arXiv:2303.13230v1 [math.HO] 29 Dec 2022

埃兰数学中的立体体积

Nasser Heydari*和 Kazuo Muroi†

2023年3月24日

摘要

本文研究埃兰数学中的三维物体及其体积，尤其是见于苏萨数学泥板第14号（SMT 第14号）中的相关内容。在讨论中，我们指出，巴比伦数学和埃兰数学中有一些基本立体的体积已被正确计算。我们还表明，埃兰书吏掌握了计算某种棱锥体积的正确公式，而这种现象在巴比伦数学泥板中十分罕见。

1 引言

SMT第14号 是法国考古学家于1933年在伊朗西南部苏萨发掘出的26块泥板之一。所有苏萨数学泥板（SMT）的文本及其释读首次发表于1961年（见 [BR61]）。

这块泥板[1] 包含两个问题，均涉及一个假想的大型谷堆的体积，已知其长度、宽度和高度。从数学角度来看，第一个问题非常重要，因为其中正确计算了棱锥的体积。不幸的是，第二个问题对我们来说几乎无法理解，因为文本的大部分内容已经遗失。

2 固体物体的体积

通常，立体是指由曲面围成的三维空间中的任意有限部分。如果构成立体的所有边界曲面都是平面，则称其为多面体。[2] 多面体中平面的交线称为棱，由棱围成的多边形称为面。棱的交点是多面体的顶点。

*电子邮件：nasser.heydari@mun.ca

†电子邮件：edubakazuo@ac.auone-net.jp[1] 读者可在卢浮宫藏品网站上查看这块泥板的新照片。正面和反向请见 https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010186539。[2] 关于多面体的参考资料，感兴趣的读者可参阅 [Cro99]。

多面体两个面之间的角称为二面角。多面体顶点附近的空间部分称为立体角或多面角，它由至少三个面的交汇形成。如果连接多面体任意两点的线段完全包含在多面体内，则该多面体为凸多面体。本文主要讨论凸多面体。图1 展示了四个多面体，其中三个是凸多面体，右侧的那个则不是。

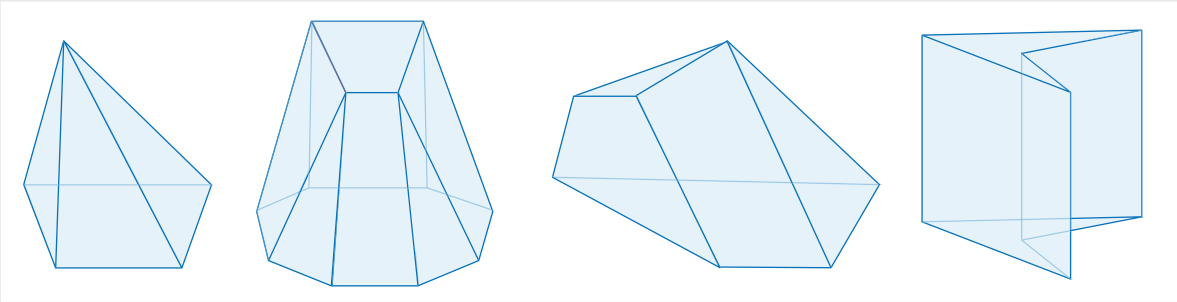


图1：多面体示例

面数 f、棱数 e 和顶点数 v 之间存在一种有趣的关系，称为多面体公式。这一关系由瑞士数学家莱昂哈德·欧拉（1707–1783）发现，即

$$v - e + f = 2. \tag{1}$$

请注意，对于图1中的第二个多面体，我们有 $12 - 20 + 10 = 22 - 20 = 2$满足欧拉多面体公式(1)。

与正多边形类似，我们可以将正多面体定义为：其所有面都是全等的正多边形，且所有多面角都相等的多面体。几何学中有一个经典定理指出，凸正多面体只有五种：四面体，有4个面；六面体（立方体），有6个面；八面体，有8个面；十二面体，有12个面；以及二十面体，有20个面（见图2）。

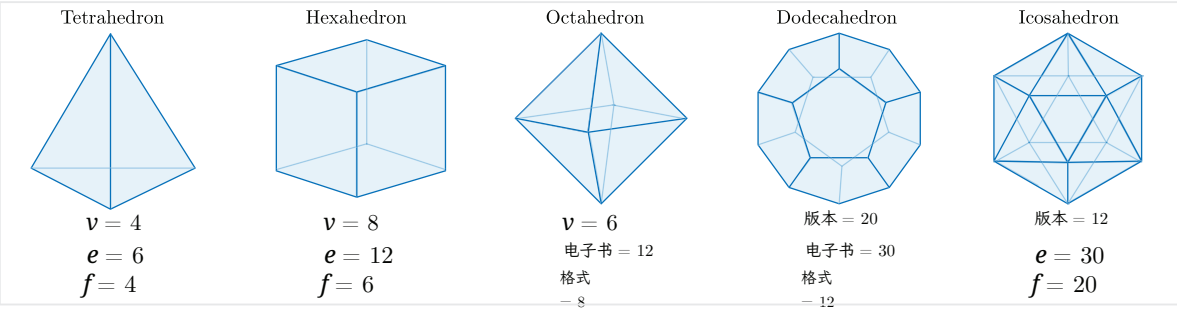


图2：柏拉图立体

这些特殊的多面体通常称为柏拉图立体。这五种正多面体以希腊哲学家柏拉图（约公元前428—348年）的名字命名。他深为它们完美的形态所吸引，因此在其对话篇《蒂迈欧篇》中，将它们与

当时人们认为是基本元素的事物联系起来：土、火、气、水和以太。近年来，人们对一类多面体（包括柏拉图立体）愈发感兴趣，因为它们自然地出现在物理学、化学、生物学以及其他各种学科的诸多不同问题中（见[AS03]）。尽管这些多面体以柏拉图的名字命名，但希腊数学家雅典的泰阿泰德（约公元前417—369年）才是第一个对全部五种正多面体作出数学描述的人，他也可能是已知最早证明不存在其他正多面体的人（见 [All89，Hea21]）。关于这一[Har00]定理的证明，见。

立体的体积表示它所占空间的大小，通常以其中包含多少个选定的立体作为体积单位来衡量。如今，体积通常以立方单位表示，例如 cm^3、 m^3 等，具体取决于所选单位立方体三个尺寸所采用的长度单位。

长方体是一种有六个面的多面体，这些面都是矩形，且所有二面角都是直角。长方体有三个主要尺寸，即长度、宽度和高度。尺寸为 a、 b、 c 的长方体 Ω 的体积可直接表示为

$$V_\Omega = abc.$$

这是因为很容易看出，尺寸为整数 m、 n、 p的长方体包含 $m \times n \times p$ 个单位立方体。

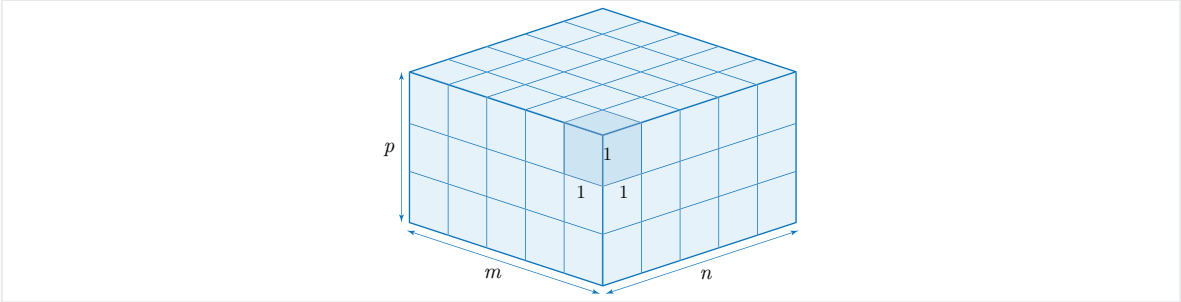


图 3：长方体的体积

长方体的体积可直接根据定义得出，但要计算其他立体的体积，则需要应用卡瓦列里原理。该原理由意大利数学家 Bonaventura Cavalieri（1598–1647）提出，指出：如果两个立体夹在两个平行平面之间，且任意一个平行于边界平面的平面与这两个立体相交所得的两个截面面积相等，那么这两个立体的体积就相同（见图4）。

