arXiv:2303.13200v1 [math.ST] 23 Mar 2023

欧拉示性数变换的稳定性与推断

Lewis Marsh*† 和 David Beers*

摘要

欧拉示性数变换（ECT）是拓扑数据分析（TDA）中的一种特征，用于概括嵌入欧几里得空间中的形状。与其他 TDA 方法相比，ECT 计算速度快，并且对于一大类形状而言是充分统计量。然而，形状的微小扰动可能导致其 ECT 发生显著变化。本文针对紧致的一维形状提出了一种新的度量，并证明 ECT 相对于该度量是稳定的。至关重要的是，我们的结果通过曲率而非底层形状的三角剖分规模来控制稳定性。我们进一步基于高斯过程理论构造了一种计算上易于处理的 ECT 统计估计量。借助稳定性结果，我们证明该估计量对于受到独立环境噪声扰动的形状是一致的；也就是说，随着样本量增加，估计量将收敛到真实的 ECT。

1 引言

对形状进行分类是数据科学和机器学习中的一项普遍任务。人们已发展出大量理论来区分不同的形状，这些方法在自然科学中也有广泛的应用 [3, 12, 15, 30]。特别是，源自拓扑数据分析（TDA）的欧拉示性数变换（ECT）[27], ，通过考察形状与半空间的交集，为嵌入欧几里得空间中的一大类形状（例如，紧半代数集）提供了充分统计量 [10, 16] 。对于 $\mathbb{R}^d$ 中的每个半空间，都可以通过计算形状位于该半空间内的部分的欧拉示性数，将其与一个整数关联起来。通过这一过程，可以从 $\mathbb{R}^d$ 中的半空间诱导出一个映射，映射至 $\mathbb{Z}$ ，该映射定义为欧拉示性数变换。通常，通过将 $\mathbb{R}^d$ 中的半空间与 $S^{d-1}\times\mathbb{R}$ 进行对应，欧拉示性数变换被视为从 $S^{d-1}\times\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的函数。与欧拉示性数变换相关的是光滑欧拉示性数变换（SECT），它编码了与欧拉示性数变换相同的信息，但为一个连续函数。

欧拉示性数变换在理论上有充分依据、易于解释，并已在实践中成功应用 [1, 9, 19, 21, 30]。此外，欧拉示性数变换的特征表示属于一个函数向量空间，因此非常适合进一步进行统计分析。虽然欧拉示性数变换的计算速度很快，但输入形状的微小扰动可能导致输出特征表示发生显著变化 [6]。与持久同调 [8] 和持久同调变换 [27], 等其他拓扑数据分析方法相比，据我们所知，目前还没有任何不依赖于形状三角剖分的欧拉示性数变换一般稳定性结果。

*英国牛津大学数学研究所，牛津
†英国牛津大学卢德维格癌症研究所，牛津。通讯邮箱：beers@maths.ox.ac.uk

1.1 贡献

我们提出了一种新的度量，用于衡量有限一维 CW 复形的嵌入，并且该度量能够反映弧长的变化。接下来，我们为欧拉示性数变换引入一种范数，其思路与 Meng 等人提出的范数类似。 [20, 公式 3。1], 先对 $\mathbb{R}$ 分量取 1-范数，再对 ∞分量取 S^{d-1} -范数。随后，我们证明了一个新的欧拉示性数变换稳定性结果，表明欧拉示性数变换在我们所定义的嵌入空间度量下是连续的（定理 4）。换言之，如果同一一维 CW 复形的两个嵌入在我们的度量下足够接近，那么它们对应的欧拉示性数变换也足够接近。据我们所知，我们的结果是首个不依赖于形状三角剖分的欧拉示性数变换稳定性结果。运用类似的思路，我们还表明，光滑底层形状的欧拉示性数变换可以通过足够精细的三角剖分来近似（定理16）。此外，我们提出了一种平滑方法，用于处理在环境空间中受到独立高斯噪声扰动的一维 CW 复形嵌入。我们利用前述两个结果证明，我们的平滑方法不仅具有稳定性，还能为含噪数据集的欧拉示性数变换提供一致的统计估计量（定理 23）；也就是说，随着含噪观测数量增加，平滑后形状的欧拉示性数变换依概率收敛到其底层形状的欧拉示性数变换。

应用我们的稳定性结果和维托里斯-里普斯滤过的著名稳定性结果，是以豪斯多夫距离 [4] 表述的。证明欧拉示性数变换的稳定性结果之所以复杂，是因为这种度量对于欧拉示性数变换而言过于粗糙，无法保证其连续性。关键在于，构造两个嵌入欧几里得空间中的形状十分简单：它们的豪斯多夫距离很近，但欧拉曲线变换却相距甚远。我们大致将这类不稳定性分为两类。

第一类不稳定性出现在两个形状的豪斯多夫距离很近、但彼此不同胚时。只需在某个形状上添加一个距离任意近的点，就能构造反例；图 1 展示了嵌入单纯复形这一情形。我们指出，经典持久同调和持久同调变换（PHT） [27] 也存在同样的不稳定性。然而，扩展持久性 [7] 和扩展持久同调变换 [28] 可以用于部分克服这类不稳定性。本文通过将研究范围限制在彼此同胚的形状上，解决了上述类型的不稳定性。在应用中，将欧拉示性数变换分析限制于某个形状同胚类是很常见的，例如参见 [1, 19, 21, 26]。

其次，过大的曲率可能导致欧拉示性数变换（ECT）出现不稳定性。例如，对于同胚于 S^1 或 $I = [0,1]$ 的形状，若它们可参数化为曲线，当两条曲线在嵌入空间中彼此接近，但其中一条曲线的曲率变化快得多时，就会出现这类不稳定性。图 2 展示了此类曲线的一个例子。如果根据受环境噪声影响、且彼此独立地发生扰动的点来近似形状，预计就会出现这种不稳定性。

针对一维形状，我们提出一种对曲率敏感的新度量，以消除第二类不稳定性。我们还提供了一种欧拉示性数变换（ECT）的统计估计量，它在独立分布的高斯噪声所致的扰动下是相合的。这些扰动很可能会引起曲率变化。尽管图 2 所示的持久同调变换（PHT）和扩展持久同调变换都不会出现不稳定性，但这两种方法都无法提供相合估计量。此外，可以说，欧拉示性数变换（ECT）所提供的特征签名更适用于进一步应用统计学和机器学习方法；无论单独使用还是与我们的新方法结合使用，计算速度也更快。

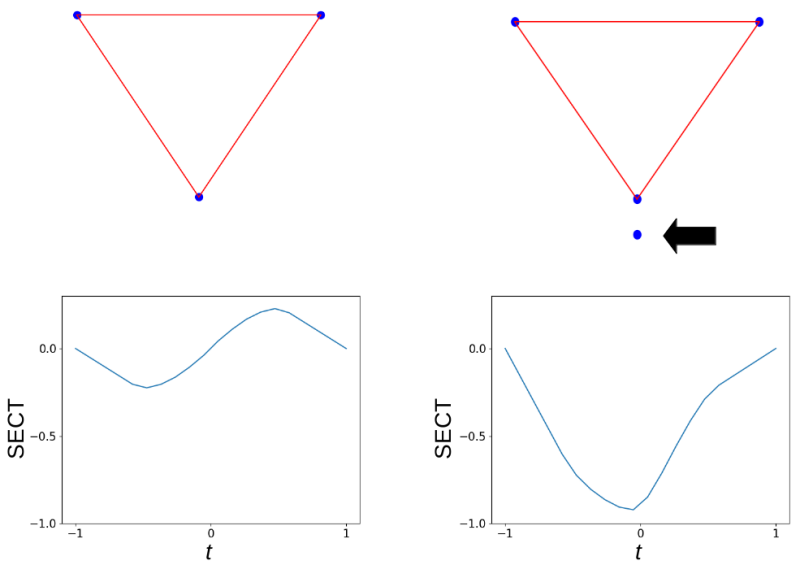

图1：我们展示了两个嵌入的单纯复形（上图），它们仅相差一个顶点。沿自下而上的方向进行滤过时，它们的 SECT（下图）差异显著。当我们将右上图中的孤立顶点（箭头所示）任意移近较大的连通分支时，图示现象仍然存在。

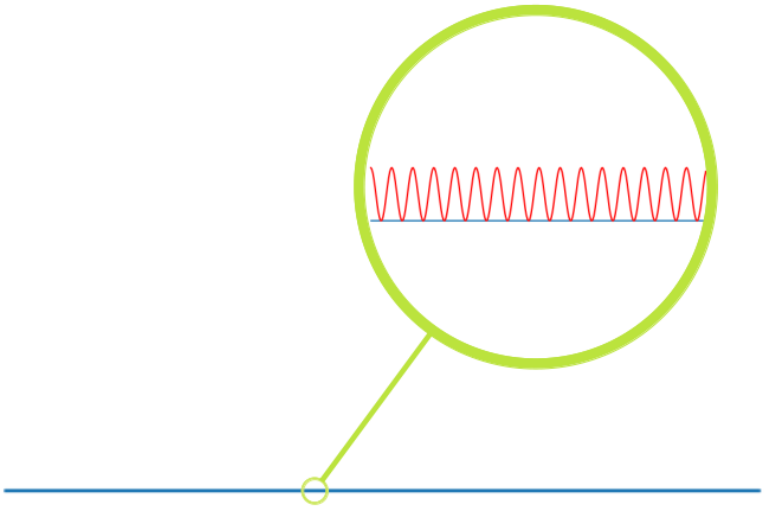

图2：嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 中且与 $[0,1]$ 同胚的两种形状：一条直线（蓝色）和一条波形曲线（红色），后者紧贴直线，振幅较小 ε 且频率较高。只要频率足够高，使波形曲线经过 $n := \lceil 1/\varepsilon \rceil$ 个振幅，那么两条曲线的欧拉示性数变换之间的距离至少为 1（将欧拉示性数变换的 S^1 分量固定为自下而上的方向，并在 $\mathbb{R}$ 上计算 1-范数），而两条曲线之间的豪斯多夫距离为 ε。

1.2 相关工作

我们注意到，Skraba 和 Turner 证明的 Wasserstein距离稳定性 [25] 为 ECT 提供了一个直接的稳定性结果。此外，D-lotko 和 Gurnari [11]证明了欧拉示性数曲线的一个类似结果。Nadimpalli 等人 [21] 证明了二值图像数据上 ECT 的一个稳定性结果，其结果与两幅像不同的体素数量呈线性关系。然而，这些稳定性结果取决于底层单纯复形中单形的数量，而且随着数据点数量增加，ECT 的界会变得越来越宽松。Meng 等人 [20]给出的结果表明，当形状受到旋转和平移扰动时，ECT 具有稳定性，但对于更一般的扰动则不然。他们证明的稳定性需要满足温和性假设，而我们的结果并不需要这些假设。他们还提供了一个使用 SECT 对形状进行统计推断的流程。不过，他们的流程考虑的是参数化形状族，随机扰动仅发生在参数空间中。因此，形状空间中各点的扰动是相关的。相比之下，我们关于 ECT 和 SECT 估计的结果允许环境空间中的独立扰动。

1.3 概述

本文结构如下：第 2 节介绍一维 CW 复形、ECT 和 SECT 的背景知识，并介绍高斯过程。第3 节提出有限一维 CW 复形的嵌入空间上的一种新度量，并在定理 C^2-嵌入的情形下证明 ECT 关于该度量的稳定性4。随后，在定理 16 中，我们提出一种方法，通过有限子集中的插值点来近似此类嵌入的 ECT。在第 21 节的定理4 中，我们证明，在适当的核下，有限一维 CW 复形上的高斯过程具有概率收敛性。接着，我们构造一个统计估计量，用于估计受到独立高斯噪声扰动的形状的 ECT。在定理 23 中，我们结合确定性稳定性结果与概率收敛结果，证明该估计量具有一致性。最后，我们在第5节通过一个例子展示该估计量及相关结果的效力。

2 背景

2.1 拓扑预备知识

2.1.1 一维 CW 复形

拓扑空间 Z 称为一维 CW 复形，如果它具有如下形式

$$Z = \left(Z_0 \sqcup \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} [0,1] \right) / \phi, \tag{1}$$

其中 Z_0 是一个具有离散拓扑的集合，而 ϕ 是从 $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}[0,1]$ 中各区间的端点到 Z_0的某个映射。我们将把 λ^{th} 份 $[0,1]$ 映入 Z的映射称为 Φ_λ(注意，除区间端点外， Φ_λ必须处处为单射)。若空间 Z 可以按公式（1）写成上述形式，且 Z_0 和 Λ均为有限集，则称其为有限一维 CW 复形。我们将 Z 中属于 $Z_0 \to Z$ 像的点称为 0-胞腔，并将 Z 中作为某个映射 Φ_λ 的像的子集称为 1-胞腔。为方便起见，我们用 Z 表示 Z_1的 1-胞腔集合。它可能

存在某个空间 Z 可以用许多不同的方式写成公式（1）中的形式。例如，圆可具有一维 CW 复形结构，其中包含 n 0个 0-胞腔和 n 1个 1-胞腔，对任意n均成立。有时，我们需要固定某个形状的胞腔分解。选定 Z_0 和$\{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$后，我们称 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 为 Z上的 CW 结构。

我们主要关注具有这种结构且为 $\mathbb{R}^d$子集的形状。为此，我们称 $f: Z \to X \subseteq \mathbb{R}^d$ 在 Z^* 下是一个 C^r 映射，当且仅当 f 在 $[0,1]$ 于方程（1）中的每个副本上的限制是 C^r 。我们将这类映射 f记为 $\mathcal{F}^r(Z^*, d)$。我们将 $\mathcal{F}^r(Z^*, d)$中同时为同胚的映射所构成的子集记为 $\mathcal{E}^r(Z^*, d)$，并将这些同胚的像的集合记为 $\mathcal{G}^r(Z^*, d)$。

对于 $r \geq 2$，我们称 $f \in \mathcal{F}^r(Z^*, d)$的曲率被 M 所界定，如果映射 $[0,1] \to Z \to X$ 的曲率对于方程（1）中的 $[0,1]$ 的每个副本都被 M所界定。由单位区间的紧致性可知，只要 Z 是有限一维 CW 复形且 $r \geq 2$，每个 $f \in \mathcal{G}^r(Z^*, d)$的曲率都被某个常数$M$ 所界定。若 $X \in \mathcal{G}^r(Z^*, d)$在 Z^* 下的曲率被 M 所界定，则称其满足该条件，当且仅当任意映射 $h \in \mathcal{E}^r(Z^*, d)$的像为 X 时，其曲率被 M所界定。显然可以证明，如果 X 在 Z^*下的曲率被 M所界定，那么每个像为 X 的映射 $h \in \mathcal{E}^r(Z^*, d)$的曲率都被 M所界定。

2.1.2 欧拉示性数变换

具有有限生成同调的拓扑空间 X 的欧拉示性数定义为以下交错和，它是一个同伦不变量

$$\chi(X) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{rank}\ H_i(X; \mathbb{Z}).$$

这里，有限生成阿贝尔群的秩是其标准分解中 $\mathbb{Z}$ 个 $\mathbb{Z}$ 直和项的数量。若 X 与一个有限一维 CW 复形同伦等价，且该复形包含 c_k 个维数为 k 的细胞，其中 $k = 0,1$，则 $\chi(X)$ 的以下另一种公式也成立

$$\chi(X) = c_0 - c_1.$$

关于此等式的证明，参见例如 [17, 定理 2.44]。特别地，若 X 的每个路径连通分支都是可缩的，则 $\chi(X)$ 等于 X的道路连通分支数。

对于子集 $X \subseteq \mathbb{R}^d$，我们将 X 的欧拉示性数变换 (ECT)定义为以下映射：

$$\begin{aligned} \mathrm{ECT}_X : S^{d-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (v, t) &\longmapsto \chi(\{x \in X : \langle x, v\rangle \leq t\}). \end{aligned}$$

