)},$$

其中 D 是半径为 r、轴为 L 的圆柱体。现在令 $\varepsilon \to 0$，如上所述 .

最后，对于 (iii)，令 G 为满足 $\gamma_w|_{[r,R]} \in \Gamma$ 的 $w \in S^{n-1}(0,1)$ 的集合。那么，利用极坐标积分，我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{n-1}(G) &\leq \mathscr{H}^{n-1}\left(\left\{w \in S^{n-1}(0,1) : \int_{\gamma_w|_{[r,R]}} \rho\, ds \geq 1\right\}\right) \\ &\leq \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_r^R \rho(x+tw)\, dt d\mathscr{H}^{n-1}(w) \lesssim_n r^{-n+1}\|\rho\|_{L^1(B(x,R))}. \end{aligned}$$

和之前一样，令 $\varepsilon \to 0$，即可得到结论。 □

2.4. NED 集和 CNED 集的基本性质。我们首先回顾定义。对于开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 以及任意两个闭集 F_1、$F_2 \subset \mathbb{R}^n$，在 U 内连接 F_1 和 F_2 的曲线族记为 $\Gamma(F_1, F_2; U)$。换言之，该曲线族包含满足 $\gamma(a) \in F_1$、$\gamma(b) \in F_2$ 且 $\gamma((a,b)) \subset U$ 的曲线 $\gamma\colon [a,b] \to U$。对于集合 $E \subset \mathbb{R}^n$，我们用 $\mathcal{F}_0(E)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中不与 E 相交的曲线族，但端点处可能相交；也就是说，$\mathcal{F}_0(E)$ 包含满足 $|\gamma| \setminus \gamma(\{a,b\})$ 不与 E 相交的曲线 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$。此外，我们定义 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中与 E 相交于可数多个点的曲线族；也就是说，集合 $E \cap |\gamma|$ 是可数的（有限或无限）。

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个集合，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集。若对于每一对非空且不相交的连续体 F_1, $F_2 \subset \Omega$，都有 E 属于$NED(\Omega)$，则称集合 E 属于$NED(\Omega)$。

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \Omega) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \Omega) \cap \mathcal{F}_0(E)).$$

如果我们改为有

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \Omega) \leq M \cdot \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \Omega) \cap \mathcal{F}_0(E))$$

对于某个一致常数 $M \geq 1$，则 E 属于 $NED^w(\Omega)$。若上述等式和不等式分别以 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 代替 $\mathcal{F}_0(E)$ 后成立，则集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 属于$CNED(\Omega)$ 和 $CNED^w(\Omega)$。当 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时，我们简记为NED、NED^w、$CNED$ 和 $CNED^w$。

我们将分别用记号 $*NED(\Omega)$ 和 $\mathcal{F}_*(E)$ 表示 $NED(\Omega)$ 或$CNED(\Omega)$，以及 $\mathcal{F}_0(E)$ 或 $\mathcal{F}_\sigma(E)$。类似地，我们将用记号 $*NED^w(\Omega)$ 表示$NED^w(\Omega)$ 或 $CNED^w(\Omega)$。根据模数的单调性，若 $E \in *NED(\Omega)$ （分别为 $*NED^w(\Omega)$) 且 $F \subset E$，则 F 属于 $*NED(\Omega)$（分别地， $*NED^w(\Omega)$）。此外，若 $E \in *NED^w(\Omega)$，显然 $E \cap \Omega$ 必须具有空内部。

如果一个集合包含多于一个点，则称其为非退化。对于两个非退化集合 F_1，$F_2 \subset \mathbb{R}^n$，我们将相对距离 $\Delta(F_1, F_2)$定义为

$$\Delta(F_1, F_2) = \frac{\operatorname{dist}(F_1, F_2)}{\min\{\operatorname{diam}(F_1), \operatorname{diam}(F_2)\}}.$$

引理 2.4。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个集合。假设存在常数 t、$\phi > 0$，使得对每个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，都存在 $r_0 > 0$，满足以下性质：对于任意一对非退化、不相交的连续体 F_1、$F_2 \subset B(x_0, r_0)$，若 $\Delta(F_1, F_2) \leq t$，则有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)) \geq \phi.$$

若 E 是勒贝格可测的，则 $m_n(E) = 0$。

证明。 由于 E 是可测的，它与某个博雷尔子集仅相差一个零测集。还需注意，当我们将 E替换为其子集时，族 $\mathcal{F}_*(E)$会增大。因此，我们不妨假设 E 本身是博雷尔集。设 $m_n(E) > 0$，且 x_0 是 E的勒贝格密度点。令 r_0 如假设所述，并考虑 $r < r_0$。定义 $F_1 = \partial B(x_0, r)$和 $F_2 = \partial B(x_0, ar)$，其中 $a \in \in (0, 1)$的选取使得

$$\Delta(F_1, F_2) = \frac{1-a}{2a} \leq t.$$

考虑函数

$$\rho(x) = \frac{1}{|x - x_0| \log(a^{-1})} \chi_{A(x_0; ar, r)}(x).$$

那么， ρ是 $\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n)$的可容许函数；例如参见 [Hei01，第 7.14 节，第 52–53] 页。我们令$\rho_1 = \rho \chi_{\mathbb{R}^n \setminus E}$，它是博雷尔可测的。若 γ是 $\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)$中的一条曲线，则 γ 与 E 相交于可数多个点，因此由引理 2.2 (iv) 可得

$$\int_\gamma \rho_1 \, ds = \int_\gamma \rho \, ds \geq 1.$$

因此， ρ_1对 $\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)$是可容许的。我们得出

$$\phi \leq \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)) \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \rho^n \leq \frac{m_n(B(x_0, r) \setminus E)}{(\log(a^{-1}))^n a^n r^n}.$$

令 $r \to 0$，这与 x_0 是 E 的密度点这一假设相矛盾。 □

引理 2.5。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，且 $E \subset \Omega$ 为一个集合，满足 $E \in *NED^w(\Omega)$。

(i) 如果 $E \subset \Omega$，那么 E 满足引理 *2.4* 的假设。(ii) 如果 E 是勒贝格可测的，那么 $m_n(E) = 0$。

V¨ai62 在定理 1] 中证明了，闭*NED* 集合是零测度的。不过，我们指出，Sierpi´n-ski 为另一目的构造了一个不可测集，它属于*CNED*类；参见第 6.3 节中的讨论。

证明。令 $\overline{E} \subset \Omega$ 如 (i) 中所述。若 $\overline{\ }x_0 \notin E$，则存在一个球 $B(x_0, r_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$。对于任意一对非退化的不相交连续体 $F_1, F_2 \subset B(x_0, r_0)$，我们有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)) \geq \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; B(x_0, r_0))$$

根据模数的单调性。若 $x_0 \in E$，考虑一个球 $B(x_0, r_0) \subset \Omega$。由于$E \in *NED^w(\Omega)$，存在一个一致常数 $M \geq 1$，使得对于上述的 $F_1, F_2 \subset B(x_0, r_0)$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)) &\geq \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \Omega) \cap \mathcal{F}_*(E)) \\ &\geq M^{-1} \cdot \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \Omega) \\ &\geq M^{-1} \cdot \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; B(x_0, r_0)).\end{aligned}$$

欧几里得空间中的每个开球都是一个 *Loewner* 空间 [Hei01，例 8.24 (a)，第 65]，页，因此只要$\Delta(F_1, F_2) \leq 1$，后一个模数就有一致的正下界。因此，引理 2.4 的假设得以满足。

对于 (ii)，注意到每个闭集 $K \subset E$ 都包含于 Ω，位于 $*NED^w(\Omega)$ 中，并且根据 (i) 满足引理 2.4 的假设。由引理 2.4，$m_n(K) = 0$。由于 E 可测，$m_n(E) = 0$。□

2.5. 与 *NED* 集合的经典定义比较。 按照经典定义，闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 *NED* 的，当且仅当对于每一对非空且不相交的连续统 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus E$，都有

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) = \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n \setminus E) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_0(E)).$$

在我们的定义中，我们要求了更强的条件，即上述等式对所有不相交的连续统 F_1, $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ 都成立，而不论它们是否与集合E相交。我们的方法之所以允许如此一般的情形，是因为我们对 E不施加任何拓扑假设；它甚至可能在 $\mathbb{R}^n$中稠密。因此，若要求连续统 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus E$满足相应条件，就会过于严格且不自然。

我们证明这两个定义是一致的。证明依赖于若干关于n-模数与 n-容量之间关系的结果。设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，F_1,$F_2 \subset U$ 是不相交连续体。电容器 $(F_1, F_2; U)$的 n-容量定义为

$$\operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; U) = \inf_u \int_U |\nabla u|^n,$$

其中，下确界取遍所有满足以下条件的函数 u：在 $U \cup F_1 \cup F_2$中连续，在 U [V¨ai71, Section 26, p. 88]，中绝对连续于直线，且在 F_1 的某个邻域内取值为 $u = 0$，在 F_2 [的某个邻域内取值为$u = 1$ Hes75, Theorem 3.3]。等价地，在此定义中，可以用狄利克雷空间 $L^{1,n}(U)$中的函数替代连续的绝对连续于直线函数；这些函数在 U 中局部可积，且其一阶分布导数属于 $L^n(U)$。Hesse [Hes75, Theorem 5.5] 已证明，只要 F_1, F_2是 U 中的连续体（具体而言，彼此不相交），那么

$$\operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; U) = \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; U).$$

Herron–Koskela [HK90] 将这一结果推广到了 $F_1, F_2 \subset \overline{U}$ 的情形，前提是 U 是一个 *QED* 域；另请参阅 Shlyk [Shl93] 的研究，以了解更

一般性的结果。根据定义，若存在常数 $M \geq 1$ 使得.....，则连通开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 拟极值距离 区域

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \leq M \cdot \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; U)$$

对于所有非空且不相交的连续统 F_1， $F_2 \subset U$。

假设 E 是依照经典定义的 *NED* 集合。那么 $U = \mathbb{R}^n \setminus E$ 是一个拟极值距离 区域，其闭包为 $\mathbb{R}^n$；经典的 *NED* 集合具有空内部 [V¨ai62]。因此，Herron–Koskela 的结果给出

$$\operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; \mathbb{R}^n \setminus E) = \operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n \setminus E)$$

对于所有非空且不相交的连续统 F_1， $F_2 \subset \mathbb{R}^n$。总之，为了证明经典定义与当前定义等价，只需证明

$$\operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) = \operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; \mathbb{R}^n \setminus E)$$

对于所有非空且不相交的连续统 F_1， $F_2 \subset \mathbb{R}^n$。注意，当 F_1， $F_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus E$ 时，这个等式已经成立。因此， E 对 n-容量 是可去的，这里的含义见 Vodopyanov–Goldshtein [VG77]。根据 [VG77, 定理 3.1，第 46], 页，此类集合恰好是对狄利克雷空间 $L^{1,\,n}$ 可去的集合。也就是说， $m_n(E) = 0$，并且如果 $u \in L^{1,\,n}(\mathbb{R}^n \setminus E)$，那么 $u \in L^{1,\,n}(\mathbb{R}^n)$，且 u 的分布导数在两个空间中相同。现在，令 F_1， F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意非空且不相交的连续统；特别地，它们可能与集合 E 相交，如当前对*NED* 集合的定义所述。显然，我们有

$$\operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; \mathbb{R}^n \setminus E) \leq \operatorname{Cap}_n(F_1, F_2; \mathbb{R}^n).$$

由于 E 对狄利克雷空间 $L^{1,\,n}$ 是可去的，我们也得到反向不等式，从而完成证明。

3. Families of curve perturbations

设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个路径族。我们将 $\partial\mathcal{F}$ 定义为这样的点 $x \in \mathbb{R}^n$ 的集合：它们是 $\mathcal{F}$ 中某条路径的端点，并且对任意路径 $\gamma \in \mathcal{F}$ 都满足 $x \notin |\gamma| \setminus \partial\gamma$。换言之， $\partial\mathcal{F}$ 包含 $\mathcal{F}$ 中路径的端点，这些端点不是 $\mathcal{F}$ 中任何路径的内部点。例如，若 $\mathcal{F}$ 是族 $\Gamma(F_1, F_2; U)$，其中 U 是环域 $A(0; r, R)$，而 F_1、 F_2 是 U 的边界分支，那么 $\partial\mathcal{F} = F_1 \cup F_2$。另一个例子是某个集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 对应的族 $\mathcal{F}_0(E)$；回顾第 2.4 节中的定义。于是，$\partial\mathcal{F}_0(E) \supset E$。事实上，每个点 $x \in E$ 都可以视为 $\mathcal{F}_0(E)$ 中的一条常值路径；回想一下， $\mathcal{F}_0(E)$ 中的路径可以有位于 E 中的端点。此外，如果 $x \in E$，那么对任意 $\gamma \in \mathcal{F}_0(E)$ 都有 $x \notin |\gamma| \setminus \partial\gamma$；因此 $x \in \partial\mathcal{F}_0(E)$。

定义 3.1。我们称路径族 $\mathcal{F}$ 属于 $\mathbb{R}^n$，是一个曲线扰动族，或者称为 P-族，如果

(P1) 对于 $\mathbb{R}^n$ 中所有非常值可求长路径 γ，我们有 $\gamma + x \in \mathcal{F}$，对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立；**(P2)** 对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，径向线段 $t \mapsto x + tw$、$0 \leq t \leq r$ 对于 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $w \in S^{n-1}$（0,1）都包含在 $\mathcal{F}$ 中；**(P3)** $\mathcal{F}$ 在强子路径和重新参数化下封闭；**(P4)** 如果两条路径 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}$ 有一个不属于 $\partial\mathcal{F}$ 的公共端点，那么将 γ_1 与 γ_2 在该端点处拼接所得的路径属于 $\mathcal{F}$。

对于在拼接下封闭的族，性质（P4）总是成立；例如，曲线族 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 中的曲线与给定集合 E 相交于可数多个点，该族便具有此性质。要求 γ_1 和 γ_2 的公共端点不属于 $\partial\mathcal{F}$，是因为我们希望涵盖诸如 $\mathcal{F}_0(E)$ 这样的曲线族，其中包含的路径与 E 不相交，端点处可能相交的情况除外。由于 $\partial\mathcal{F}_0(E) \supset E$，我们指出 $\mathcal{F}_0(E)$ 总是满足性质（P4）。最后，我们注意到 $\mathcal{F}_0(E)$ 和 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 总是满足（P3）。我们在下文总结这些说明。

注记 3.2。性质 (P3) 和 (P4) 对族 $\mathcal{F}_0(E)$ 和 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 总是成立，对每个 $E \subset \mathbb{R}^n$ 均如此。

引理 3.3。可数个 P-族 $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$ 的交集仍是一个 P-族。

证明。设 $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i$。对 $\mathcal{F}$，性质 (P1)、(P2) 和 (P3) 显然成立。对于 (P4)，注意到对每个 $i \in \mathbb{N}$，$\mathbb{R}^n$ 中的每条常值路径都属于 $\mathcal{F}_i$；这可由结合 (P2) 和 (P3) 得出。因此，若某个 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $x \in \partial\mathcal{F}_i$，则 x 是 $\mathcal{F}$ 中一条（常值）路径的端点。此外，对于 $\mathcal{F}_i \supset \mathcal{F}$ 的任意路径 γ，都有 $x \notin |\gamma| \setminus \partial\gamma$，所以

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \partial\mathcal{F}_i \subset \partial\mathcal{F}.$$

现在，如果 γ_1，$\gamma_2 \in \mathcal{F}$ 有一个不属于 $\partial\mathcal{F}$ 的公共端点，那么它也不属于任何 $i \in \mathbb{N}$ 的 $\partial\mathcal{F}_i$。因此，根据 (P4)，对每个 $i \in \mathbb{N}$，γ_1 与 γ_2 的拼接都属于 $\mathcal{F}_i$。这证明 (P4) 对 $\mathcal{F}$ 成立。□

在第 3.2 节中，我们将看到这类族的重要示例。具体而言，如果 $\mathscr{H}^{n-1}(E) = 0$，那么族 $\mathcal{F}_0(E)$ 是一个 P-族；如果 E 的 Hausdorff $(n-1)$ 测度有限且为 σ-有限，那么 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 是一个 P- 族。

3.1. **不变性定理**。本节的主要结果指出，将路径族限制为一个 P-族，不会影响 n-模数。

定理 3.4。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个曲线扰动族。那么，对于任意开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 以及所有非空且不相交的连续统对 $F_1, F_2 \subset U$，我们有

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; U) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F})$$

我们首先建立一些辅助结果。

引理 3.5. 设 $\mathcal{F}$是 $\mathbb{R}^n$中的一个曲线扰动族。设 $A = A(0; r, R)$,$0 < 7r \le R$，且 F_1, $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是两个不相交连续体，并且每个球面 $S^{n-1}(0, \rho)$,$r < \rho < R$都与 F_1 和 F_2相交。那么

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; A) \cap \mathcal{F}) \ge c(n) \log\left(\frac{R}{r}\right).$$

对于 $r < R < 7r$，该结论也成立，但为简洁起见，我们不予证明。不将结论限定于族 $\mathcal{F}$ 时，该结论是经典结果，可见于 [V¨ai71，第 10.12 条定理，第 31] 页。我们的证明依赖于下面的引理。

引理 3.6 ([KK00, 引理 2.1])**.** 设 $u\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ 是一个博雷尔函数，且$F \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连续体。假设对每个 $y \in F$，都存在一个集合 $D_y \subset S^{n-1}(y, 1)$，使得 $\mathscr{H}^{n-1}(D_y) \ge a > 0$，其中某个 $a > 0$ 满足

$$\int_{[y,w]} u\, ds \ge 1$$

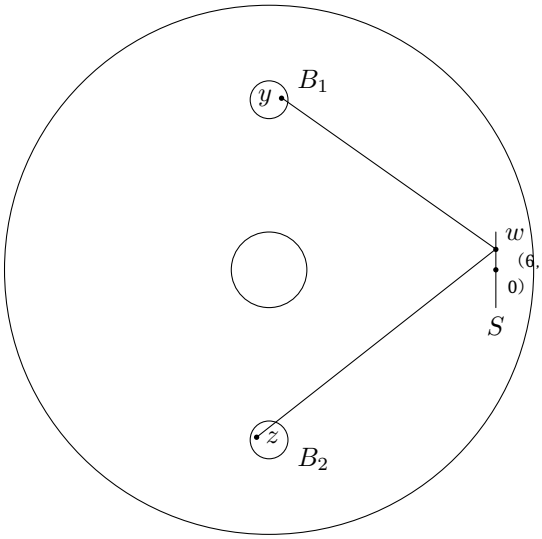

FIGURE 1

对每个 $w \in D_y$。那么

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^n \geq c(n,a)\,\mathrm{diam}(F).$$

引理 *3.5* 的证明。我们先对 $R = 7r$ 证明该命题。我们将进行若干归一化和化简。根据 n- 模数的共形不变性，不妨假设 $r = 1$。存在闭球 $B_i = B(z_i, 1/2)$，满足 $z_i \in F_i \cap S^{n-1}(0, 9/2)$，以及不相交连续体 $F_i' \subset F_i \cap B_i$，其直径 $\mathrm{diam}(F_i') \geq 1/2$ 对于 $i = 1, 2$。我们将为 $\mathrm{Mod}_n \Gamma(F_1', F_2'; A)$ 找到一个一致下界，由模数的单调性，这将给出 $\mathrm{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; A)$ 的一致下界。此后，为简便起见，我们将 F_i' 记为 F_i, $i = 1, 2$。

通过应用共形映射，我们可以假设 B_1 和 B_2 关于超平面 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ 对称，且它们的中心的第一坐标非负。球的选取和归一化方式使得，对于 $(n-1)$ 维圆盘 $S = B((6, 0, \ldots, 0), 1) \cap (\{6\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ 中的所有点 w，以及所有 $y \in B_i$, $i = 1, 2$，线段 $[y, w]$ 均包含在原环域 A 中；参见图 1。

我们注意到 $1/2 \leq \mathrm{diam}(F_i) \leq 1$、$\mathrm{diam}(S) = 2$，且 $1 \leq \mathrm{dist}(F_i, S) \leq 14 = 2R$ 对于 $i = 1, 2$。因此，$\mathrm{diam}(S) \simeq \mathrm{diam}(F_i) \simeq \mathrm{dist}(F_i, S) \simeq 1$。对于 $y \in F_1$, $w \in S$，以及 $z \in F_2$，考虑由线段 $[y, w]$ 和 $[w, z]$ 拼接而成的 $\gamma(y, w, z)$。注意，根据 P-族的性质，对于每个 $y \in F_1$, $z \in F_2$ 以及几乎处处的 $w \in S$，都有 $\gamma(y, w, z) \subset A$，且 $\gamma(y, w, z) \in \Gamma(F_1, F_2; A) \cap \mathcal{F}$。事实上，(P2) 和 (P3) 表明，对于几乎处处的 $w \in S$，线段 $[y, w]$ 和 $[w, z]$ 均包含在 $\mathcal{F}$ 中。此外，同样的性质表明，几乎处处的 $w \in S$ 不属于 $\partial\mathcal{F}$。因此，根据 (P4)，线段 $[y, w]$ 和 $[w, z]$ 的拼接包含在 $\mathcal{F}$ 中。