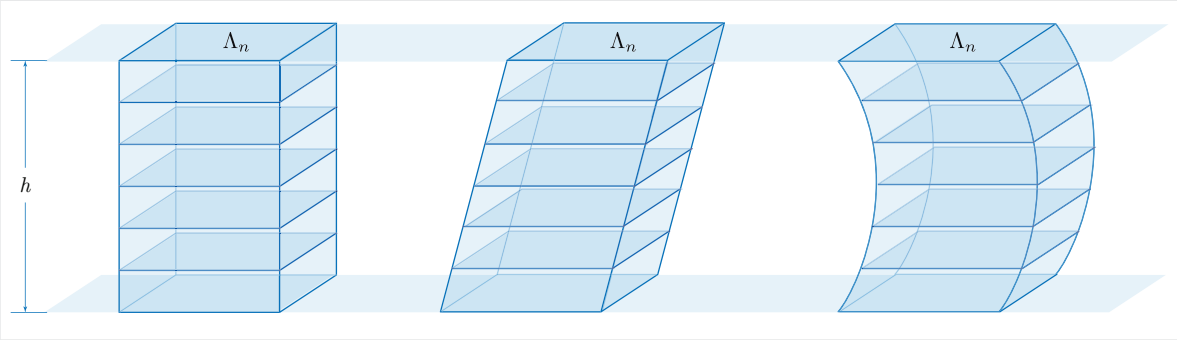


图4：卡瓦列里原理

棱柱 Γ 是一个多面体，其中有两个面是平行且全等的多边形，例如 Γ_n。事实上，如果沿固定方向平移 Γ_n ，所得立体就是棱柱。一般棱柱中，除这两个平行的面之外，其他各面都是平行四边形。如果棱柱的这些平行四边形面都是矩形，则称为直棱柱。两个平行面之间的距离称为棱柱的高度，记作 h。一般棱柱的体积按照通用公式“底面积乘高”计算：

$$V_\Gamma = h \times S_{\Gamma_n}. \tag{2}$$

由此可轻松求出一些特殊棱柱的体积，例如三棱柱、平行六面体和长方体。 截头棱柱 是用两个不平行的平面切割棱柱得到的，如图5所示。

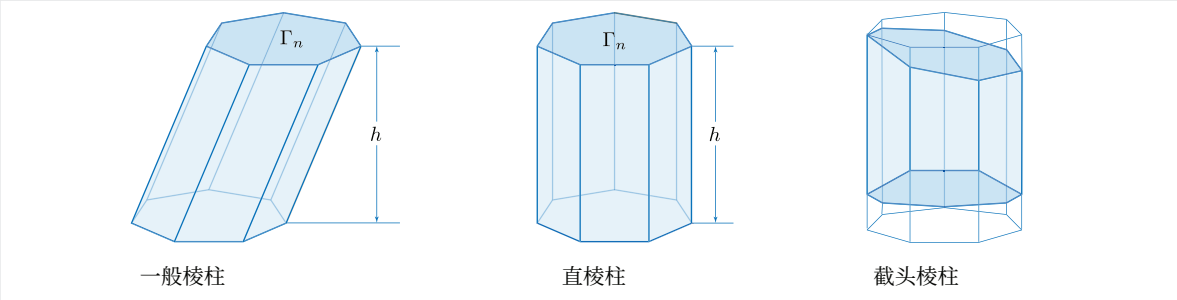


图5：不同类型的棱柱

棱柱的体积公式可以通过以下事实证明：任何长方体Λ 的边长为 a、 b、 c ，都可以沿对角线切成两个相等的直三棱柱，分别记作Λ_1 和 Λ_2，它们的底面是边长为 a 和 b 的直角三角形（见图6）。因此，这两个三棱柱的共同体积为

$$V_{\Lambda_1} = V_{\Lambda_2} = \frac{1}{2}abc = \left(\frac{1}{2}ab\right)c,$$

即底面积乘高。任何多边形都可以分割成三角形，因此，结合卡瓦列里原理，可以用来证明一般公式(2)。

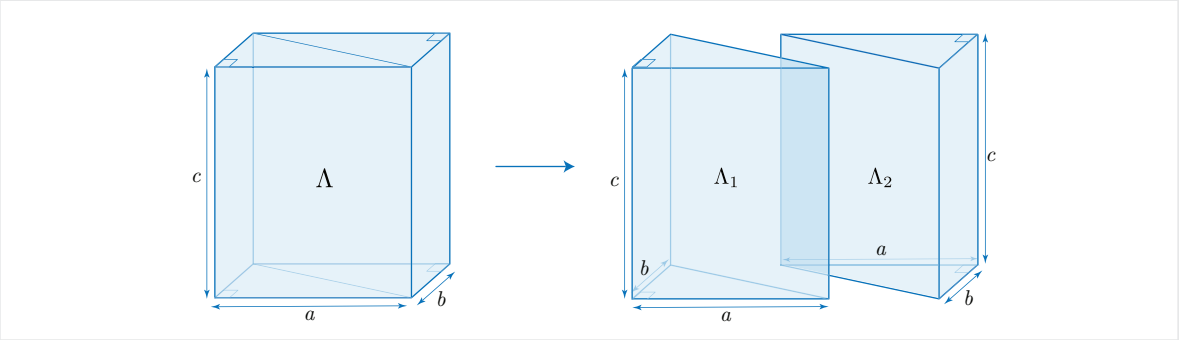


图6：将长方体切割成两个相等的直三棱柱

一个棱锥 Λ 是通过直线将点 p 连接到多边形 Λ_n上的所有点而得到的多面体。点 p 是顶点，多边形 Λ_n 是棱锥的底面。顶点与底面之间的距离就是棱锥的高度。注意，棱锥所有包含顶点的面都是三角形。在直棱锥中，连接顶点与底面形心的直线垂直于底面。一个棱台是用一个平行于底面的平面切割棱锥而得到的（见图7）。