换言之，形状 X 的欧拉示性数变换对 X与所有具有仿射边界的闭半空间的交集的欧拉示性数进行编码。当 $\mathrm{ECT}_X(v,t)$ 未定义时，我们令 $\mathrm{ECT}_X(v,t) = \infty$。在此情境下，对任意整数 n，我们令 $\infty + \infty = \infty$、 $\infty - \infty = \infty$和 $\infty + n = \infty$。

欧拉示性数变换一直受到几何数据研究领域的关注，这或许令人意外：当 X 是单纯复形时，映射 $X \mapsto \mathrm{ECT}_X$ 是单射。因此，研究人员能够将几何数据转换为函数数据，从而更容易在计算机上以及通过经典统计学和机器学习方法进行研究。单射性

在一维情况下不难证明。在二维和三维情况下，最早由 [27, 定理 3.1、推论 3.2]证明。随后，[10, 定理 3.5] 和 [16, 定理 5]分别独立地运用欧拉演算将这一结果推广到了任意维数。事实上，这两篇论文都证明了欧拉示性数变换在可构造集族上是单射的。特别是，欧拉示性数变换在紧半代数集上是单射的。

研究欧拉示性数变换时，通常会将讨论范围限制在 $\mathbb{R}^d$ 的可构造子集族上；然而，对于本文所呈现的结果，这些假设并非必要，因此后文将不再多提可构造集。

若子集 $X \subset \mathbb{R}^d$ 有界（任何有限一维 CW 复形的 C^r-嵌入都是如此），我们就可以将欧拉示性数变换限制为定义在 $S^{d-1} \times [-a, a]$ 上的函数，其中 $a \in \mathbb{R}$ 大于 X 的界（按欧几里得范数计）。对于固定方向 $v \in S^{d-1}$，我们接着将欧拉示性数曲线（ECC）定义为：对每个 $t \in [-a, a]$，$\mathrm{ECC}_{X,\,v}(t) = \mathrm{ECT}_X(v,\ t)$。[27]，中引入的光滑欧拉示性数变换（SECT）定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{SECT}_X : S^{d-1} \times [-a, a] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, t) &\longmapsto \int_{-a}^{t} \mathrm{ECT}_X(v, x) - \overline{\mathrm{ECC}_{X,v}}\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中，$\overline{\mathrm{ECC}_{X,\,v}}$ 是 $\mathrm{ECC}_{X,\,v}$ 在 $[-a, a]$ 上的均值。SECT 包含与 ECT 相同的关于 X 的信息。然而，SECT 属于希尔伯特空间 $\mathcal{L}_2(S^{d-1} \times [-a, a])$，因此更适合应用进一步的统计方法 [30]。

对于 本文余下部分，我们为 ECT（视为定义在 $S^{d-1} \times [-a, a$ 上的函数）赋予]) 范数 orm

$$\|\mathrm{ECT}_X\| := \sup_{v \in S^{d-1}} \int_{-a}^{a} |\mathrm{ECT}_X(v, t)|\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

SECT 的范数以类似方式定义和考察。

定义从拓扑空间到 $\mathbb{R}^d$ 的函数 f 的欧拉示性数变换对我们也很有用。我们定义

$$\begin{aligned} \mathrm{ECT}_f : S^{d-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (v, t) &\longmapsto \chi\big(f^{-1}\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v\rangle \le t\}\big). \end{aligned}$$

注意，若 f 是同胚，则显然 $\mathrm{ECT}_f = \mathrm{ECT}_{\mathrm{im}\, f}$。我们像之前一样为函数的欧拉示性数变换规定范数：将范围限制为有界于 a 的函数，我们令

$$\|\mathrm{ECT}_f\| := \sup_{v \in S^{d-1}} \int_{-a}^{a} |\mathrm{ECT}_f(v, t)|\, \mathrm{d}t.$$

2.2 核方法与高斯过程

高斯过程（GP）是随机函数的一种模型。在定义高斯过程之前，我们先介绍核的概念：

定义 1. 设 X 为集合。X 上的核是一个对称函数 $k\colon X \times X \to \mathbb{R}$，满足对于所有 $x_1, \ldots, x_n \in X$ 以及所有 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j k(x_i, x_j) \ge 0. \tag{3}$$

给定 X的有限子集 $X' = \{x'_1, ..., x'_m\}$和 $X^* = \{x^*_1, ..., x^*_n\}$，我们将 $K(X', X^*)$ 记为其$m \times n$矩阵，其中 i, j项为 $K(X', X^*)_{ij} = k\left(x'_i, x^*_j\right)$；该矩阵称为 k在 X'和 X^*处的格拉姆矩阵 。

对于每个核 k，我们都可以将其与一个再生核希尔伯特空间 (RKHS)关联起来：通过 $\mathcal{H}_0 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{k(\cdot, x) \mid x \in X\}$定义一个在 X 上的函数向量空间，其内积由

$$\langle k(\cdot, x), k(\cdot, y)\rangle := k(x, y). \tag{4}$$

k 的 RKHS 定义为 $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_0$，即 $\mathcal{H}_0$ 的完备化。

注意，方程（3）等价于以下形式的每个格拉姆矩阵 $K(X', X')$ 都是正定的。

定义 2。设 X 为一个集合，$\mu: X \to \mathbb{R}$ 为一个函数，$k: X \times X \to \mathbb{R}$ 为一个核。在 X 上，均值函数为 μ 、核为 k 的高斯过程（GP）定义为随机函数 $f: X \to \mathbb{R}$，使得对于每个有限集合 $X' = \{x'_1, ..., x'_n\} \subseteq X$，我们有

$$\begin{bmatrix} f(x'_1) \\ \vdots \\ f(x'_m) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu(x'_1) \\ \vdots \\ \mu(x'_n) \end{bmatrix}, K\left(X', X'\right)\right). \tag{5}$$

GP 理论可用于根据在点 $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ 处对 f 的含噪观测，估计确定性函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 。最常见的方法是采用高斯过程回归 (GPR)，这是一种非参数贝叶斯方法，将 f 建模为随机函数。使用给定的核 k进行 GPR 时，通常会通过假设来构造先验分布

$$\begin{bmatrix} f(x'_1) \\ \vdots \\ f(x'_m) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, K\left(X', X'\right)\right) \tag{6}$$

对于任意有限子集 $X' \subseteq X$ [23]。假设我们进行 n 次观测，形式为 $y_i = f(x^*_i) + \zeta_i$，其中 $\zeta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 独立同分布，适用于 $i = 1, ..., n$ 和 $\sigma > 0$。重要的是，ζ_i 完全不依赖于 f。于是，根据我们的先验假设，并引入简写 $\mathbf{f}(X') := (f(x_1) ..., f(x_m))^T$ 和 $\boldsymbol{\zeta} := (\zeta_1, ..., \zeta_m)^T$，我们得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(X^*) + \boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{f}(X') \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} K(X^*, X^*) + \sigma^2 I_n & K(X^*, X') \\ K(X', X^*) & K(X', X') \end{bmatrix}\right).$$

因此，将上述关于 $\mathbf{f}$ 的多元正态分布以观测值 $\mathbf{y} := (y_1, ..., y_n)^T$ 为条件，可得 [23]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X')|\mathbf{f}(X^*) + \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(&K(X', X^*)(K(X^*, X^*) + \sigma^2 I_n)^{-1}\mathbf{y}, \\ &K(X', X') - K(X', X^*)(K(X^*, X^*) + \sigma^2 I_n)^{-1}K(X^*, X')). \end{aligned} \tag{7}$$

对于任意有限的 $X' \subseteq X$，上述分布是在给定 X'的情况下，f 的后验分布。在贝叶斯建模中，我们首先用先验分布概括我们对 f 取值的了解：除非获得更多信息，否则我们假设 f 均值为 $\mathbf{0}$，协方差为 K（方程（6））。对于我们获得的 f 的任意（含噪）观测值，我们会更新对 f

通过根据观测值对先验分布进行条件化处理。在输入 X' 处的后验密度可理解为：在给定观测值和建模假设的情况下，我们对某个输出值是 f 在 X'处真实输出的确信程度。

若 $m=1$（即，对于某个 $t\in X$， $X'=\{t\}$），我们将上述条件正态分布的均值记为 $f_n(t)$，方差记为 $v_n(t)$。下文将 $f_n(t)$ 称为 $\hat{f}$（在大小为 n 的集合 X^* 上）的高斯平滑。必要时，我们会通过写作 $f_n(t,X^*,f)$，明确表示 $f_n(t)$ 对 X^* 和 $\hat{f}$ 的依赖关系。由公式（7）可知， f_n 始终属于 k 的再生核希尔伯特空间（RKHS） $\mathcal{H}_k$。

在某些假设下，可以证明 f_n 在均值意义下收敛。本文采用 Koepernik 和 Pfaff [18]，的结果；这些结果给出了在 X 为紧致度量空间时的强概率收敛结论。

我们需要到一个 $n\times n$ 矩阵求逆，因此运行时间为 $\mathcal{O}(n^3)$。因此，在 $\hat{f}_n$ 上使用欧拉示性数变换（ECT），会损失部分 ECT 在运行时间上的优势（与持久同调变换（PHT）和扩展持久同调变换相比）。然而，PHT 的两种版本都需要 $\mathcal{O}(n_s^3)$ 次计算每个方向 [13]，，其中 $n_s\geq n$ 是形状三角剖分中的单形数量；因此，高斯过程与 ECT 结合的流程在运行时间方面仍然占优。更重要的是，通常会采用低秩矩阵近似方法来近似（逆）格拉姆矩阵，例如 Nystroem 方法 [31] 或随机傅里叶特征 [22]。这类方法的运行时间为 $\mathcal{O}(l^3+l^2n)$，其中 $l\ll n$ 是格拉姆矩阵的近似秩，因此速度显著快于 $\mathcal{O}(n^3)$。

3 非随机数据的 ECT 稳定性

3.1 光滑曲线的稳定性

正如我们在引言中所观察到的，仅控制两个不同一维形状之间的接近程度，并不足以控制它们的欧拉曲线变换之间的差异。这促使我们为这类形状定义一种度量，同时考虑长度的扰动。

定义 3. 设 Z 是一个有限一维 CW 复形，具有固定的 CW 结构 $Z^*=(Z,\ Z_0,\ \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。固定 $r\geq 1$。对于 $X,\ Y\in\mathcal{G}^r(Z^*,\ d)$，我们将 $d_{Z^*}(X,\ Y)$ 定义为满足以下条件的所有 ε的下确界：存在 $h_X,\ h_Y\in\mathcal{E}^r(Z^*,\ d)$，其像分别为 X和 Y：

1. 对每个 λ， $h_X\circ\Phi_\lambda$ 和 $h_Y\circ\Phi_\lambda$ 的弧长之差小于或等于 ε 。

2. 对每个 λ， $h_X\circ\Phi_\lambda$ 和 $h_Y\circ\Phi_\lambda$ 都是恒定速度曲线。3. $\|h_X-h_Y\|_\infty\leq\varepsilon$。

利用 Z 的紧致性，不难证明 d_{Z^*} 是 $\mathcal{G}^r(Z^*,\ d)$上的度量。在本文余下部分，我们赋予 $\mathcal{G}^r(Z^*,\ d)$这一度量及其导出的拓扑。本文的一个主要目标是证明，对于 $r\geq 2$，欧拉示性数变换是 $\mathcal{G}^r(Z^*,\ d)$上的连续映射。

定理 4。设 Z 是一个具有固定 *CW* 结构 $Z^*=(Z,Z_0,\{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$的有限一维 *CW* 复形。对于 $r\geq 2$，映射 $X\mapsto$欧拉示性数变换$_X$在 $\mathcal{G}^r(Z^*,d)$ 上连续。

特别地，如果 X 的曲率有界于 M，且 X 中 λ^{th} *1*-胞腔的像的弧长为 L_λ，那么只要 $d_{Z^*}(X,Y)<\varepsilon$，我们就有

$$\|\mathrm{ECT}_X-\mathrm{ECT}_Y\|\leq|Z_0|\varepsilon+\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda(\varepsilon),$$

其中

$$G_\lambda(\varepsilon) := \begin{cases} 8\sqrt{L_\lambda n_\lambda \varepsilon} + n_\lambda \varepsilon & L_\lambda / n_\lambda > 2\varepsilon \\ 11 n_\lambda \varepsilon & L_\lambda / n_\lambda \le 2\varepsilon \end{cases}$$

and

$$n_\lambda := \max\left(\left\lceil \left(\frac{M^2 L_\lambda^3}{24\varepsilon} \right)^{1/3} \right\rceil, \left\lceil \frac{L_\lambda M}{\pi} \right\rceil \right).$$

我们通过以下命题证明该定理；在第4节讨论函数信息时，这一命题很有用。

命题 5。 设 Z 是一个具有固定 *CW* 结构 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 的有限一维 *CW* 复形。设 f, $g \in \mathcal{F}^r(Z^*, d)$，其中 $r \ge 2$，并假设：

1. 对每个 λ，曲线 $f \circ \Phi_\lambda$ 和 $g \circ \Phi_\lambda$ 的弧长相差至多 ε。
2. 对每个 λ，曲线 $f \circ \Phi_\lambda$ 和 $g \circ \Phi_\lambda$ 的速度恒定。
3. $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$。

那么，若 f 的曲率有界于 M，且 $f \circ \Phi_\lambda$ 的弧长为 L_λ，则有

$$\left\| \mathrm{ECT}_f - \mathrm{ECT}_g \right\| \le |Z_0|\varepsilon + \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda(\varepsilon),$$

其中 G_λ 和 n_λ 如上所定义。

该命题的证明思路如下。我们证明，曲线的欧拉示性数变换的范数可以通过其微分性质来控制。利用这一观察，我们可以界定两条近似直线的曲线之间的欧拉示性数变换之差。我们还可以将带有映射 $f : Z \to \mathbb{R}^d$ 的有限一维 CW 复形 Z^* 细分为足够多的部分，使得每个 1-胞腔的像都是一条近似线性的曲线。于是，上述命题可由粘合论证得出。

本文中，我们用 I 表示单位区间 $[0,1]$，并称 $f: I \to \mathbb{R}^d$ 为分段 C^1，若其连续，且存在一族闭区间 T_1、.....、T_k 覆盖 I，并且在这些区间的内部上， f 是 C^1。

命题 6。 设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ 为分段 C^1 映射，其中 X 是 γ的像。任取 $v \in S^{d-1}$。设 a 和 b 分别为 $f: x \mapsto \langle v, \gamma(x)\rangle$ 在 I 上的最小值和最大值。则

$$\int_a^b |\mathrm{ECT}_\gamma(v,t)| \, \mathrm{d}t \le V(f),$$

其中 $V(f)$ 表示 f 的变差：

$$V(f) := \int_0^1 |f'| \, \mathrm{d}t.$$

对于 $t \ge b$，我们有 欧拉示性数变换$\gamma(v,t) = 1$。对于 $t < a$，我们有 欧拉示性数变换$\gamma(v,t) = 0$。特别地，欧拉示性数变换$\gamma(v,t)$ 几乎处处有定义。

证明。最后两个结论源于这样一个事实： I 的欧拉示性数为一，而空集的欧拉示性数为零。现在我们来证明命题的其余部分。

证明的主要目标是确立以下两个等式：

$$\int_a^b |\mathrm{ECT}_\gamma(v,t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left|\pi_0\big[f^{-1}(-\infty,t]\big]\right|\,\mathrm{d}t$$
$$V(f) = \int_a^b \left|\pi_0\big[f^{-1}(t)\big]\right|\,\mathrm{d}t.$$