对于每个固定的 $y \in F_i$，考虑映射 $S \ni w \mapsto \Phi_y(w) = \frac{w-y}{|w-y|}$——根据 y 和 S 的相对位置，该映射是一致双 Lipschitz 的。因此，若对于某个 $a > 0$，有 $S' \subset S$ 和 $\mathscr{H}^{n-1}(S') \geq a$，则 $\mathscr{H}^{n-1}(\Phi_y(S')) \gtrsim_n a$。注意，隐含常数与点 $y \in F_i$ 无关。

现在，设 ρ 是 $\Gamma(F_1, F_2; A) \cap \mathcal{F}$ 的一个可容许函数。我们有

$$\int_{\gamma(y,w,z)} \rho \, ds \geq 1$$

对所有的 $y \in F_1$、$z \in F_2$ 以及几乎处处的 $w \in S$。假设对每个 $y \in F_1$，都存在 $S_y \subset S$，使得 $\mathscr{H}^{n-1}(S_y) \geq \frac{1}{2}\mathscr{H}^{n-1}(S)$，从而我们有

$$\int_{[y,w]} \rho \, ds \geq 1/2$$

对所有的 $w \in S_y$。那么，对于集合 $D_y = \Phi_y(S_y)$，我们有 $\mathscr{H}^{n-1}(D_y) \gtrsim_n 1$。引理 3.6 现在推出

$$\int \rho^n \gtrsim_n 1.$$

另一种情况是，存在 $y \in F_1$，使得 S 存在一个子集 S'，满足 $\mathscr{H}^{n-1}(S') \geq \frac{1}{2}\mathscr{H}^{n-1}(S)$，并且

$$\int_{[y,w]} \rho \, ds < 1/2$$

对每个 $w \in S'$。这意味着，对每个 $z \in F_2$ 以及几乎处处的 $w \in S'$，我们有

$$\int_{[z,w]} \rho \, ds \geq 1/2.$$

与之前一样，由引理 3.6 可得

$$\int \rho^n \gtrsim_n 1.$$

因此，我们已经证明

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; A) \cap \mathcal{F}) \geq c(n) > 0$$

对于一致常数 $c(n)$，其仅取决于 n，只要 $R = 7r$。

在一般情形下，令 $k \in \mathbb{N}$ 为满足 $R \geq 7^k r$ 的最大整数。考虑环域 $A_i = A(0; 7^{i-1}r, 7^i r)$，$i \in \{1, \dots, k\}$。根据串联定律 (M5)，我们有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; A) \cap \mathcal{F}) \geq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; A_i) \cap \mathcal{F}) \gtrsim_n k \gtrsim_n \log(R/r). \quad \square$$

引理 3.7。令 $x \in \mathbb{R}^n$、$R > 0$ 和 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ 为一个博雷尔函数，且满足 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$。

(i) 对于 $M > 0$，设 Γ_M 为与球 $B(x, R)$ 相交且满足 $\ell(\gamma) > MR$ 的路径族 γ。那么，当 $M \to \infty$ 时，$\operatorname{Mod}_n \Gamma_M \to 0$。(ii) 设 Γ 是一个路径族，且对于某个 $a > 0$，有 $\operatorname{Mod}_n \Gamma > a$，其中每条路径 $\gamma \in \Gamma$ 都与球 $B(x, R)$ 相交。那么存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$，使得

$$\int_\gamma \rho \, ds \leq c(n, a) \left(\int_{B(x, c(n,a)R)} \rho^n \right)^{1/n} \quad \text{and} \quad \ell(\gamma) \leq c(n, a) R.$$

证明。这两个结论在共形变换下保持不变。因此，通过共形变换，我们不妨设 $x = 0$ 且 $R = 1$。对于 $M > 1$，族 Γ_M 包含于以下各族的并集中

$$\Gamma_1 = \{\gamma : \ell(\gamma) > M \text{ and } |\gamma| \subset B(0, \sqrt{M})\}$$
$$\Gamma_2 = \{\gamma : |\gamma| \cap \partial B(0,1) \neq \emptyset \text{ and } |\gamma| \cap \partial B(0, \sqrt{M}) \neq \emptyset\}$$

由模的次可加性，只需证明当 $M \to \infty$ 时，$\operatorname{Mod}_n \Gamma_i$ 对 $i = 1, 2$ 趋于 0。函数 $M^{-1}\chi_{B(0,\sqrt{M})}$ 对 Γ_1 可容许，因此 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_1 \leq c(n)M^{-n/2}$。$\Gamma_2$ 的模由显式公式 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_2 = c(n)(\log \sqrt{M})^{1-n}$ 给出；见性质（M8）。这就证明了 (i) 部分。

现在证明 (ii)。令 $M = M(n, a)$ 足够大，使得 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_M < a/2$。定义 $\rho_1 = \rho\chi_{B(0,M+1)}$，并令 Γ_1 为路径族 $\gamma \in \Gamma$，其中路径满足

$$\int_\gamma \rho_1 \, ds > 2^{1/n} a^{-1/n} \|\rho_1\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

那么函数

$$2^{-1/n} a^{1/n} \|\rho_1\|^{-1}_{L^n(\mathbb{R}^n)} \rho_1$$

在 Γ_1 上可容许，条件是 $\|\rho_1\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \neq 0$，此时有 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_1 \leq a/2$。若 $\|\rho_1\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} = 0$，则由性质（M4）可得 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_1 = 0$。此外，令 Γ_2 为路径族 $\gamma \in \Gamma$，其中满足 $\ell(\gamma) > M$，于是 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_2 \leq \operatorname{Mod}_n \Gamma_M < a/2$。由模的次可加性可得 $\operatorname{Mod}_n(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) < a < \operatorname{Mod}_n \Gamma$。因此，$\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ 具有正模，特别是非空的。因此，存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$，满足 $\ell(\gamma) \leq M$，并且

$$\int_\gamma \rho_1 \, ds \leq 2^{1/n} a^{-1/n} \|\rho_1\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

最后，注意 $|\gamma| \subset B(0, M+1)$，因为 $|\gamma| \cap B(0,1) \neq \emptyset$ 且 $\ell(\gamma) \leq M$。因此，

$$\int_\gamma \rho \, ds = \int_\gamma \rho_1 \, ds,$$

由此完成证明，其中 $c(n,a) = \max\{M(n,a) + 1, 2^{1/n} a^{-1/n}\}$。 □

对于连续体 $F \subset \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，我们定义 F^r 为连续体 $F + \overline{B(0,r)} = \{x + y \colon x \in F, y \in \overline{B(0,r)}\}$。

引理 3.8. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个曲线扰动族。那么，对于每个开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 以及所有非空、不相交连续体对 $F_1, F_2 \subset U$，有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F}) = \lim_{r \to 0} \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}).$$

我们的证明依赖于 P-族的性质，这是一个新概念，但主要思想源自 [V¨ai62 中引理 2]的证明。

证明。注意，对每个 $r > 0$，都有 $\Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F} \subset \Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}$，因此一个不等式显然成立。此外，如果 F_i 是某个 $i = 1,2$ 对应的点 x_0，那么存在 $R > 0$，根据性质 (M2) 和 (M8)，我们有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}) \leq \operatorname{Mod}_n \Gamma(A(x_0; r, R)) = c(n) \left(\log \frac{R}{r}\right)^{1-n}$$

对于所有充分小的 $r > 0$。取 $r \to 0$，即可得到所需的结论。

我们假设 $\operatorname{diam}(F_i) > 0$ 对于 $i = 1,2$。设 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$ 对$\Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F}$ 可容许。我们将证明，对于每个 $q < 1$，都有

$$\int_\gamma \rho \, ds \geq q$$

对所有充分小的 $r > 0$ 和 $\gamma \in \Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}$。这将推出

$$\limsup_{r \to 0} \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}) \leq q^{-n} \int \rho^n.$$

令 $q \to 1$，然后对 ρ 取下确界，即得所需的

$$\limsup_{r \to 0} \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}) \leq \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F}).$$

反设存在 $0 < q < 1$ 和 $r_k \to 0^+$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一条路径 $\gamma_{r_k} \in \Gamma(F_1^{r_k}, F_2^{r_k}; U) \cap \mathcal{F}$，满足

$$\int_{\gamma_{r_k}} \rho \, ds < q < 1.$$

取一条子路径后，我们还可假设 $|\gamma_{r_k}|$ 与 $F_1 \cup F_2$ 不相交；这里用到了性质（P3）。固定一个 $R_0 > 0$，使得 $F_i^{R_0} \subset U$，且对 $i = 1, 2$，有 $\operatorname{diam}(F_i) > 2R_0$，并且 $F_1^{R_0} \cap F_2^{R_0} = \emptyset$。对每个 $r_k < R_0$ 和 $i = 1, 2$，都存在$x_{i,k} \in F_i$，使得 $|\gamma_{r_k}|$ 连接环域 $A_{i,k} = A(x_{i,k}; r_k, R_0)$ 的边界分支。注意，F_i 也连接环域$A_{i,k}$的边界分支，因为 $\operatorname{diam}(F_i) > \operatorname{diam}(A_{i,k})$。再取一条子路径后，我们还可假设 γ_{r_k} 的端点位于$A_{i,k}$的内侧边界分支上。

我们固定 $\varepsilon = (1-q)/2 > 0$。由引理 3.5 可知，若 $r_k < R_0/8$，则

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(|\gamma_{r_k}|, F_i; A_{i,k}) \cap \mathcal{F}) \geq c(n) \log(R_0/r_k) \gtrsim_n 1.$$

引理 3.7(ii) 蕴含，若 r_k 足够小（取决于 ε），则存在一条路径 $\gamma_i \in \Gamma(|\gamma_{r_k}|, F_i; A_{i,k}) \cap \mathcal{F}$，使得

$$\int_{\gamma_i} \rho \, ds \leq c(n) \left(\int_{B(x_{i,k}, c(n) r_k)} \rho^n \right)^{1/n} < \varepsilon.$$

我们将 γ_i、$i = 1$、2 与 γ_{r_k} 的一个适当子路径拼接起来；注意，γ_i 中位于 $|\gamma_{r_k}|$ 内的端点不在 $\partial\mathcal{F}$ 中，因为它是 $\mathcal{F}$ 的一条路径的内点。由性质（P4），该拼接位于 $\mathcal{F}$ 中。由此，我们得到一条路径$\gamma \in \Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F}$，使得

$$\int_\gamma \rho \, ds \leq \int_{\gamma_{r_k}} \rho \, ds + \int_{\gamma_1} \rho \, ds + \int_{\gamma_2} \rho \, ds < q + 2\varepsilon = 1.$$

这与 ρ 的可容许性矛盾。 □

注 3.9。从证明中可以看出，对于满足（P3）、（P4）以及引理 3.5 的结论（或其某种变体，例如引理 6.7，其中使用矩形环域而非球形环域）的族，引理 3.8 更一般地成立。回想一下，$\mathcal{F}_*(E)$ 总是满足（P3）和（P4）；见注 3.2。

在证明定理 3.4 之前，我们最后一个预备结果是以下定理，它是勒贝格微分定理在线积分情形下的一个版本。

定理 3.10. 设 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ 是一个博雷尔函数，且 $\rho \in L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 对某个 $p>1$成立。那么存在一个路径族 Γ_0，使得 模$_p\,\Gamma_0 = 0$，并且对每条可求长路径 $\gamma \notin \Gamma_0$，都有 $\int_\gamma |\rho|\,ds < \infty$，且

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(0,r)} \int_{\gamma+x} \rho\,ds = \int_\gamma \rho\,ds.$$

证明。 根据模的次可加性，只需证明该命题对包含在某个紧集中的路径γ 成立。因此，我们可以假设 $\rho \in L^p(\mathbb{R}^n)$。对于具有紧支集的连续函数 ρ，由一致连续性可知，该命题对所有可求长路径都显然成立。对于一般情形，固定 $\lambda>0$，考虑由满足 $\int_\gamma |\rho|\,ds<\infty$ 的可求长路径 γ 构成的族 Γ_λ，并

$$\limsup_{r\to 0} \left| \fint_{B(0,r)} \int_{\gamma+x} \rho\,ds - \int_\gamma \rho\,ds \right| > \lambda.$$

只需证明对每个 $\lambda>0$都有 $\mathrm{Mod}_p\,\Gamma_\lambda = 0$。设 ϕ 为一个具有紧支集的连续函数。那么， $\Gamma_\lambda \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，其中 Γ_1 是由满足 γ 的可求长路径构成的族

$$\limsup_{r\to 0} \fint_{B(0,r)} \int_{\gamma+x} |\rho-\phi|\,ds > \lambda/2$$

并且 Γ_2 是由满足 γ 的可求长路径构成的族

$$\int_\gamma |\rho-\phi|\,ds > \lambda/2.$$

我们注意到

$$\mathrm{Mod}_p\,\Gamma_2 \le 2^p\lambda^{-p}\|\rho-\phi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

此外，若 γ 以弧长参数化，则有

$$\fint_{B(0,r)} \left(\int_{\gamma+x} |\rho-\phi|\,ds \right) dx = \int_0^{\ell(\gamma)} \left(\fint_{B(\gamma(t),r)} |\rho-\phi| \right) dt \le \int_\gamma M(\rho-\phi)\,ds,$$

其中 $M(\cdot)$ 表示中心化 Hardy–Littlewood 极大函数。因此，

$$\int_\gamma M(\rho-\phi)\,ds > \lambda/2$$

对 $\gamma \in \Gamma_1$成立。Hardy–Littlewood 极大 L^p不等式 [Zie89, Theorem 2.8.2, p. 84] 意味着

$$\mathrm{Mod}_p\,\Gamma_1 \le 2^p\lambda^{-p}\|M(\rho-\phi)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c(n,p)2^p\lambda^{-p}\|\rho-\phi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

综上，

$$\mathrm{Mod}_p\,\Gamma_\lambda \le \mathrm{Mod}_p\,\Gamma_1 + \mathrm{Mod}_p\,\Gamma_2 \lesssim_{n,p,\lambda} \|\rho-\phi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

由于 ϕ 是任意的，我们得出 $\mathrm{Mod}_p\,\Gamma_\lambda = 0$，如所求。 □

定理 *3.4* 的证明。根据模数的单调性，只需证明

$$\mathrm{Mod}_n\,\Gamma(F_1,F_2;U) \le \mathrm{Mod}_n(\Gamma(F_1,F_2;U)\cap\mathcal{F}).$$

根据引理 3.8，只需证明

$$\mathrm{Mod}_n\,\Gamma(F_1,F_2;U) \le \mathrm{Mod}_n(\Gamma(F_1^r,F_2^r;U)\cap\mathcal{F})$$

对所有充分小的 $r>0$ 均成立。我们固定 $r>0$，使得 F_1^r、$F_2^r \subset U$。令 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是 $\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}$ 的一个可容许函数，且满足 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$。考虑由定理 3.10 给出且对应于 ρ 的曲线族 Γ_0，其模为 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$。令 $\gamma \in \Gamma(F_1, F_2; U) \setminus \Gamma_0$ 为一条可求长路径。由于 $\mathcal{F}$ 是曲线扰动族，根据 (P1)，对几乎所有 $x \in B(0,r)$，都有 $\gamma + x \in \Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}$。现在，$\rho$ 对于 $\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}$ 的可容许性以及定理 3.10 蕴含 $\int_\gamma \rho\, ds \geq 1$，因此 ρ 是 $\Gamma(F_1, F_2; U) \setminus \Gamma_0$ 的可容许函数。因此，

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; U) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; U) \setminus \Gamma_0) \leq \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}). \quad \square$$

3.2. **曲线扰动族的例子**。下一个定理与定理 3.4 结合，给出定理 1.5 (ii) 和定理 1.6。

定理 3.11。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合。

(i) *If $\mathscr{H}^{n-1}(E) = 0$, then $\mathcal{F}_0(E)$ is a P-family.*

(ii) *If E has σ-finite Hausdorff $(n-1)$-measure, then $\mathcal{F}_\sigma(E)$ is a P-family.*

如 (i) 中所述，Hausdorff $n-1$-测度为零的情形已由 V¨ais¨al¨a [V¨ai62 考虑过；引理 5]，证明了对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有 $\gamma + x \in \mathcal{F}_0(E)$；也就是说，(P1) 得到满足。还要回顾的是，对于 $\mathcal{F}_0(E)$ 和 $\mathcal{F}_\sigma(E)$，(P3) 和 (P4) 总是成立；参见注 3.2。我们首先证明两个初步引理，它们将在定理的 (i) 和 (ii) 两种情形的证明中用到。

引理 3.12。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和 γ 是非恒定的可求长路径。对于 $N \in \mathbb{N}$，令 F_N 为满足 $E \cap |\gamma + x|$ 至少包含 N 个点的 $x \in \mathbb{R}^n$ 集合。于是

$$m_n^*(F_1) \leq c(n) \max\{\ell(\gamma), \operatorname{diam}(E)\} \operatorname{diam}(E)^{n-1} \quad \text{and}$$
$$m_n^*(F_N) \leq c(n) \ell(\gamma) N^{-1} \mathscr{H}^{n-1}(E).$$

证明。首先证明第二个不等式。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 $F_{N,k}$ 为满足 $E \cap |\gamma + x|$ 包含 N 个相互距离不小于 $1/k$的点的 $x \in F_N$ 集合。我们有 $F_{N,k+1} \supset F_{N,k}$，$F_N = \bigcup_{k=1}^\infty F_{N,k}$，以及 $m_n^*(F_N) = \lim_{k\to\infty} m_n^*(F_{N,k})$；参见 [Bog07，命题 1.5.12]。我们估计 $m_n^*(F_{N,k})$。固定一个足够大的 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{2k} < \operatorname{diam}(|\gamma|)/4$。考虑 E 的任意一个由集合 U_i、$i \in I$ 构成的覆盖，其中 $\operatorname{diam}(U_i) < \frac{1}{2k}$。对于每个 $i \in I$，存在一个半径为 $r_i = \operatorname{diam}(U_i) < \frac{1}{2k} < \operatorname{diam}(|\gamma|)/4$的闭球 $B_i \supset U_i$。定义函数

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{i \in I} \frac{1}{r_i} \chi_{2B_i}.$$

若 $x \in F_{N,k}$，则 $|\gamma + x|$ 至少与 N 个球 B_i 相交，且不包含于任何球 $2B_i$。因此，

$$\int_{\gamma + x} \rho\, ds \geq 1.$$

根据切比雪夫不等式和富比尼定理，我们有

$$m_n^*(F_{N,k}) \leq \ell(\gamma) \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \simeq_n \ell(\gamma) N^{-1} \sum_{i \in I} \operatorname{diam}(U_i)^{n-1}.$$

由直径小于 $\frac{1}{2k}$ 的集合 U_i、$i \in I$ 对 E 的覆盖是任意的，因此

$$m_n^*(F_{N,k}) \lesssim_n \ell(\gamma) N^{-1} \mathscr{H}^{n-1}_{(2k)^{-1}}(E).$$

令 $k \to \infty$，得到

$$m_n^*(F_N) \lesssim_n \ell(\gamma) N^{-1} \mathscr{H}^{n-1}(E).$$

对于第一个不等式，考虑两种情况。若 $\operatorname{diam}(|\gamma|) > 4\operatorname{diam}(E)$，则我们用半径为 r 的闭球 B 覆盖 E，其中 $0 \le \operatorname{diam}(E) < r < \operatorname{diam}(|\gamma|)/4$。若 $x \in F_1$，则 $|\gamma + x|$ 与 B 相交，且不包含于 $2B$。上述针对 $N = 1$ 的论证给出 $m_n^*(F_1) \lesssim_n \ell(\gamma) r^{n-1}$。现在，我们令 $r \to \operatorname{diam}(E)$，从而得到 $m_n^*(F_1) \lesssim_n \ell(\gamma) \operatorname{diam}(E)^{n-1}$。接下来，假设 $\operatorname{diam}(|\gamma|) \le 4 \operatorname{diam}(E)$。此时，若 $x \in F_1$，则对于某个固定的 $x_0 \in E$，有 $|\gamma + x| \subset B(x_0, 5 \operatorname{diam}(E))$。因此，$m_n^*(F_1) \le m_n(B(x_0, 5 \operatorname{diam}(E))) = c(n) \operatorname{diam}(E)^n$。□

引理 3.13。设 $E \subset \mathbb{R}^n$、$x \in \mathbb{R}^n$、$r > 0$，并对 $w \in S^{n-1}(0,1)$ 定义$\gamma_w(t) = x + tw$、$r/2 \le t \le r$。对 $N \in \mathbb{N}$，令 F_N 为满足 $E \cap |\gamma_w|$ 至少包含 N 个点的 $w \in S^{n-1}(0,1)$ 的集合。那么

$$\mathscr{H}^{n-1}(F_1) \le c(n) r^{-n+1} \min\{r, \operatorname{diam}(E)\}^{n-1} \quad and$$
$$\mathscr{H}^{n-1}(F_N) \le c(n) r^{-n+1} N^{-1} \mathscr{H}^{n-1}(E).$$