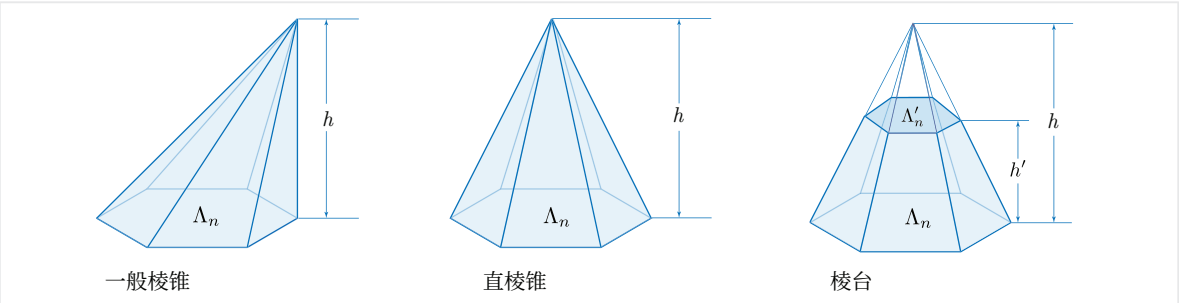


图7：不同类型的棱锥

可以观察到，任意一个直三棱柱 Λ 都可以分解为三个体积相等的直三棱锥 Λ_1，Λ_2，Λ_3 如图8所示。

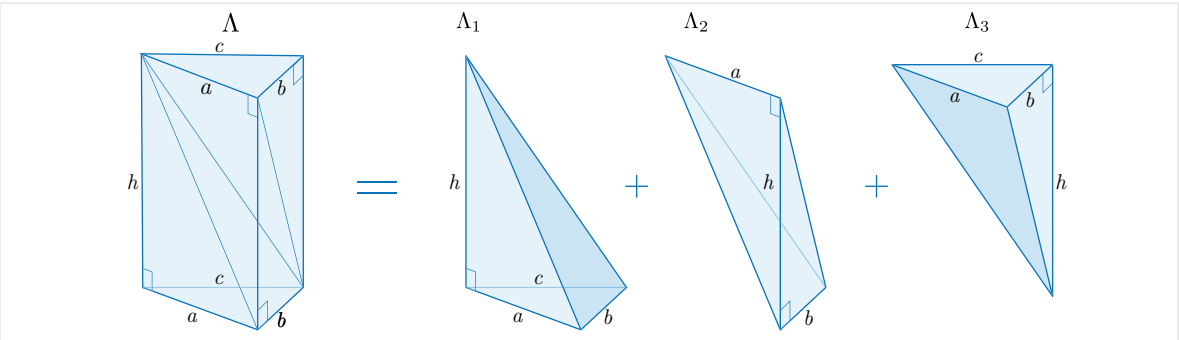


图8：将棱柱分成三个体积相等的棱锥

事实上，一方面， Λ_1 和 Λ_3 的高度相同，均为 h ，且三角形底面的边长分别为 a、b、 c；另一方面， Λ_2 和 Λ_3 的高度相同，均为 a ，且三角形底面相同，其高度为 b ，底边长为 h。因此，根据卡瓦列里原理， $V_{\Lambda_1} = V_{\Lambda_2} = V_{\Lambda_3}$。现在，由于任何棱锥都可以通过对其多边形底面进行三角剖分，分割成有限个三棱锥，因此可以利用前述事实证明，底面为多边形 Λ_n 、高度为 h 的一般棱锥 Λ 的体积为

$$V_\Lambda = \frac{1}{3} \times h \times S_{\Lambda_n}.$$

对于底面和顶面分别为边长 n 的正 a 边形，且 b高度为 h的棱台，可以轻松得出关于 n、 a、 b和 h 的体积公式。事实上，考虑 图 9 ，其中底面为 $\Gamma_n(a)$，顶面为 $\Gamma_n(b$ 的棱台是一个高为 $h + h'$ 、底面为 $\Gamma_n(a)$ 的棱锥的一部分。由于图中的两个三角形 $\triangle AH'B'$ 和 $\triangle AHB$ 相似，因此有

$$\frac{\overline{AH'}}{\overline{H'B'}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}.$$

此外， $\overline{AH'} = h'$, $\overline{AH} = h + h'$, $\overline{B'H'} = \frac{b}{2\sin(\frac{\pi}{n})}$，且 $\overline{BH} = \frac{a}{2\sin(\frac{\pi}{n})}$，因此由上一个等式可得

$$h' = \frac{bh}{a-b}.$$

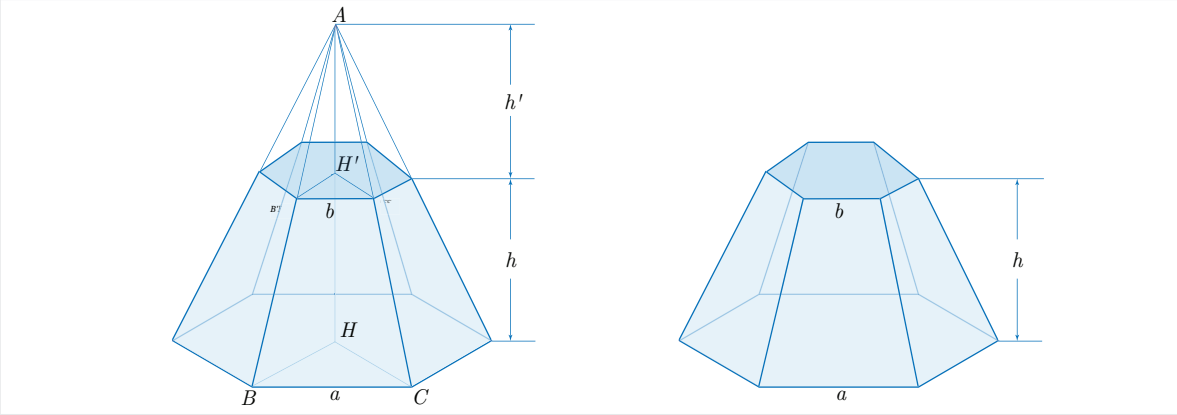


图 9 ：底面和顶面为正多边形的棱台体积

另一方面，由于 $S_{\Gamma_n(a)} = \frac{na^2}{4}\cot(\frac{\pi}{n})$ 和 $S_{\Gamma_n(b)} = \frac{nb^2}{4}\cot(\frac{\pi}{n})$，且棱台的体积等于高度为 h 、底面为 $\Gamma_n(a)$ 的棱锥体积减去高度为 h' 、底面为 $\Gamma_n(b)$ 的小棱锥体积，因此我们可以写成

$$V = \frac{h+h'}{3} \times \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{h'}{3} \times \frac{nb^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

可简化为

$$V = \frac{nh}{12} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(a^2 + ab + b^2\right). \tag{3}$$

除了多面体，还可以将闭曲面绕三维空间中的某个固定方向（即旋转轴）旋转，得到其他立体。这类立体通常称为旋转体。例如，将半圆、半椭圆、矩形和直角三角形分别绕某个固定方向旋转，就可以得到球体、椭球体、圆柱体和圆锥体，如图10所示。如果半圆的半径为 r，生成的球体体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$。阿基米德证明了，球体的体积等于球体与其外切圆柱之间部分体积的两倍。

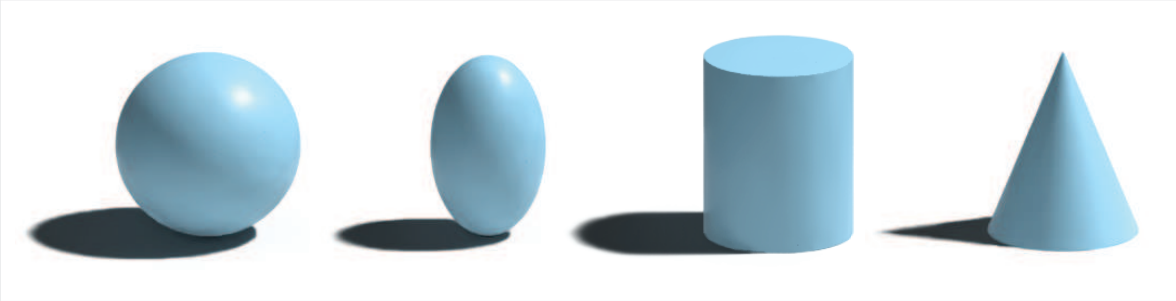


图10：不同类型的旋转体

将边长为 r 和 h的矩形绕后者旋转，所得圆柱体的体积为 $\pi r^2 h$ ，这可由卡瓦列里原理得出。如果一个直角三角形的底面和高度分别为 r 和 h ，将其绕高度旋转，所得圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ，这与棱锥的体积公式相似。直观理解这一结论的一种方法是，将两个分别呈圆锥形和圆柱形、且高度和圆形底面相同的容器并排放置。用水装满圆锥容器，再将水倒入圆柱容器，可以明显看出，水面达到圆柱高度的三分之一。这表明，高度为 h 、半径为 r 的圆锥，其体积等于高度为$\frac{h}{3}$ 、半径相同的圆柱体积的三分之一。