第一个等式源于单位区间的每个子集都是逐分支可缩的这一事实。因此， I 的任意子集的欧拉示性数都等于其路径连通分支的数量。第二个等式较难证明，其推导构成了证明的大部分内容。两个等式都得到证明后，只需证明右侧的第一个被积函数小于或等于第二个被积函数，即可完成证明。

首先注意到， f 是分段 C^1 的，因为 γ 是。证明中，令 $G(f)$表示 f'有定义且为正的点的集合， $D(f)$表示 f'有定义且为负的点的集合， $C(f)$表示 I 中既不属于 $G(f)$也不属于 $D(f)$的点的集合。由于 f 是分段 C^1的， $G(f)$和$D(f)$都是开集。同时， $C(f)$中除有限多个点外，所有点都满足 $f'(x) = 0$。显然，$G(f)$、 $D(f)$和 $C(f)$将 I划分为若干部分。因此，

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_{G(f)} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D(f)} -f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C(f)} |f'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{G(f)} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D(f)} -f'(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因为在 $C(f)$ 上几乎处处有 $f' = 0$。由于 $G(f)$ 和 $D(f)$ 都是开集，因此它们各自都是 I 中可数个开子区间的并集，分别记为 $\{I_k\}_{k\in\Xi}$ 和 $\{J_l\}_{l\in\Theta}$。在每个 I_k 上，f 都是递增的；在每个 J_l 上， f 都是递减的。因此，我们得到

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_{G(f)} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D(f)} -f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k\in\Xi}\int_{I_k} f'(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{l\in\Theta}\int_{J_l} -f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k\in\Xi}\int_{\mathbb{R}} \left|\pi_0\big[(f|_{I_k})^{-1}(t)\big]\right|\,\mathrm{d}t + \sum_{l\in\Theta}\int_{\mathbb{R}} \left|\pi_0\big[(f|_{J_l})^{-1}(t)\big]\right|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\pi_0\big[(f|_{G(f)})^{-1}(t)\big]\right|\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \left|\pi_0\big[(f|_{D(f)})^{-1}(t)\big]\right|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\pi_0\big[(f|_{G(f)\cup D(f)})^{-1}(t)\big]\right|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

这里，最后一行是基于这样一个事实：如果 x 和 y 具有相同的 f 值，那么在 $G(f)$ 或$D(f)$中的每个点之间，都必定存在一个点取得

f的较小值或较大值。前一行的推理类似。若承认$f(C(f))$是零测集，那么我们便有

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \pi_0 \left[(f|_{G(f)\cup D(f)})^{-1}(t) \right] \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \pi_0 \left[(f|_{G(f)\cup D(f)})^{-1}(t) \right] \right| \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \left| \pi_0 \left[(f|_{C(f)})^{-1}(t) \right] \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \pi_0 \left[f^{-1}(t) \right] \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left| \pi_0 \left[f^{-1}(t) \right] \right| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

这里，倒数第二个等号源于这样一个事实：如果 x 属于 $C(f)$，且 y 属于 $G(f)$ 或 $D(f)$，那么根据 $G(f)$ 和 $D(f)$ 的定义，在 x 与 y 之间存在一点，其 f 值不等于 $f(y)$。特别地，该等式末尾的被积函数几乎处处有限。

现在我们证明 $f(C(f))$ 确实是零测集。由于 f 是分段 C^1，取覆盖 I 的闭区间 T_1、……、T_k，在这些区间的内部，f 是 C^1。考虑 Z_i，即 I_i 的内部中满足 $f' = 0$ 的子集。根据萨德定理（例如参见 [24, 定理 7.2]），$f(Z_i)$ 是零测集。我们有 $C(f)$ 是 $Z_1 \cup \ldots \cup Z_k \cup \partial T_1 \cup \ldots \cup \partial T_k$ 的子集，而 $Z_1 \cup \ldots \cup Z_k \cup \partial T_1 \cup \ldots \cup \partial T_k$ 在 f 下的像是零测集。因此 $f(C(f))$ 是零测集。

因此，只要我们证明对于任意 $t \in [a, b]$，所需结果便可得出，

$$\left| \pi_0 \left[f^{-1}(-\infty, t] \right] \right| \leq \left| \pi_0 \left[f^{-1}(t) \right] \right|.$$

该不等式意味着，对几乎所有 t，$\mathrm{ECT}f(v,\ t)$ 都有定义，因为 $\mathrm{ECT}f(v,\ t)$ 正是该不等式的左侧，它取正值，且被一个对几乎所有 t 都有限的函数所界定。

要证明这一陈述，只需证明 $f^{-1}(-\infty, t]$ 的任一路径连通分支都包含一个 f 值为 t 的点。反设存在 C，它是 $f^{-1}(-\infty, t]$ 的一个路径连通分支，且满足 $f(C) < t$。根据 f 的连续性，C 也必定是 $f^{-1}(-\infty, b]$ 的一个路径连通分支。事实上，设 α 是一条从 C 的补集到 C 的路径。因此，$\alpha^{-1}(C)$ 的每个邻域都必定与 $(f \circ \alpha)^{-1}(t, b]$ 相交。但这与介值定理矛盾。因此，C 是 $I = f^{-1}(-\infty, b]$ 的一个路径连通分支，故为 I。$f(C) < t \leq b$ 这一事实由此与 b 是 f 的最大值这一设定矛盾，证明完毕。

□

备注。假设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ 在 $\mathbb{R}$上连续且相对于某个 o-极小结构可定义。根据 [29, 第 7 章，定理 3.2]，γ 是分段的 C^1，因此上述结果适用。

备注。当 f 是驯良函数时，这一结果可由针对驯良函数的更强结果 [2, 推论 4.6]推出。该命题的主要贡献在于，当 f 不是驯良函数时，所述界仍然成立。

鉴于前面的结果，我们为近似直线的曲线建立一个变差界。

引理 7。假设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ 是一条长度为 L 的分段可微路径，且第一坐标 γ_1 满足 $|\gamma_1(1) - \gamma_1(0)| = L_x$。那么，$\gamma$ 的任意其他坐标函数 γ_n的变差均有界于

$$V(\gamma_n) \leq \sqrt{L^2 - L_x^2}. \tag{8}$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\gamma(0) = 0, \gamma_1(1) = L_x$，并且只需证明该界对 γ_2 成立。

根据 γ，我们可以构造另一个函数 $\bar{\gamma}$，如下所示:

$$\bar{\gamma}(t) := \int_0^t (\gamma_1'(t),\ |\gamma_2'(t)|,\ \gamma_3'(t), \ldots,\ \gamma_d'(t))\ \mathrm{d}t.$$

换句话说， $\bar{\gamma}$ 与 γ 具有相同的坐标函数，只有第二个坐标不同: $\bar{\gamma}_2$ 的导数绝对值与 γ 相同，但始终不减。显然， γ 和 $\bar{\gamma}$ 的长度、 $\gamma_1(1)$ 的值以及第二个坐标的变差相同。因此，只需证明对于满足以下条件的曲线 γ，引理对 γ_2 成立: 长度为 L， $\gamma(0) = 0$， $\gamma_1(1) = L_x$，且对于所有 t, $\gamma_2'(t) \geq 0$。

γ 的长度为 L，这意味着 $\gamma(1)$ 位于以原点为圆心、半径为 L 的闭 d 维圆盘内。 $\gamma_1(x) = L_x$ 这一事实意味着， $\gamma(1)$ 位于第一个坐标为 L_x 的点所构成的超平面上。初等几何表明，圆盘与该超平面的交集为

$$\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^d : y_1 = L_x,\ y_2^2 + \ldots + y_d^2 \leq L^2 - L_x^2\}.$$

容易看出， y_2 在该集合上的最大值为 $\sqrt{L^2 - L_x^2}$。因此， $\gamma_2(1)$ 的上界为此值。于是,

$$V(\gamma_2) = \int_0^1 \left|\gamma_2'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 \gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t = \gamma_2(1) - \gamma_2(0) = \gamma_2(1) \leq \sqrt{L^2 - L_x^2}.$$

□

现在，假设其中一条曲线近似为直线，我们可以对邻近曲线的欧拉示性数变换之间的 L_1 距离给出界。

命题 8. 设 $\alpha : I \to \mathbb{R}^d$ 是分段 C^1 映射，且 $\alpha(0)$ 与 $\alpha(1)$ 之间的距离为L，弧长不超过 $L + \varepsilon$。设 $\beta : I \to \mathbb{R}^d$ 是另一分段 C^1 映射，其弧长不超过 $L + 2\varepsilon$，且其端点与 α 的对应端点之间的距离不超过 ε。那么

$$\left\|\mathrm{ECT}_\alpha - \mathrm{ECT}_\beta\right\| \leq \begin{cases} 8\sqrt{L\varepsilon} & L > 2\varepsilon \\ 10\varepsilon & L \leq 2\varepsilon. \end{cases}$$

证明。 设 v 为任意单位向量， $w = \alpha(1) - \alpha(0)$，且 θ 为 w 与垂直于 v 的超平面之间的角。经过适当旋转 α 和 β 后，不妨设 $v = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$。再经过一次旋转，也可不妨设 w 仅在前两个坐标上非零。

令 f 表示与 v 的内积，并令 a 和 b 分别为 $f \circ \alpha$的最小值和最大值， c 和 d 分别为 $f \circ \beta$的最小值和最大值。在整个证明中，我们用到这样一个事实: 如果 $\mathrm{ECT}_\alpha(v,\ t)$ 和 $\mathrm{ECT}_\beta(v,\ t)$ 都不为零，那么

$$|\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)| \leq \mathrm{ECT}_\alpha(v,t) + \mathrm{ECT}_\beta(v,t) - 2,$$

因为这两个欧拉示性数变换都必须为正（因为区间的子集按连通分支都是可缩的），且大于 1。

首先，假设 $\max(a,c) \le \min(b,d)$。那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t = &\int_{\min(a,c)}^{\max(a,c)} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_{\max(a,c)}^{\min(b,d)} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_{\min(b,d)}^{\max(b,d)} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

另外假设 $b \le d$。那么上述表达式有如下上界：

$$\int_{\min(a,c)}^{\max(a,c)} \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)+\mathrm{ECT}_\beta(v,t)\,\mathrm{d}t+\int_{\max(a,c)}^{b} \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)+\mathrm{ECT}_\beta(v,t)-2\,\mathrm{d}t+\int_{b}^{d} \mathrm{ECT}_\beta(v,t)-1\,\mathrm{d}t,$$

此处我们只需近似中间项。如果进一步假设 $a \le c$，那么我们的上界为

$$\int_a^c \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t) + \mathrm{ECT}_\beta(v,t) - 2\,\mathrm{d}t + \int_b^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t) - 1\,\mathrm{d}t.$$

重新整理，并利用积分的线性性，上式等于

$$\int_c^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)\mathrm{d}t - 2(b-c) - (d-b).$$

对 $a > c$ 和/或 $b > d$ 进行类似分析可知，当 $\max(a,c) \le \min(b,d)$ 时，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \le &\int_c^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t) \\ &- 2|\min(b,d) - \max(a,c)| - |\max(b,d) - \min(b,d)|.\end{aligned} \tag{9}$$

注意　在 $|b-a| = L|\sin\theta|$ 处。根据假设 $\|\alpha(0)-\beta(0)\| \le \varepsilon$，因此 $|a-c| \le \varepsilon$。类似地 $|b-d| \le \varepsilon$。因此，

$$|\min(b,d) - \max(a,c)| \ge L|\sin\theta| - 2\varepsilon$$

根据三角不等式。当然，左边的量也为正，因此

$$|\min(b,d) - \max(a,c)| \ge \max(0, L|\sin\theta| - 2\varepsilon).$$

显然，我们还有 $|\max(b,d) - \min(b,d)| \ge 0$。将这些不等式、命题 6 和引理7 应用于方程（9），可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \le &\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)^2} \\ &+ \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2|\cos^2\theta|} \\ &- 2\max(0, L|\sin\theta| - 2\varepsilon).\end{aligned} \tag{10}$$

在对第一项应用引理 7时，我们利用了 $|\beta_1(1)-\beta_1(0)| \le \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)$。否则，$\max(a,c) \ge \min(b,d)$，因此 $a \le b \le c \le d$ 或 $c \le d \le a \le b$。在这两种情况下，都必有 $L|\sin\theta| \le \varepsilon$。考虑第一种情况。我们注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t = &\int_a^b |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_b^c |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_c^d |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

该量等于

$$\int_a^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c 1\,\mathrm{d}t + \int_c^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t) - 1\,\mathrm{d}t,$$

从上方进行界定，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t &\le \int_a^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t)\,\mathrm{d}t + (c-b) - (d-c) \\ &\le \int_a^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t)\,\mathrm{d}t + (c-b).\end{aligned}$$

对 $c \le d \le a \le b$ 进行类似分析可知，一般而言，如果 $\max(a,c) \le \min(b,d)$，则

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \mathrm{ECT}_\alpha(v,t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d \mathrm{ECT}_\beta(v,t)\,\mathrm{d}t + \min(|c-b|, |d-a|).$$

根据三角不等式，$\min(|c-b|, |d-a|) \le \varepsilon - L\sin\theta$。再次应用命题 6 和引理 7，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t \le &\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)^2} \\ &+ \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2|\cos^2\theta|} \\ &+ \max(0, \varepsilon - L|\sin\theta|).\end{aligned}$$

总之，只要 $\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t$，其上界为

$$\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2|\cos^2\theta|} - 2\max(0, L|\sin\theta| - 2\varepsilon)$$

当 $L|\sin\theta| \ge \varepsilon$ 时。否则，要么仍有 $\max(a,c) \le \min(b,d)$，上述界仍然成立；要么 $\max(a,c) \ge \min(b,d)$，此时我们得到的界为

$$\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2|\cos^2\theta|} + \max(0, \varepsilon - L|\sin\theta|).$$

因此，一般而言，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{ECT}_\alpha(v,t) - \mathrm{ECT}_\beta(v,t)|\,\mathrm{d}t = &\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)^2} \\ &+ \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2|\cos^2\theta|} \\ &- 2\max(0, L|\sin\theta| - 2\varepsilon) + \max(0, \varepsilon - L|\sin\theta|).\end{aligned}$$

只要证明以下繁琐的引理，证明便告完成。 □

引理 9. 函数

$$f(\theta) = \sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L|\cos\theta| - 2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2|\cos^2\theta|} \\ - 2\max(0, L|\sin\theta| - 2\varepsilon) + \max(0, \varepsilon - L|\sin\theta|)$$

有上界

$$f(\theta) \le \begin{cases} 8\sqrt{L\varepsilon} & L > 2\varepsilon \\ 10\varepsilon & L \le 2\varepsilon. \end{cases}$$

证明。 由于正弦函数和余弦函数的对称性，以及 f 公式中出现的绝对值，我们有 $f(-\theta) = f(\theta)$, 且 $f(\pi/2 - \theta) = f(\theta)$。因此， $f(\theta) = f(\pi/2 + \theta)$。所以，只需在区间 $[0, \pi/2]$ 上对 f 给出上界。在此区间上，我们可以去掉 f 公式中的绝对值，得到

$$f(\theta) = \sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L\cos\theta - 2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2\cos^2\theta} \\ - 2\max(0, L\sin\theta - 2\varepsilon) + \max(0, \varepsilon - L\sin\theta).$$

除有限个 θ 值外， f 的导数存在且等于 t o

$$\mathbb{I}(L\cos\theta > 2\varepsilon)\frac{L\sin\theta(L\cos\theta - 2\varepsilon)}{\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - (L\cos\theta - 2\varepsilon)^2}} + \frac{L^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2\cos^2\theta}} \\ -\mathbb{I}(L\sin\theta > 2\varepsilon)2L\cos(\theta) - \mathbb{I}(L\sin\theta < \varepsilon)L\cos\theta,$$