证明。对于第一个不等式，注意到 $F_1 + x$ 等于$E \cap \{y \in \mathbb{R}^n$ 的径向投影：$r/2 \le |x - y| \le r\}$ 到球面 $S^{n-1}(x,1)$。该投影是一个一致 Lipschitz 映射（将 $\{y \in \mathbb{R}^n : r/2 \le |x-y| \le r\}$投影到 $S^{n-1}(x, r)$）与按 $1/r$缩放的复合。因此，

$$\operatorname{diam}(F_1) \lesssim r^{-1} \operatorname{diam}(E \cap \{y \in \mathbb{R}^n : r/2 \le |x - y| \le r\}) \lesssim r^{-1} \min\{r, \operatorname{diam}(E)\}.$$

此外，F_1 包含在球 $B_0 = B(x_0, \operatorname{diam}(F_1))$ 与 $S^{n-1}(0, 1)$ 的交集中，其中$x_0 \in F_1$。因此，

$$\mathscr{H}^{n-1}(F_1) \le \mathscr{H}^{n-1}(B_0 \cap S^{n-1}(0,1)) \simeq_n \operatorname{diam}(F_1)^{n-1}.$$

这就完成了第一个不等式的证明。

对于第二个不等式，我们按照引理 3.12 的证明进行，定义$F_{N,\,k}$ 为满足以下条件的 $w \in S^{n-1}(0, 1)$ 的集合：$E \cap |\gamma_w|$ 包含 N 个相互距离不小于 $1/k$的点。我们完全按照引理 3.12 中的方式定义函数 ρ，使用 E 的任意覆盖，该覆盖由集合 U_i 及相应的球$B_i \supset U_i$ 构成，且满足 $\underline{r_i} = \underline{\operatorname{diam}}(U_i) < \frac{1}{2k} < \frac{r}{8}$。注意，若 $w \in F_{N,\,k}$，则

$$\int_{\gamma_w} \rho \, ds = \int_{r/2}^{r} \rho(x + tw) \, ds \ge 1.$$

由切比雪夫不等式和极坐标积分可得

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{n-1}(F_{N,k}) &\le \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_{r/2}^{r} \rho(x + tw) \, dt d\mathscr{H}^{n-1}(w) \\ &\lesssim_n r^{-n+1} \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \simeq_n r^{-n+1} N^{-1} \sum_{i \in I} \operatorname{diam}(U_i)^{n-1}.\end{aligned}$$

现在我们像之前一样，对 E 的覆盖取下确界，并令 $k \to \infty$。 □

定理 *3.11* 的证明。根据注 3.2，对于 $\mathcal{F}_0(E)$ 和 $\mathcal{F}_\sigma(E)$，(P3) 和 (P4) 自动成立。下面我们将证明性质 (P1) 和 (P2)。

首先，假设 $\mathscr{H}^{n-1}(E) = 0$ 如 (i) 所示。若 γ 是非恒定的可求长路径，根据引理 3.12 的第二个不等式（对于 $N = 1$），我们有 $E \cap |\gamma + x| = \emptyset$，即，对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，$\gamma + x \in \mathcal{F}_0(E)$。因此，(P1) 成立。

接下来，若 $x \in \mathbb{R}^n$、 $r > 0$和 $w \in S^{n-1}$(0,1)，定义 $\gamma_w(t) = x + tw$, $0 \leq t \leq r$。对路径$\gamma_w|_{[2^{-k}r, 2^{-k+1}r]}$（对于 $N = 1$）反复应用引理 3.13（可数次），可得对所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及几乎处处的$w \in S^{n-1}$(0,1)， $E \cap \gamma_w([2^{-k}r, 2^{-k+1}r]) = \emptyset$。因此，对几乎处处的 $w \in S^{n-1}(0,1)$, $E \cap \gamma_w((0, r]) = \emptyset$。回想一下，根据定义， $\mathcal{F}_0(E)$ 中的路径只允许在端点处与 E 相交。因此，对几乎处处的 $w \in S^{n-1}$(0,1)， $\gamma_w \in \mathcal{F}_0(E)$。至此，(P2) 和 (i) 的证明完成。

接下来，我们假设 E 具有如 (ii) 中所述的 σ-有限豪斯多夫（$n-1$）测度。记 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，其中对每个 $k \in \mathbb{N}$， $\mathscr{H}^{n-1}(E_k) < \infty$。如果我们证明，对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $\mathcal{F}_\sigma(E_k)$ 是一个 P-族，那么 $\mathcal{F}_\sigma(E)$ 也将是一个 P-族，因为根据引理 3.3，可数个 P-族的交集是一个 P-族。因此，对于 (ii)，只需假设 $\mathscr{H}^{n-1}(E) < \infty$。

设 γ 是一条非恒定的可求长路径。我们将 F 定义为满足 $E \cap |\gamma + x|$ 为无限集的 $x \in \mathbb{R}^n$ 所构成的集合，并考虑引理 3.12 中的集合 F_N。注意到 $F = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N$。由于

$$m_n^*(F_N) \lesssim_n \ell(\gamma) N^{-1} \mathscr{H}^{n-1}(E),$$

令 $N \to \infty$，我们得到 $m_n(F) = 0$。这证明了 (P1)。

对于 (P2)，我们固定 $x \in \mathbb{R}^n$、 $r > 0$，并对 $w \in S^{n-1}$(0，1) 考虑线段$\gamma_w(t) = x + tw$, $0 \leq t \leq r$，如上所述。对于固定的 $k \in \mathbb{N}$，我们将引理 3.13 应用于路径 $\gamma_w|_{[2^{-k}r, 2^{-k+1}r]}$，并得出结论（令 $N \to \infty$）：集合 $E \cap \gamma_w([2^{-k}r, 2^{-k+1}r])$ 对几乎处处的 $w \in S^{n-1}$(0，1) 都是有限的。因此，对几乎处处的 $w \in S^{n-1}$(0，1)，集合 $E \cap |\gamma_w|$ 是可数的，即 $\gamma_w \in \mathcal{F}_\sigma(E)$。□

4. 判据

本节证明集合 E 属于NED 或$CNED$的判据。第一个判据在定理 1.2 的证明中至关重要，该定理讨论NED 集合与$CNED$ 集合的并集。回顾一下， $*NED$ 表示 NED 或$CNED$。此外，回顾第 2.4 节中 $*NED(\Omega)$ 和 $*NED^w(\Omega)$ 的定义，以及两个集合 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$的相对距离 $\Delta(F_1, F_2)$ 的定义。令$\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 为一条非常值路径。若 $[c, d] \subset (a, b)$，则称 γ 的强子路径$\gamma|_{[c,d]}$ 为严格的。

定理 4.1 (主要判据)。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个集合，且满足 E 闭，或 $m_n(E) = 0$。以下条件等价。

(I) $E \in *NED(\Omega)$ 对于所有开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$.(II) $E \in *NED$.(III) $E \in *NED^w(\Omega)$ 对于某个开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足$\Omega \supset E$.(IV) 存在常数 $t, \phi > 0$，使得对于每个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，都存在 $r_0 > 0$，满足对于任意一对非退化且不相交的连续体$F_1, F_2 \subset B(x_0, r_0)$ 且 $\Delta(F_1, F_2) \leq t$，我们有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E)) \geq \phi.$$

(V) 对于每个满足 $\rho \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 的博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$，都存在一个路径族 Γ_0，其 模$_n \Gamma_0 = 0$，使得下文的结论 A 对每条端点不同的可求长路径 $\gamma \notin \Gamma_0$ 都成立。此外， Γ_0 具有如下性质：若 $\{\eta_j\}_{j \in J}$ 是 Γ_0 之外的有限路径族，且 γ 是一条满足 $|\gamma| \subset \bigcup_{j \in J} |\eta_j|$的路径，则 $\gamma \notin \Gamma_0$。

(VI) 对于每个满足 $\rho \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 的博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$，都存在一个路径族 Γ_0，其 模$_n\,\Gamma_0 = 0$，使得下文的结论 *B* 对每条端点不同的可求长路径 $\gamma \notin \Gamma_0$ 都成立。

此外，以下蕴含关系对所有集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 均成立。

$$\text{(V)} \Rightarrow \text{(VI)} \Rightarrow \text{(I)} \Rightarrow \text{(II)} \Rightarrow \text{(III)} \Rightarrow \text{(IV)}$$

结论 A (A(E, ρ, γ))。对于 $|\gamma|\setminus\partial\gamma$ 的每个开邻域 U，以及每个$\varepsilon > 0$，都存在一个路径族 $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ 和一条简单路径 $\widetilde{\gamma}$，使得

(A-i) $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_*(E)$,

(A-ii) $\partial\widetilde{\gamma} = \partial\gamma$, $|\widetilde{\gamma}|\setminus\partial\gamma \subset (|\gamma|\setminus E)\cup\bigcup\limits_{i\in I}|\gamma_i|$, and $\bigcup_{i\in I}|\gamma_i| \subset U$,

(A-iii) $\sum\limits_{i\in I}\ell(\gamma_i) < \varepsilon$, and

(A-iv) $\sum\limits_{i\in I}\int_{\gamma_i}\rho\,ds < \varepsilon$.

路径 γ_i、$i \in I$ 可以取为位于给定路径族 Γ' 之外，且 Mod$_n\,\Gamma' = 0$。若 $E\cap\partial\gamma = \emptyset$，则 I 可以取为有限的。一般而言，$\widetilde{\gamma}$ 的每个真子路径的迹都与有限多个轨迹 $|\gamma_i|$、$i \in I$ 相交。

结论 B (B(E, ρ, γ))。对于 $|\gamma|$ 的每个开邻域 U，以及每个$\varepsilon > 0$，都存在一条简单路径 $\widetilde{\gamma}$，使得

(B-i) $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_*(E)$, (B-ii) $\partial\widetilde{\gamma} = \partial\gamma$ 和 $|\widetilde{\gamma}| \subset U$, (B-iii) $\ell(\widetilde{\gamma}) \le \ell(\gamma) + \varepsilon$, 以及 (B-iv) $\int_{\widetilde{\gamma}}\rho\,ds \le \int_{\gamma}\rho\,ds + \varepsilon$.

注意，蕴含关系 (I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III) 是显然的。此外，(III) $\Rightarrow$ (IV) 由引理 2.5 立即得出。(VI) 中的结论 B 只是一个技术性较低的陈述，它可由 (V) 中的结论 A 轻易推出。事实上，利用引理 2.2 (ii)，(B-iii) 和 (B-iv) 可由 (A-ii)、(A-iii) 和 (A-iv) 推出。因此，我们将证明蕴含关系 (IV) $\Rightarrow$ (V)（这是技术性最强的一项）以及 (VI) $\Rightarrow$ (I)。

粗略地说，结论 A 和 B 表明，我们只需付出很小的代价，就能改变路径 γ，使其进入曲线族 $\mathcal{F}_*(E)$。假设 E 是闭的，或 $m_n(E) = 0$，这一点将在证明 (IV) $\Rightarrow$ (V) 时起关键作用（见引理 4.6）；若无此假设，这一推论是否成立令人存疑。

定理 4.1 的一个直接推论是，紧致 $*NED$ 集合具有拟共形不变性和双 Lipschitz 不变性。

推论 4.2。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界集，且 E 是闭的，或满足 $m_n(E) = 0$。设$\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ 是一个开集，且 $E \subset \Omega$，并设 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是一个拟共形嵌入。若 $E \in *NED$, 则 $f(E) \in *NED$.

证明。在任一假设下，由引理 2.5 可得 $m_n(E^{\sim}) = 0$。注意到$f(E) = f(E)$，且由于拟共形性，这是 $f(\Omega)$ 的一个紧子集，具有 n-测度零。由于 f 对 Ω 中每个曲线族的 n-模数仅造成有界的乘性扭曲，我们得到 $f(E) \in *NED^w(f(\Omega))$。由定理 4.1，我们得出 $f(E) \in *NED$. □

我们还用 P-族给出一个替代判据；回顾一下第 3 节中 P-族的定义。对于 NED 集合，这一结果同样成立，但为避免一些技术细节，我们不在此证明。

定理 4.3 (P-族判据)。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合，使得 E 要么是闭集，要么 $m_n(E) = 0$。以下命题等价。

(I) E 是 *CNED*。*(II)* 对每个满足 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$ 的博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$，以下陈述成立。*(II-1)* 对每条可求长路径 γ，几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，以及 $\gamma + x$ 的每条端点不同的强子路径 η，结论 *B(E, ρ, η)* 成立。*(II-2)* 对于 $x \in \mathbb{R}^n$、$0 < r < R$ 和 $w \in S^{n-1}$*(0, 1)*，定义 $\gamma_w(t) = x + tw$，$t \in [r, R]$。那么，对于几乎处处的 $\mathscr{H}^{n-1}$，其中 $w \in S^{n-1}$*(0, 1)*，以及 γ_w 的每条强子路径 η，结论 *B(E, ρ, η)* 成立。*(III)* 对每个满足 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$ 的博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$，存在一个 P-族 $\mathcal{F}$，使得若 $\gamma \in \mathcal{F}$ 是一条可求长路径，则对 γ 的每条端点不同的强子路径 η，结论 *B(E, ρ, η)* 成立。

Ahlfors–Beurling [AB50，定理 10] 证明，若闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是NED，则 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 中的任意两点都可以由 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 中的一条短曲线连接。对于闭$CNED$ 集，类似的结论也成立。

推论 4.4。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 $E \in$ *CNED* 性质的闭集。那么对每个$\varepsilon > 0$ 以及点 x、$y \in \mathbb{R}^n$，都存在一条路径 $\gamma \in \mathcal{F}_\sigma(E)$ 连接 x 和 y，且$\ell(\gamma) \le |x - y| + \varepsilon$。

证明。设 x、$y \in \mathbb{R}^n$是不同的点，γ是线段 $[x, y]$，且 $\varepsilon > 0$。令 $\rho \equiv 0$，并考虑由定理 4.3 (III) 给出的 P-族 $\mathcal{F}$。根据 P-族 $\mathcal{F}$的性质 (P1)，对于几乎处处的 $z \in \mathbb{R}^n$，路径 $\gamma + z$ 都包含于 $\mathcal{F}$。利用球坐标可知，对于几乎处处的 $r > 0$ 以及几乎处处的 $\mathscr{H}^{n-1}$- $w \in S^{n-1}\in$(0, 1)，上述结论对 $z = rw$成立。我们固定一个使该结论成立的 $r < \varepsilon/5$ 。根据 P-族的性质 (P2)，对于几乎处处的 $\mathscr{H}^{n-1}$- $w \in S^{n-1}\in$(0, 1)，径向线段 $\gamma_w^x(t) = x + tw$和 $\gamma_w^y(t) = y + tw$, $0 \le t \le r$都包含于 $\mathcal{F}$。因此，存在 $w \in S^{n-1}\in$(0, 1)，使得两条径向线段都包含于 $\mathcal{F}$ 和 $\gamma + rw \in \mathcal{F}$。现在，我们对 γ_w^x、γ_w^y和 $\gamma + rw$分别应用结论 B (B-iii)（其中 $\varepsilon = r$），由此得出存在路径 η_x、η_y、$\eta \in \mathcal{F}_\sigma($$E$)，它们分别与 γ_w^x、γ_w^y、$\gamma + rw$具有相同的端点，且 $\ell(\eta_x) \le 2r$、$\ell(\eta_y) \le 2r$，以及 $\ell(\gamma + rw) \le |x - y| + r$。将这些路径拼接起来，得到一条位于 $\mathcal{F}_\sigma(E)$中的路径，该路径连接 x 和 y，且长度不超过$|x - y| + 5r < |x - y| + \varepsilon$。□

4.1. **辅助结果**。在证明定理 4.1 和 4.3 之前，我们需要一些辅助结果。下面的引理是初等的。

引理 4.5。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧集，满足 $m_n(E) = 0$, $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的一个函数，且 $\lambda > 0$。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得若$0 < r < \delta$ 且 $B_i = B(x_i, r)$，$i \in \{1, \dots, N\}$是一个以 E 为球心的两两不相交的球的族，则

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\lambda B_i} g < \varepsilon.$$

证明。设 $\lambda, \varepsilon > 0$。由于 E 是紧致的，且 $m_n(E) = 0$ 和 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，因此存在 $\delta > 0$，使得

$$\int_{N_{\lambda\delta}(E)} g < C(n,\lambda)^{-1}\varepsilon \tag{4.1}$$

其中常数 $C(n, \lambda) > 0$ 待定。令 $0 < r < \delta$，并考虑一个由有限个互不相交的球组成的族 $B_i = B(x_i, r)$，$i \in \{1, \dots, N\}$，其中心为 E。假设 $\lambda > 1$。若 $x \in \lambda B_i$，则 $B_i \subset \lambda B_i \subset B(x, 2\lambda r)$。由于球 B_i、$i \in \{1, \dots, N\}$互不相交，由体积比较可知

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_{\lambda B_i} \le 2^n \lambda^n \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} \lambda B_i} \le 2^n \lambda^n \chi_{N_{\lambda r}(E)}.$$

当 $0 < \lambda \le 1$ 时，同一不等式显然成立，此时用常数 1 代替 $2^n\lambda^n$。现在令 $C(n, \lambda) = \max\{1, 2^n\lambda^n\}$，由 (4.1) 得到

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\lambda B_i} g = \int g \sum_{i=1}^{N} \chi_{\lambda B_i} \le C(n,\lambda) \int_{N_{\lambda r}(E)} g < \varepsilon. \qquad \square$$

引理 4.6。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，且满足 $m_n(E) = 0$。那么，对于每个非负函数 $\rho \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 以及每个 $\lambda > 0$

(i) 存在一个路径族 Γ_0，使得 模$_n\,\Gamma_0 = 0$，并且(ii) 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个球族 $\{B_{i,m} = B(x_{i,\,m},\ r_{i,\,m})\}_{i \in I_m}$覆盖 E，且 $r_{i,\,m} < 1/m,\quad i \in I_m,$

使得对于每条非常值曲线 $\gamma \notin \Gamma_0$，都有

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \sum_{i : B_{i,m} \cap |\gamma| \neq \emptyset} r_{i,m} \left(\fint_{\lambda B_{i,m}} \rho^n \right)^{1/n} = 0 \quad \textit{and} \\ &\lim_{m\to\infty} \sum_{i : B_{i,m} \cap |\gamma| \neq \emptyset} r_{i,m} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

证明。首先，我们将问题化归到 E 为紧致的情形。假设该命题对紧集成立。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : k - 1 \le |x| \le k\}$。那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个曲线族 Γ_k，使得模数$_n\,\Gamma_k = 0$；并且对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个球族 $\{B_{i,m}\}_{i \in I_{m,\,k}}$ 覆盖 $E \cap A_k$，其半径小于$1/m$，从而 (4.2) 对非常值路径 $\gamma \notin \Gamma_k$成立。若有球不与 $E \cap A_k$相交，则将其舍去。令 $I_m = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{m,\,k}$ 并令 $\Gamma_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k$。注意，根据模的次可加性，模数$_n\,\Gamma_0 = 0$。我们断言，(4.2) 对这些球 $\{B_{i,m}\}_{i\in I_m}$成立。

如果 γ 是一条位于 Γ_0之外的非常值路径，那么 γ 包含在有限多个集合 A_k，$k \in \mathbb{N}$的并集中。此外，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $i \in I_m$，$_k$、$m \in \mathbb{N}$和 $k > k_0$，都有 $B_{i,\,m} \cap |\gamma| = \emptyset$ ，。因此，在 (4.2) 中，对满足 $B_{i,\,m} \cap |\gamma| \neq \emptyset$ 的指标 $i \in I_{m,\,k}$ 求和时，所有 $k > k_0$对应的和均为零。对于 $k \le k_0$，相应求和的极限为零，因为 $\gamma \notin \Gamma_k$。由于极限与有限求和可交换，我们得到球族 $\{B_{i,m}\}_{i\in I_m}$的 (4.2)。

现在假设 E 是紧致的。令 $g \in L^n(\mathbb{R}^n)$ 为一个非负函数，具体形式稍后给出。根据 $5B$-覆盖引理（[Hei01，定理 1.2]），对于每个$r > 0$，我们可以找到一个由有限个半径为 r、以 E 为中心的球构成的覆盖，使得中心相同且半径为 $r/5$ 的球两两不相交。结合引理 4.5（用 5λ 代替 λ），对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们可以找到一个由球构成的 E 的覆盖

由球 $B_{i,\ m} = B\ (x_{i,\ m},\ r_m)$ 、 $i \in I_m$ 构成，以 E 为中心，使得 $r_m < 1/m$，这些球 $\frac{1}{5}B_{i,\ m}$ 两两不相交，并且

$$\sum_{i\in I_m} \int_{\lambda B_{i,m}} g^n < \frac{1}{2^m}.$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，我们定义博雷尔函数

$$h_m = \sum_{i\in I_m} \left(\fint_{\lambda B_{i,m}} g^n \right)^{1/n} \chi_{2B_{i,m}}.$$

由引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{N}} \|h_m\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} &\lesssim_n \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i\in I_m} \left(\fint_{\lambda B_{i,m}} g^n \right)^{1/n} \chi_{\frac{1}{5}B_{i,m}} \right\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim_{n,\lambda} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_m} \int_{\lambda B_{i,m}} g^n \right)^{1/n} \lesssim_{n,\lambda} \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m/n}} < \infty.\end{aligned}$$