3 古代数学中的体积

虽然上述基本立体的体积公式可以运用立体几何中的初等方法[3] 或微积分中的二重积分求得，但它们在数学中的出现可以追溯到欧几里得（《几何原本》第十二卷）和克尼多斯的欧多克索斯（约公元前395—337年）等希腊数学家。他们通过确立立体图形通常的比例关系和体积关系，发展了立体几何。例如，欧多克索斯证明了球的体积与其半径的立方成正比，而棱锥的体积是底面和高度相同的棱柱体积的三分之一。

希腊数学家对立体及其体积进行了详细研究，而证据表明，早在希腊人之前，巴比伦人和古埃及人就已经使用某些关于立方体、棱柱和圆锥体积的公式（参见 [Fri05-1]）。除了纯粹从数学角度出发，这些公式似乎还

[3] 对此话题感兴趣的读者可查阅 [KB38]，其中有对此话题的详细讨论。

被用于计算建筑项目所需的材料，例如挖坑、开凿运河或建造砖墙。这类体积公式对建筑工人会大有帮助。例如，根据立方体砖块的尺寸和预定墙体的尺寸，他们可以估算出砌完墙所需的砖块总数。此外，这些数据还可用于确定任何项目所需的工人数。

古代书记员计算棱锥的体积颇具挑战，这一点不足为奇。显然，古埃及人和巴比伦人知道棱锥的体积公式，但并未明确使用该公式。从巴比伦和埃及关于棱台的公式中，可以看出他们对该公式的隐含运用。设棱台 Δ的正方形底面边长为 a ，正方形顶面边长为 b ，高度为 h （见图11）。从数学泥板**BM 85194**[4] ，可知，巴比伦人使用了体积公式

$$V_{\Delta}^{B}=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2}\right]h \tag{4}$$

来计算棱台 Δ 的体积。

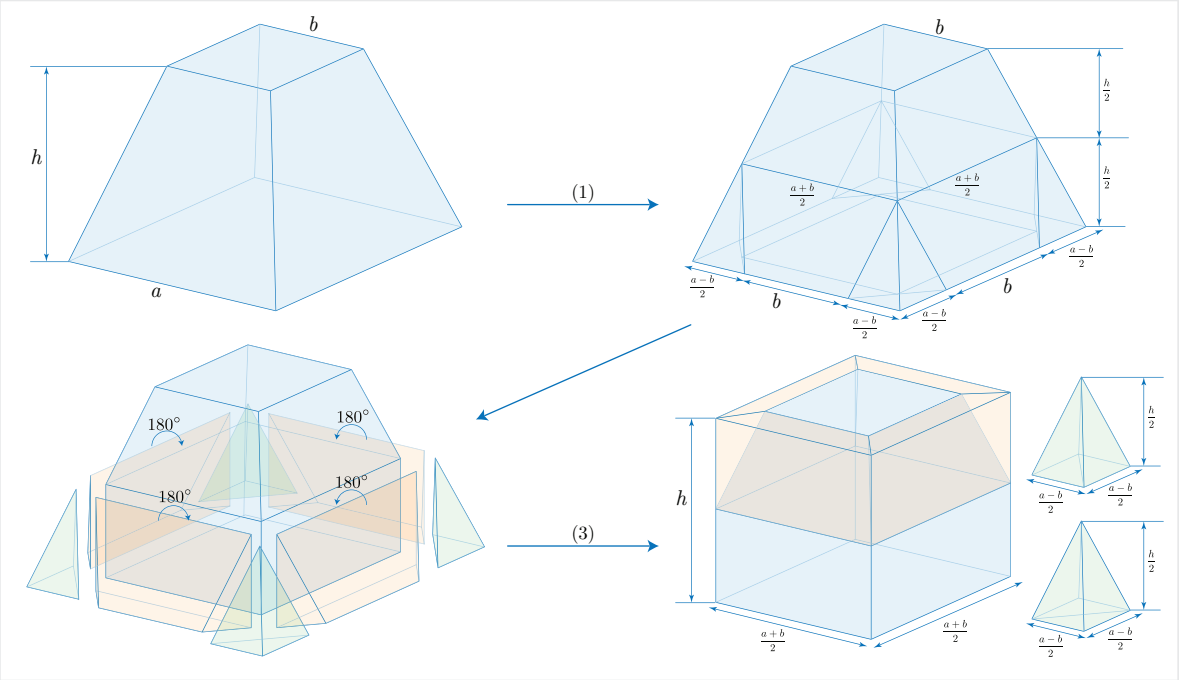


图 11：巴比伦棱台体积公式

获得这个公式的一种方法是采用图11中所示的“切割与拼接”法。[5]首先沿棱台的四个顶点垂直切开，得到四个高度为$\frac{h}{2}$ 、底面边长为 $\frac{a-b}{2}$ 的棱锥。接着，从下半部分棱台的四个面上各切下一块多余部分，得到四个截头棱柱。然后将这四个多面体绕 180° 其顶面边缘旋转，并拼接到上半部分的各个面上

[4] 关于这段文本的部分内容的解读，见附录部分。[5] 更多详情见 [Hea21，第 II 卷，第 332–334]；[Mur00，第 88–93]；或 [Vai61，第 136–141]。

棱台，如图所示。我们还可以在适当的面上拼接两个小三棱锥，得到一对正方形底锥体。最后，我们得到一个尺寸为 h、 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\frac{a+b}{2}$ 的立方体，外加两个边长为 $\frac{a-b}{2}$ 、高度为$\frac{h}{2}$ 的正方形底锥体。这些立体的总体积恰好等于(4)中给出的数值。公式的第二部分清楚地证明，巴比伦人知道正方形底锥体体积公式。

另一方面，根据莫斯科纸草书[6]，古埃及人应用了以下公式

$$V_{\Delta}^{E}=\frac{h}{3}\left(a^{2}+ab+b^{2}\right) \tag{5}$$

对于同一个棱台（注意，这是将(3) 中的 $n=4$设为某值后得到的）。尽管这个公式与巴比伦人的公式不同，但两个公式是等价的。我们可以使用图**11** 所示的“切割与拼接”方法来推导出该公式（见 [NM14，第35-39]页）。这种方法唯一需要做的是：将四个角上高度为 h 的棱锥，替换为底面相同但高度为$\frac{h}{3}$ 的四个立方体。其余步骤只是如图所示的切割与拼接过程。