其中 $\mathbb{I}$ 表示示性函数。

注意,

$$\frac{L^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2\cos^2\theta}} \le \frac{L^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{L^2 - L^2\cos^2\theta}} = L\cos\theta,$$

类似地

$$\frac{L\sin\theta(L\cos\theta - 2\varepsilon)}{\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - (L\cos\theta - 2\varepsilon)^2}} \le \frac{L^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{L^2 - L^2\cos^2\theta}} = L\cos\theta.$$

利用这些恒等式，我们得到

$$f'(\theta) \le \mathbb{I}(L\cos\theta > 2\varepsilon)L\cos\theta + L\cos\theta - \mathbb{I}(L\sin\theta > 2\varepsilon)2L\cos(\theta) - \mathbb{I}(L\sin\theta < \varepsilon)L\cos\theta.$$

因此，当 $L\sin\theta > 2\varepsilon$ 时， f 单调不增。当 $\varepsilon < L\sin\theta < 2\varepsilon$ 时， f' 中每个非零项均为正，因此 f 递增。现在，当 $L\sin\theta < \varepsilon$ 时，我们对 f' 的绝对值进行估计。在这种情况下,

$$\begin{aligned} |f'(\theta)| &\le \mathbb{I}(L\cos\theta > 2\varepsilon)\frac{L\sin\theta(L\cos\theta - 2\varepsilon)}{\sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - (L\cos\theta - 2\varepsilon)^2}} + \frac{L^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2\cos^2\theta}} + L\cos\theta \\ &\le 3L\cos\theta \\ &\le 3L, \end{aligned}$$

使用我们此前对第一项和第二项的近似。

此外，如果 $L > 2\varepsilon$,

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L-2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2} - \varepsilon \\ &= \sqrt{8L\varepsilon} + \sqrt{2L\varepsilon + \varepsilon^2} - \varepsilon \\ &\le (\sqrt{8} + \sqrt{3})\sqrt{L\varepsilon} - \varepsilon. \end{aligned}$$

否则 $L \le 2\varepsilon$ 并且,

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, L-2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2} - \varepsilon \\ &= L + 2\varepsilon + \sqrt{2L\varepsilon + \varepsilon^2} - \varepsilon \\ &= L + \varepsilon + \sqrt{2L\varepsilon + \varepsilon^2} \\ &\le (3 + \sqrt{5})\varepsilon. \end{aligned}$$

因此，我们可以通过使用 $f(0)$ 和 $|f'(\theta)|$ 在区间 $[0, \sin^{-1}(\varepsilon/L)]$（或者，当 $\varepsilon > L$ 时，使用 $[0, \pi/2]$）上的上界，来得到 θ 上 $f(\theta)$ 的界。此外，利用对正 x 成立的不等式 $\sin^{-1}(x) \le \pi x/2$，可得当 $L\sin\theta \le \varepsilon$ 时,

$$\begin{aligned} f(\theta) &\le \begin{cases} (\sqrt{8} + \sqrt{3})\sqrt{L\varepsilon} + (3\pi/2 - 1)\varepsilon & L > 2\varepsilon \\ (3 + \sqrt{5} + 3\pi/2)\varepsilon & \varepsilon \le L \le 2\varepsilon \\ (3 + \sqrt{5})\varepsilon + (3\pi/2)L & L < \varepsilon \end{cases} \\ &\le \begin{cases} (\sqrt{8} + \sqrt{3})\sqrt{L\varepsilon} + (3\pi/2 - 1)\varepsilon & L > 2\varepsilon \\ (3 + \sqrt{5} + 3\pi/2)\varepsilon & L \le 2\varepsilon \end{cases} \\ &\le \begin{cases} (\sqrt{8} + \sqrt{3} + (3\pi/4 - 1/2)\sqrt{2})\sqrt{L\varepsilon} & L > 2\varepsilon \\ (3 + \sqrt{5} + 3\pi/2)\varepsilon & L \le 2\varepsilon \end{cases} \\ &\le \begin{cases} 8\sqrt{L\varepsilon} & L > 2\varepsilon \\ 10\varepsilon & L \le 2\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

否则，我们知道 f 在 $L\sin\theta > 2\varepsilon$ 之前单调不减，此后单调不增。因此，如果 f 没有在 $L\sin\theta \le \varepsilon$ 处取得最大值，它就必定在 $L\sin\theta = 2\varepsilon$ 处取得最大值，或者等价地，在 $\theta = \sin^{-1}(2\varepsilon/L)$ 处取得最大值。注意，这意味着 $2\varepsilon \le L$。我们计算

$$\begin{aligned} f(\sin^{-1}(2\varepsilon/L)) &= \sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, \sqrt{L^2 - 4\varepsilon^2} - 2\varepsilon)^2} + \sqrt{(L+\varepsilon)^2 - L^2 - 4\varepsilon^2} \\ &= \sqrt{(L+2\varepsilon)^2 - \max(0, \sqrt{L^2 - 4\varepsilon^2} - 2\varepsilon)^2} + \sqrt{2L\varepsilon - 3\varepsilon^2} \\ &= \begin{cases} \sqrt{4L\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{L^2 - 4\varepsilon^2}} + \sqrt{2L\varepsilon - 3\varepsilon^2} & L > 2\sqrt{2}\varepsilon \\ L + 2\varepsilon + \sqrt{2L\varepsilon - 3\varepsilon^2} & 2\varepsilon \le L \le 2\sqrt{2}\varepsilon \end{cases} \\ &\le \begin{cases} \sqrt{6L\varepsilon + 4\varepsilon^2} + \sqrt{2L\varepsilon} & L > 2\sqrt{2}\varepsilon \\ (2 + 2\sqrt{2})\varepsilon + \sqrt{2L\varepsilon} & 2\varepsilon \le L \le 2\sqrt{2}\varepsilon \end{cases} \\ &\le \begin{cases} (\sqrt{6 + \sqrt{2}} + \sqrt{2})\sqrt{L\varepsilon} & L > 2\sqrt{2}\varepsilon \\ (2 + 2\sqrt{2})\sqrt{L\varepsilon} & 2\varepsilon \le L \le 2\sqrt{2}\varepsilon \end{cases} \\ &\le 5\sqrt{L\varepsilon}. \end{aligned}$$

因此，为了 要在区间 $[0,\pi/2]$ 上完全界定 $f(\theta)$，我们只需使用之前得到的界，即

$$f(\theta) \le \begin{cases} 8\sqrt{L\varepsilon} & L > 2\varepsilon \\ 10\varepsilon & L \le 2\varepsilon. \end{cases}$$

□

以下命题旨在给出一条曲线短线段的弦长下界，前提是该曲线的曲率有界。

命题 10. 设 $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^d$ 是一条以弧长为参数的二次可微曲线，其曲率 κ 的范数不超过 M。设 $0 < \varepsilon < \pi/M$。则对于任意 $t \in [0, L-\varepsilon]$,

$$\varepsilon \ge \|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|_2 \ge \frac{2}{M}\sin\left(\frac{M}{2}\varepsilon\right).$$

特别是,

$$\|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|_2 \ge \varepsilon - \frac{M^2}{24}\varepsilon^3.$$

为证明这一点，我们将用到 Schwarz 的以下定理，引自 [5]:

定理 11 (Schwarz)**.** 设 C 是连接给定两点 A 和 B 的一条圆弧，其曲率为 $\kappa(s) \le 1/R$，且满足 $R \ge \frac{1}{2}\delta$，其中 δ 是 A 与 B 之间的距离。设 S 是一条经过 A 和 B、半径为 R 的圆。那么， C 的长度要么小于或等于 S 上较短的圆弧 AB ，要么大于或等于较长的圆弧 AB 。

命题 *10* 的证明。 第一个不等式显然成立，因为 γ 是按弧长参数化的。现在固定 t。对于第二个不等式，考虑如下优化问题：在约束条件 $\|\alpha(t+\varepsilon) - \alpha(t)\|_2$和 $\|\alpha'\|_2 = 1$ 成立的条件下，使 $\|\alpha''\|_2 \le M$最小。考虑曲率为 ε 、半径为 M的圆上的一段长度为 $1/M$的圆弧。初等几何表明，这段圆弧的端点间距离为 $\frac{2}{M}\sin(M\varepsilon/2)$。我们声称这段圆弧给出了最优解。事实上，设 γ 是任意一条在以下意义上至少与这段圆弧同样优的曲线:

$$\|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|_2 \le \frac{2}{M}\sin\left(\frac{M}{2}\varepsilon\right),$$

其中 $\|\gamma'\|_2 = 1$, $\|\gamma''\|_2 \le M$。

设 S 是一个半径为 $1/M$ 的圆，且同时与 $\gamma(t)$ 和 $\gamma(t+\varepsilon)$ 相交。这样的圆必定存在，因为$\|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|_2 \le 2/M$。曲线 γ在区间 $[t, t+\varepsilon]$ 上的长度为 $\varepsilon < \pi/M$，而圆 S 上连接 $\gamma(t)$ 和 $\gamma(t+\varepsilon)$ 的较长圆弧长度大于 π/M。因此，根据 Schwarz 定理， ε 小于或等于圆 S 上从 $\gamma(t)$ 到 $\gamma(t+\varepsilon)$ 的较短圆弧的长度。若该不等式为严格不等式，我们可以取一段长度为 ε的更短圆弧，其端点间的距离也更短。这证明，在半径为 $1/M$的圆上，长度为 ε 的圆弧是该优化问题的最优解。

因此，对于可能并非最优的 γ，我们有

$$\|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|_2 \ge \frac{2}{M}\sin\left(\frac{M}{2}\varepsilon\right).$$

对于该命题的最后一条陈述，根据拉格朗日余项定理

$$\sin x - x + x^3/6 = \int_0^x \cos t \frac{(x-t)^5}{5!}\,\mathrm{d}t.$$

只要 $0 < x \le \pi/2$，右侧显然为正。由于 $0 < \frac{M}{2}\varepsilon < \pi/2$，我们有 —

$$\frac{2}{M}\sin\left(\frac{M}{2}\varepsilon\right) \ge \frac{2}{M}\left[\frac{M}{2}\varepsilon - \frac{M^3}{48}\varepsilon^3\right] = \varepsilon - \frac{M^2}{24}\varepsilon^3.$$

□

现在，我们利用此前关于近似直线的曲线所得的结果，为更一般形状的欧拉示性数变换建立一个稳定性结果。为此，我们证明一个引理，该引理允许我们将定义域不同区域上函数的欧拉示性数变换粘合起来。

定义 12. 设 $V^* = (V,\ V_0,\ \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_V})$ 和 $W^* = (W,\ W_0,\ \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_W})$ 是有限一维 CW 复形，且各自具有固定的 CW 结构。假设存在映射 $f_V \in \mathcal{F}^r(V^*,\ d)$ 和 $f_W \in \mathcal{F}^r(W^*,\ d)$、子集 $S \subseteq V_0$ 以及单射 $m\colon S \to W_0$，使得 $f_V = f_W \circ m$ 在 S 上成立。我们将 V^* 和 W^* 在 m 下的粘合定义为具有如下结构的有限复形：

$$Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_Z}) := \big((V \sqcup W)/m,\ (V_0 \sqcup W_0)/m,\ \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_V\sqcup\Lambda_W}\big).$$

我们将 f_V 和 f_W 在 m 下的粘合定义为映射 $f_Z\colon Z \to \mathbb{R}^d$，它在 V 上限制为 f_V，并且是 W 的 f_W。此映射定义良好（因为 S 上的 $f_V = f_W \circ m$），且属于 $\mathcal{F}^r(Z^*,\ d)$。

引理 13。 使用前一个定义中的记号，假设对任意固定的 v，几乎所有 t 都使 欧拉示性数变换$f_V(v,t)$ 和 欧拉示性数变换$f_W(v,t)$有定义。那么

$$\mathrm{ECT}_{f_Z}(v,t) = \mathrm{ECT}_{f_V}(v,t) + \mathrm{ECT}_{f_W}(v,t) - \mathrm{ECT}_{f_S}(v,t) \tag{11}$$

当 v 固定时，对几乎所有 t，其中 f_S 是 f_V 在 S上的限制。

证明。固定一个单位向量 v，使其属于 $\mathbb{R}^d$。设 S的点为 p_1、.....、p_k。我们用 $V(v,\ t)$ 表示满足 $\langle v, f_V(x)\rangle \le t$ 的 V 中的点所构成的子集 x。我们类似地定义 $W(v,\ t)$ 和 $Z(v,\ t)$。我们用 $S(v,\ t)$ 表示 S 与 $V(v,\ t)$ 的交集。

通过将 V 和 W 包含映射到 Z中，我们可以将 Z 视为 V 与 W的并集，其中 V 和W在 S 处于 Z中相交。类似地，我们可以将 $Z(v,t)$视为 $V(v,t)$与 $W(v,t)$的并集，这两个子集在 $S(v,t)$ 处相交。对于几乎所有的 $t \in \mathbb{R}$，$v \cdot f_V(p_i) \neq t$ 对所有 i都成立。固定任意一个这样的 t。因此，由于 f_V 和 f_W的连续性，$V(v,t)$和 $W(v,t)$的内部覆盖了它们的交集 $S(v,t)$。所以，我们得到一个同调群的 Mayer–Vietoris 正合序列[17,p. 149]:

$$\ldots \to H_i\big(S(v,t)\big) \to H_i\big(V(v,t)\big) \oplus H_i\big(W(v,t)\big) \to H_i\big(Z(v,t)\big) \to \ldots.$$

A 常规论证继而推导出该恒等式 ity

$$\chi\big(Z(v,t)\big) = \chi\big(V(v,t)\big) + \chi\big(W(v,t)\big) - \chi\big(S(v,t)\big),$$

只要右侧所有欧拉示性数都有定义即可。对于几乎所有的 t，这一条件都成立，这也是方程（11）中恒等式的另一种写法。 □

现在我们已具备证明命题5.