由 Fuglede 引理的一个变体 [V¨ai71，定理 28.1], ，存在一个曲线族 Γ_0 ，其模 Mod $_n\,\Gamma_0 = 0$ 满足：对每条路径 $\gamma \notin \Gamma_0$ ，我们有

$$\lim_{m\to\infty} \int_\gamma h_m\, ds = 0.$$

我们默认 Γ_0 包含所有不可求长的曲线。

注意，若 γ 是一条非常值的可求长曲线，$B_{i,\ m} \cap |\gamma| \neq \emptyset$，且 m 足够大，使得 diam$(|\gamma|) > 4m^{-1} > 4r_m$，那么 $|\gamma|$ 不包含于$2B_{i,\ m}$，因此

$$\int_\gamma \chi_{2B_{i,m}}\, ds \geq r_m.$$

因此，

$$\int_\gamma h_m\, ds \geq \sum_{i:B_{i,m}\cap|\gamma|\neq\emptyset} r_m \left(\fint_{\lambda B_{i,m}} g^n \right)^{1/n}.$$

我们得出结论：若 γ 是位于 Γ_0之外的非常值曲线，则

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i:B_{i,m}\cap|\gamma|\neq\emptyset} r_m \left(\fint_{\lambda B_{i,m}} g^n \right)^{1/n} = 0. \tag{4.3}$$

最后，在上述推导中，我们令 $g = (\rho+1)\chi_{B(0,R)}$ ，其中 ρ 是命题中给定的函数，而 $B(0,\ R)$ 是一个包含紧集E的大球。注意，对于所有充分大的 $m \in \mathbb{N}$ ，都有 $\lambda B_{i,\ m} \subset B(0,\ R)$，对所有 $i \in I_m$ 均成立。于是，对每条非常值曲线 $\gamma \notin \Gamma_0$ ，我们都可由 (4.3) 得到 (4.2)。□

引理 4.7。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个集合， ρ： $\mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 为一个博雷尔函数， γ 为一条端点不同的可求长路径，且 $|\gamma| \cap E$ 全不连通。若对于 γ 的每条端点不同且不属于集合 E的真子路径 η，结论 $A(E,\rho,\eta)$ 均成立，则结论 $A(E,\rho,\gamma)$ 也成立。将结论 A 替换为结论 B，上述陈述仍然成立。

证明。 我们仅给出结论 A 的论证，因为结论 B 的论证类似且技术性较弱。设 U 为$|\gamma| \setminus \partial\gamma$ 和 $\varepsilon > 0$的一个开邻域。只需证明， γ 的一个具有相同端点的强子路径满足结论 A。考虑一个参数化 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$。那么存在 $[a,b]$ 的一个开子区间 J，使得 $\gamma(J) \subset U$，且 γ_J 与 γ具有相同端点。不失一般性，我们假设 $J = (0,1)$，并将路径 $\gamma|_{[0,1]}$ 记为 γ。

首先，假设 $E \cap \overline{\partial\gamma} = \emptyset$。由于 E 是闭的，存在路径 $\gamma|_{[0,t_1]}$、$\gamma|_{[t_2,1]}$，它们均不与 E 相交；并且存在真子路径 $\eta = \gamma|_{[t_1,t_2]}$，满足 $E \cap \partial\eta = \emptyset$。根据假设，存在一条简单路径 $\widetilde{\eta}$，其端点与 η 相同；在 U 内还有有限多条路径 η_i、$i \in I$，如结论 A(E，ρ，η) 所述。将 $\widetilde{\eta}$ 与 $\gamma|_{[0,t_1]}$ 和 $\gamma|_{[t_2,1]}$ 拼接，再取一条简单弱子路径，即得到所需路径 $\widetilde{\gamma}$，它验证了结论 A(E，ρ，γ)。

接下来，假设 $E \cap \overline{\partial\gamma} \neq \emptyset$。考虑一个序列 $a_j \in (0,1)$、$j \in \mathbb{Z}$，使得对每个 $j \in \mathbb{Z}$ 都有 $a_{j-1} < a_j$，且 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} [a_{j-1}, a_j] = (0,1)$。令 $\gamma^j = \gamma|_{[a_{j-1},a_j]}$ 为 γ 的真子路径。由于 $\gamma((0,1))$ 与 $\{\gamma(0)\ \gamma(1)\}$ 不相交，因此可以选取点 a_j，使得 γ^j 对于 $j \in \mathbb{Z}$ 具有不同端点。由于 $|\gamma| \cap E$ 全不连通，我们还可以进一步选取点 a_j，使得对每个 $j \in \mathbb{Z}$ 都有 $\gamma(a_j) \notin E$。

根据假设，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，γ^j 的真子路径 γ 都满足结论 A(E, ρ, γ^j)。因此，我们得到路径 $\widetilde{\gamma}^j$ 和 γ_i^j, $i \in \{1, \dots, N_j\}$，如结论中所述，其中以 $\varepsilon 2^{-|j|}$ 代替 ε，且满足 $\bigcup_{i=1}^{N_j} |\gamma_i^j| \subset U$。特别地，由 (A-i) 可得 $\widetilde{\gamma}^j \in \mathcal{F}_*(E)$。若 $\mathcal{F}_*(E) = \mathcal{F}_0(E)$，由于 $\widetilde{\gamma}^j$ 的端点不属于 E，因此有 $|\widetilde{\gamma}^j| \cap E = \emptyset$。舍去一些路径 γ_i^j 后，我们假设对所有 $i \in \{1, \dots, N_j\}$，$|\gamma_i^j|$ 都与 $|\widetilde{\gamma}^j|$相交。

我们考虑参数化 $\widetilde{\gamma}^j\colon [a_{j-1}, a_j] \to U$ with $\widetilde{\gamma}^j|_{\{a_{j-1},a_j\}} = \gamma^j|_{\{a_{j-1},a_j\}}$,$j \in \mathbb{Z}$。接着，通过拼接这些路径，构造曲线 $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to U$ such that $\widetilde{\gamma}((0,1)) \subset U$。具体来说，我们定义 $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1)$, and $\widetilde{\gamma}|_{[a_{j-1},a_j]} = \widetilde{\gamma}^j$for $j \in \mathbb{Z}$。注意， $\ell(\widetilde{\gamma}^j) \leq \ell(\gamma^j) + \varepsilon 2^{-|j|}$，这由结论 A 得出。我们得出 diam($|\widetilde{\gamma}^j|$) $\to 0$，因为 $|j| \to \infty$，所以 $\widetilde{\gamma}$ 是连续的。通过取一个具有相同端点的弱子路径，我们假设 $\widetilde{\gamma}$ 是简单的。

对于 $\widetilde{\gamma}$，性质 (A-i) 显然成立。如果 $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ 是族 $\{\gamma_i^j\}_{j\in\mathbb{Z},\ i\in\{1,\dots,N_j\}}$，性质 (A-ii) 也成立。事实上，所有这些路径都包含在 U 中，并且根据路径 $\widetilde{\gamma}^j$ 的性质，我们有

$$|\widetilde{\gamma}| \setminus \partial\widetilde{\gamma} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} |\widetilde{\gamma}^j| \subset \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left((|\gamma^j| \setminus E) \cup \bigcup_{i=1}^{N_j} |\gamma_i^j| \right) \subset (|\gamma| \setminus E) \cup \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \bigcup_{i=1}^{N_j} |\gamma_i^j|.$$

最后，我们有

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{N_j} \ell(\gamma_i^j) \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon 2^{-|j|} = 3\varepsilon \quad \text{and} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{N_j} \int_{\gamma_i^j} \rho\, ds \leq 3\varepsilon.$$

因此，(A-iii) 和 (A-iv) 也成立。

现在，我们验证结论 A 的最后一部分。路径 γ_i^j 可以取为位于给定曲线族 Γ' 之外，且 $\operatorname{Mod}_n \Gamma' = 0$，因为它们是通过结论 A 得到的。如果 η 是 $\widetilde{\gamma}$的真子路径，那么 $|\eta|$ 只会与 $\bigcup_{i=1}^{N_j} |\gamma_i^j|$ 相交于有限多个 $j \in \mathbb{Z}$。事实上，由于 $|j| \to \infty$，上述结果表明路径 $\{\gamma_i^j\}_{i\in\{1,\dots,N_j\}}$ 的长度可以任意小，而它们的迹与 $|\widetilde{\gamma}^j|$相交；后者包含在任意小的

邻域中，这些邻域围绕着 $\tilde{\gamma}$的端点。由于 $|\eta|$ 与 $\tilde{\gamma}$的端点之间的距离为正，我们得出结论：当 $|j|$ 足够大时， $|\gamma_i^j|$ 不可能与 $|\eta|$ 相交。证明至此完成。□

4.2. **主要判据的证明**。如前所述，只需证明对所有集合 E，蕴含关系 (VI) ⇒ (I) 成立；并证明对闭集 E 或其闭包具有零测度的集合，蕴含关系 (IV) ⇒ (V) 成立，后者是技术性最强的一项。

定理 *4.1* 的证明：(VI) ⇒ (I)。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集， F_1， $F_2 \subset \Omega$ 为一对非空且不相交的连续统。由模数的单调性，只需证明

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \Omega) \leq \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \Omega) \cap \mathcal{F}_*(E)).$$

设 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$ 是 $\Gamma(F_1, F_2; \Omega) \cap \mathcal{F}_*(E)$ 的一个可容许函数。考虑一个例外曲线族 Γ_0，其模数 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$ 如 (VI) 中所述。设 $\gamma \in \Gamma(F_1, F_2; \Omega) \setminus \Gamma_0$，则结论 B($E$， ρ， γ) 成立。因此，对任意 $\varepsilon > 0$，存在一条可求长路径$\tilde{\gamma} \in \Gamma(F_1, F_2; \Omega) \cap \mathcal{F}_*(E)$，满足

$$1 \leq \int_{\tilde{\gamma}} \rho \, ds \leq \int_{\gamma} \rho \, ds + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 可知， ρ 对于 $\Gamma(F_1, F_2; \Omega) \setminus \Gamma_0$是可容许的。由于 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$，证明完成。□

定理 *4.1* 的证明：(IV) ⇒ (V)。 根据假设 (IV)，它与引理 2.4 的假设一致，我们有 $m_n(E) = 0$。因此，在定理 4.1 的任一初始假设下，我们都有 $m_n(E) = 0$。令 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$为 $L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个博雷尔函数。根据引理 4.6，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个球族 $\{B_{i,m}\}_{i \in I_m}$ 覆盖集合 E，其半径在I_m 中一致趋于 0（当 $m \to \infty$ 时），并且对例外族以外的所有路径，(4.2) 都成立；该例外族的 n-模数为零，且 $\lambda > 0$ 取一个待指定的值。令 Γ_0 为路径例外族 γ，其中的路径或者不满足 (4.2)，或者 $\mathscr{H}^1(|\gamma| \cap E) > 0$。根据引理 4.6 和性质 (M6)，Mod $_n \Gamma_0 = 0$。注意，路径族 Γ_0 具备性质 (V) 所要求的性质：若 $\{\eta_j\}_{j \in J}$ 是Γ_0 之外的有限路径族，且 γ 是一条满足 $|\gamma| \subset \bigcup_{j \in J} |\eta_j|$的路径，则 $\gamma \notin \Gamma_0$。

我们将证明，对于所有具有不同端点的路径 $\gamma \notin \Gamma_0$，结论 A(E， ρ， γ) 均成立。对于 $\gamma \notin \Gamma_0$，集合 $|\gamma| \cap E$ 是全不连通的。根据引理 4.7，只需证明：对于 γ 中端点不同且不位于闭集 E 中的每条子路径 η，结论 A(E， ρ， η) 都成立。根据曲线族 Γ_0 的定义性质， γ 的所有子路径也都位于 Γ_0 之外。因此，只需证明：对于每条端点不同且不位于 E 中的路径 $\gamma \notin \Gamma_0$，结论 A(E， ρ， γ) 都成立。

设 $\gamma \notin \Gamma_0$ 是一条端点不同且不位于 E 中的路径。作为最后一步约化，我们考虑 γ 的一条具有相同端点的简单弱子路径 η。注意，根据 Γ_0 的定义性质， $\eta \notin \Gamma_0$；因此只需证明结论 A(E， ρ， η)，这将推出结论 A(E， ρ， γ)。因此，我们可以额外要求 γ 是简单的。

我们固定一条简单路径 $\gamma \notin \Gamma_0$，其不同端点不在 E、 $\varepsilon > 0$ 中，并固定 $\overline{|\gamma|} \setminus \partial\gamma$ 的一个开邻域 U。我们固定一个单射参数化 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$，并注意到 $\gamma(0)$ $\gamma(1) \notin E$，且 $\gamma((0,1)) \subset U$。

由 $|\gamma|\cap E$ 的紧致性及假设(IV)，存在 $|\gamma|\cap E$ 的一个有限开球覆盖 $V_1,\dots,V_L$，使得对于每个 $i\in\{1,\dots,L\}$ 以及任意非退化的不相交连续体 $F_1,F_2\subset 2V_i$，

$$\text{if } \Delta(F_1,F_2)\le t \text{ then } \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1,F_2;\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{F}_*(E))\ge\phi. \tag{4.4}$$

注意，若集合 D 与 $|\gamma|\cap E$ 相交，且其直径足够小，即 $\operatorname{diam}(D)\le\min\{2^{-1}\operatorname{diam}(V_i): i\in\{1,\dots,L\}\}$，则对于某个 $i\in\{1,\dots,L\}$，有 $D\subset 2V_i$。因此，对于任意非退化且互不相交的连续统 F_1，$F_2\subset D$，式 (4.4) 均成立。我们还固定 $a>1$，使其依赖于 t，从而若 $A=A(x;r,ar)$ 是任意一个环域，且 F_1，$F_2\subset A$ 是连接 A 的边界分支的互不相交连续统，则

$$\Delta(F_1,F_2)\le\frac{2}{a-1}\le t.$$

若 $m\in\mathbb{N}$ 固定且充分大，由 (4.2) 可得

$$\sum_{i:B_{i,m}\cap|\gamma|\neq\emptyset} r_{i,m}\left(\fint_{\lambda B_{i,m}}\rho^n\right)^{1/n}<\varepsilon \quad\text{and}\quad \sum_{i:B_{i,m}\cap|\gamma|\neq\emptyset} r_{i,m}<\varepsilon. \tag{4.5}$$

由 $|\gamma|\cap E$ 的紧致性，存在一个有限子族 $D_1,\dots,D_N$，它覆盖集合 $|\gamma|\cap E$。我们还假设，对于每个 $i\in\{1,\dots,N\}$，D_i 与 $|\gamma|\cap E$ 相交，并将 D_i 的半径记为 r_i。由于 γ 的端点不属于 E，因此有 $|\gamma|\cap E\subset U$。于是，

$$\delta=\operatorname{dist}(|\gamma|\cap\overline{E},\partial\gamma\cup\partial U)>0.$$

若 m 足够大，使得对每个 $i\in\{1,\dots,N\}$ 都有 $2(a+\lambda)r_i<\delta$，则有

$$\bigcup_{i=1}^N(a+\lambda)D_i\subset U \quad\text{and}\quad \bigcup_{i=1}^N aD_i\cap\partial\gamma=\emptyset. \tag{4.6}$$

最后，我们选取一个更大的 m，使得对于任意非退化的不相交连续体 F_1，$F_2\subset(a+1)D_i$，$i\in\{1,\dots,N\}$，(4.4) 均成立。

我们设 $\widetilde{\gamma}_0=\gamma$。我们将归纳定义与 γ 具有相同端点的简单路径 $\widetilde{\gamma}_k$，$k\in\{0,\dots,N\}$。一旦对某个 $k\in\{1,\dots,N\}$ 定义了 $\widetilde{\gamma}_{k-1}$，且它与 γ 具有相同端点，我们便按如下方式定义 $\widetilde{\gamma}_k$。若 $D_k\cap|\widetilde{\gamma}_{k-1}|=\emptyset$，则令 $\gamma_k=\emptyset$（即空路径），并令 $\widetilde{\gamma}_k=\widetilde{\gamma}_{k-1}$。假设 $D_k\cap|\widetilde{\gamma}_{k-1}|\neq\emptyset$。考虑一个单射参数化 $\widetilde{\gamma}_{k-1}\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n$。由 (4.6)，$\widetilde{\gamma}_{k-1}$ 的端点不属于 aD_k，因此存在两个时刻 $0<s_1<s_2<1$，使得 $\widetilde{\gamma}_{k-1}(s_1)\,\widetilde{\gamma}_{k-1}(s_2)\in\partial D_k$，且 $\widetilde{\gamma}_{k-1}([0,1]\setminus(s_1,s_2))\cap D_k=\emptyset$。此外，存在时刻 $s_1'<s_1$ 和 $s_2'>s_2$，使得 $\widetilde{\gamma}_{k-1}(s_1')\,\widetilde{\gamma}_{k-1}(s_2')\in\partial(aD_k)$，$G_1=\widetilde{\gamma}_{k-1}([s_1',s_1])\subset aD_k\setminus D_k$，且 $G_2=\widetilde{\gamma}_{k-1}([s_2,s_2'])\subset aD_k\setminus D_k$；见图2。注意，$G_1$ 与 G_2 不相交，因为路径 $\widetilde{\gamma}_{k-1}$ 是简单路径；它们连接环域 $aD_k\setminus D_k$ 的边界分支。由于 $\Delta(G_1,G_2)\le t$（由 a 的选取可知），且 $G_1,G_2\subset(a+1)D_k$，由 (4.4) 得

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(G_1,G_2;\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{F}_*(E))\ge\phi.$$

注意，如果 Γ' 是给定的路径族，且其 $\operatorname{Mod}_n\Gamma'=0$ 如结论 A 末尾所述，那么我们还有

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(G_1,G_2;\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{F}_*(E)\setminus\Gamma')\ge\phi.$$

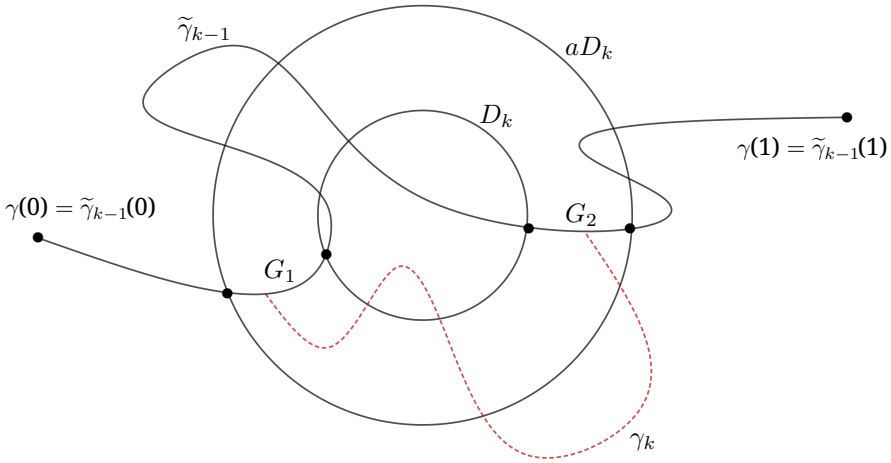

FIGURE 2. 由 $\widetilde{\gamma}_{k-1}$构造 $\widetilde{\gamma}_k$。

$\Gamma(G_1, G_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E) \setminus \Gamma'$ 中的每条路径都与球 $(a+1)D_k$相交。由引理 3.7，存在一条路径 $\gamma_k \in \Gamma(G_1, G_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_*(E) \setminus \Gamma'$，使得

$$\int_{\gamma_k} \rho \, ds \lesssim_{n,\phi,a} r_k \left(\fint_{c(n,\phi,a)D_k} \rho^n \right)^{1/n} \quad \text{and} \quad \ell(\gamma_k) \le c(n,\phi,a) r_k. \tag{4.7}$$

现在令 $\lambda = c(n, \phi, a)$，并注意到根据 (4.6)，$|\gamma_k| \subset (a+\lambda)D_k \subset U$。此外，$\gamma_k$ 的端点位于 $|\widetilde{\gamma}_{k-1}|$中。我们将 γ_k 与 $\widetilde{\gamma}_{k-1}$中不与 D_k 相交的适当子路径连接起来，从而得到路径 $\widetilde{\gamma}_k$，它与 γ具有相同的端点。如有必要，我们用具有相同端点的简单弱子路径替换 $\widetilde{\gamma}_k$。根据构造，我们有

$$|\widetilde{\gamma}_k| \subset (|\widetilde{\gamma}_{k-1}| \setminus D_k) \cup (|\gamma_k| \setminus \partial\gamma_k).$$

归纳可知，

$$|\widetilde{\gamma}_k| \subset \left(|\gamma| \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_i \right) \cup \bigcup_{i=1}^{k} (|\gamma_i| \setminus \partial\gamma_i). \tag{4.8}$$