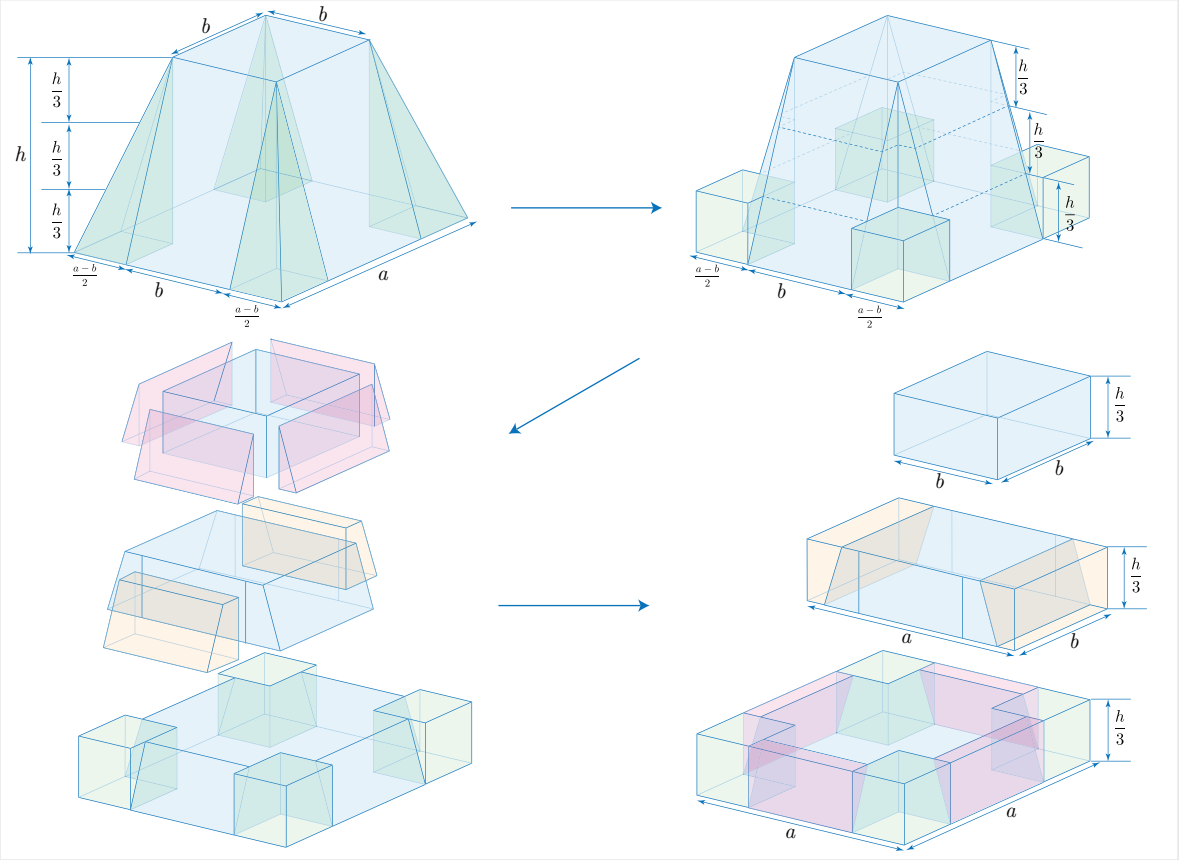
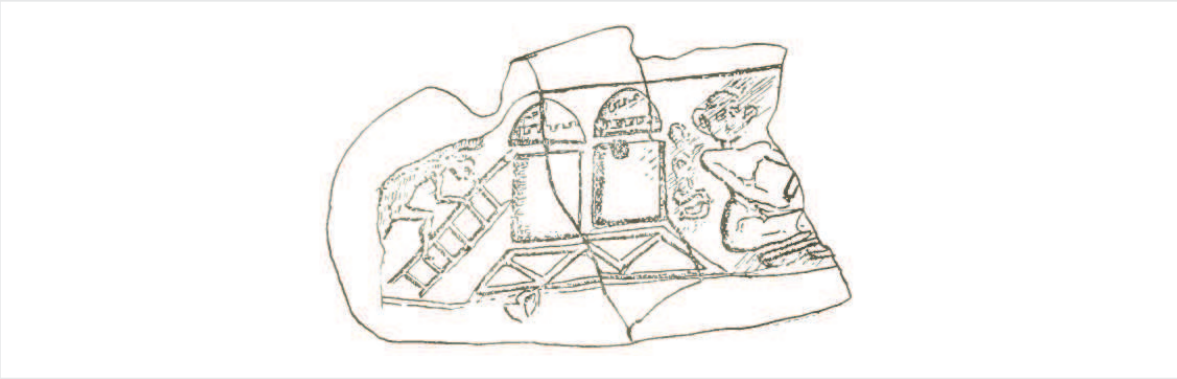


图12：棱台体积的埃及公式

[6] 莫斯科数学纸草书是一份古埃及数学纸草文献，包含若干关于算术、几何学和代数的问题。它收藏于莫斯科的普希金国立美术博物馆。

虽然没有给出棱锥体积的明确公式或直接计算方法，但有些泥板讨论了立体体积相关的问题，而这些问题的计算涉及棱锥的体积。其中两块泥板是**BM 96954** 和 SMT 第14号，内容涉及粮仓的体积。在数学文本和非数学文本中，古代粮仓的形状各有不同。带穹顶顶面的圆柱体是最常见的形状之一，也是最古老的形状之一，可见于印章印痕。例如，在**MDP XVI**的图 222中（见[Leg21，图版 15]），一名工人正爬上梯子，将谷物倒入一对圆柱形粮仓中（见图**13**）。这枚来自苏萨的古代印章使一些学者认为，圆柱体很可能是古代埃兰粮仓的形状。不幸的是，这使他们误解了一些数学文本，进而在解读时出现错误（例如见[BR61，TEXTE XIV]，）。



F图13：一对粮仓，见于一枚约制作于公元前3500—3000年的苏萨印章

在计算截头三棱柱的体积时（见 图 **14**），巴比伦和埃兰书吏通常需要计算一种特殊矩形棱锥的体积。这种截头三棱柱是埃兰人和巴比伦人熟悉的立体形状；由于其结构坚固，可能曾被用作建造粮仓等储存设施的范本。

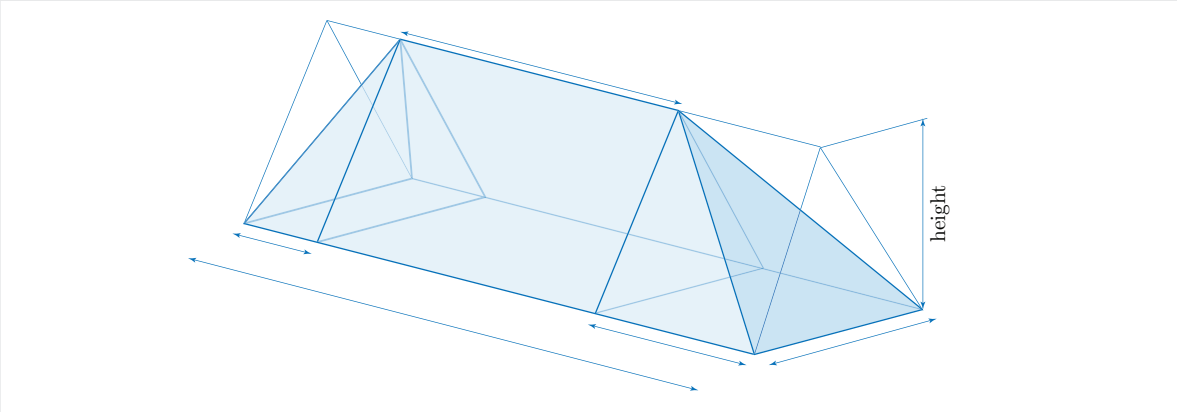


图14：截头三棱柱及其尺寸

让我们计算图14 中截头三棱柱的体积，假设其高度为 h，宽度为 y，棱脊为 x，长度为 z。我们还将长度的另外两部分记作 x_1 和 x_2（也就是连接在中间三棱柱两端的两个直矩形棱锥的长度）。显然，$z = x + x_1 + x_2$。一般而言，x_1 和 x_2 可能不相等，尽管巴比伦和埃兰书吏考虑的是特殊情况 $x_1 = x_2$。首先请注意，我们的立体由三部分组成：中间部分是一个三棱柱，左右两部分是两个矩形棱锥。三棱柱的体积为 $V_0 = \frac{xyh}{2}$，两个矩形棱锥的体积分别为 $V_1 = \frac{1}{3} \times x_1 \times y \times h = \frac{x_1yh}{3}$ 和 $V_2 = \frac{x_2yh}{3}$。因此，

$$V = V_0 + V_1 + V_2 = \frac{xyh}{2} + \frac{x_1yh}{3} + \frac{x_2yh}{3} = \frac{yh}{6} \times (3x + 2x_1 + 2x_2)$$

这意味着

$$V = \frac{2zyh + xyh}{6}. \tag{6}$$

正如我们将在下一节看到的，苏萨书吏正确计算了这种截头三棱柱的体积，其中两个棱锥相等（即 $x_1 = x_2$）。此外，对文本的数学分析表明，苏萨书吏知道一种特定矩形棱锥的体积公式，其高度和底面边长均为同一个数 h。他们使用公式 $\frac{h^3}{3}$ 计算体积，该公式源自常用公式“高度乘以底面积的三分之一”。