命题 5 的证明。 设 $\alpha_\lambda := f \circ \Phi_\lambda$ 且 $\beta_\lambda := g \circ \Phi_\lambda$。由于指标集 Λ 是有限的，我们令$\Lambda = \{1, \ldots, k\}$。定义 $Z^0 := Z_0$，并递归地定义 $Z^\lambda = Z^{\lambda-1} \cup \mathrm{im}\ \Phi_\lambda$，其中 $\lambda \in \Lambda$。接着令$f_\lambda = f|_{Z^\lambda}$ 且 $g_\lambda = g|_{Z^\lambda}$。

归纳地，假设

$$\left\|\mathrm{ECT}_{f_{\lambda-1}} - \mathrm{ECT}_{g_{\lambda-1}}\right\| \le |Z_0|\varepsilon + \sum_{k=1}^{\lambda-1} G_k(\varepsilon).$$

事实上，作为基础情形，很容易看出

$$\left\|\mathrm{ECT}_{f_0} - \mathrm{ECT}_{g_0}\right\| \le |Z_0|\varepsilon.$$

我们可以通过限制 α_λ将其分成 n段$\alpha_{\lambda,\,i} : [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \to \mathbb{R}^d$。类似地，我们可以将 β_λ分成曲线$\beta_{\lambda,\,i}$。根据命题10，每个$\alpha_{\lambda,\,i}$的弧长至多比其端点之间的距离 $M^2L_\lambda^3/24n^3$大，若 $n > L_\lambda M/\pi$。现在应用命题8。因此，只要

$$\frac{M^2L_\lambda^3}{24n^3} \le \varepsilon, \text{ or equivalently, } n \ge \left(\frac{M^2L_\lambda^3}{24\varepsilon}\right)^{1/3},$$

我们观察到

$$\left\|\mathrm{ECT}_{\alpha_{\lambda,i}} - \mathrm{ECT}_{\beta_{\lambda,i}}\right\| \le \begin{cases} 8\sqrt{L_\lambda\varepsilon/n} & L_\lambda/n > 2\varepsilon \\ 10\varepsilon & L_\lambda/n \le 2\varepsilon. \end{cases}$$

设 $m_\lambda \in \{1, 2\}$ 为 Z_0的像中 0-胞腔（即 Φ_λ的元素）的数量。反复应用引理13 可得

$$\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda}(v,t) = (m_\lambda - 2)\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda(0)}(v,t) + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ECT}_{\alpha_{\lambda,i}}(v,t) - \sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{ECT}_{\alpha_{\lambda,i}(i/n)}(v,t),$$

对于几乎所有的 t，当 v 固定时都成立。通过同样的论证，$\mathrm{ECT}_{\beta_\lambda}$也满足类似的等式。因此，根据三角不等式，我们推得 $\|\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda} - \mathrm{ECT}_{\beta_\lambda}\|$ 有如下上界：

$$\begin{aligned}(m_\lambda - 2)\left\|\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda(0)} - \mathrm{ECT}_{\beta_\lambda(0)}\right\| + \sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{ECT}_{\alpha_{\lambda,i}} - \mathrm{ECT}_{\beta_{\lambda,i}}\right\| + \sum_{i=1}^{n-1}\left\|\mathrm{ECT}_{\alpha_{\lambda,i}(i/n)} - \mathrm{ECT}_{\beta_{\lambda,i}(i/n)}\right\| \\ \le \begin{cases} 8\sqrt{L_\lambda n\varepsilon} + (n + m_\lambda - 3)\varepsilon & L_\lambda/n > 2\varepsilon \\ (11n + m_\lambda - 3)\varepsilon & L_\lambda/n \le 2\varepsilon. \end{cases}\end{aligned}$$

特别地，当我们令

$$n = n_\lambda := \max\left(\left\lceil\left(\frac{M^2L_\lambda^3}{24\varepsilon}\right)^{1/3}\right\rceil, \left\lceil\frac{L_\lambda M}{\pi}\right\rceil\right).$$

再次应用引理 13，可得

$$\mathrm{ECT}_{f_\lambda}(v,t) = \mathrm{ECT}_{f_{\lambda-1}}(v,t) + \mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda}(v,t) - \mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda(0)}(v,t) - (m_\lambda - 1)\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda(1)}(v,t),$$

对于几乎所有的 t （固定 v 时）。这里，$\delta_{\lambda,\,0}$ 在 $\Phi_\lambda(0) \in S$ 时取值为 1，否则为 0。$\delta_{\lambda,\,1}$ 的值以类似方式针对 $\Phi_\lambda(1)$ 定义。类似地，涉及 g_λ、$g_{\lambda-1}$ 和 β_λ 的方程也成立。

像之前一样应用三角不等式，并结合我们对 $\|\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda} - \mathrm{ECT}_{\beta_\lambda}\|$ 的界，可得

$$\left\|\mathrm{ECT}_{f_\lambda} - \mathrm{ECT}_{g_\lambda}\right\| \leq \left\|\mathrm{ECT}_{f_{\lambda-1}} - \mathrm{ECT}_{g_{\lambda-1}}\right\| + \left\|\mathrm{ECT}_{\alpha_\lambda} - \mathrm{ECT}_{\beta_\lambda}\right\| + (2 - m_\lambda)\varepsilon.$$

最后两项的和为 $G_\lambda(\varepsilon) - \varepsilon$，因此特别地，我们得到以下界

$$\left\|\mathrm{ECT}_{f_\lambda} - \mathrm{ECT}_{g_\lambda}\right\| \leq |Z_0|\varepsilon + \sum_{k=1}^{\lambda} G_k(\varepsilon).$$

由此通过归纳法证明该命题。 □

由命题5可轻易推出定理 4 。

定理 4 的证明。固定某个 $X, Y \in \mathcal{G}^r(Z^*, d)$，并假设 $d_{Z^*}(X, Y) < \varepsilon$。因此，我们可以选取 h_X, $h_Y \in \mathcal{E}^r(Z^*, d)$，使其满足定义 3 中给出的性质。假设 X 在 Z^* 下的曲率有界于 M。由此可知，h_X 的曲率也有界于 M。由命题 5 可得

$$\|\mathrm{ECT}_{h_X} - \mathrm{ECT}_{h_Y}\| \leq |Z_0|\varepsilon + \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda(\varepsilon),$$

但由于 h_X 和 h_Y 是同胚，$\mathrm{ECT}_X = \mathrm{ECT}_{h_X}$ 且 $\mathrm{ECT}_Y = \mathrm{ECT}_{h_Y}$。定理的第二个结论随即得证。

对于第一个陈述，注意到每个 $X \in \mathcal{G}^r(Z^*, d)$ 的曲率都有上界 M，并且$G_\lambda(\varepsilon) \to 0$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$ 都成立，其中 $\varepsilon \to 0$。 □

3.2 分段线性插值的稳定性

若给定 $X \subseteq \mathbb{R}^d$，它是某个一维 CW 复形 Z 上同胚 h 的 C^2-像，则精确计算 ECT_X 可能并不容易。本节的主要目标是说明，可以利用 Z 的一个稠密子集来近似 $\mathrm{ECT}_h = \mathrm{ECT}_X$。首先，我们明确为正确估计 ECT_h 所需的稠密子集的类型。

定义 14。设 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ 是一个连通有限一维 CW 复形，带有某个固定的胞腔分解，并且 f 是一个相容映射 $f\colon Z \to \mathbb{R}^d$。若满足以下条件，则称 $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq Z$ 是 Z^* 的 相容子集：

1. $Z_0 \subseteq A$ 以及
2. $A - Z_0$ 在 Z的每个1-胞腔中都包含一个点。

这些条件确保 $Z - A$ 是互不相交的开区间的并集。此外，如果这些区间在 f 下的像的长度均小于 ε，则称 A 是 f的一个 ε-稠密子集。如果 Z 的一个无限子集包含对所有正 ε都成立的 ε-稠密子集，则称该子集对 f 相容且稠密。

定义15。设 f如前一个定义所述，且 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是 Z^*的一个相容子集。令 a_{ij} 表示从 a_i 到 a_j的线段。我们定义一个多重集 E，其元素取自 $\{1, \ldots, n\}$中的无序对集合。对于 $Z - A$ 中每条端点为 a_i 和 a_j的开曲线，E都包含一个 (i, j)。我们定义

$$\mathrm{ECT}_f^A(v,t) = \#\{1 \le i \le n : \langle f(a_i), v\rangle \le t\} - \#\{(i,j) \in E : \max(\langle f(a_i), v\rangle, \langle f(a_j), v\rangle) \le t\}.$$

本节的主定理指出，我们可以使用稠密子集来近似一维 CW 复形的欧拉示性数变换：

定理 16. 设 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 是一个连通有限一维 *CW* 复形，配备某个固定的胞腔分解，且 f 是一个 C^2 映射 $f : Z \to X \subseteq \mathbb{R}^d$。假设 f 的曲率有界于 M，并令 A 为 Z的一个 ε-稠密子集，其中 $0 < \varepsilon < \pi/M$。令 L 为 Z 的 *1*-胞腔在 f下的像的弧长之和。那么

$$\left\|\mathrm{ECT}_f - \mathrm{ECT}_f^A\right\| \le \frac{1}{\sqrt{12}} ML\varepsilon.$$

在实践中，定理 16 意味着，可以通过稠密子集近似计算一维 CW 复形上函数的欧拉示性数变换。该定理的证明与定理4的证明类似，但还需要两个额外的引理。

引理 17. 使用定义 *15*中的记号，令 $b_i := f(a_i)$，并令 b_{ij} 表示从b_i 到 b_j的线段，并令 c_i 表示 E 中包含 i的数对数量。那么

$$\mathrm{ECT}_f^A = \sum_{(i,j)\in E} \mathrm{ECT}_{b_{ij}} - \sum_{i=1}^{n} (c_i - 1)\mathrm{ECT}_{b_i}.$$

证明。固定一些 v和 t。如果 $\max(\langle b_i, v\rangle, \langle b_j, v\rangle) \le t$，那么 $\mathrm{ECT}^{b_{ij}}(v, t) = \chi(b_{ij}) = 1$。反之，如果 $\min(\langle b_i, v\rangle, \langle b_j, v\rangle) > t$，那么 $\mathrm{ECT}^{b_{ij}}(v, t) = \chi(\emptyset) = 0$。否则，不失一般性，假设 $\langle b_i, v\rangle \le t$ 和 $\langle b_j, v\rangle > t$。同样，我们有 $\mathrm{ECT}_{b_{ij}(v,\ t)}$ 等于一条线段的欧拉示性数，即 1。

定义这些子多重集

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{up}} &= \{(i,j) \in E : \min(\langle b_i, v\rangle, \langle b_j, v\rangle) > t\},\\
E_{\mathrm{down}} &= \{(i,j) \in E : \max(\langle b_i, v\rangle, \langle b_j, v\rangle) \le t\},\\
E_{\mathrm{mid}} &= \{(i,j) \in E : \max(\langle b_i, v\rangle, \langle b_j, v\rangle) > t,\ \min(\langle b_i, v\rangle, \langle b_j, v\rangle) \le t\}.
\end{aligned}$$

注意 $E = E_{\text{up}} \sqcup E_{\text{down}} \sqcup E_{\text{mid}}$。因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in E} \mathrm{ECT}_{b_{ij}}(v,t) - \sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) \\
&= \sum_{(i,j)\in E_{\text{up}}} \mathrm{ECT}_{b_{ij}}(v,t) + \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} \mathrm{ECT}_{b_{ij}}(v,t) \\
&\qquad + \sum_{(i,j)\in E_{\text{mid}}} \mathrm{ECT}_{b_{ij}}(v,t) - \sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) \\
&= \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} 1 + \sum_{(i,j)\in E_{\text{mid}}} 1 - \sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) \\
&= \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} (2-1) + \sum_{(i,j)\in E_{\text{mid}}} 1 - \sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) \\
&= \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} 2 + \sum_{(i,j)\in E_{\text{mid}}} 1 - \sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) - \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) - \sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) - \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) - \sum_{(i,j)\in E_{\text{down}}} 1 = \mathrm{ECT}_f^A(v,t).
\end{aligned}$$

□

引理 18. 设 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是任意一个导数递增且为正的可微函数，满足 $f(0) = 0$。对于正数 L 和 ε，考虑集合

$$S(L) = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq x_i \leq \varepsilon,\ \sum_{i=0}^{k} x_i = L \right\}.$$

若 $S(L)$ 非空，则

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \leq Lf(\varepsilon)/\varepsilon$$

在 $S(L)$ 上（注意，如果 $k > L/\varepsilon$，则 $S(L)$ 总是非空）。

证明。设 $a \leq c$ 和 $b \geq 0$。我们有

$$f(b+c) - f(a+b) - \big(f(c) - f(a)\big) = \int_a^c f'(b+t) - f'(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$$

因此

$$f(a+b) + f(c) \leq f(a) + f(b+c) \quad \text{when} \quad a \leq c \text{ and } b \geq 0. \tag{12}$$

假设 $S(L)$ 非空。由于 $S(L)$ 是紧致的， f 必须在 $S(L)$ 上取得最大值。任取这样一个最大值点 $x=(x_1, \ldots\ldots, x_k) \in S(L)$。通过可能的重新排列各项，我们可以假设 x_i 按递减顺序排列，而不影响 $\sum_i f(x_i)$ 的值。令 j 为满足 $x_j \neq \varepsilon$ 的最小指标，令 l 为满足 x_l 不等于零的最大指标。

若 $l > j$，令 $m = \min(x_l, \varepsilon - x_j)$。方程（12）表明，若将 x_j 替换为 $x_j + m$，并将 x_l 替换为 $x_l - m$，则 $\sum_i f(x_i)$ 的值不会减小。因此，通过多次应用这一替换过程，我们总能在 $S(L)$ 上找到 $\sum_i f(x_i)$ 的一个最大化者，使得$j \geq l$。这一条件迫使 $\sum_i f(x_i)$ 的值为

$$\lfloor L/\varepsilon \rfloor f(\varepsilon) + f\big(L - \lfloor L/\varepsilon \rfloor \varepsilon\big).$$

若 L 可被 ε整除，结论显然成立。否则，由于 f 是凸的，

$$\begin{aligned} f(L - \lfloor L/\varepsilon \rfloor \varepsilon) &= f\Big(\big(\lceil L/\varepsilon \rceil - L/\varepsilon\big)0 + \big(L/\varepsilon - \lfloor L/\varepsilon \rfloor\big)\varepsilon\Big) \\ &\leq \big(\lceil L/\varepsilon \rceil - L/\varepsilon\big) f(0) + \big(L/\varepsilon - \lfloor L/\varepsilon \rfloor\big) f(\varepsilon) \\ &= \big(L/\varepsilon - \lfloor L/\varepsilon \rfloor\big) f(\varepsilon). \end{aligned}$$

Thus

$$\lfloor L/\varepsilon \rfloor f(\varepsilon) + f\big(L - \lfloor L/\varepsilon \rfloor \varepsilon\big) \leq \lfloor L/\varepsilon \rfloor f(\varepsilon) + \big(L/\varepsilon - \lfloor L/\varepsilon \rfloor\big) f(\varepsilon) = L f(\varepsilon)/\varepsilon.$$

由于左边的值是 $\sum_i f(x_i)$ 在 $S(L)$ 上的最大值，结论得证。 □

定理 16 的证明。对于每个 $e=(i,j) \in E$，令 $b_e = b_{ij}$。每个 $e \in E$ 都对应于 $Z - A$中的某个开区间。我们总能在 Z上固定一个更细的 CW 结构 $Z^\dagger = (Z, A, \{\Phi_e\}_{e \in E})$，同时仍有 $f \in \mathcal{F}^r(Z^\dagger, d)$。令 $\gamma_e = f \circ \Phi_e$。采用引理 17 的记号，对 E 中元素的个数进行归纳，并对 $Z^\dagger$ 应用引理 13，可得对于固定的 v,

$$\mathrm{ECT}_f(v,t) = \sum_{e \in E} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \sum_{i=1}^{n} (c_i - 1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t),$$

对于几乎所有 t。

因此，再次固定 v 并使用引理 17,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \big|\mathrm{ECT}_f(v,t) - \mathrm{ECT}_f^A(v,t)\big| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{e \in E} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \sum_{i=1}^{n} (c_i - 1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) - \Big[\sum_{e \in E} \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t) - \sum_{i=1}^{n} (c_i - 1)\mathrm{ECT}_{b_i}(v,t) \Big] \Big| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{e \in E} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \sum_{e \in E} \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t) \Big| \, \mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{e \in E} \int_{\mathbb{R}} \big| \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t) \big| \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{13}$$

聚焦于任意特定的 $e=(i,j) \in E$，令 d_1 为 $\langle \gamma_e(s), v \rangle$ 在 s上的最小值，令 d_4 为同一函数在 s上的最大值。令 $d_2 = \min(\langle b_i, v \rangle, \langle b_j, v \rangle)$ 和 $d_3 = \max(\langle b_i, v \rangle, \langle b_j, v \rangle)$。由此可得 $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$。

由于 I 和 b_e 的子集始终由可缩分支构成，ECT^{γ_e} 和 ECT^{b_e} 的值始终非负。我们有

$$\begin{aligned}
t \geq d_1 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) \geq 1,\\
t \geq d_4 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) = 1,\\
t < d_1 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) = 0,\\
t \geq d_2 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t) = 1,\\
t < d_2 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t) = 0.
\end{aligned}$$

综合这些观测值，我们可知

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t)\right| \,\mathrm{d}t &= \int_{d_1}^{d_4} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t)\,\mathrm{d}t\\
&\leq \int_{d_1}^{d_4} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t)\,\mathrm{d}t - (d_3 - d_2).
\end{aligned}$$