对于 $k = N$，我们得到一条简单路径 $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_N$，其端点与 γ 相同。由于 $|\gamma| \cap \overline{E} \subset \bigcup_{i=1}^{N} D_i$，由 (4.8) 可得

$$|\widetilde{\gamma}| \subset (|\gamma| \setminus \overline{E}) \cup \bigcup_{i=1}^{N} (|\gamma_i| \setminus \partial\gamma_i) \quad \text{and} \quad |\widetilde{\gamma}| \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{N} (|\gamma_i| \setminus \partial\gamma_i) \cap E. \tag{4.9}$$

如果 $\mathcal{F}_*(E) = \mathcal{F}_0(E)$，那么 $(|\gamma_i| \setminus \partial\gamma_i) \cap E = \emptyset$，因为对于每个 $i \in \{1, \dots, N\}$，$\gamma_i \in \mathcal{F}_0(E)$。因此，$|\widetilde{\gamma}| \cap E = \emptyset$ 且 $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_0(E)$。如果 $\mathcal{F}_*(E) = \mathcal{F}_\sigma(E)$，那么对于每个 $i \in \{1, \dots, N\}$，$|\widetilde{\gamma}_i| \cap E$都是可数的，所以 $|\widetilde{\gamma}| \cap E$是可数的，且 $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_\sigma(E)$。因此，(A-i) 得以满足。

由 (4.9) 可立即得到

$$|\widetilde{\gamma}| \subset (|\gamma| \setminus E) \cup \bigcup_{i=1}^{N} |\gamma_i|.$$

根据构造，我们有 $\bigcup_{i=1}^{N} |\gamma_i| \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a+\lambda) D_i \subset U$。因此，我们已经证明了性质 (A-ii)。最后，由 (4.5) 和 (4.7) 可得

$$\sum_{i=1}^{N} \ell(\gamma_i) \lesssim \sum_{i=1}^{N} r_i \lesssim \varepsilon \text{ and } \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \rho \, ds \lesssim \sum_{i=1}^{N} r_i \left(\fint_{\lambda D_i} \rho^n \right)^{1/n} \lesssim \varepsilon.$$

这些不等式说明了 (A-iii) 和 (A-iv)。结论 A 的最后一部分断言，当 $E \cap \partial\gamma = \emptyset$ 时，$\{\gamma_i\}_i$ 这一集合族是有限的，这一点也成立。□

4.3. P-族判据的证明。

定理 *4.3* 的证明：(I) $\Rightarrow$ (II)。设 ρ 是一个非负博雷尔函数，满足 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$。由定理 4.1 (VI)，存在一个路径族 Γ_0，使得 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$，并且对于所有端点不同的路径 $\gamma \notin \Gamma_0$，结论 B(E，ρ，γ) 均成立。此外，在扩大 Γ_0 且仍要求 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$的同时，我们可以假设：若 $\gamma \notin \Gamma_0$，则 γ 的所有子路径也具有此性质；见 (M3)。由引理 2.3，对于每条可求长路径 γ，几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\gamma + x \notin \Gamma_0$；特别地，$\gamma + x$ 的所有强子路径也都满足同样的结论，这正是 (II-1) 部分所要求的。此外，若 γ_w 如 (II-2) 所述，则由同一引理，对于 $\mathscr{H}^{n-1}$-几乎处处的 $w \in S^{n-1}(0,\, 1)$，路径 γ_w及其所有强子路径都位于 Γ_0之外。证明完毕。□

定理 *4.3* 的证明：(III) $\Rightarrow$ (I)。设 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$ 是 $\Gamma(F_1,\ F_2;\, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_\sigma(E)$ 的可容许函数，其中 F_1，F_2 是不相交连续体。考虑具有给定性质的 P-族 $\mathcal{F}$；注意 $\mathcal{F}$ 取决于 ρ。设 $\gamma \in \Gamma(F_1,\ F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}$ 是一条可求长路径。根据 $\mathcal{F}$ 的性质，γ 的每条具有不同端点的强子路径，尤其是 γ，都满足结论 B。因此，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一条可求长路径 $\widetilde{\gamma} \in \Gamma(F_1,\ F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_\sigma(E)$，使得

$$1 \leq \int_{\widetilde{\gamma}} \rho \, ds \leq \int_{\gamma} \rho \, ds + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon \to 0$，这表明 ρ 是 $\Gamma(F_1,\ F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}$ 的可容许函数。因此，

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}) \leq \int \rho^n.$$

由于 $\mathcal{F}$ 是一个 P-族，根据定理 3.4，我们有

$$\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) = \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}) \leq \int \rho^n.$$

对 ρ 取下确界，得到 $\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2;\ \mathbb{R}^n) \leq \operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}_\sigma(E))$，因此 E是$CNED$。□

对于最后一个蕴含（II）$\Rightarrow$ (III)的证明，$\mathcal{F}_\sigma(E)$对拼接封闭这一点至关重要，而 $\mathcal{F}_0(E)$并不具备这一性质。虽然该结果对 $\mathcal{F}_0(E)$成立，但证明更为复杂，因此我们只给出 $\mathcal{F}_\sigma(E)$的论证。

定理 *4.3* 的证明：(II) $\Rightarrow$ (III)。首先，我们证明在 E 闭的情况下，$m_n(E) = 0$。取一个开球 B，并考虑博雷尔函数 $\rho = (1 - \chi_E)\chi_B$，它属于 $L^n(\mathbb{R}^n)$。根据（II-1），对于几乎所有与给定坐标方向平行的线段 γ，结论 B(E, ρ, γ)成立。取一条包含在球 B内的此类线段 γ。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一条包含在 B中的路径 $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_\sigma(E)$，其端点与 γ相同，并且

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \rho \, ds \le \int_{\gamma} \rho \, ds + \varepsilon.$$

由引理 2.2 (iv)，我们有 $\int_{\widetilde{\gamma}} \chi_E \, ds = 0$，因为 $|\gamma| \cap E$ 是可数的。因此，

$$\ell(\gamma) \le \ell(\widetilde{\gamma}) = \int_{\widetilde{\gamma}} 1 \, ds = \int_{\widetilde{\gamma}} \rho \, ds \le \int_{\gamma} \rho \, ds + \varepsilon = \ell(\gamma) - \int_{\gamma} \chi_E \, ds + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$，可得 $\int_\gamma \chi_E \, ds = 0$，因此由引理 2.2 (ii)，$\mathscr{H}^1(|\gamma| \cap E) = 0$。这对 B 中几乎处处平行于某个坐标方向的线段 γ 都成立，因此由富比尼定理，$m_n(E \cap B) = 0$。球 B 是任意的，因此 $m_n(E) = 0$。

设 ρ 是 $L^n(\mathbb{R}^n)$ 中的一个非负博雷尔函数，并设 $\mathcal{F}$ 是满足如下条件的可求长路径 γ 组成的族：对 γ 的每个具有不同端点的强子路径 η，结论 B(E, ρ, η) 均成立。我们证明 $\mathcal{F}$ 是一个 P-族。

首先，我们看到 (P1) 得到满足。也就是说，如果 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 是一条非常数可求长路径，那么对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，$\gamma + x \in \mathcal{F}$。根据假设 (II-1)，这一点成立。对于 (P2)，我们固定 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $R > 0$，并需证明对于几乎处处的 $w \in S^{n-1}\in(0, 1)$，径向线段 $\gamma_w(t) = x + tw$，$t \in [0, R]$ 位于 $\mathcal{F}$ 中。根据假设 (II-2)，对于每个 $0 < r < R$，几乎处处的 $w \in S^{n-1}\in(0, 1)$ 都有径向线段 $\gamma_w|_{[r,R]}$ 位于 $\mathcal{F}$ 中。对于 $r_k = 2^{-k}R$, $k \in \mathbb{N}$，我们看到，对于几乎处处的 $w \in S^{n-1}\in(0, 1)$ 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma_w|_{[r_k,R]} \in \mathcal{F}$。我们固定一个 $w \in S^{n-1}\in(0, 1)$，使得 $\mathscr{H}^1(|\gamma_w| \cap E) = 0$ 且对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\gamma_w|_{[r_k,R]} \in \mathcal{F}$。由于 $m_n(E) = 0$，这些陈述对几乎处处的 $w \in S^{n-1}\in(0, 1)$ 都成立。我们的目标是证明，对于 γ_w 的每个强子路径 η，结论 B(E, ρ, η) 都成立；这将如所需地推出 $\gamma_w \in \mathcal{F}$。η 的每个真子路径都是某个 $k \in \mathbb{N}$ 的 $\gamma_w|_{[r_k,R]}$ 的强子路径。由于 $\gamma_w|_{[r_k,R]} \in \mathcal{F}$，$\eta$ 的每个真子路径都满足结论 B。由于 $|\eta| \cap E$ 是全不连通的，根据引理 4.7，我们得出 η 满足结论 B。 —

根据 $\mathcal{F}$ 的定义，显然 (P3) 总是成立。最后，我们需要证明 (P4)。注意，在 (B-i) 中，$\mathcal{F}_*(E) = \mathcal{F}_\sigma(E)$。设 γ_1，γ_2 是 $\mathcal{F}$ 中两条有公共端点的路径，并设 γ 为它们的拼接。考虑 γ 中一条端点不同的强子路径 η。那么，η 要么是 γ_1 或 γ_2 的强子路径，要么 η 是 γ_1 中的强子路径 η_1 与 γ_2 中的强子路径 η_2 的拼接。在后一种非平凡情形中，由于 η_1 和 η_2 满足结论 B，特别是 (B-i)，根据 (B-ii)，存在结论 B 中所述的路径 $\widetilde{\eta}_1$，$\widetilde{\eta}_2 \in \mathcal{F}_\sigma(E)$，其端点与 η_1，η_2 相同。将 $\widetilde{\eta}_1$ 与 $\widetilde{\eta}_2$ 拼接，得到路径 $\widetilde{\eta} \in \mathcal{F}_\sigma(E)$，这表明 η 也满足结论 B。因此，$\gamma \in \mathcal{F}$，正如所需。□

4.4. **Sobolev 可去性的应用**。我们将定理 1.4 作为定理 4.1 的一个应用来证明。具体而言，我们证明闭的 *CNED* 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$对于连续的 $W^{1,n}$ 函数是可去的；也就是说，每个连续函数$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n \setminus E)$ 的函数都属于 $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$。

定理 *1.4* 的证明。设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续，且 $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n \setminus E)$。那么经典梯度 ∇f 几乎处处在 $\mathbb{R}^n \setminus E$中存在。由于 $m_n(E) = 0$,

存在 $|\nabla f|$ 在 $\mathbb{R}^n$上的一个博雷尔代表。由 Fuglede 定理 [V¨ai71，定理 28.2，第 95], 页，存在一个曲线族 Γ_1，使得 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_1 = 0$，并且对每个 $\gamma \notin \Gamma_1$，都有 $\int_\gamma |\nabla f|\, ds < \infty$，且函数 f在 γ的每条子路径 $\gamma|_{[a,b]}$ 上绝对连续，其中 $\gamma((a,b)) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$。此外，

$$|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))| \leq \int_{\gamma|_{(a,b)}} |\nabla f|\, ds.$$

设 $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$是一条位于 Γ_1之外的路径。集合 $(a,\ b) \setminus \gamma^{-1}(E)$ 是由互不相交的开区间 $(a_i,\ b_i)$ 构成的可数并集，$i \in \mathbb{N}$。利用 f 的连续性以及上述不等式，我们有

$$\begin{aligned} m_1(f(|\gamma| \setminus E)) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} m_1(f(\gamma([a_i,b_i]))) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (\max_{[a_i,b_i]} f\circ\gamma - \min_{[a_i,b_i]} f\circ\gamma) \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\gamma|_{(a_i,b_i)}} |\nabla f|\, ds \leq \int_\gamma |\nabla f|\, ds. \end{aligned} \tag{4.10}$$

特别地，如果 $\gamma \in \mathcal{F}_\sigma(E) \setminus \Gamma_1$，那么

$$m_1(f(|\gamma|)) = m_1(f(|\gamma| \setminus E)) \leq \int_\gamma |\nabla f|\, ds. \tag{4.11}$$

由于 $m_n(E) = 0$，为了证明 $f \in W^{1,\,n}(\mathbb{R}^n)$，只需证明存在一个路径族 Γ_0，满足 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$，且 f 沿每条路径 $\gamma \notin \Gamma_0$ 都绝对连续。令 Γ_2 为定理 4.1 (V) 给出的路径族，满足 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_2 = 0$，并令 $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$。我们固定一条路径 $\gamma \notin \Gamma_0$ 和一个子路径 $\beta = \gamma|_{[a,b]}$。注意，根据定理 4.1 (V) 中 Γ_2 的性质，$\beta \notin \Gamma_2$。因此，结论 A$(E,\ |\nabla f|,\ \beta)$ 成立。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一条路径 $\beta \in \mathcal{F}_\sigma(E)$，其端点与 β 相同，还有一组路径 $\beta_i \notin \Gamma_1$、$i \in I$，使得

$$|\widetilde{\beta}| \setminus \partial\widetilde{\beta} \subset (|\beta| \setminus E) \cup \bigcup_{i\in I} |\beta_i| \ \text{ and } \ \sum_{i\in I} \int_{\beta_i} |\nabla f|\, ds < \varepsilon.$$

因此，利用 (4.10) 和 (4.11)，可得

$$\begin{aligned} |f(\beta(b)) - f(\beta(a))| &\leq m_1(f(|\widetilde{\beta}|)) = m_1(f(|\widetilde{\beta}| \setminus \partial\beta)) \\ &\leq m_1(f(|\beta| \setminus E)) + \sum_{i\in I} m_1(f(|\beta_i|)) \\ &\leq \int_\beta |\nabla f|\, ds + \sum_{i\in I} \int_{\beta_i} |\nabla f|\, ds \\ &\leq \int_\beta |\nabla f|\, ds + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 可知，f 沿着 γ绝对连续。 □

5. Unions of negligible sets

本节证明定理 1.2，该定理断言，可数多个闭 NED（分别为 CNED）集合的并集仍为 NED（分别为 CNED）。证明基于上一节的定理 4.1。我们先证明一个辅助引理。

引理 5.1. 设 G_i, $i \in \mathbb{N}$, 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个连续统序列，满足 $G_i \subset G_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, 且 $\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^1(G_i) < \infty$。若 $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$，则 $\mathscr{H}^1(G \setminus G) = 0$。特别地，若$\gamma\colon [0,1] \to G$ 是一条可求长路径，且 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个博雷尔函数，则

$$\int_\gamma \rho \, ds = \int_\gamma \rho \chi_G \, ds.$$

证明。不失一般性，直径$(G_1) > 0$。令 $d = \operatorname{diam}(G_1)$，并固定$k \in \mathbb{N}$。由于 G_k 是闭的，对每个 $x \in G \setminus G \subset G \setminus G_k$，存在 $r_x > 0$ 使得 $B(x, r_x) \cap G_k = \emptyset$。由 $5B$-覆盖引理（[Hei01，定理 1.2]），存在球族 $B_i = B(x_i, r_i)$，满足 $x_i \in G \setminus G$ 和 $r_i < d$, $i \in \mathbb{N}$，使得$G \setminus G \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$，球 $\frac{1}{5}B_i$ 两两不相交，并且对每个 $i \in \mathbb{N}$，$\frac{1}{5}B_i \cap G_k = \emptyset$。

固定 $i \in \mathbb{N}$。由于 $x_i \in G$，存在一点 $y \in \frac{1}{10}B_i \cap G$。序列$\{G_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 递增，因此存在 $j > k$ 使得 $y \in \frac{1}{10}B_i \cap G_j$。由于直径$(G_j) \geq d >$直径$(\frac{1}{5}B_i)$且 G_j 是一个连续体，在 $\frac{1}{5}B_i \cap G_j$ 中存在一个连通集，将 $\partial B(x_i, r_i/10)$与 $\partial B(x_i, r_i/5)$连接起来。结合$\frac{1}{5}B_i \cap G_k = \emptyset$这一事实，我们得到

$$\mathscr{H}^1\left((G \setminus G_k) \cap \frac{1}{5}B_i\right) \geq \mathscr{H}^1\left(G_j \cap \frac{1}{5}B_i\right) \geq r_i/10.$$

现在我们有

$$\mathscr{H}^1_\infty(\overline{G} \setminus G) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} 2r_i \leq 20 \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^1\left((G \setminus G_k) \cap \frac{1}{5}B_i\right) \leq 20\mathscr{H}^1(G \setminus G_k).$$

由于 $\mathscr{H}^1(G) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^1(G_i) < \infty$ 且 $G \setminus G_k$ 递减至 $\emptyset$，当 $k \to \infty$ 时，我们有$\mathscr{H}^1(G \setminus G) = \mathscr{H}^1_\infty(G \setminus G) = 0$。这就完成了第一条陈述的证明。最后一条陈述由引理 2.2 (iv) 得出。□

定理 *1.2* 的证明。我们将证明分成几个部分。

初始设置。定义 $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$，并令 $\rho \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 为一个非负博雷尔函数。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，由定理 4.1 (V) 可知，存在一个例外族 Γ_i，满足 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_i = 0$。此外，由性质 (M6)，由满足$\mathscr{H}^1(|\gamma| \cap E) > 0$ 的路径 γ 构成的族 Γ' 的 n-模数为零。定义 $\Gamma_0 = \Gamma' \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$。根据 Γ_i 的性质，路径族 Γ_0 具有如下性质：若 $\{\eta_j\}_{j\in J}$ 是 Γ_0 之外的有限路径族，且 γ 是一条满足 $|\gamma| \subset \bigcup_{j\in J} |\eta_j|$ 的路径，则 $\gamma \notin \Gamma_0$。此外，对于所有路径 $\gamma \notin \Gamma_0$，$|\gamma| \cap E$ 都是全不连通的。

我们的目标是证明，对于每个 $\gamma \notin \Gamma_0$，结论 B(E, ρ, γ) 都成立。由定理 4.1 的最后一部分和 (VI)，这足以证明 E 为 $*NED$.。我们固定一条路径$\gamma \notin \Gamma_0$，其端点不同，$\varepsilon > 0$，以及 $|\gamma|$的一个邻域 U。只需证明，对于 γ 的一个弱子路径，结论 B 仍成立，且该子路径的端点相同；此外，根据 Γ_0的性质，γ 的所有弱子路径都位于 Γ_0 之外。因此，用一个简单弱子路径替换 γ 后，我们可以假设 γ 是简单的，并且 $\gamma \notin \Gamma_0$。

我们引入一些记号。定义 $\mathcal{W}_\sigma = \bigcup_{m=1}^\infty \mathbb{N}^m$ 和 $\mathcal{W}_0 = \mathbb{N}$。根据我们讨论的是 $CNED$ 集合还是NED 集合，分别用记号 $\mathcal{W}_*$ 表示 $\mathcal{W}_\sigma$ 或 $\mathcal{W}_0$。每个元素 $w \in \mathbb{N}^m \subset \mathcal{W}_\sigma$ 都称为一个词，其长度为$l(w) = m$。对于 $w \in \mathcal{W}_0$，我们还定义 $l(w) = w$。空词 $\emptyset$ 的长度为 0。

归纳假设。令 $\widetilde{\gamma}_0 = \alpha_\emptyset = \gamma$，并注意到 $\alpha_\emptyset \notin \Gamma_0$。令 $U_\emptyset$ 为 $|\alpha_\emptyset| \setminus \partial\alpha_\emptyset$的一个邻域，且 $\operatorname{diam}(U_\emptyset) \leq 2\operatorname{diam}(|\alpha_\emptyset|)$，并且 $U_\emptyset \subset U$。假设

对于 $m \geq 0$，我们已定义简单路径 $\widetilde{\gamma}_k$、$k \in \{0,\dots,m\}$，以及路径族 $\{\gamma_i\}_{i\in I_w}$，其中 $l(w) \leq m-1$，使得

(A-1) $\widetilde{\gamma}_k \in \mathcal{F}_*(\bigcup_{i=1}^k E_i)$ for $k \in \{0,\dots,m\}$,

(A-2) $\partial\widetilde{\gamma}_k = \partial\gamma$ and $|\widetilde{\gamma}_k| \subset |\gamma| \cup \bigcup_{l(w)\leq k-1}\bigcup_{i\in I_w}|\gamma_i|$ for $k \in \{0,\dots,m\}$,

(A-3) $\sum_{l(w)\leq m-1}\sum_{i\in I_w}\ell(\gamma_i) < \varepsilon$, and

(A-4) $\sum_{l(w)\leq m-1}\sum_{i\in I_w}\int_{\gamma_i}\rho\,ds < \varepsilon$.