4 SMT第14号

如前所述，这段文本包含两个问题，均涉及一个假想谷堆的体积，其长度、宽度和高度分别为10尼丹（$\approx 60m$）、6尼丹（$\approx 36m$）和3尼丹（$\approx 18m$）。从数学角度看，第一个问题十分重要，因为其中正确计算了棱锥的体积，而且完整出现了数学术语 a-r´a*kayyam¯anum*。人们认为，该术语是苏美尔语词 a-r´a-gub-ba 的阿卡德语译词。遗憾的是，第二个问题几乎无法理解，因为文本的大部分内容已经遗失。

4.1 转写

正面：第1—18行

(L1) gur_7 对于14,24 sahar 3gi(sic) 是[*a-a-am*gar](
L2) 对于14,24sahar uˇs sag ˋ*u ka-aq-qa-da*(L3)
</style}mi-na gar za-e igi-12 ˇ*su-up-li pu-ṭ´u-* ´
ur(L4) 5 看5 对于14,24sahar *i-ˇs´ı-ma*(L5) 1,12 看3
gi(sic) *me-la-a-am* nigin9 看(L6) 9 对于3 *me-le-e*，反
向27 看(L7) 在1a-r´a *ka-aiia-ma-ni* 20 [sa]har ˇsˋ
a-lu-uˇs-ti(L8) ˇsˋ*a ka-aiia-ma-ni* ´a *tu-us₂-s₂a-bu* zi

(L9) 40 看 40 aˇs-ˇsum 2 sig gur₇ 对于 2 tab-ba (L10) 2(sic),20 看 1,20 对于 27 i-ˇs´ı-ma 36 看 (L11) 36 i-n[a] 1,12 zi 36 [看 tu]-´ur-ma (L12) 3 me-la-a-am nigin 9 ta-[mar igi-9 pu-ţ]´ u-´ur (L13) 6,40 看 6,40 对于 36 i-ˇs[´ı-ma](L14) 4 看 4 ka-aq-qa-du 3 me-l[a-a-am gar] (L15) [aˇs-ˇsu]m i-na am-ma-at am-ma-a[t i-ku-lu](L16) [对于 2] tab-ba 6 看 6 sag 6 [对于 4](L17) [ka-aq-qa]-di dah 10 看 10 [uˇs](L18) [· · · · · · · · · ·]反向：第1至7行 (L1) [· · · · · T] A(?) [· · · · · · ·](L2) [· · · · ·] 3 me-la-a-am [对于 12](L3) [i-ˇs´ı-ma] 36 看 3[6对于 24 i-ˇs´ı-ma](L4) [14],24 看 sahar 14,2[4 · · · · ·](L5) 对于 8 na-aˇs-pa-ak gur₇ [i-ˇs´ı-ma](L6) 1,55,12 gub-ma 20,30(sic) [gur₇](L7) `u 2-ˇsu 24 gur ˇ se-u[m ki-a]-am ne-[p´e-ˇsum]

4.2 翻译

正面：第1至18行

(L1) 谷堆。要得到体积 14,24，我取 3（尼丹，即 6）吉作为高度。(L2-3) 对于体积 14,24，长度、宽度和顶面应取多少？你把深度的（常数）12 求倒数，(L4) 得到 0;5。将 0;5 乘以体积 14,24，(L5) 得到 1,12。将高度 3（尼丹，即 6）吉平方，得到 9。(L6) 再将 9 乘以高度 3，得到 27。(L7-8) 从正规数 1 中减去体积的 0;20，即你加在（中间部分上的）侧翼的正规数（1）的三分之一，(L9) 得到 0;40。由于谷堆有两处残缺部分，将 0;40 加倍，(L10) 得到 2;20（误写为 1;20）。将 1;20 乘以 27，得到 36。(L11) 从 1,12 中减去 36，得到 36。回过头来，(L12) 将高度 3 平方，得到 9。求 9 的倒数，(L13) 得到 0;6,40。将 36 乘以 0;6,40，(L14) 得到 4。4 是顶面（长度）。记下高度 3。(L15-16) 由于谷堆边长的倾斜度为每 1 k`uˇs ($\approx 50cm$) 对应 1 k`uˇs，将高度 3 加倍，得到 6。6 是宽度。(L16-17) 将 6 加到顶面（长度）4 上，得到 10。10 是长度。(L18) · · · · · · · · · · 。

反向：第1至7行

(L1)· · · · · · · · · · · ·。(L2-3) 将高度 3 乘以 12 · · ·，得到 36。(L3-4) 将 36 乘以 24，得到 14,24。(L4-7) 将体积 14,24, · · · 乘以 8,0,0（谷堆的储存（常数）），得到 1,55,12,0,0（s`ıla），结果成立；20,30（误写为 23）gur_7 和 2,24 gur 是大麦。步骤就是这样。

4.3 SMT第14号中的专业术语

在讨论这些题目的数学含义之前，我们先解释文中出现的几个专业术语。

长度单位 **吉**

由于1吉等于半个尼丹（≈ 3米），第1行和第5行中的数值3吉若表示“3（尼丹，即6）吉”，似乎就是个错误。不过，我们知道数学文献中偶尔也会使用相同的表达方式，例如：

(i) 30吉“0;30（尼丹，即1）吉”，(ii) 30 k `uˇ
s“0;30（尼丹，即6）k`uˇs”。
请注意，基本长度单位尼丹总是省略不写。由于巴比伦数学中没有“六十进制小数点”，抄写员在这道题中使用了笨拙的表达式3吉。这种书写数字的方式也见于一篇约写于公元前2400年的苏美尔铭文（参见[Mur15，Mur17]）。