经过旋转后，我们可以假设 $v = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$。再绕 v 进行一次旋转后，我们可以假设 b_e 平行于由前两个坐标张成的平面。设 l_e为 γ_e的弧长。根据命题 10， b_e 的长度至少为 $l_e - M^2 l_e^3/24$。设线段 b_e 与垂直于 v 的超平面相交，交角为 $\theta \in [0, \pi/2]$。

将命题6和引理 7 应用于这一情形，可得

$$\int_{d_1}^{d_4} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t)\,\mathrm{d}t - (d_3 - d_2) \leq \sqrt{l_e^2 - \left(l_e - \frac{M^2}{24} l_e^3\right)^2 \cos^2\theta} - \left(l_e - \frac{M^2}{24} l_e^3\right)\sin\theta.$$

我们将此不等式的右侧记为 $f(\theta)$。设 $G = l_e - M^2 l_e^3/24$。 G为正，因为$l_e < \varepsilon < \pi/M < \sqrt{24}/M$。我们有

$$f'(\theta) = \frac{G^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l_e^2 - G^2\cos^2\theta}} - G\cos\theta.$$

经过常规计算可知，只有当 $\theta = \pi/2$ 时， f' 才为零；或者对每个 θ 都成立。同时，$f'(0) = -G$。由于该值为负， f 必须在 $\theta = 0$ 处取得最大值。因此，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t) - \mathrm{ECT}_{b_e}(v,t)\right| \,\mathrm{d}t &\leq \int_{d_1}^{d_4} \mathrm{ECT}_{\gamma_e}(v,t)\,\mathrm{d}t - (d_3 - d_2)\\
&\leq \sqrt{l_e^2 - \left(l_e - \frac{M^2}{24} l_e^3\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{M^2}{12} l_e^4 - \frac{M^4}{24^2} l_e^6}\\
&\leq \frac{M}{\sqrt{12}} l_e^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

对于 $\lambda \in \Lambda$，令 L_λ 表示 $f \circ \Phi_\lambda$的弧长。现在，对于 $\lambda \in \Lambda$，用 $\Gamma(\lambda$表示 $e \in E$ 的子多重集，其中 im Φ_e 是 im Φ_λ的子集。根据方程（13）和（14），以及引理 18，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{ECT}_f(v,t) - \mathrm{ECT}_f^A(v,t)\right| \mathrm{d}t &\leq \frac{M}{\sqrt{12}} \sum_{e \in E} l_e^2 \\ &= \frac{M}{\sqrt{12}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{e \in \Gamma(\lambda)} l_e^2 \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{12}} \sum_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \varepsilon^2 / \varepsilon \\ &= \frac{ML\varepsilon}{\sqrt{12}}.\end{aligned}$$

由于此界对任意 v 都成立，因此得证。 □

4 欧拉示性数变换对随机数据的稳定性

本节中，我们考虑从嵌入的有限一维 CW 复形 Z 上取得的观测值，这些观测值受到环境高斯噪声的扰动。我们证明，这些观测值经高斯平滑后会趋于满足命题 5 的假设。具体而言，我们证明，高斯平滑后的观测值的欧拉示性数变换和 SECT 分别给出了 Z的欧拉示性数变换和 SECT 的相合估计量。为陈述这些定理，我们首先需要介绍高斯平滑中所用核的技术条件：

定义 19（ [18] 中的定义 5）。设 Z 为拓扑空间， $k: Z \times Z \to \mathbb{R}$ 为连续核。定义

$$d_k(t,s) = \sqrt{k(t,t) + k(s,s) - 2k(t,s)}.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，令 $N(Z, \varepsilon, d_k)$ 为覆盖 Z 所需的半径为 ε 的 d_k-球的最小数量。则定义

$$J(Z, d_k) = \int_0^\infty \sqrt{\log N(Z, \varepsilon, d_k)}\, \mathrm{d}\varepsilon.$$

定义 20。设 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ 是一个带有某个固定胞腔分解的连通有限一维 CW 复形。设 $k: Z \times Z \to \mathbb{R}$ 为连续核。若满足以下条件，则称 k 在 Z^* 上是 r 次可微的：

1. 对每个 $\lambda \in \Lambda$，由 $(s,t) \mapsto k(\Phi_\lambda(s), \Phi_\lambda(t))$ 给出的映射 $k^\lambda: I \times I \to \mathbb{R}$ 是 r 次连续可微的；
2. 对每个 $\lambda \in \Lambda$ 和 $z \in Z$，由 $s \mapsto k(\Phi_\lambda(s), z)$ 给出的映射 $k^{\lambda,z}: I \to \mathbb{R}$ 是 r 次连续可微的。

在 $I \times I$ 和 I 的边界处，可微性由单侧极限定义。

注。对于给定的连通有限一维 CW 复形 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$，若其胞腔组合固定，则可以直接构造一个 r 次可微核

在 Z^* 上：设 $f: Z \to \mathbb{R}^d$ 是一个连续函数，并且对每个 $\lambda \in \Lambda$， $f \circ \Phi_\lambda$ 都是 r 次可微的。那么，如果 k 是 $\mathbb{R}^d$ 上一个 r 次可微核，则根据链式法则， $k'(s, t) := k(f(s), f(t))$ 是 Z 上一个 r 次可微核。

虽然人们可能会想在 Z 上定义测地距离，然后对该距离应用平稳核（例如高斯核），但需要注意的是，即使在 Z为流形的情况下，由此得到的函数通常也不是正定核 [14]。

现在我们可以陈述本节的第一个定理：

定理 21。 设 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ 是一个具有某种固定胞腔结构的连通有限一维 *CW* 复形。设 $k: Z \times Z \to \mathbb{R}$ 是定义在 Z^* 上的连续四次可微核。假设 k 满足 $J(Z, d_k) < \infty$。

设 $f: Z \to \mathbb{R}$ 是 k 的再生核希尔伯特空间中的一个函数。设 $\mathbf{a} \subset Z$ 是一个稠密序列。用 $\hat{}$ 表示 $\mathbf{a}_n$ 的前 n 项，用 a_n 表示 $\mathbf{a}$ 的第 n 项。令 f_n 表示基于观测值 $y_i = f(a_i) + \zeta_i$、使用核 k 对 f进行的高斯平滑，其中 $i = 1, ..., n$ 且 $\zeta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ 为某个 $\sigma > 0$ 下的独立同分布变量。那么

$$\mathbb{E}\left[\left\|\hat{f}_n(t, \mathbf{a}_n, f) - f(t)\right\|_\infty\right] \to 0$$

$\hat{}$ $\hat{}$如 $n \to \infty$。此外，对于每个 $\lambda \in \Lambda$，定义 $f_{n,\lambda}(t) = f_n(\Phi_\lambda(t))$ 以及 $f_\lambda(t) = f(\Phi_\lambda(t))$。那么

$$\mathbb{E}\left[\left|V\left(\hat{f}_{n,\lambda}\right) - V\left(f_\lambda\right)\right|^2\right] \to 0$$

$\hat{}$在 Z^* 的每个 *1*-胞腔上都如 $n \to \infty$；也就是说，$f_{n,\lambda}$ 的变差在均方意义下收敛于 f_λ 的变差。

证明上述结果时，我们分别用 k_x 和 k_y 表示关于第一和第二个分量的偏导数，并用 K_x 和 K_y 表示相应的格拉姆矩阵。特别地，对于固定的 $t \in I$、 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\mathbf{a}$，我们将 $K_x^\lambda(t, \mathbf{a}_n) = [k_x^{\lambda, a_1}(t), ..., k^{\lambda, a_n}(t)]$ 以及 K_y^λ记作其转置。重复出现的下标表示对该变量重复求导。

设 $g: X \to \mathbb{R}$ 是一个核为 k 的高斯过程（GP），且 $h: X' \to X$是一个确定性函数。那么 $g \circ h$ 是一个核为 $k'(x, y) := k(h(x), h(y))$ 的高斯过程，对所有 x、 $y \in X'$ 均成立。根据定义 2 中高斯过程的定义，这一结论可立即得出。特别地，对于定理陈述中的高斯过程 f 以及任意 $\lambda \in \Lambda$，复合函数 $f \circ \Phi_\lambda$ 对于任意数量的观测值 n都是一个高斯过程。

在 I 上，具有可微核的高斯过程的导数几乎必然可微。由于求导是线性算子，在这种情况下，高斯过程的导数仍然是高斯过程 [23]。特别地，该导数高斯过程的核为 k_{xy}，并且对任意$t \in I$，我们都有联合分布

$$\begin{bmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k(t,t) & k_y(t,t) \\ k_x(t,t) & k_{xy}(t,t) \end{bmatrix}\right). \tag{15}$$

在定理 21中，我们考虑基于在 f_λ 处的观测值进行的 $\mathbf{a}$ 上的高斯过程回归，其中 λ固定。即使序列 $\mathbf{a}$ 中的元素不必全部属于 Φ_λ的像，高斯过程后验与 Φ_λ 复合后仍定义了 I上的高斯过程。我们关注该高斯过程导数的收敛性。

对于固定的 $\lambda \in \Lambda$，我们将这个导数高斯过程在 $t \in I$ 处的方差记为 $v'_{n,\lambda}(t)$（这与 t 中 $v_{n,\lambda}(t)$ 的导数不同）。特别地，我们有

$$v'_{n,\lambda}(t) = k^\lambda_{xy}(t,t) - K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)(K(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n) + \sigma^2 I)^{-1} K^\lambda_y(\mathbf{a}_n, t).$$

引理 22. 根据定理 *21*中的高斯过程，我们可以得到，对于每个 $\lambda \in \Lambda$ ，$v'_{n,\lambda}$ 都满足

$$v'_{n,\lambda}(t) = \mathbb{E}\left[\left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t, \mathbf{a}_n, f) - f'_\lambda(t)\right|^2\right].$$

此外，$v'_{n,\lambda}(t)$ 对所有 $t \in I$，在 n 中单调递减。

证明。第一个结论由 [18]的引理 11 得出。特别地，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{f'_\lambda}\left[\left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t) - f'_\lambda(t)\right|^2\right] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\zeta}_n}\left[\mathbb{E}_{f'_\lambda}\left[\left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t) - f'_\lambda(t)\right|^2\right]\Big|\mathbf{f}(\mathbf{a}_n) + \boldsymbol{\zeta}_n = \mathbf{y}_n\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\zeta}_n}\left[\mathbb{E}_{f'_\lambda}\left[\left|f'_\lambda(t) - \mathbb{E}_{f'_\lambda}[f'_\lambda(t)|\mathbf{f}(\mathbf{a}_n) + \boldsymbol{\zeta}_n]\right|^2\right]\Big|\mathbf{f}(\mathbf{a}_n) + \boldsymbol{\zeta}_n = \mathbf{y}_n\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\zeta}_n}[\mathrm{Var}(f'_\lambda(t)|\mathbf{f}(\mathbf{a}_n) + \boldsymbol{\zeta}_n)] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\zeta}_n}[v'_{n,\lambda}(t)] = v'_{n,\lambda}(t).
\end{aligned}$$

对于第二个结论，我们可以写成

$$v'_{n,\lambda}(t) = k^\lambda_{xy}(t,t) - K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_{n+1})\begin{bmatrix} B_n^{-1} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times n} & 0 \end{bmatrix} K^\lambda_y(\mathbf{a}_{n+1}, t),$$

其中 $B_n := (K(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n) + \sigma^2 I_n)$。使用边界法得到关于 B_n 的 B_{n+1}^{-1} 的表达式，可得

$$\begin{aligned}
&v'_{n,\lambda}(t) - v'_{n+1,\lambda}(t) \\
&= \nu^{-1} K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_{n+1})\begin{bmatrix} B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, a_{n+1})K(a_{n+1}, \mathbf{a}_n)B_n^{-1} & -B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, a_{n+1}) \\ -K(a_{n+1}, \mathbf{a}_n)B_n^{-1} & 1 \end{bmatrix} K^\lambda_y(\mathbf{a}_{n+1}, t) \\
&= \nu^{-1}((K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, a_{n+1}))^2 - 2K^\lambda_x(t, a_{n+1})K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, a_{n+1}) + k^\lambda_x(t, a_{n+1})^2) \\
&= \nu^{-1}(K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, a_{n+1}) - k^\lambda_x(t, a_{n+1}))^2,
\end{aligned}$$

其中 $\nu := k(a_{n+1}, a_{n+1}) + \sigma - K(a_{n+1}, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, a_{n+1}) = v_n(a_{n+1}) + \sigma$ 是 B_{n+1} 中 B_n 的舒尔补。由于 ν 是正定矩阵中正定矩阵的舒尔补，因此它为正。由于上面最后一行中的第二个因子是一个平方，因而也为正，我们得出函数序列 $v'_{n,\lambda}(t)$ 单调递减。 □

定理 *21* 的证明。 第一个结论由定理 8 得出，见 [18]。

为证明定理的其余部分，我们回顾一下，等式（15）表明，在给定 n 对 f 的含噪观测值时，分布 $(f_\lambda(t)\ \ f'_\lambda(t))^T$ 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} k(t,t) - K(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, t) & k^\lambda_y(t,t) - K(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K^\lambda_y(\mathbf{a}_n, t) \\ k^\lambda_x(t,t) - K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, t) & k^\lambda_{xy}(t,t) - K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K^\lambda_y(\mathbf{a}_n, t) \end{bmatrix}.$$

由于该矩阵需要是正定的，通过取行列式并利用k 的对称性，我们得到

$$\begin{aligned}
&(k(t,t) - K(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, t))(k^\lambda_{xy}(t,t) - K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K^\lambda_y(\mathbf{a}_n, t)) &(16)\\
&\geq (k^\lambda_x(t,t) - K^\lambda_x(t, \mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n, t))^2 \geq 0. &(17)
\end{aligned}$$

因此，$k_x^\lambda(t,t) - K_x^\lambda(t,\mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n,t) \to 0$ 在 I 上一致收敛，因为 (16) 的第一个因子根据 [18] 的命题 10 一致收敛，而 (16) 的第二个因子则由引理 22 中确立的单调性以及 I 的紧致性所界定。用 $\hat{f}''_{n,\lambda}$ 替换 $\hat{f}'_{n,\lambda}$，重复相同的步骤，可得 $k_{xx}^\lambda(t,t) - K_{xx}^\lambda(t,\mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n,t) \to 0$ 一致收敛：此时，第二个因子为 $k_{xxyy}^\lambda(t,t) - K_{xx}^\lambda(t,\mathbf{a}_n)B_n^{-1}K_{yy}^\lambda(\mathbf{a}_n,t)$，它等于 $v''_{n,\lambda}(t)$，即高斯过程 GP f_λ 的二阶导数的方差。通过类似于引理 22 中 $v'_{n,\lambda}(t)$ 情形的证明，我们可以说明 $v''_{n,\lambda}(t)$ 单调递减。为使 $v''_{n,\lambda}(t)$ 有定义，我们要求 k 四次可微。

于是，根据詹森不等式和引理 22，我们可以对平方差 $V\left(\hat{f}_{n,\lambda}\right) - V(f_\lambda)$ 的期望值作如下界定：

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 |f'_\lambda(t)| - \left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t,\mathbf{a}_n,f)\right| \,\mathrm{d}t\right|^2\right] \le \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 \left||f'_\lambda(t)| - \left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t,\mathbf{a}_n,f)\right|\right| \,\mathrm{d}t\right)^2\right]$$

$$\le \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left||f'_\lambda(t)| - \left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t,\mathbf{a}_n,f)\right|\right|^2 \,\mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left||f'_\lambda(t)| - \left|\hat{f}'_{n,\lambda}(t,\mathbf{a}_n,f)\right|\right|^2\right] \,\mathrm{d}t = \int_0^1 v'_{n,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[k_x^\lambda(t,t) - K_x^\lambda(t,\mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n,t) - \int_0^t k_{xx}^\lambda(s,s) - K_{xx}^\lambda(s,\mathbf{a}_n)B_n^{-1}K(\mathbf{a}_n,s)\,\mathrm{d}s\right]_0^1.$$