此外，假设我们已定义以下对象：

(A-5) 简单路径 $\{\alpha_w\}_{l(w)\leq m}$，使得 $\{\alpha_w\}_{l(w)=k}$ 是 $|\widetilde{\gamma}_k| \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_k)$ 的连通分支闭包的参数化集合，其中每个$k \in \{0,\dots,m\}$均如此。此外，对于 $l(w) \leq m$，α_w的每个真子路径都位于 Γ_0之外。我们指出，在 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0$的情况下，$|\widetilde{\gamma}_k| \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_k)$ 只有一个连通分支，且 $\alpha_k = \widetilde{\gamma}_k$。

(A-6) 开集 $\{U_w\}_{l(w)\leq m}$，使得 U_w 是 $|\alpha_w| \setminus \partial\alpha_w$ 的一个邻域，且对于 $l(w) \leq m$，$\operatorname{diam}(U_w) \leq 2\operatorname{diam}(|\alpha_w|)$，并且对于每个 $k \in \{0,\dots,m\}$，集合族 $\{U_w\}_{l(w)=k}$ 彼此不相交。此外，如果 $m \geq 1$ 且 $l(w) \leq m-1$，那么在 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_\sigma$ 的情况下 $U_{(w,j)} \subset U_w$，而在 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0$的情况下 $U_{w+1} \subset U_w$ 对于 $j \in \mathbb{N}$ 成立。最后，对于 $l(w) \leq m$，除可能在 α_w的端点处外，U_w与 $E_1 \cup \cdots \cup E_{l(w)}$不相交。

最后，我们要求满足相容性

(A-7) $|\widetilde{\gamma}_m| \setminus \bigcup_{l(w)=k} U_w = |\widetilde{\gamma}_k| \setminus \bigcup_{l(w)=k} U_w$ for $k \in \{0,\dots,m\}$.

归纳步骤。现在我们如下定义 $\widetilde{\gamma}_{m+1}$。固定满足 $l(w) = m$ 的 $w \in \mathcal{W}_*$。由 (A-5)，α_w 的每个真子路径 η 都避开路径族 Γ_0；因此，结论 A(E_{m+1}, ρ, η) 成立，且 $\mathscr{H}^1(|\eta| \cap E_{m+1}) = 0$。后者意味着 $|\alpha_w| \cap E_{m+1}$ 全不连通。由引理 4.7，结论 A(E_{m+1}, ρ, α_w) 成立。因此，对每个 $\delta_w > 0$，都存在一条简单路径 $\widetilde{\alpha}_w$ 以及路径 $\gamma_i \notin \Gamma_0$、$i \in I_w$，使得

(A'-1) $\widetilde{\alpha}_w \in \mathcal{F}_*(E_{m+1})$，(A'-2) $\partial\widetilde{\alpha}_w = \partial\alpha_w$、$|\widetilde{\alpha}_w| \subset |\alpha_w| \cup \bigcup_{i\in I_w}|\gamma_i|$ 和 $\bigcup_{i\in I_w}|\gamma_i| \subset U_w$，(A'-3) $\sum_{i\in I_w}\ell(\gamma_i) < \delta_w$，以及 (A'-4) $\sum_{i\in I_w}\int_{\gamma_i}\rho\,ds < \delta_w$.

如果我们选择足够小的 δ_w，就能确保对于指标 $m+1$，以 m 代替时 (A-3) 和 (A-4) 成立。根据 (A'-2)，路径 $\widetilde{\alpha}_w$ 是通过在 U_w 内修改 α_w 得到的。根据 (A-6)，U_w 与 $E_1 \cup \cdots \cup E_m$ 不相交，至多可能在 α_w 的端点处相交。因此，$\widetilde{\alpha}_w \in \mathcal{F}_*(E_1 \cup \cdots \cup E_m)$。结合 (A'-1)，我们得到 $\widetilde{\alpha}_w \in \mathcal{F}_*(E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1})$。

利用 (A-5)，我们通过将 $\widetilde{\gamma}_m$ 中每个满足 $l(w) = m$ 的 α_w 替换为$\widetilde{\alpha}_w$，来定义 $\widetilde{\gamma}_{m+1}$；见图3。对于 $\mathcal{W}_\sigma$，我们需要确保这一过程得到一条路径。事实上，由 (A'-2) 和 (A'-3)，我们有 $\ell(\widetilde{\alpha}_w) \leq \ell(\alpha_w) + \delta_w$，因此，如果 δ_w 足够小，那么我们就得到一条路径 $\widetilde{\gamma}_{m+1}$。由 (A-5)，对于任何满足 $l(w) = m$ 的 w，$\widetilde{\gamma}_m$ 的端点都不在 $|\alpha_w| \setminus \partial\alpha_w$ 中，因此不会被修改。于是，$\widetilde{\gamma}_{m+1}$ 与 γ 有相同的端点。此外，由 (A-6)，路径 $\widetilde{\alpha}_w$ 与 α_w 不同的区域 $\{U_w\}_{l(w)=m}$ 两两不相交。因此，$\widetilde{\gamma}_{m+1}$ 是一条简单路径，因为 $\widetilde{\gamma}_m$ 是简单的。

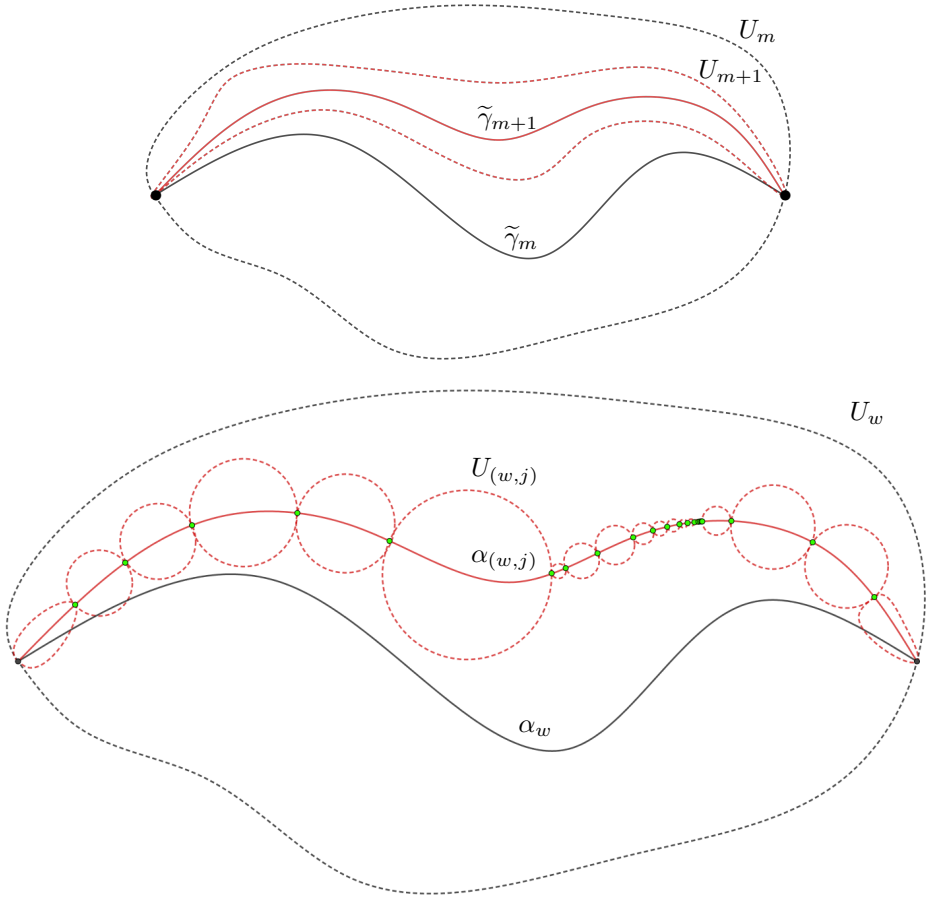

FIGURE 3. 由 $\widetilde{\gamma}_m$构造 $\widetilde{\gamma}_{m+1}$ 。上图： $\mathcal{W}_0$的情形。下图： $\mathcal{W}_\sigma$的情形。红色曲线为 $\widetilde{\alpha}_w$ ，绿色点表示集合 $(|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \cap E_{m+1}) \cap U_w$, 这是一个可数集合。事实上，根据（A'-2）， $\widetilde{\alpha}_w$ 的大部分应与 α_w 共有，但为简化图示，我们没有标出这一点。

现在我们验证 (A-1) 和 (A-2)。根据构造以及 (A-5)，我们有

$$|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \setminus \bigcup_{l(w)=m} (|\widetilde{\alpha}_w| \setminus \partial\widetilde{\alpha}_w) = |\widetilde{\gamma}_m| \setminus \bigcup_{l(w)=m} (|\alpha_w| \setminus \partial\alpha_w) = \partial\gamma \cup \left(|\widetilde{\gamma}_m| \cap \bigcup_{i=1}^{m} E_i \right).$$

在 $\mathcal{W}_\sigma$的情形下，由于对于 $l(w) = m$，有 $\widetilde{\gamma}_m \in \mathcal{F}_\sigma(E_1 \cup \cdots \cup E_m)$ 且 $\widetilde{\alpha}_w \in \mathcal{F}_\sigma($ $E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1})$ ，我们得出 $\widetilde{\gamma}_{m+1} \in \mathcal{F}_\sigma(E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1})$ ，这正是（A-1）所要求的。在 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0$ 的情形下，我们只需有 $\widetilde{\gamma}_m = \alpha_m$ （见（A-5））以及 $\widetilde{\gamma}_{m+1} = \widetilde{\alpha}_m$，因此$\widetilde{\gamma}_{m+1} \in \mathcal{F}_0$ $(E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1})$ ，正如所需。由构造及（A'-2），我们有

$$|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \subset |\widetilde{\gamma}_m| \cup \bigcup_{l(w)=m} \bigcup_{i \in I_w} |\gamma_i|.$$

因此，根据归纳假设，我们得到指标 $m+1$ 的 (A-2)。

由于 $\widetilde{\gamma}_{m+1}$ 是通过修改开集 U_w、$l(w)=m$ 中的 $\widetilde{\gamma}_m$ 得到的，我们有

$$|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \setminus \bigcup U_w = |\widetilde{\gamma}_m| \setminus \bigcup U_w.$$

由 (A-6)，对于 $k \le m$，有 $\bigcup_{l(w)=k}^{l(w)=m} \overline{U}_w \supset \bigcup_{l(w)=m} U_w^{l(w)=m}$，因此

$$|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \setminus \bigcup_{l(w)=k} U_w = |\widetilde{\gamma}_m| \setminus \bigcup_{l(w)=k} U_w = |\widetilde{\gamma}_k| \setminus \bigcup_{l(w)=k} U_w,$$

最后一个等式由归纳假设 (A-7) 得出。这证明了指标 $m+1$ 满足 (A-7) 中的等式。

接下来，我们验证 (A-5)。注意，路径 $\{\widetilde{\alpha}_w\}_{l(w)=m}$ 参数化了 $|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_m)$ 各连通分支的闭包；这由构造和 (A-5) 得出。对于 $l(w)=m$，令 $\{\alpha_{(w,j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为一组简单路径，用以参数化 $|\widetilde{\alpha}_w| \setminus E_{m+1}$ 各连通分支的闭包；见图3。于是，$\{\alpha_w\}_{l(w)=m+1}$给出一组路径，用以参数化 $|\widetilde{\gamma}_{m+1}| \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1})$ 各连通分支的闭包。这验证了 (A-5) 的第一部分。此外，若 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_\sigma$，对于$l(w)=m$ 和 $j \in \mathbb{N}$，$\alpha_{(w,j)}$ 的每个真子路径 $\widetilde{\eta}$ 都是 $\widetilde{\alpha}_w$的真子路径。若$\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0$，$\alpha_{w+1}$ 的每个真子路径 $\widetilde{\eta}$ 都是 $\widetilde{\alpha}_w$的真子路径。无论哪种情况，根据 (A'-2)，都存在 α_w 的一个真子路径 η，使得 $|\widetilde{\eta}| \subset |\eta| \cup \bigcup_{i\in I_w} |\gamma_i|$。根据归纳假设 (A-5)，$\eta \notin \Gamma_0$。根据结论 A 的最后一部分（见定理 4.1 的陈述），$|\widetilde{\eta}|$ 与有限多个迹 $|\gamma_i|$, $i \in I_w$相交。回想一下，$\gamma_i \notin \Gamma_0$, $i \in I_w$。族 Γ_0 的性质意味着 $\widetilde{\eta} \notin \Gamma_0$。至此，(A-5) 的第二部分得证。

现在我们讨论 (A-6)。若 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0$，我们定义 U_{m+1} 为 $|\alpha_{m+1}| \setminus \alpha_{m+1}$ 的一个邻域，使得 $\operatorname{diam}(U_{m+1}) \le 2\operatorname{diam}(|\alpha_{m+1}|)$，$U_{m+1} \subset U_m$，且$U_{m+1}$与 $E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1}$ 不相交，至多在α_{m+1}的端点处相交；这是因为 $E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1}$ 是闭的，且与 $|\alpha_{m+1}|$ 不相交，至多在端点处相交。若 $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_\sigma$，对于 $l(w) = m$，我们定义 $U_{(w,1)}$ 为 $|\alpha_{(w,1)}| \setminus \partial\alpha_{(w,1)}$ 的一个邻域，使得 $\operatorname{diam}(U_{(w,1)}) \le 2\operatorname{diam}(|\alpha_{(w,1)}|)$，$U_{(w,1)} \subset \overline{U_w}$，且 $U_{(w,1)}$ 与 $E_1 \cup \cdots \cup E_{m+1}$ 不相交，至多在 $\alpha_{(w,1)}$ 的端点处相交。此外，由于 α_w 是简单的，我们可以要求 $U_{(w,1)}$ 与 $|\alpha_{(w,j)}| \setminus \partial\alpha_{(w,j)}$ 不相交，其中 $j > 1$。接下来，我们定义 $U_{(w,2)}$ 为 $|\alpha_{(w,2)}| \setminus \partial\alpha_{(w,2)}$ 的一个邻域，它与 $U_{(w,1)}$ 具有相同的性质，且满足 $U_{(w,1)} \cap U_{(w,2)} = \emptyset$。归纳地，对所有 $j \in \mathbb{N}$，我们定义具有所需性质的 $U_{(w,j)}$；见图3。至此，归纳步骤的证明完成。

证明的完成。 现在我们将证明结论 B(E, ρ, γ)成立。对于 $m \in \mathbb{N}$，定义 $G_m = \bigcup_{k=0}^m |\widetilde{\gamma}_k|$。这是一个连续体，因为根据 (A-2)，$|\widetilde{\gamma}_k|$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都包含 γ 的端点。我们有 $G_m \subset G_{m+1}$，并且

$$G_m \subset |\gamma| \cup \bigcup_{l(w)\le m-1} \bigcup_{i\in I_w} |\gamma_i|$$

对于 $m \in \mathbb{N}$。根据引理 2.2 (ii) 和性质 (A-3)，我们有

$$\mathscr{H}^1(G_m) \le \ell(\gamma) + \sum_{l(w)\le m-1} \sum_{i\in I_w} \ell(\gamma_i) \le \ell(\gamma) + \varepsilon.$$

因此，$\sup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^1(G_m) < \infty$，这正是引理 5.1 所要求的。我们令 $G = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m$。由于对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$\widetilde{\gamma}_m$ 都是一条简单路径，根据引理 2.2 (ii)，我们有

$$\ell(\widetilde{\gamma}_m) = \mathscr{H}^1(|\widetilde{\gamma}_m|) \le \mathscr{H}^1(G_m) \le \ell(\gamma) + \varepsilon.$$

根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，存在 $\widetilde{\gamma}_m$ 的一个子序列，按弧长参数化后，一致收敛于路径 $\widetilde{\gamma}$，其端点与 γ 相同，并且

$$\ell(\widetilde{\gamma}) \le \liminf_{m\to\infty} \ell(\widetilde{\gamma}_m) \le \ell(\gamma) + \varepsilon.$$

因此，(B-iii) 成立。由于根据 (A-6)，对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $|\widetilde{\gamma}_m| \subset U_\emptyset$，所以我们得到 $|\widetilde{\gamma}| \subset U_\emptyset \subset U$，这正是 (B-ii) 所要求的。必要时，我们考虑弱子路径，并假设 $\widetilde{\gamma}$ 是简单的。由于 $|\widetilde{\gamma}| \subset G$，由引理 5.1 和引理 2.2 (ii) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\gamma}} \rho\,ds &= \int_{\widetilde{\gamma}} \rho\chi_G\,ds = \int_{|\widetilde{\gamma}|\cap G} \rho\,d\mathscr{H}^1 \le \int_G \rho\,d\mathscr{H}^1 \\ &\le \int_\gamma \rho\,ds + \sum_{w\in\mathcal{W}_*}\sum_{i\in I_w} \int_{\gamma_i} \rho\,ds \le \int_\gamma \rho\,ds + \varepsilon,\end{aligned}$$

最后一个不等式由 (A-4) 得出。这说明 (B-iv) 成立。

最后，我们证明 (B-i)。由 (A-7)，对于 $m \ge k \ge 0$，我们有

$$|\widetilde{\gamma}_m| \subset |\widetilde{\gamma}_k| \cup \overline{\bigcup_{l(w)=k} U_w}. \tag{5.1}$$

由 (A-6)，$\operatorname{diam}(U_w) \le 2\operatorname{diam}(|\alpha_w|)$。如果存在无穷多个非空集合 U_w 满足 $l(w) = k$，那么直径大于给定数值的曲线 α_w 只有有限条；事实上，根据 (A-5)，这些曲线是 $\widetilde{\gamma}_k$ 的子路径，且其迹两两不交，至多仅在端点处相交。因此，对于除有限多个满足 $l(w) = k$ 的 w 之外的所有情况，U_w 都包含在 $|\widetilde{\gamma}_k|$ 的一个小邻域内。由此可见

$$\overline{\bigcup_{l(w)=k} U_w} \subset |\widetilde{\gamma}_k| \cup \bigcup_{l(w)=k} \overline{U_w}.$$

在 (5.1) 中令 $m \to \infty$，我们得出

$$|\widetilde{\gamma}| \subset |\widetilde{\gamma}_k| \cup \overline{\bigcup_{l(w)=k} U_w} \subset |\widetilde{\gamma}_k| \cup \bigcup_{l(w)=k} \overline{U_w}.$$

当 $\mathcal{W}_\sigma$ 时，根据 (A-1) 和 (A-6)，右侧的集合与 $E_1\cup\cdots\cup E_k$ 相交于可数多个点。因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$，$\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_\sigma(E_1 \cup \cdots \cup E_k)$，故 $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_\sigma(E)$。当 $\mathcal{W}_0$ 时，我们有 $|\widetilde{\gamma}| \subset |\widetilde{\gamma}_k| \cup U_k \subset U_k$，且集合 U_k 与 $E_1 \cup \cdots \cup E_k$ 不相交，除非可能在 $\alpha_k = \widetilde{\gamma}_k$ 的端点处相交。因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$，$|\widetilde{\gamma}|$ 与 $E_1 \cup \cdots \cup E_k$ 不相交，除非可能在端点处相交。我们得出 $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}_0(E)$。至此，我们完成了对结论 B($E$, ρ, γ) 的验证，从而完成了定理 1.2 的证明。□

6. Examples of negligible sets

回想一下，根据定理 3.11，所有具有 σ-有限（分别为零）Hausdorff（$n-1$）测度的集合都是 *CNED*（分别为 *NED*）。本节将进一步讨论一些例子。

6.1. CNED 集合的准双曲条件。 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ 是一个区域，即一个连通开集。对于点 $x \in \Omega$，定义 $\delta_\Omega(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$。我们将两点 $x_1, x_2 \in \Omega$ 之间的**准双曲距离** 定义为

$$k_\Omega(x_1, x_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{1}{\delta_\Omega}\,ds,$$

其中，下确界取遍连接 x_1 和 x_2 且包含在 Ω 内的所有可求长路径 γ。

定理 6.1。 设Ω ⊂ $\mathbb{R}^n$ 是一个区域，满足 $k_\Omega(\cdot, x_0) \in L^n(\Omega)$，其中$x_0 \in\Omega$。则 $\partial\Omega \in$ 是 *CNED*。特别地，*John* 域和 *H¨older* 域的边界都是 *CNED*。

后两类区域的定义见 [SS90]。条件$k_\Omega(\cdot, x_0) \in L^n(\Omega)$ 出现在 Jones–Smirnov [JS00], 的研究中，他们证明该条件足以使 $\partial\Omega$ 成为QCH可去的。本文作者近期的研究 [Nta20] 也使用了相同条件，以证明某些具有无限多个补分支的分形对于 Sobolev 空间是可去的；此外，本文作者与 Younsi [NY20] 的研究也曾运用该条件证明圆域的刚性。我们将使用一些来自 [NY20], 的辅助结果；这些结果在那里是在二维情形下证明的，但其证明适用于所有维数。

注 6.2。满足定理条件的区域是有界的 [NY20，引理 2.6]，因此具有有限的 n-测度。利用这一点，可以证明等价条件为 $k_\Omega \in L^n(\Omega \times\Omega)$，所以基点 x_0 并不重要。

在证明定理之前，我们先介绍必要的背景。对于区域 Ω ⊊ $\mathbb{R}^n$，我们考虑*Whitney* 立方体分解 $\mathcal{W}(\Omega)$，它由一族闭二进立方体 $Q \subset\Omega$ 组成，这些立方体称为*Whitney* 立方体，并满足

(1) $\mathcal{W}(\Omega)$ 中的立方体内部互不相交，且$\bigcup_{Q\in\mathcal{W}(\Omega)} Q = \Omega$；(2) 对所有 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$，均有 $\operatorname{diam}(Q) \le \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) \le 4\operatorname{diam}(Q)$；(3) 若 $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$，则对所有 Q_1，$Q_2 \in \mathcal{W}(\Omega)$，均有 $1/4 \le \operatorname{diam}(Q_1)/\operatorname{diam}(Q_2) \le 4$

.