矩形棱锥

谷堆(gur_7)由一个直三棱柱和两个分别连接在该三棱柱顶面与底面的矩形棱锥组成（见图15）。

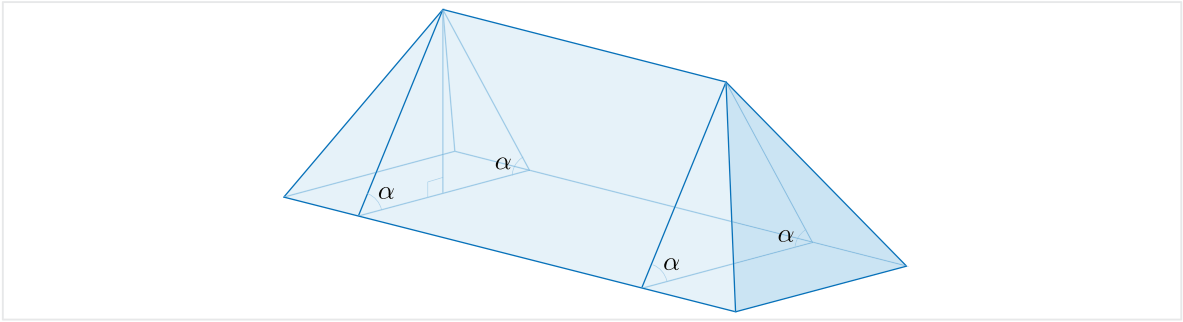


图15：一个假想谷堆

第8行中，这个棱锥被称为 ´a(翼)，意为“（谷堆的）一侧翼”；第9行中也称为 sig gur_7 “谷堆的一处破损部分”。

如前所述，Bruins 误解了本文中的形状，并错误地认为这是一个立体形状，如图16 所示，该形状代表了这个谷堆。Friberg

认为，苏萨印章的印痕（见图**13**）是造成这一错误的原因（[Fri07-2]）。

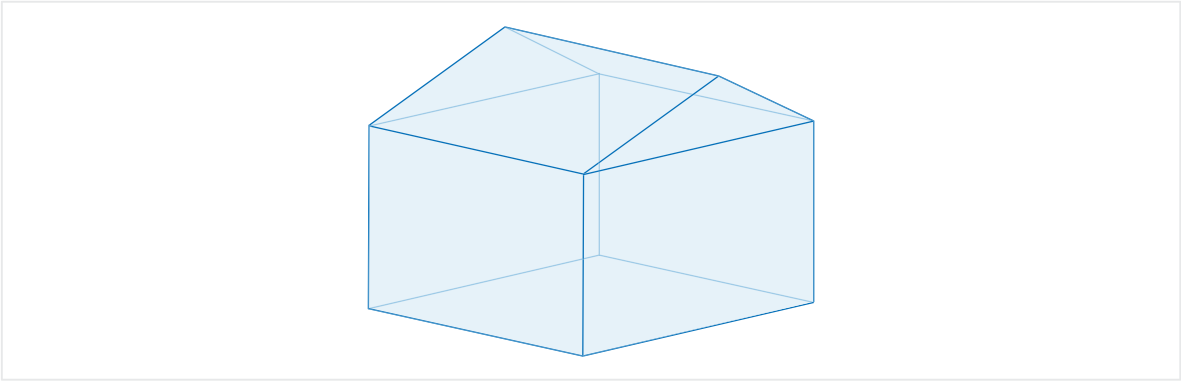


图16：Bruins 提出的谷堆

形容词 ***kayyam¯anum***

在几篇苏萨数学文献中，阿卡德语形容词 *kayyam¯anum*“正常的、规则的、通常的”与数字 1、2 或 3 连用。它用来确定一个数的整数部分，也就是说，例如，它用于指六十进制数 $2 \times 60^{\pm n}$ 中的数字 2：

$$2 \times 60^{2} = 2,0,0 \quad \text{and} \quad 2 \times 60^{-4} = 0;0,0,0,2.$$

此外，SMT 第7号中的 5 a-r´a 可能是 5 a-r´a*kayyam¯anum*的缩写，因为 5 和 7 作为 35 的质因数同时出现，前者被称为 “ 因数 5”，而后者没有任何修饰（见 [Mur92-2]）。因此，a-r´a*kayyam¯anum*这一术语很可能专用于数字 1、2、3 和 5；它是苏美尔语术语 a-r´a-gub-ba的译文。换句话说，从倒数可以用有限六十进制分数表示这一意义上说，这些数字是“正常的、规则的”。苏美尔人一定知道数字 2、3 和 5 相对于六十进制底面是“规则的”，苏萨和巴比伦书吏也知道这一点。

平面的倾斜度

第15行出现了一个巴比伦数学术语，用来定义平面的倾斜度。典型例子如下：

i-na 1 k`uˇs $x$k `uˇs (k ´u) `ı-k ´u

“在 1 k `uˇs（高度上），它吃了 $x$k`uˇs（饲料）”。

这个表达式的基本含义被认为也源自苏美尔语，即“水侵蚀了河岸”。它指的是河面与受侵蚀的河岸斜坡之间形成的侵蚀角，在描绘河流和河岸横截面的 α 图17中以此表示。

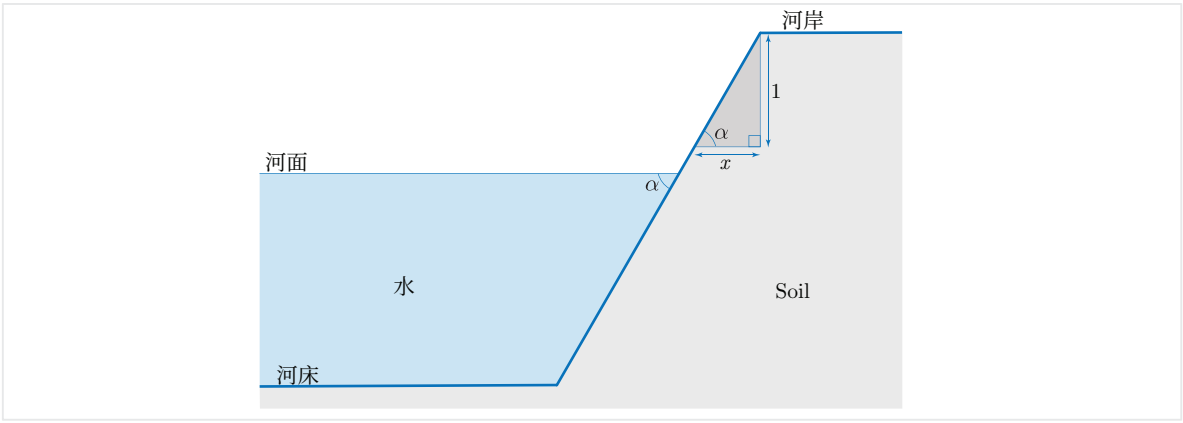


图17：河岸侵蚀

考虑图17中的直角三角形，其底边分别为 1 k ̀u ̌s和 xk ̀u ̌s，我们可以计算 tan(α)。$= \frac{1}{x}$在这个问题中，由于 $x = 1$，地面与谷堆边长之间的夹角可计算为 $\alpha = \arctan(11) = \arctan(1) = 45°$（见图15 和图18）。

4.4 数学计算

现在我们来分析 SMT 第14号的第一道题。题目中只提供了两项数据：谷堆的体积和高度，显然不足以确定所讨论立体图形的形状。不过，仔细考察计算过程有助于理解抄写员的几何意图。该立体图形是一个截头三棱柱，如图18所示。请注意，正如我们在上一节所说，图中直角三角形的两个锐角都是 45°，因此它们也是等腰三角形。

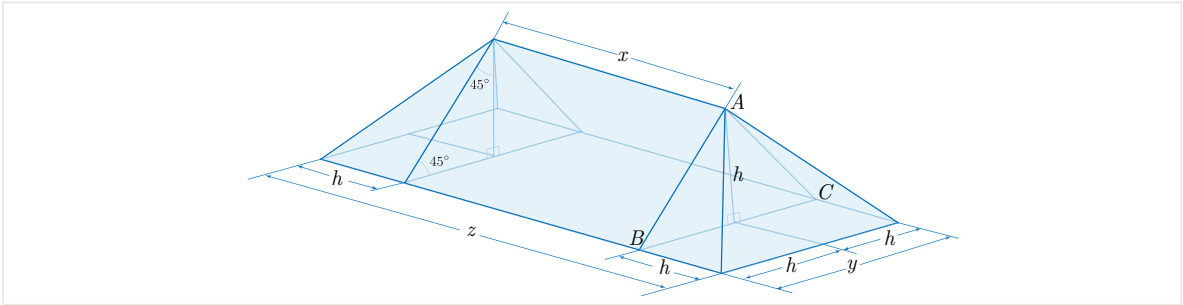


图18：想象中的埃兰谷堆的尺寸

如图18所示，我们用 x表示顶面（长度），用 y表示底面（宽度），用 z表示底面（长度），用 h表示高度。请注意，此处高度的值为$h = 3$ 尼丹。由于在等腰直角三角形中，高度 h 平分底面 BC

$\triangle ABC$，抄写员正确地假定

$$\begin{cases} y = 2h \\ z = x + 2h. \end{cases} \tag{7}$$

从文本的译文可知，抄写员使用了以下公式来计算 V 图18中三维立体的体积：

$$V = xh^2 + 2(1 - 0;20)h^3. \tag{8}$$

请注意，这个公式与(6)一致，因为在 $y = 2h$ 和 $z = x + 2h$ 代入(6)后，我们得到

$$\begin{aligned} V &= \frac{yh}{6}(2z + x) \\ &= \frac{(2h \times h)}{6}(3x + 4h) \\ &= xh^2 + \frac{4}{3}h^3 \\ &= xh^2 + 2\left(1 - \frac{1}{3}\right)h^3 \\ &= xh^2 + 2(1 - 0;20)h^3. \end{aligned}$$