当 $n \to \infty$ 时，上述最后一个等式趋于 0，因为根据等式(17)及其针对 $v''_{n,\lambda}(t)$ 的对应结果，上述差值中左侧项以及右侧项积分号下的函数都一致收敛于 0。

□

由此可知，对 f 的高斯平滑 $\hat{f}_n$ 进行插值所得函数的欧拉示性数变换，记为 $\mathrm{ECT}^{\mathbf{a}_m,\hat{f}_n}$，是 X 的欧拉示性数变换的相合估计量：

定理*23.* 设 $Z^* = (Z, Z_0, \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 是一个带有固定胞腔结构的有限一维 *CW* 复形，且 $f: Z \to X \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个曲率有界的同胚。此外，假设 f 的所有分量都是 k 的再生核希尔伯特空间中的函数，其中 k 是满足定理 *21* 假设的核。进一步假设，$\|f'_\lambda(t)\|_2 = L_\lambda$ 在所有 *1*-胞腔 $\lambda \in \Lambda$ 上均为常数。设 $\boldsymbol{a}$ 是 Z 中的一个序列，它与 Z^* 相容，且在 f 中稠密。令

$$f(t) := \left(f^1(t), ..., f^d(t)\right)^T, \qquad \hat{f}_n := \left(\hat{f}_n^1, ..., \hat{f}_n^d\right)^T,$$

其中，对于 $j = 1, ..., d$ 和 $i = 1, ..., n$，函数 $\hat{f}_n^j$ 是根据观测值 $y_{ij} = f^j(a_i) + \zeta_{ij}$，使用核 k 对 f^j 进行高斯平滑得到的，并且 $\zeta_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j)$ 独立同分布，分布为某个 $\sigma_j > 0$。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\|\mathrm{ECT}_{\hat{f}_n} - \mathrm{ECT}_f\right\| < \varepsilon\right) \to 1.$$

注意，由于 f 是一个同胚，$\mathrm{ECT}_f = \mathrm{ECT}_{\mathrm{im}\, f} = \mathrm{ECT}_X$，因此我们构造出了 ECT_X 的一个相合估计量 $\hat{}$。根据定理 16，如果给定的观测值 $\mathbf{y}_n$ 的曲率在每个 1-胞腔上都有界，那么当 m 足够大时，我们可以任意精确地用 $\mathrm{ECT}^{\mathbf{a}_m,\hat{f}_n}$ 近似 $\mathrm{ECT}_{\hat{f}_n}$。我们猜想，对于足够良好的核函数 k，$\mathrm{ECT}^{\mathbf{a}_m,\hat{f}_n}$ 依概率收敛到 $\mathrm{ECT}_{\hat{f}_n}$，其中 m 是 n 中的某个函数。证明这一猜想需要以高概率界定曲率，这超出了本文的范围。

ˆ**引理 24.** 令 f 和 f_n 如定理*23*的陈述所述。对于每个 $\lambda \in \Lambda$，分别将ˆ ˆ$f_{\lambda,\ n} := f_n \circ \Phi_\lambda$ 和 $f_\lambda := f \circ \Phi_\lambda$ 的弧长记为 $L_{n,\ \lambda}$ 和 L_λ。那么 $L_{n,\ \lambda} \to L_\lambda$ 以及

$$\int_0^1 \left| \left\| f'_{n,\lambda}(t) \right\|_2 - \| f'_\lambda(t) \|_2 \right| \mathrm{d}t \to 0$$

依概率收敛。

证明。 首先，注意到对于所有 $x, y \geq 0$，$\sqrt{x} + y \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 且 $|\sqrt{x - \sqrt{y}}| \leq \sqrt{|x - y|}$。我们有

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \left\| f'_{n,\lambda}(t) \right\|_2 - \| f'_\lambda(t) \|_2 \, \mathrm{d}t \right| &\leq \int_0^1 \left| \left\| f'_{n,\lambda}(t) \right\|_2 - \| f'_\lambda(t) \|_2 \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{\left| \left\| f'_{n,\lambda}(t) \right\|_2^2 - \| f'_\lambda(t) \|_2^2 \right|} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{j=1}^d \int_0^1 \sqrt{\left| |(f^j_{n,\lambda})'(t)|^2 - |(f^j_\lambda)'(t)|^2 \right|} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{j=1}^d \left[\int_0^1 |(f^j_{n,\lambda})'(t)| + |(f^j_\lambda)'(t)| \mathrm{d}t \right] \left[\int_0^1 \left| |(f^j_{n,\lambda})'(t) \right| - \left| (f^j_\lambda)'(t) \right| \right| \mathrm{d}t \Bigg].
\end{aligned}$$

第一个不等式由积分三角不等式得出。第二和第三个不等式由证明开头介绍的平方根不等式得出。最后一个不等式是积分柯西-施瓦茨不等式。

最后一行的第一个因子收敛到 $2V(f_\lambda)$，而对于每个 $j = 1, ..., d$，第二个因子依定理 21 依概率收敛到 0。 □

定理 *23*的证明。 我们回顾一下，均值收敛蕴含依概率收敛。通过对 f 的每个分量应用定理 21 ，我们发现 f_n 在 ∞-范数下均值收敛到 f。注意，$f_{n,\lambda}$ 不一定需要以恒定速度参数化。将 $f_{n,\lambda}$的弧长记为 $L_{n,\lambda}$ ，将 f_λ 的弧长记为 L_λ。由引理 24，对于每个 $\lambda \in \Lambda$， $L_{n,\lambda} \to L_\lambda$ 依概率收敛。令 $s_{n,\lambda}$ 为将 $f_{n,\lambda}$ 在 I 上重新参数化为恒定速度所得的结果，其定义为

$$s_{n,\lambda}(t) = \frac{1}{L_{n,\lambda}} \int_0^t \left\| \hat{f}'_{n,\lambda}(x) \right\|_2 \mathrm{d}x$$

并满足 $\left\| \left(\hat{f}_{n,\ \lambda} \circ s^{-1} \right)'(x) \right\|_2 = 1$ 在 I 上。因此，

$$\begin{aligned}
|s_{n,\lambda}(t) - t| = \left| \int_0^t \left\| \hat{f}'_{n,\lambda}(x) \right\|_2 / L_{n,\lambda} - 1 \, \mathrm{d}x \right| &\leq \left| \int_0^t \left| \left\| \hat{f}'_{n,\lambda}(x) \right\|_2 / L_{n,\lambda} - \| f'_\lambda(x) \|_2 / L_\lambda \right| \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \frac{1}{L_{n,\lambda}} \int_0^1 \left| \left\| f'_{n,\lambda}(x) \right\|_2 - \| f'_\lambda(x) \|_2 \right| \mathrm{d}x + \| f'_\lambda(x) \|_2 \left| \frac{1}{L_{\lambda,n}} - \frac{1}{L_\lambda} \right|. \qquad (18)
\end{aligned}$$

由于方程（18）中的两项均根据引理 24独立于 t 依概率收敛到 0，因此我们得到 $\| s_{n,\ \lambda}(t) - t \|_\infty \xrightarrow{p.} 0$。

接下来我们定义 $s_n : Z \to Z$ 如下：

$$s_n(z) = \begin{cases} z & \text{if } z \in Z_0, \\ \left(\Phi_\lambda \circ s_{n,\lambda}^{-1} \circ \Phi_\lambda^{-1}\right)(z) & \text{if } z \in \Phi_\lambda((0,1)). \end{cases}$$

映射 s_n 是连续的，因为每个 s_n^{-1}，λ 都是连续的，$s_{n\lambda}^{-1}(0) = 0$ 和 $s_{n\lambda}^{-1}(1) = 1$。

The result of the theorem then follows from P命题 5：

$$\left\|\mathrm{ECT}_{\hat{f}_n} - \mathrm{ECT}_f\right\| \le \left\|\mathrm{ECT}_{\hat{f}_n} - \mathrm{ECT}_{\hat{f}_n \circ s_n}\right\| + \left\|\mathrm{ECT}_{\hat{f}_n \circ s_n} - \mathrm{ECT}_f\right\|. \tag{19}$$

注意，第一项为 0，因为重新参数化不会改变函数的像。对于第二项 ˆ，我们发现 $f_n \circ s_n$ 收敛并满足相应条件，因此命题 5 给出了越来越紧的界：ˆ $f_n \circ s_n \circ \Phi_\lambda = \hat{f}_{n,\lambda} \circ s_n^{-1}$，$\lambda$ 的弧长收敛到 $f \circ \Phi_\lambda = f_\lambda$ 的弧长，这是由引理 24 得出的（将 f_λ 与 s_n^{-1}，λ 复合不会改变其弧长）。此外，上述两个函数都具有恒定速度，并且

$$\left\|\hat{f}_n \circ s_n - f\right\|_\infty \le \left\|\hat{f}_n \circ s_n - \hat{f}_n\right\|_\infty + \left\|\hat{f}_n - f\right\|_\infty \xrightarrow{p.} 0.$$

上文中，第二项依定理 21依概率收敛。第一项依概率收敛，因为

$$\left\|\hat{f}_{n,\lambda} \circ s_{n,\lambda}^{-1} - \hat{f}_{n,\lambda}\right\|_\infty \le \left\|\hat{f}_{n,\lambda} \circ s_{n,\lambda}^{-1} - f_\lambda \circ s_{n,\lambda}^{-1}\right\|_\infty + \left\|f_\lambda \circ s_{n,\lambda}^{-1} - f_\lambda\right\|_\infty + \left\|f_\lambda - \hat{f}_{n,\lambda}\right\|_\infty \xrightarrow{p.} 0$$

在每个 1-胞腔上 $\lambda \in \Lambda$。根据定理 21，第一项依概率收敛（因为重新参数化不会改变 ∞-范数）。注意，f_λ 在 I上连续，而该集合是紧致的，因此它一致连续。第二项等于 $\left\|f_\lambda \circ s_{n,\lambda} - f_\lambda\right\|_\infty$ 通过与$s_{n、\lambda}(t)$进行预复合可得，因此由公式（18）以及 f_λ的一致连续性可知，该项收敛。根据定理 21，最后一项依概率收敛。 □

此外，我们的相合性结果也适用于 X 的 SECT。

引理 25。 在某个区间 $[-a, a]$上定义欧拉示性数变换 。设两个形状 X 和 Y的欧拉示性数变换之间的距离为 δ。那么，它们的SECT之间的距离至多为$(2a+1)\delta$。

证明。 固定 $v \in S^{d-1}$。于是

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{SECT}_X(v,\cdot) - \mathrm{SECT}_Y(v,\cdot)\|_1 \\ &= \int_{-a}^{a} \left| \int_{-a}^{t} \mathrm{ECT}_X(v,x) - \mathrm{ECT}_Y(v,x)\,\mathrm{d}x - \frac{t+a}{2a} \int_{-a}^{a} \mathrm{ECT}_X(v,x) - \mathrm{ECT}_Y(v,x)\,\mathrm{d}x \right| \mathrm{d}t \\ &\le \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{t} |\mathrm{ECT}_X(v,x) - \mathrm{ECT}_Y(v,x)|\,\mathrm{d}x + \frac{t+a}{2a} \int_{-a}^{a} |\mathrm{ECT}_X(v,x) - \mathrm{ECT}_Y(v,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\le 2a\delta + \delta = (2a+1)\delta. \end{aligned}$$

由于上述内容与 v 无关，证毕。 □

我们结果的主要局限在于，假设嵌入空间的拓扑已知，且这些结果仅适用于一类受限的 CW 复形。将我们的统计估计量及相关结果扩展到底层形状拓扑的扰动情形，仍有待未来研究。

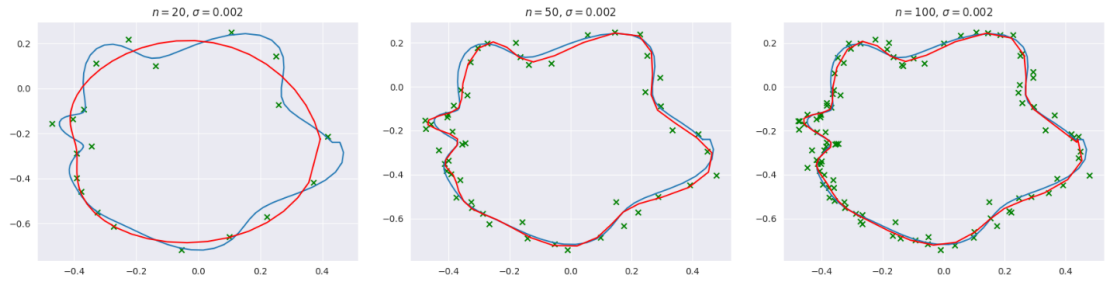

图3：根据含噪样本（绿色十字）对简单闭曲线（蓝线）进行高斯平滑（红线）。左图、中图和右图中的点数分别为 20、50 和 100。所有点的每个分量都独立地受到均值为零、标准差为 $\sigma = 0.002$ 的高斯噪声干扰。

5 示例

现在，我们通过一个模拟示例来说明我们的方法。在模拟中，我们聚焦于 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单闭曲线，并从曲线上采集不同数量的含噪点。我们通过精心选择复傅里叶系数构造了这条曲线。随后，通过对曲线进行等间距取样获取样本，并在样本中加入均值为 0、协方差为 $(0.002)^2 I_2$的独立多元高斯噪声。曲线及其含噪样本见图3。

在高斯平滑中，我们选用正弦平方指数核作为核。假设我们的曲线以 γ 参数化：$[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$，其中 $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$，则它表示为

$$k(s,t) = \exp\left(-2\sin\left(\frac{s-t}{2}\right)^2\right).$$

它满足定理 21 和 23 的条件（见引理 26；由于它是无穷可微函数的复合，因此也是无穷可微的）。其再生核希尔伯特空间包含我们生成的曲线（见引理27）。

在图 4中，我们将真实曲线在一个固定方向上的 SECT 与分别基于原始曲线的 20、50 和 100 个含噪观测值进行高斯过程回归（GPR）所得后验分布中采样的曲线的 SECT 进行比较。此外，我们还绘制了后验样本的 SECT 与真实曲线的 SECT 之间距离的分布（距离由公式（2）中引入的范数给出）。

在这两类图中，我们可以看到后验曲线的概率质量逐渐向真实 SECT 靠近，从而展示了我们定理的结果。此外，我们报告，真实曲线的 SECT 与高斯平滑后的 SECT 之间的距离分别约为 0.0627（$n = 20$）、0.0366（$n = 50$）和 0.0214（$n = 100$）。然而，尽管图 4 表明我们的结果为 SECT 提供了一个相合估计量，但该估计量未必无偏。

本节中的示例说明，我们的估计量如何自然地产生 SECT 曲线空间上的后验分布。我们认为，这种后验分布有望应用于统计推断或分类流程。证明类似我们这样的估计量的收敛速率，将有助于量化统计 ECT 分析的置信度。