关于该分解的存在性，参见 [Ste70，定理 1 和命题 1，第 167–169] 页。我们用 $\ell(Q)$ 表示立方体 Q 的边长；这不要与路径 γ 的长度 $\ell(\gamma)$ 混淆。若两个惠特尼立方体 Q_1，$Q_2 \in \mathcal{W}(\Omega)$ 满足 $\ell(Q_1) \ge \ell(Q_2)$，则称它们相邻，当且仅当 Q_2 的一个面包含于 Q_1 的一个面中。

引理 6.3。 设 Ω ⊂ $\mathbb{R}^n$ 是一个区域，且 Q_1、$Q_2 \in \mathcal{W}(\Omega)$ 是相邻的立方体。设 $F_1 \subset Q_1$ 和 $F_2 \subset Q_2$ 是连续统，满足 直径$(F_i) \ge a\ell(Q_i)$，其中 $a > 0$、$i = 1$满足 2，并设 ρ: $\mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个博雷尔函数。则存在一条可求长路径 $\gamma \in \Gamma(F_1, F_2;\operatorname{int}(Q_1 \cup Q_2))$ 使得

$$\int_\gamma \rho\, ds \le c(n,a)\left(\|\rho\|_{L^n(Q_1)} + \|\rho\|_{L^n(Q_2)}\right) \quad and \quad \ell(\gamma) \le c(n,a)(\ell(Q_1) + \ell(Q_2)).$$

证明。 根据引理 3.7，只需证明 $\operatorname{Mod}_n \Gamma(F_1, F_2; \operatorname{int}(Q_1 \cup Q_2))$ 有一个统一的正下界，该下界仅取决于 n 和 a。将 $Q_1 \cup Q_2$ 通过一个一致双 Lipschitz 映射映到一个球上，即可证明这一点。欧氏球是 Loewner 空间；定义及其性质参见 [Hei01, 第 8] 章。因此，所需的下界成立。□

引理 6.4. 设 Ω ⊂ $\mathbb{R}^n$ 是一个区域，$\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ 是一条路径，满足 $\gamma((0,1)) \subset\Omega$ 且 $\gamma(0)$ $\gamma(1) \in \partial\Omega$，并且 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个博雷尔函数。则存在一条路径 $\gamma'\colon [0,1] \to \Omega$，使得 $\gamma'(0) = \gamma(0)$，$\gamma'(1) = \gamma(1)$，$\gamma'((0,1)) \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{W}(\Omega)|}$

$$Q,$$
$$\gamma|\cap Q\neq\emptyset$$

$$\int_{\gamma'} \rho\, ds \le c(n) \sum_{\substack{Q\in\mathcal{W}(Q)\\ |\gamma'|\cap Q\neq\emptyset}} \|\rho\|_{L^n(Q)} \quad and \quad \ell(\gamma') \le c(n) \sum_{\substack{Q\in\mathcal{W}(Q)\\ |\gamma'|\cap Q\neq\emptyset}} \ell(Q).$$

证明。存在一个由互不相同的惠特尼立方体组成的序列 Q_i, $i \in \mathbb{Z}$，使得对于每个 $i \in \mathbb{Z}$， Q_i 与 Q_{i+1} 相邻；对于每个 $i \in \mathbb{Z}$， $|\gamma| \cap Q_i \neq \emptyset$；并且 $Q_i \to \gamma(0)$ 为 $i \to -\infty$，而 $Q_i \to \gamma(1)$ 为 $i \to \infty$；论证见 [NY20，第 143] 页。

考虑相邻的立方体 Q_0 和 Q_1。令 F_1 为 Q_0 中与公共面相对的面， F_2 为 Q_1中对应的面。我们将引理 6.3 应用于， Q_1 ，得到一条路径 γ_0 ，它位于 $Q_0 \cup Q_1$ 中，连接 F_1 与 F_2 ，并满足引理关于 $a = 1/2$的结论。现在考虑 Q_1 和 Q_2。令 F_1为 $|\gamma_0|$ 的一个子连续统，它连接 Q_1 的相对两侧；令 F_2 为Q_2 中与 Q_1 和 Q_2之间的公共面相对的面。将引理 6.3 应用于$a = 1/2$，我们得到一条路径 γ_1 ，它在 $Q_1 \cup Q_2$中连接 F_1 与 F_2。归纳地，对每个 $i \in \mathbb{Z}$ ，我们都得到一条路径 γ_i ，它位于 $Q_i \cup Q_{i+1}$ 中，且满足引理 6.3 的结论，使得 $|\gamma_i| \cap |\gamma_{i+1}| \neq \emptyset$。由于当 $|i| \to \infty$时，$\operatorname{diam}(Q_i) \to 0$，我们可以将这些路径 γ_i 首尾相接，得到一条具有所需性质的路径 γ'。□

假设存在一个基点 $x_0 \in \Omega$，使得 $k_\Omega(\cdot, x_0) \in L^n(\Omega)$。文献 [JS00，第 273–274] 页证明，存在一个树状族 $\mathcal{G}$ ，由从 x_0 出发、连接相邻惠特尼立方体中心并终止于 $\partial\Omega$ 的曲线构成。这些曲线的行为本质上类似于拟双曲测地线，因此 $\partial\Omega$ 中的每个点都是 $\mathcal{G}$ 中某条曲线的终点。对于每个立方体 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$，我们将 Q 的 影集 $SH(Q)$ 定义为满足以下条件的点 $x \in \partial\Omega$ 的集合：存在一条 $\mathcal{G}$ 中的曲线从 x_0 出发，经过 Q ，并终止于 x。我们定义

$$s(Q) = \operatorname{diam}(SH(Q)).$$

对于每个 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$，集合 $SH(Q)$ 都是 $\partial\Omega$ 的一个紧子集；参见 [NY20，引理 2.7]。此外，文献 [JS00，第 275] 页证明，

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}(\Omega)} s(Q)^n \lesssim_n \int_\Omega k(x, x_0)^n \, dx. \tag{6.1}$$

引理 6.5 ([NY20，引理 2。10])。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，使得 $k_\Omega(\cdot, x_0) \in L^n(\Omega)$ 对某个 $x_0 \in \Omega$成立。对于每条简单路径 $\gamma\colon \ [0,1] \to \mathbb{R}^n$，以及 $\varepsilon > 0$，存在一个有限路径族 $\{\gamma_i\colon [0,1] \to \Omega\}_{i \in I}$，使得

(i) $\partial\gamma_i \subset \partial\Omega$ 且 γ_i 为常值，或者 $\gamma_i((0,\ 1)) \subset \Omega$ 对每个 $i \in I$均成立；

(ii) 存在一条路径 $\widetilde{\gamma}$，满足 $\partial\widetilde{\gamma} = \partial\gamma$，且 $|\widetilde{\gamma}| \subset (|\gamma| \setminus \partial\Omega) \cup \bigcup_{i \in I} |\gamma_i|$；(iii) 若 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$ 是一个惠特尼立方体，且对某个 $i \in I$有 $|\gamma_i| \cap Q \neq \emptyset$，则 n

$$|\gamma| \cap SH(Q) \neq \emptyset \quad and \quad \ell(Q) \leq \varepsilon,$$

(iv) $|\gamma_i|$ 和 $|\gamma_j|$ 相交于互不相交的惠特尼立方体集合 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$，其中 $i \neq j$。此外，若对每个 $i \in I$，用满足以下条件的路径 $\gamma_i'\colon [0,1] \to \Omega$ 替换 $\gamma_i\colon \gamma_i'(0) = \gamma_i(0)$， $\gamma_i'(1) = \gamma_i(1)$，且 γ_i' 为常值，或 $\gamma_i'((0,1)) \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{W}(\Omega)} Q$，$|\gamma_i| \cap Q \neq \emptyset$

那么结论 (i)–(iv) 对集合 $\{\gamma_i'\}_{i \in I}$ 也成立。

插图见图4。[NY20 中引理 2.10] 的表述略有不同；不过，(i)、(ii) 和 (iii) 的证明完全相同。路径 γ_i 由 $\mathcal{G}$ 中路径的子路径拼接而成，并替换了覆盖集合 $|\gamma| \cap \partial\Omega$ 的有限条弧 γ。因此，利用这些替换所得到的路径 $\widetilde{\gamma}$，基本上可以避开集合 $|\gamma| \cap \partial\Omega$，只有在 γ_i 的端点处例外。我们简要说明 (iv) 的证明。需要将满足 (i)–(iii) 的路径 γ_i 适当地拼接起来。如果两条路径 γ_i、 γ_j、 $i \neq j$ 相交于同一个

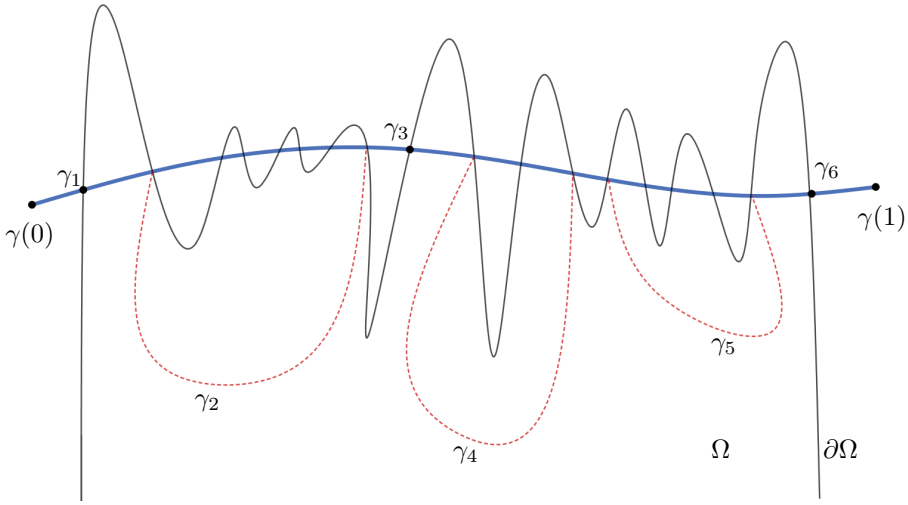

FIGURE 4. 路径 γ （蓝色）以及引理 6.5 给出的路径 γ_i 。有三条常值路径 γ_i。路径 $\widetilde{\gamma}$ 是通过将 γ 在 γ_i 的端点之间的弧替换为 γ_i 而得到的。

惠特尼立方体 Q，那么可以用其中的线段将这些路径拼接起来Q。接着，取拼接所得路径的一个子路径 γ_{ij} ，使其满足 (i) 和 (ii)，其中用 γ_{ij} 代替 γ_i 和 γ_j。经过有限次拼接后，可以得到满足所有条件 (i)–(iv) 的族 $\{\widetilde{\gamma}_i\}_{i\in\widetilde{I}}$。引理的最后一部分为路径 γ_i 的选取提供了一些额外自由；集合 $\{\gamma_i'\}_{i\in I}$ 的结论 (ii) 可由构造得出，而其他结论则显而易见，因为 $\partial\gamma_i' = \partial\gamma_i$ 与路径 γ_i' 的迹相交的惠特尼立方体不比 γ_i 多。

定理 *6.1* 的证明。我们将验证定理 4.3 (II)，以证明 $\partial\Omega$ 是$CNED$。设 ρ: $\mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个博雷尔函数，且满足 $\rho \in L^n(\mathbb{R}^n)$。我们检查条件 (II-1)。(II-2) 的证明非常相似，故略去。设 γ 是一条非恒定可求长路径，并令 $g = \rho + \chi_\Omega$。由于 Ω 有界（见注 6.2），我们有$g \in L^n(\mathbb{R}^n)$。由引理 3.12 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\gamma+x|\cap SH(Q)\neq\emptyset}} \|g\|_{L^n(Q)}\,dx &= \sum_{\ell(Q)\le\varepsilon} \|g\|_{L^n(Q)}\cdot m_n(\{x : |\gamma+x|\cap SH(Q)\neq\emptyset\}) \\ &\lesssim_n \sum_{\ell(Q)\le\varepsilon} \|g\|_{L^n(Q)}\cdot \max\{\ell(\gamma), s(Q)\}s(Q)^{n-1}.\end{aligned}$$

由 (6.1) 得 $s(\cdot) \in \ell^n(\mathcal{W}(\Omega))$，因此如果 $\ell(Q) \le \varepsilon$ 且 ε 足够小，就有 $s(Q) \le \ell(\gamma)$。利用这一事实和 H¨older 不等式，我们将上述和式估计为

$$\ell(\gamma)\Big(\sum_{\ell(Q)\le\varepsilon}\int_Q g^n\Big)^{1/n}\cdot\Big(\sum_{\ell(Q)\le\varepsilon} s(Q)^n\Big)^{1-1/n}.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，该式趋于 0。我们得出结论：当 $\varepsilon \to 0$ 沿一个序列变化时，对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，有

$$\sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\gamma+x|\cap SH(Q)\neq\emptyset}} \|\rho\|_{L^n(Q)} = o(1) \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\gamma+x|\cap SH(Q)\neq\emptyset}} \ell(Q) = o(1) \tag{6.2}$$

设 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 (6.2)。设 η 是 $\gamma+x$ 的一条具有不同端点的强子路径。我们断言，结论 B($\partial\Omega$ ρ，η) 成立。只需证明这一结论对 η 的一条端点相同的简单弱子路径成立，我们仍将其记为 η。

对于 $\varepsilon > 0$，我们对路径 η 应用引理 6.5，得到有限路径族 $\{\eta_i\}_{i\in I}$。对每条非恒定路径 η_i，我们应用引理 6.4，得到路径 η_i'，它与 η_i 具有相同的端点；并且若对于某个 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$，$|\eta_i'| \cap Q \neq \emptyset$，则 $|\eta_i| \cap Q \neq \emptyset$。若 η_i 是常值路径，则令 $\eta_i' = \eta_i$。引理 6.5 的最后一部分允许我们将每个 η_i 替换为 η_i'，同时保留性质 (i)–(iv)。由引理 6.5 (i) 和 (ii)，存在一条简单路径 $\widetilde{\eta}$，使得

(1) $|\widetilde{\eta}| \cap \partial\Omega$ 是有限集合（只有 η_i' 的端点可以位于 $\partial\Omega$ 中），且 (2) $\partial\eta = \partial\widetilde{\eta}$ 和 $|\widetilde{\eta}| \subset (|\eta| \setminus \partial\Omega) \cup \bigcup_{i\in I} |\eta_i'|$。

我们舍弃迹与 $|\widetilde{\eta}|$ 不相交的路径 η_i'。此外，由于路径 η_i' 满足引理 6.4 的结论，结合引理 6.5 的 (iii) 和 (iv)，我们有

$$(3)\ \sum_{i\in I} \ell(\eta_i') \le c(n) \sum_{i\in I} \sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\eta_i'|\cap Q\neq\emptyset}} \ell(Q) \le c(n) \sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\eta|\cap SH(Q)\neq\emptyset}} \ell(Q), \quad \text{and}$$

$$(4)\ \sum_{i\in I} \int_{\eta_i'} \rho\, ds \le c(n) \sum_{i\in I} \sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\eta_i'|\cap Q\neq\emptyset}} \|\rho\|_{L^n(Q)} \le c(n) \sum_{\substack{\ell(Q)\le\varepsilon \\ |\eta|\cap SH(Q)\neq\emptyset}} \|\rho\|_{L^n(Q)}.$$

注意，(1) 蕴含 (B-i)，而 (2)、(3)、(4) 与 (6.2) 一起蕴含 (B-iii) 和 (B-iv)。最后，给定 $|\eta|$ 的一个开邻域 U，若 ε 足够小，则 η_i' 的长度之和很小，因此 $\bigcup_{i\in I} |\eta_i'| \subset U$；这证明了 (B-ii)。□

6.2. **向坐标轴的投影与 NED 集合。** 我们给出一个关于其在坐标轴上的投影均为零测度的集合的结果。该结果对于定理 1.9 的证明至关重要。

定理 6.6。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是一个在每个坐标方向上的投影都具有 1-测度为零的集合。那么 $E \in \overline{NED}^w$。此外，若 $m_2(E) = 0$，则 $E \in \overline{NED}$。

Ahlfors–Beurling 在 [AB50，定理 10] 中证明了闭集的这一结论。对于非闭集，证明要复杂得多。注意，即使 E具有零测度，一般而言也并非 NED。例如，取 $E = \mathbb{Q} \times \{0\}$，根据定理 1.6，它是 NED。然而，它的闭包是 $E = \mathbb{R} \times \{0\}$，其具有零测度，但它并非 NED，因为它不是全不连通的。

我们仅在二维情形下证明定理 6.6，这是因为下面的引理与引理 3.5 的陈述非常相似。除该引理外，定理 6.6 的证明中没有任何论证依赖于维数。

引理 6.7. 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是一个集合，其在每个坐标方向上的投影均为1-测度零。对于 $t > 0$，记 Q_t 为以原点为中心、边长为 t 且边平行于坐标轴的开正方形。设 $0 < r < R$，并假设

F_1、$F_2 \subset \mathbb{R}^2$ 是不相交连续体，且对于每个 $r < t < R$，∂Q_t 都同时与 F_1 和 F_2 相交。那么

$$\operatorname{Mod}_n(\Gamma(F_1, F_2; Q_R \setminus \overline{Q_r}) \cap \mathcal{F}_0(E)) \geq \frac{1}{4} \log\left(\frac{R}{r}\right).$$

证明。对于几乎处处的 $t \in (r, R)$，我们有 $\partial Q_t \cap E = \emptyset$。设 ρ 是关于$\Gamma(F_1, F_2; Q_R \setminus Q_r) \cap \mathcal{F}_0(\overline{E})$ 的可容许函数。那么

$$1 \leq \int_{\partial Q_t} \rho \, ds \leq \left(\int_{\partial Q_t} \rho^2 \, ds\right)^{1/2} \sqrt{4t}$$

对于几乎处处的 $t \in (r, R)$。通过积分和富比尼定理，我们得到

$$\frac{1}{4} \log\left(\frac{R}{r}\right) = \int_r^R \frac{1}{4t} \, dt \leq \int_{Q_R \setminus \overline{Q_r}} \rho^2$$

对 ρ 取下确界，即得结论。 □

以下引理的证明与引理 3.8 的证明完全相同，只需用引理 6.7 替代引理 3.5；参见注 3.9。

引理 6.8。设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是一个集合，其在每个坐标方向上的投影均为1-测度零。那么，对于任意开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 以及任意一对非空且不相交的连续统 $F_1, F_2 \subset U$，我们有

$$\operatorname{Mod}_2(\Gamma(F_1, F_2; U) \cap \mathcal{F}_0(E)) = \lim_{r \to 0} \operatorname{Mod}_2(\Gamma(F_1^r, F_2^r; U) \cap \mathcal{F}_0(E)).$$

定理 *6.6* 的证明。设 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^2$ 是非空且不相交的连续统。我们固定一个较小的 $r > 0$，使得 $F_1^r \cap F_2^r = \emptyset$，并令 $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ 为一个博雷尔函数，满足$\rho \in L^2(\mathbb{R}^2)$，且对于 $\Gamma(F_1^r, F_2^r; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}_0(E)$ 可容许。

考虑一个开集序列 $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$，使得 $E \subset V_{m+1} \subset V_m \subset N_{1/m}(E)$，并且对于每个 $m \in \mathbb{N}$，V_m 在每条坐标轴上的投影测度均小于 $1/m$。注意，$\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$ 的二维测度为零。对每个$m \in \mathbb{N}$，定义闭集 $X_m = (\mathbb{R}^2 \setminus V_m) \cup F_1^r \cup F_2^r$。注意，几乎每条平行于某一坐标方向的直线都不与集合$\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$相交。因此，几乎每条平行于某一坐标方向的直线都包含在$\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$中。此外，若 X_m 中有一条可求长路径 γ，连接 F_1^r与 F_2^r，则 γ有一条子路径位于 $\mathbb{R}^2 \setminus V_m \subset \mathbb{R}^2 \setminus E$中，连接 F_1^r与 F_2^r。由 ρ 的可容许性，我们得到

$$\int_\gamma \rho \, ds \geq 1.$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们在 X_m 上定义函数

$$g_m(x) = \min\left\{\inf_{\gamma_x} \int_{\gamma_x} \rho \, ds, 1\right\}$$

其中，下确界取遍连接 F_1^r与 x且位于 X_m 中的所有可求长路径 γ_x。根据 [JJR+07，推论 1.10], ，函数 g_m 是可测的；这里，X_m 是闭集，因而完备，这一点很重要。另一种论证方法是使用 [HKST15，引理 7.2.13，第 187] 页。此外，在 F_1^r上有 $0 \leq g_m \leq 1$, $g_m = 0$，在 F_2^r上有 $g_m = 1$。接下来，我们证明 ρ是 g_m的一个上梯度。也就是说，

$$|g_m(y) - g_m(x)| \leq \int_\gamma \rho \, ds$$

对每条满足 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = y$的可求长路径 $\gamma\colon [0,1] \to X_m$，都有此性质。由于 x 和 y 的作用是对称的，我们只需证明

$$g_m(y) - g_m(x) \le \int_\gamma \rho\, ds.$$

若 $g_m(y) = 1$，则该不等式显然成立，因为此时 $g_m(y) - g_m(x) \le 0$。设 $g_m(y) = \inf_{\gamma_y} \int_{\gamma_y} \rho\, ds$。固定一条连接 F_1^r与 x的曲线 γ_x。通过将 γ_x 与 γ路径拼接，定义曲线γ_y。于是

$$g_m(y) \le \int_{\gamma_y} \rho\, ds = \int_\gamma \rho\, ds + \int_{\gamma_x} \rho\, ds.$$

对 γ_x 取下确界，即得所需的不等式。

集合序列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 递增。因此，若 $k \ge m$，则 g_k 是通过对比 g_m的定义所用的更大路径集合取下确界而定义的。由此可得 $0 \le g_k \le g_m$ 属于 X_m。因此，对每个 $m \in \mathbb{N}$，当 $k \to \infty$ 时，g_k 逐点收敛到 X_m中的可测函数 g。此外，由逐点收敛可知，对每个 $m \in \mathbb{N}$，函数 ρ 是 X_m中 g 的上梯度，$\bigcup_{m=1}^\infty X_m$中 $0 \le g \le 1$ 在 F_1的某个邻域内成立，且 $g = 1$ 在 F_2的某个邻域内成立。在 $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{m=1}^\infty X_m \subset \bigcap_{m=1}^\infty V_m$ 上定义 $g = 0$。因此，我们将 g延拓为 $\mathbb{R}^2$中的一个可测函数。

我们断言，g 在几乎处处与坐标方向平行的线段上绝对连续。设 L 是与 $e_1 = (1, 0)$平行的线段。根据构造，对于$\mathcal{H}^1$-几乎处处的 $z \in \{e_1\}^\perp$，线段 $L + z$ 都包含在某个 $m \in \mathbb{N}$的 X_m 中。此外，由于 $\rho \in L^2(\mathbb{R}^2)$，对于几乎处处的 $z \in \{e_1\}^\perp$，有 $\int_{L+z} \rho\, ds < \infty$。根据上梯度不等式，我们得出：对于几乎处处的 $z \in \{e_1\}^\perp$，g 在 $L + z$ 上绝对连续；并且 $|g_x| \le \rho$ 在 $L + z$上几乎处处成立。这意味着 $|g_x| \le \rho$ 几乎处处成立。类似地，$|g_y| \le \rho$ 几乎处处成立。因此，g 属于经典索博列夫空间 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，且 $|\nabla g| \le \sqrt{2}\rho$在 $\mathbb{R}^2$中几乎处处成立；参见 [Zie89，定理 2.1.4，第 44]页。

若 $\mathbb{R}^2 \setminus E \ne \emptyset$，则对于充分大的 m，每个 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$都有一个有界开邻域 Y，与 V_m 不相交，因为 $V_m \subset N_{1/m}(E)$。因此，$Y \subset X_m$ 和$g \in W^{1,2}(Y)$。由于 ρ 是 Y 中 g 的上梯度，根据 [Haj03，推论 7.15]，我们得出 $|\nabla g| \le \rho$ 几乎处处成立于 Y。因此，$|\nabla g| \le \rho$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}^2 \setminus E$。综上，在 $\mathbb{R}^2$ 的几乎每个点处，我们有

$$|\nabla g| \le \rho \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}} + \sqrt{2}\rho \chi_{\overline{E}}.$$

由于 $g = 0$ 在 F_1 的一个邻域内且 $g = 1$ 在 F_2的一个邻域内，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个（通过光滑化得到的）定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数 g_ε，它具有相同的性质，且满足$\|\nabla g_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \|\nabla g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon$；参见 [Zie89，引理 2.1.3，第 43] 页。显然，$|\nabla g_\varepsilon|$ 是 $\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2)$ 的可容许函数。因此，

$$\operatorname{Mod}_2 \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \le \|\nabla g_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|\rho\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{E})} + 2\|\rho\|^2_{L^2(\overline{E})} + \varepsilon.$$

首先令 $\varepsilon \to 0$，然后对 ρ 取下确界，得到

$$\operatorname{Mod}_2 \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \le c_0 \operatorname{Mod}_2(\Gamma(F_1^r, F_2^r; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}_0(E)),$$

其中，$c_0 = 1$ 若 $m_2(\overline{E}) = 0$，否则为 $c_0 = 2$。现在，我们令 $r \to 0$，由引理 6.8 可得

$$\operatorname{Mod}_2 \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \le c_0 \operatorname{Mod}_2(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}_0(E)). \qquad \square$$

6.3. **一个不可测的 *CNED* 集合。** Sierpi´nski [Sie20], 利用选择公理（但不使用连续统假设）构造了一个引人注目的不可测集合 $E \subset \mathbb{R}^2$，使得每条直线与 E 的交集至多包含两个点。这个例子当时被用作 Fubini 定理逆命题的反例：如果平面集合的各个截面都可测，那么整个集合是否可测？我们在此证明，Sierpi´nski 的集合是 *CNED*。因此，要推出 *CNED* 集合具有零测度，引理 2.5 中的可测性假设是必要的。

命题 6.9。 存在一个不可测集 $E \subset \mathbb{R}^2$，它是 *CNED* 集。

证明。设 E 为 Sierpi´nski 的不可测集。设 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^2$ 为非空且不相交的连续体。我们将证明

$$\operatorname{Mod}_2 \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \le \operatorname{Mod}_2(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}_\sigma(E)).$$

根据 Aseev 的一个卓越结果 [Ase09，定理 2，1], 我们有

$$\operatorname{Mod}_2 \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) = \operatorname{Mod}_2(\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}),$$

其中 $\mathcal{F}$是关于 $\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$ 的分段线性曲线族；也就是说，$\gamma \in \mathcal{F}$ 若 $|\gamma| \setminus (F_1 \cup F_2)$ 的每个点都有一个邻域 V，使得 $|\gamma| \cap V$ 由有限条直线段组成。因此，只需证明

$$\Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F} \subset \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}_\sigma(E).$$

令 $\gamma \in \Gamma(F_1, F_2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}$。由集合 E 的性质，且由于 γ 是分段线性的，集合 $|\gamma| \cap E$ 是可数的。因此，$\gamma \in \mathcal{F}_\sigma(E)$，证毕。□

7. Examples of non-negligible sets

命题 *1.11* 的证明。令 E 为陈述中所述某个填充的余集。令 Γ_0 表示与集合相交的非恒定曲线族

$$S = \bigcup_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i \neq j}} (\partial D_i \cap \partial D_j).$$

由于 S 是可数的，我们有 $\operatorname{Mod}_n \Gamma_0 = 0$。考虑分别包含于 D_1, D_2 中的连续统 F_1, F_2。只要证明

$$\Gamma(F_1, F_2; D_0) \cap \mathcal{F}_\sigma(E) \subset \Gamma_0. \tag{7.1}$$

令 $\gamma \in \Gamma(F_1, F_2; D_0) \setminus \Gamma_0$。考虑一个弱子路径后，不妨假设 γ 是一条具有相同性质的简单路径。我们考虑一个单射参数化 $\gamma\colon [0,1] \to D_0$。令 A 为满足以下条件的 $t \in [0,1]$ 的集合：存在 $\delta > 0$ 和 $i \in \mathbb{N}$，使得 $\gamma((t-\delta, t) \cup (t, t+\delta)) \subset D_i$ 且 $\gamma(t) \in \partial D_i$；也就是说，$\gamma$ 在时刻 t 于 ∂D_i 上“反弹”。那么 A 在 $\gamma^{-1}(E)$ 中是可数且相对开的。

我们断言，紧集 $B = \gamma^{-1}(E) \setminus A$ 非空且完美，因此它是不可数的。由此，$|\gamma| \cap E$ 是不可数的，且 $\gamma \notin \mathcal{F}_\sigma(E)$，这就完成了 (7.1) 的证明。为说明 B 非空，令 $t = \sup\{a \in [0,1]\colon \gamma(a) \in D_1\}$。于是 $\gamma(t) \in \partial D_1$，所以 $t \in \gamma^{-1}(E)$，$\gamma((t-\delta, t)) \cap D_1 \neq \emptyset$ 对每个 $\delta > 0$ 都成立，且 $\gamma((t, 1]) \cap D_1 = \emptyset$。因此，$t \notin A$ 且 $t \in B$，这表明 $B \neq \emptyset$。现在我们来证明其完美性。令 $t \in B$，并令 $I \subset [0,1]$ 为一个包含 t 的开区间。

情况 *1*：假设 $\gamma(I) \subset E$。由于 A 可数，存在 $s \in I \setminus A, s \neq t$，使得 $\gamma(s) \in E$。因此，$(I \setminus \{t\}) \cap B \neq \emptyset$。

情形 *2*：假设对于某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，有 $\gamma(I) \cap D_{i_0} \neq \emptyset$，且 $\gamma(t) \notin \partial D_{i_0}$。不失一般性，对于某个满足 $s < t$ 的 $s \in I$，有 $\gamma(s) \in D_{i_0}$。令 $s_1 = \sup\{a \in (s, t)\colon$

$\gamma(a) \in D_{i_0}\}$。于是 $\gamma(s_1) \in \partial D_{i_0}$, $s_1 \neq t$, $\gamma((s_1-\delta, s_1)) \cap D_{i_0} \neq \emptyset$ 对每个 $\delta > 0$ 都成立，并且 $\gamma((s_1, t)) \cap D_{i_0} = \emptyset$。因此， $s_1 \notin A$，且我们有 $s_1 \in I \cap B$，所以 $(I \setminus \{t\}) \cap B \neq \emptyset$。情形 3：假设对于某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，有 $\gamma(t) \in \partial D_{i_0}$。由于 $t \notin A$，存在 I 的一个开子区间，记为 $J = (s, t)$，使得 $\gamma(J)$ 与 D_{i_0} 的补集相交。如果 $\gamma(J) \subset E$，那么根据情形 1，我们有 $(J \setminus \{t\}) \cap B \neq \emptyset$。假设对于某个 $i_1 \neq i_0$，有 $\gamma(J) \cap D_{i_1} \neq \emptyset$。那么 $\gamma(t) \notin \partial D_{i_1}$，因为 $\gamma \notin \Gamma_0$，且 γ 避开了集合 $\partial D_{i_1} \cap \partial D_{i_0}$。现在，我们可以将问题归结为情形 2，其中以 i_1 替代 i_0，以 J 替代 I。□

注记 7.1。可以放宽该命题的假设，只要求$\partial D_i \cap \partial D_j$, $i \neq j$的 Sobolev n-容量为零（参见 [HKST15，第 7.2] 节）。此时，经过 $\partial D_i \cap \partial D_j$ 的曲线族的 n-模数为零。

接下来，在证明定理 1.9 之前，我们先确立一个初步的基本结果。

引理 7.2. 设 $U \subset \mathbb{R}$ 为开集， $E \subset \mathbb{R}$ 为紧集，且 $m_1(E) > 0$。则存在一个相似变换序列 $\tau_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, 以及一个集合 $N \subset \mathbb{R}$，使得 $m_1(N) = 0$，并且

$$U = N \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_i(E).$$

证明。设 $E \subset (a, b)$，并令 $\lambda = m_1(E)/(b-a)$。此外，假设U 有界。令 $U_0 = U$，并设 $I_{0,i}$, $i \in \mathbb{N}$, 为 U_0的连通分支，它们是有界开区间。对每个 $i \in \mathbb{N}$，定义 $\tau_{0,i}$ 为将 (a, b) 映射到 $I_{0,i}$的相似变换。于是 $m_1(\tau_{0,i}(E))/m_1(I_{0,i}) = \lambda$ 并且

$$m_1\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_{0,i}(E)\right) = \lambda m_1(U_0).$$

现在定义 $U_1 = U_0 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_{0,i}(E)$，它是开集，并注意到 $m_1(U_1) = (1-\lambda) m_1(U_0)$。我们以相同方式继续，得到相似变换 $\tau_{1,i}$, $i \in \mathbb{N}$，它们将 (a, b) 映射到 U_1 的连通分支。在第 k 步，我们得到集合

$$U_k = U_0 \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_{j,i}(E)$$

其中 $m_n(U_k) = (1-\lambda)^k m_1(U_0)$。因此，$N = U_0 \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_{j,i}(E)$ 是零测集，正如所需。若 U 无界，我们只需将其写成有界开集的可数并集，并对其中每个集合应用前面的结果。□

定理 *1.9* 的证明。根据 Wu 的构造 [Wu98, Example 2], , 存在康托尔集 G, $F \subset \mathbb{R}$，使得 $m_1(G) = 0$, $m_1(F) > 0$，且 $G \times F$ 对 Sobolev 空间 $W^{1,2}$ 是可去的。因此， $G \times F$ 属于 $NED \subset CNED$ 类；这由 [VG77] 得出。

根据引理 7.2，存在可数多个经过缩放和平移的 F 副本 $F_i \subset (0, 1)$、 $i \in \mathbb{N}$，使得集合 $E_1 = [0,1] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ 具有一维测度零。令 $E_2 = [0,1] \setminus E_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$。我们有

$$G \times [0,1] = G \times (E_1 \cup E_2) = (G \times E_1) \cup (G \times E_2).$$

集合 $G \times [0,1]$ 不是QCH可去的（回想引言中的讨论），因此根据定理 1.1，它不是 $CNED$；这也可以直接证明。

另一方面，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，集合 $G \times F_i$ 都是 $G \times F$的拟共形像，而后者是NED。紧致NED 集合在拟共形

映射下保持不变，这是推论 4.2 的结论（也可由 [AB50，定理 4]推出）。因此，对于每个 $i \in \mathbb{N}$， $G \times F_i$ 都是NED。由定理 1.2，我们得出

$$G \times E_2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G \times F_i \in NED\,.$$

最后请注意，集合 $G \times E_1$ 在坐标轴上的投影均为零测度。此外， $G \times E_1 \subset G \times [0,1]$, 且后者的二维测度为零。根据定理 6.6，我们得出 $G \times E_1 \in NED$。□

References

[AB50] L. Ahlfors 和 A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets*, 《数学学报》83 (1950), 101–129。[AS74] V. V. Aseev 和 A. V. Sy˘cev, *Sets that are removable for quasiconformal mappings in space* **15** 1974 1213 1227 , 《西伯利亚数学杂志》( ), – 。[Ase09] V. V. Aseev, *NED sets lying in a hyperplane*, 《西伯利亚数学杂志》50 (2009), no. 5, 967– 986。[BBI01] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov, *A course in metric geometry*, 《数学研究生教材》第 33 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[Bes31] A. S. Besicovitch, *On Sufficient Conditions for a Function to be Analytic, and on Behaviour of Analytic Functions in the Neighbourhood of Non-Isolated Singular Points*, 《伦敦数学会会刊》(2) 32 (1931), no. 1, 1–9。[Bis94] C. J. Bishop, *Some homeomorphisms of the sphere conformal off a curve*, 芬兰科学院数学系列 A I 19 (1994), no. 2, 323–338。[Bog07] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I*, 施普林格出版社，柏林，2007。[Boj88] B. Bojarski, *Remarks on Sobolev imbedding inequalities*, 《复分析》，Joensuu 1987, 《数学讲义》，施普林格出版社，柏林，1988，第 52–68 页。[Car51] L. Carleson, *On null-sets for continuous analytic functions*, 《数学档案》1 (1951), 311– 318。[Fed69] H. Federer, *Geometric measure theory*, 《数学科学基础丛书》第 153 卷，施普林格出版社纽约公司，纽约，1969。[Geh62] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space*, 《美国数学会汇刊》103 (1962), 353–393。[GM85] F. W. Gehring 和 O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* **45** 1985 181 206 , 《数学分析杂志》( ), – 。[Haj03] P. Haj˙lasz, *Sobolev spaces on metric-measure spaces*, 《热核与流形、图及度量空间上的分析》（巴黎，2002），《当代数学》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003，第 173–218 页。[Hei01] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, 《大学教材》，施普林格出版社，纽约，2001。[Hes75] J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality*, 《数学档案》13 (1975), 131–144。[HK90] D. A. Herron 和 P. Koskela, *Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains* **15** 1990 3, 167 179 , 《复变函数论及其应用》( ), no. – 。[HKST15] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. T. Tyson, *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients* , 《新数学专著》第 27 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015。[HS94] Z. X. He 和 O. Schramm, *Rigidity of circle domains whose boundary has σ-finite linear measure* **115** 1994 2, 297 310 , 《数学创刊》( ), no. – 。[JJR+07] E. J¨arvenpaa、M. J¨arvenpaa、K. Rogovin、S. Rogovin 和 N. Shanmugalingam, *Measurability of equivalence classes and p-property in metric spaces*, MEC, 《伊比利亚美洲数学评论》23 (2007), no. 3, 811–830。[Jon95] P. W. Jones, *On removable sets for Sobolev spaces in the plane*, 《纪念 Elias M. Stein 的傅里叶分析论文集》（普林斯顿，纽约州，1991），《普林斯顿数学丛书》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，纽约州，1995，第 250–267 页。[JS00] P. W. Jones 和 S. K. Smirnov, *Removability theorems for Sobolev functions and quasiconformal maps* **38** 2000 2, 263 279 , 《数学档案》( ), no. – 。

[Kau84] R. Kaufman, *Fourier-Stieltjes coefficients and continuation of functions*, 芬兰科学院数学系列 A I 9 (1984), 27–31。[KK00] S. Kallunki 和 P. Koskela, *Exceptional sets for the definition of quasiconformality*, 《美国数学杂志》122 (2000), no. 4, 735–743。[KN05] P. Koskela 和 T. Nieminen, *Quasiconformal removability and the quasihyperbolic metric* **54** 2005 1, 143 151 , 《印第安纳大学数学杂志》 ( ), no. – 。[KW96] R. Kaufman 和 J.-M. Wu, *On removable sets for quasiconformal mappings*, 《数学档案》34 (1996), no. 1, 141–158。[MN22] S. Maio 和 D. Ntalampekos, *On the Hausdorff dimension of the residual set of a packing by smooth curves* **105** 2022 3, 1752 1786 , 《伦敦数学会杂志》 ( ), no. – 。[Nta19] D. Ntalampekos, *Non-removability of the Sierpiński gasket*, 《数学创刊》216 (2019), no. 2, 519–595。[Nta20] D. Ntalampekos, *A removability theorem for Sobolev functions and detour sets*, 《数学杂志》296 (2020), 41–72。[Nta21] D. Ntalampekos, *Non-removability of Sierpiński carpets*, 《印第安纳大学数学杂志》70 (2021), no. 3, 847–854。[Nta23a] D. Ntalampekos, *Metric definition of quasiconformality and exceptional sets* (2023), 预印本。[Nta23b] D. Ntalampekos, *Rigidity and continuous extension for conformal maps of circle domains* 2023 , 《美国数学会汇刊》 ( ), 即将出版。[NW20] D. Ntalampekos 和 J.-M. Wu, *Non-removability of Sierpiński spaces*, 《美国数学会会刊》148 (2020), 203–212。[NY20] D. Ntalampekos 和 M. Younsi, *Rigidity theorems for circle domains*, 《数学创刊》220 (2020), no. 1, 129–183。[Pes56] I. N. Pesin, *Metric properties of Q-quasiconformal mappings*, Mat. Sb. N.S. 40(82) (1956), 281–294。[Shl93] V. A. Shlyk, *On the equality between p-capacity and p-modulus*, 《西伯利亚数学杂志》34 (1993), no. 6, 216–221。[Sie20] W. Sierpi ´nski, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, 《数学基础》1 (1920), no. 1, 112–115（法文）。[SS90] W. Smith 和 D. A. Stegenga, *Hölder domains and Poincaré domains*, 《美国数学会汇刊》319 (1990), no. 1, 67–100。[Ste70] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, 《普林斯顿数学丛书》第 30 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，纽约州，1970。[Tuk89] P. Tukia, *Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings*, 《斯堪的纳维亚数学》65 (1989), no. 1, 152–160。[V¨ai62] J. V¨ais¨al¨a, *On the null-sets for extremal distances*, 芬兰科学院数学系列 A I 第 322 号 (1962), 1–12。[V¨ai71] J. V¨ais¨al¨a, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, 《数学讲义》第 229 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1971。[VG77] S. K. Vodop'yanov 和 V. M. Goldshtein, *A test of the removability of sets for L_p^1 spaces of quasiconformal and quasi-isomorphic mappings* **18** 1977 , 《西伯利亚数学杂志》 ( ), no. 1, 48–68。[Wil70] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1970。[Wu98] J.-M. Wu, *Removability of sets for quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, 《复变函数论及其应用》37 (1998), no. 1-4, 491–506。[You15] M. Younsi, *On removable sets for holomorphic functions*, 《EMS数学科学综述》2 (2015), no. 2, 219–254。[You16] M. Younsi, *Removability, rigidity of circle domains and Koebe's conjecture*, 《数学进展》303 (2016), 1300–1318。[Zie89] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions Sobolev spaces and functions of bounded variation* : , 1989 《数学研究生教材》第 120 卷，施普林格出版社，纽约，。

Mathematics Department, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794, USA.
Email address: dimitrios.ntalampekos@stonybrook.edu