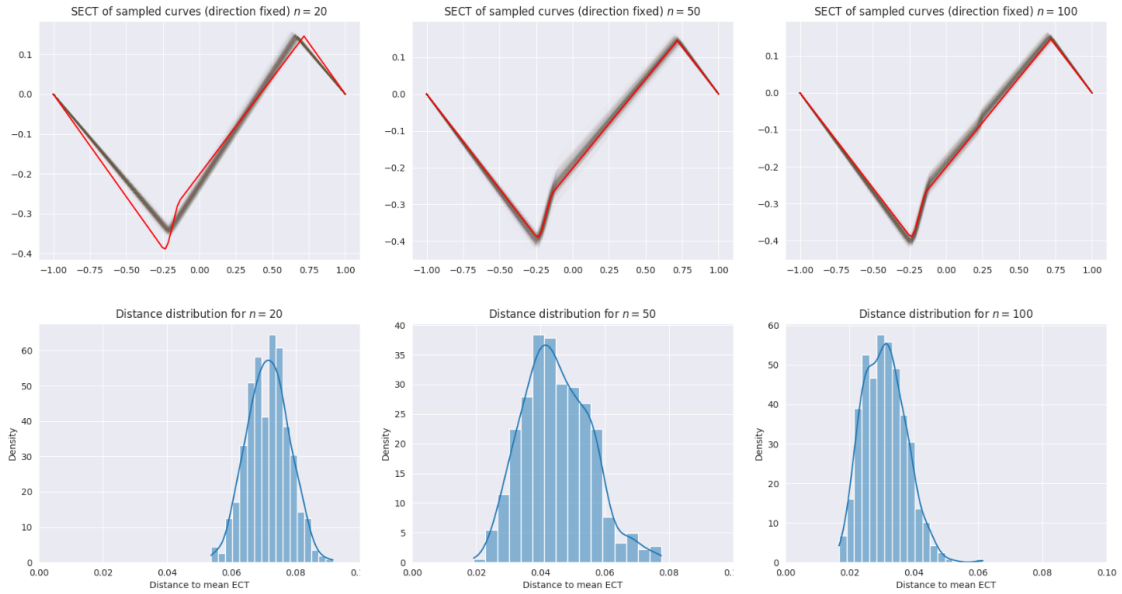

图4：上：真实形状（红色）在固定方向上的 SECT，与基于 20 个（左）、50 个（中）和 100 个（右）样本得到的 GPR 后验样本的 SECT（不透明蓝色）对比。该固定方向对应于图3中的从左到右方向。SECT 基于样本的插值得到。下：基于从潜在曲线中抽取的 20 个（左）、50 个（中）和 100 个（右）含噪样本，真实曲线的 SECT 与 GPR 后验曲线的 SECT 之间距离的分布。

5.1 正弦平方指数核的刻画

引理 26. 对于正弦平方核，我们有 $J(S^1, d_k) < \infty$。

证明。 对于正弦平方核 k，度量 d_k 定义为

$$d_k(s,t) = \sqrt{2 - 2\exp(-2\sin^2((s-t)/2)}.$$

可以证明， d_k 与角度度量 d强等价：令

$$f(x) = \sqrt{2 - 2\exp(-2\sin^2(x))}.$$

Then

$$f'(x) = \frac{4e^{-2\sin^2(x)}\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{2 - 2\exp\left(-2\sin^2(x)\right)}}.$$

特别地， $f'(x) \geq 0$ 在 $0 \leq x \leq \pi/2$ 上成立（我们可以利用洛必达法则证明 $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$ ）。此外， f 是凹函数，因为它是非递减凹函数的复合。因此，$d_k(s,t) = f(d(s,t)/2)$，得到 $d \geq d_k \geq (2\sqrt{2 - 2e^{-2}}/\pi)d$在 S^1上成立，其中第一项因子为 $f'(0)/2$，第二项因子是 f 在 0 与 $\pi/2$之间的差商。

由于 S^1 有界，且 d 和 d_k 强等价，因此只需证明 $J(S^1, d) < \infty$。对于 d 和 $\varepsilon > 0$，我们得到

$$N(S^1, d, \varepsilon) = \left\lceil \frac{\pi}{\varepsilon} \right\rceil \leq \frac{\pi}{\varepsilon} + 1.$$

因此，

$$\begin{aligned} J(S^1, d) &= \int_0^\infty \sqrt{\log N(S^1, d, \varepsilon)}\, \mathrm{d}\varepsilon \\ &\leq \int_0^\pi \sqrt{\log\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + 1\right)}\, \mathrm{d}\varepsilon \\ &= \pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{\log(x+1)}}{x^2}\, \mathrm{d}x \\ &\leq \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}x = \pi\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^\infty = 2\pi < \infty. \end{aligned}$$

□

引理 27。 定义由满足以下条件的序列 $w_{ab} \in \mathbb{R}$、 a、 $b \in \mathbb{N}_0$ 构成的希尔伯特空间 $\mathcal{H}'$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{\substack{a\geq 0, b\geq 0 \\ a+b=n}} \frac{w_{ab}^2}{C_a^n} < \infty,$$

其中， C_a^n 表示 n 选取 a。对于 $\{w_{ab}\}$、 $\{v_{ab}\} \in \mathcal{H}'$， $\mathcal{H}'$ 的内积定义为

$$\langle \{w_{ab}\}, \{v_{ab}\} \rangle_{\mathcal{H}'} := \gamma \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{\substack{a\geq 0, b\geq 0 \\ a+b=n}} \frac{w_{ab} v_{ab}}{C_a^n}$$

其中 $\gamma > 0$ 是一个常数。定义 V 为满足以下条件的序列 $\{w_{ab}\} \in \mathcal{H}'$ 构成的闭子空间

$$\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} w_{ab} \cos^a(t) \sin^b(t) = 0 \tag{20}$$

对所有 $t \in [0, 2\pi)$ 均成立。因此，由函数构成的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$

$$f(t) = \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} w_{ab} \cos^a(t) \sin^b(t) \tag{21}$$

其中 $\{w_{ab}\} \in V^\perp$，内积由 $\mathcal{H}'$ 诱导，与正弦平方指数核的再生核希尔伯特空间同构，记为 $\mathcal{H}_k$。

证明。利用标准三角恒等式可知，正弦平方核与以下核成正比（比例常数为正）：

$$k(s,t) = \exp\left(\cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)\right).$$

因此，利用 exp 的泰勒展开，$k(\cdot, t) \in \mathcal{H}$ 对所有 t 均成立，其系数为

$$w_{ab} = \frac{C_a^{a+b}}{(a+b)!} \cos^a(t) \sin^b(t).$$

此外，对于系数为 v_{ab} 且固定 t 的 $f \in \mathcal{H}$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle k(\cdot, t), f\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{\substack{a\geq 0,\, b\geq 0 \\ a+b=n}} \frac{C_a^n \cos^a(t)\sin^b(t) v_{ab}}{n! C_a^n} \\ &= \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} \cos^a(t)\sin^b(t) v_{ab} = f(t).\end{aligned} \tag{22}$$

因此，内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ 具有再生性质，并且与公式（4）中给出的由核 k 诱导的内积（即 $\mathcal{H}_k$的内积）一致。此外，$k(\cdot, t)$的系数属于 $V^\perp$：设 $\{v_{ab}\} \in V$，并设 $k(\cdot, t)$的系数为 $\{w_{ab}\}$。根据公式（22），$\langle\{v_{ab}\}, \{w_{ab}\}\rangle_{\mathcal{H}'} = 0$。由于 $V^\perp$ 与 V正交，因此它是闭的；$\mathcal{H}$也如此，这意味着 $\mathcal{H}$是一个希尔伯特空间。我们有 $\mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{H}$。由于根据定义，$\mathcal{H}_k$ 是完备的，因此对于某个闭子空间 W，有 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_k \oplus W$。设 $f \in W$。那么，对于所有 $g \in \mathcal{H}_k$，都有 $\langle g, f\rangle_{\mathcal{H}} = 0$，特别是$f(t) = \langle k(\cdot, t)\rangle_{\mathcal{H}} = 0$，对所有 $t \in [0, 2\pi$均成立。因此，$W = 0$且 $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_k$。 □

引理 28. 每个 $f \in \mathcal{H}$ 都是连续的，并且嵌入 $\mathcal{H} \hookrightarrow C(S^1, d_\infty)$ 是连续的，其中$C(S^1, d_\infty)$ 是定义在 S^1 上、赋予 ∞- 范数的连续实值函数空间。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\cos(nt)$ 和 $\sin(nt)$ 都是 $\mathcal{H}$ 的元素。

证明. 注意，对所有 t，$\|k(\cdot, t)\|_{\mathcal{H}} = 1$。因此，根据 k 的再生性质和 Cauchy-Schwarz 不等式，对于所有 $f \in \mathcal{H}$ 以及任意 $t \in S^1$，我们得到

$$|f(t)| = |\langle k(\cdot, t), f\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

因此，在 $\mathcal{H}$-范数下收敛意味着在 ∞-范数下收敛。由于 f 可以写成一列连续函数的级数，且该级数在 $\mathcal{H}$-范数下收敛（参见公式（21）），因此 f 是

连续。由于对于任意具有 $\|f\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$ 的 $f \in \mathcal{H}$ 和任意 $t \in S^1$，我们有 $|f(t)| \leq \varepsilon$，因此包含映射 $\mathcal{H} \hookrightarrow C(S^1, d_\infty)$ 是连续的。

此外，我们可以展开

$$\cos(nt) = \sum_{k \text{ even}}^{n} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(t) \sin^k(t), \qquad \sin(nt) = \sum_{k \text{ odd}}^{n} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(t) \sin^k(t).$$

因此，cos(nt) 和 sin(nt) 可以展开为 cos 和 sin 的幂，其系数属于 $\{w_{ab}\} \in \mathcal{H}'$（如引理 27所述）。我们可以将这些系数投影到 $V^\perp$ 中，而不改变级数在任意 $t \in S^1$处的值：从 V 中减去 $\{w_{ab}\}$ 的元素后，所观察到的级数之差对所有 t 均为 0（参见公式（20））。因此，对于所有 nt，cos(，sin(nt) $\in \mathcal{H}$ 均成立 $n \in \mathbb{N}$。 □

致谢

作者感谢 Heather A Harrington 和 Vidit Nanda 就本文展开富有成果的讨论并提出有益意见。两位作者均为拓扑数据分析中心的成员，该中心由英国工程与自然科学研究委员会资助，资助项目为“数据科学的新方法：应用驱动的拓扑数据分析” EP/R018472/1。LM 衷心感谢英国工程与自然科学研究委员会项目 EP/R513295/1 的资助，以及路德维希癌症研究所的支持。为实现开放获取，作者已对本次投稿产生的任何作者接受稿（AAM）版本采用知识共享署名许可（CC BY）公共版权许可。

数据和代码可用性

数据和代码将在合理请求后共享。

参考文献

[1] EJ Amezquita、M Quigley、T Ophelders、J Landis、E Munch、D Chitwood 和 D Koenig。“利用欧拉示性数变换量化大麦形态”。发表于：*NeurIPS 2020* 拓扑数据分析及相关领域研讨会。2020。[2] R Biswas、S Cultrera di Montesano、H Edelsbrunner 和 M Saghafian。“一维映射持久性的窗口。I：临界点对的几何刻画”。发表于：*LIPIcs*（2022）。[3] DM Boyer、Y Lipman、E St. Clair、J Puente、BA Patel、T Funkhouser、J Jernvall 和 I Daubechies。“自动量化解剖表面几何相似性的算法”。发表于：美国国家科学院院刊 108.45（2011），第 18221–18226 页。[4] F Chazal、V De Silva 和 S Oudot。“几何复形的持久性稳定性”。发表于：*Geometriae Dedicata* 173.1（2014），第 193–214 页。[5] SS Chern。“欧几里得空间中的曲线与曲面”。发表于：*Studies in Global Geometry and Analysis* 4.1（1967），第 967 页。

[6] I Chevyrev、V Nanda 和 H Oberhauser。“拓扑数据分析中的持久性路径与签名特征”。发表于：*IEEE*模式分析与机器智能汇刊42.1（2018），第 192–202 页。[7] D Cohen-Steiner、H Edelsbrunner 和 J Harer。“利用庞加莱对偶和勒夫谢茨对偶扩展持久性”。发表于：计算数学基础 9（2008），第 79–103 页。[8] D Cohen-Steiner、H Edelsbrunner 和 J Harer。“持久图的稳定性”。发表于：第二十一届计算几何年度研讨会论文集。2005，第 263–271 页。[9] L Crawford、A Monod、AX Chen、S Mukherjee 和 R Rabad´an。“胶质母细胞瘤临床结局预测：拓扑与函数型数据分析的应用”。发表于：美国统计学会会刊 115.531（2020），第 1139–1150 页。[10] J Curry、S Mukherjee 和 K Turner。“多少个方向能够确定一个形状，以及关于两种拓扑变换的其他充分性结果”。发表于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1805.09782* （2018）。[11] P D-lotko 和 D Gurnari。“欧拉示性数曲线与轮廓：适用于大数据问题的稳定形状不变量”。发表于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2212.01666* （2022）。[12] C Donnat、A Levy、F Poitevin 和 N Miolane。“冷冻电子显微镜体积重建的深度生成建模”。发表于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2201.02867* （2022）。[13] H Edelsbrunner 和 J Harer。计算拓扑学：导论。美国数学学会，2010。[14] A Feragen、F Lauze 和 S Hauberg。“测地指数核：曲率与线性发生冲突时”。发表于：*IEEE*计算机视觉与模式识别会议论文集。2015，第 3032–3042 页。[15] T Gao、SZ Kovalsky 和 I Daubechies。“流形上的高斯过程地标化”。发表于：*SIAM*数据科学数学杂志 1.1（2019），第 208–236 页。[16] R Ghrist、R Levanger 和 H Mai。“持久同调与欧拉积分变换”。发表于：应用与计算拓扑学杂志 2.1（2018），第 55–60 页。[17] A Hatcher。“代数拓扑”。发表于：*http://www. math. cornell. edu/˜ hatcher/AT/ATpage.html* （2002）。[18] P Koepernik 和 F Pfaff。“度量空间中高斯过程回归的相合性”。发表于：机器学习研究杂志 22（2021），第 244–1 页。[19] L Marsh、FY Zhou、X Qin、X Lu、HM Byrne 和 HA Harrington。“利用欧拉示性数变换检测时序形状变化”。发表于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2212.10883*（2022）。[20] K Meng、L Crawford 和 A Eloyan。“通过光滑欧拉示性数变换进行形状的随机性与统计推断”。发表于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2204.12699* （2022）。[21] KV Nadimpalli、A Chattopadhyay 和 B Rieck。“基于欧拉示性数变换的拓扑损失：从单张二维切片重建三维图像”。发表于：（2023）。[22] A Rahimi 和 B Recht。“用于大规模核机器的随机特征”。发表于：《神经信息处理系统进展》20（2007）。[23] CE Rasmussen。“机器学习中的高斯过程”。发表于：机器学习暑期学校。Springer。2003，第 63–71 页。

[24] A Sard.《可微映射临界值的测度》。载于：《美国数学会通报》48.12（1942），第 883–890 页。[25] P Skraba 和 K Turner.《持久图的 Wasserstein 稳定性》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2006.16824*（2020）。[26] WS Tang、GM da Silva、H Kirveslahti、E Skeens、B Feng、T Sudijono、KK Yang、S Mukherjee、B Rubenstein 和 L Crawford.《一种用于发现蛋白质动力学生物物理特征的拓扑数据分析方法》。载于：《*PLoS* 计算生物学》18.5（2022），e1010045。[27] K Turner、S Mukherjee 和 DM Boyer.《用于形状和曲面建模的持久同调变换》。载于：《信息与推断：*IMA*期刊》3.4（2014），第 310–344 页。[28] K Turner、V Robins 和 J Morgan.《带边界流形的扩展持久同调变换》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2208.14583*（2022）。[29] L Van den Dries 等。温和拓扑与 *o*-极小结构。第 248 卷。剑桥大学出版社，1998。[30] B Wang、T Sudijono、H Kirveslahti、T Gao、DM Boyer、S Mukherjee 和 L Crawford.《用于识别三维形状类别差异物理特征的统计流程》。载于：《应用统计年鉴》15.2（2021），第 638–661 页。[31] C Williams 和 M Seeger.《使用 Nystr¨om 方法加速核机器》。载于：《神经信息处理系统进展》13（2000）。