我们来拆解一下公式(8)。首先，请注意，我们的立体由两个相同的矩形棱锥组成，分别记作 P_1 和 P_2，以及一个三棱柱，记作 Λ （见图19）。

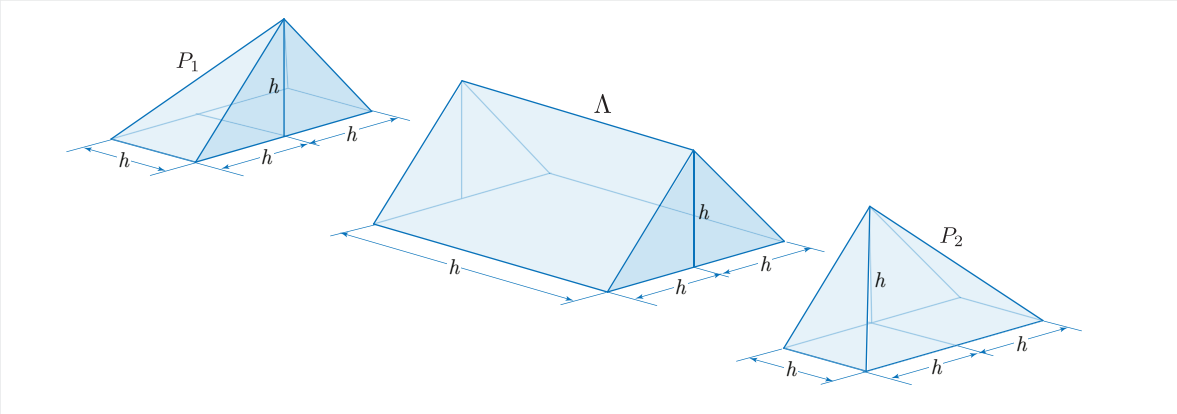


图19：拆分一个假想谷堆

显然， Λ 的体积由“底面积乘高”得出：

$$V_\Lambda = S_{\triangle ABC} \times x = \left[\frac{1}{2}(h)(2h)\right] \times x$$

so

$$V_\Lambda = h^2 x. \tag{9}$$

剩余部分2 $\left(1-\frac{1}{3}\right)h^3$ 是两个相同矩形棱锥的总体积P_1 和 P_2。因此，由(8) 可知

$$V_{P_1} = V_{P_2} = (1-0;20)h^3$$

或者等价地

$$V_{P_1} = V_{P_2} = \left(1-\frac{1}{3}\right)h^3 \tag{10}$$

这证　　实苏萨书吏已计算出这些体积的正确数值　　s.

长方形棱锥体积公式

公式 (10) 的表述揭示了关于棱锥体积的两个事实。首先，苏萨书吏假定，高度为 h、宽度为 h 且长度为 h 的矩形棱锥体积为$\frac{1}{3}h^3$。其次，如果从尺寸相同的立方体体积中减去这个数值，他们便得到高度为 h、长度为 h 且宽度为 $2h$的矩形棱锥体积。下文将对第一个事实作几何解释。

设有三个高度为 h 、底面为边长 h 的正方形的矩形棱锥副本。若以某种方式旋转每个副本，再将它们拼合起来，就会得到一个尺寸为 h、h、h 的立方体，如图 **20**所示。显然，所得立方体的体积等于三个相同棱锥体积之和。由于埃兰书吏已知立方体的体积，即 h^3，他们便可推得，尺寸为 h、h、h 的矩形棱锥体积必为$\frac{1}{3}h^3$。

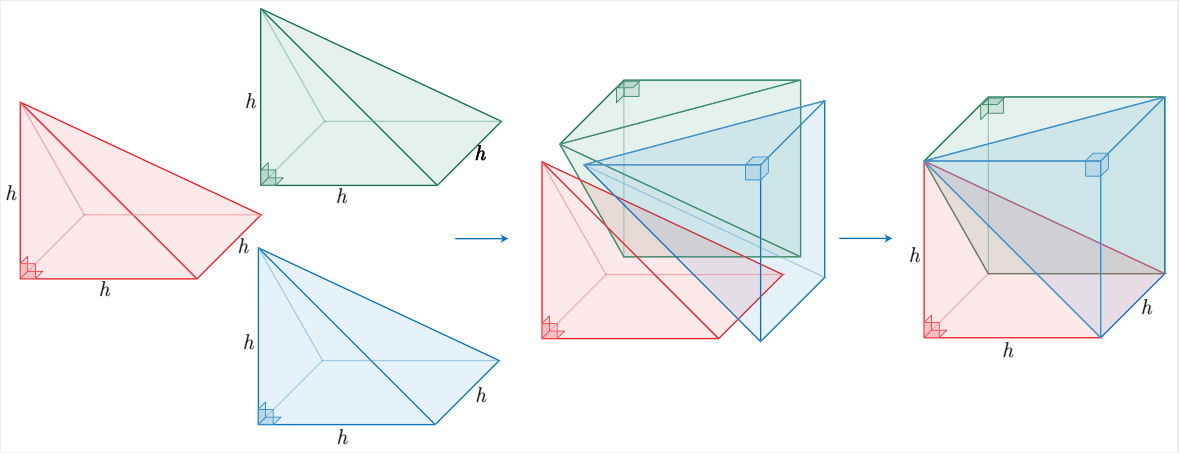


图20：将一个立方体分成三个相等的棱锥

第二个事实现在就清楚了。为此，取一个立方体 Γ，其长度为 h，宽度为h，高度为 h。如图**20**所示，这个立方体由三个全等的矩形棱锥 Γ_1 组成，它们的长度、宽度和高度相等 h。将其中两个恰当地拼接起来，就得到一个矩形棱锥 Γ_2，其长度为 h，宽度为 $2h$，高度为 h （见图 **21**）。

这意味着 Γ 是 Γ_1 和 Γ_2 的并集，这说明

$$V_\Gamma = V_{\Gamma_1} + V_{\Gamma_2} \tag{11}$$

并且

$$V_\Gamma = 3V_{\Gamma_1}. \tag{12}$$

由于 $V_\Gamma = h^3$，因此 (11) 和 (12) 都意味着 $V_{\Gamma_2} = h^3 - \frac{1}{3}h^3$ 这证明了 (10)。

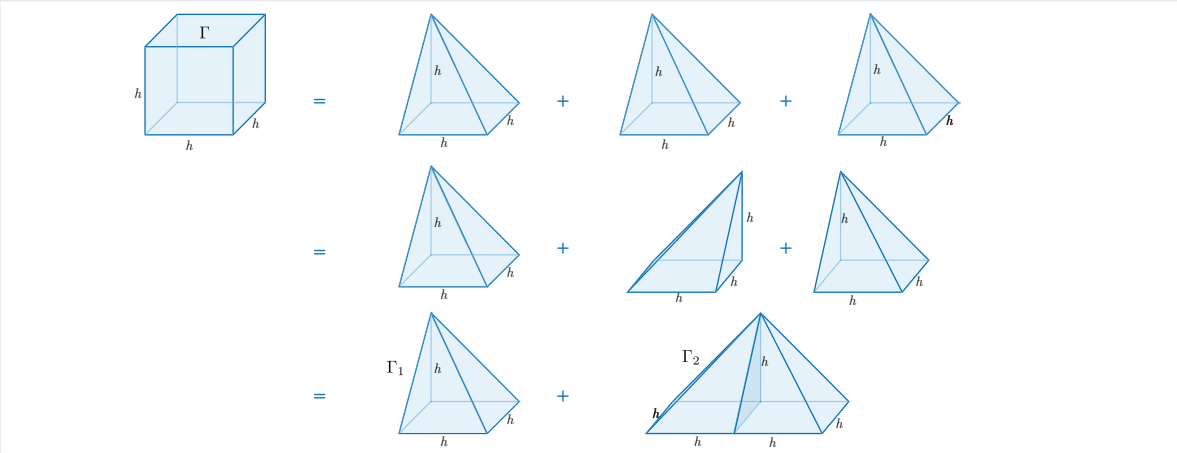


图21：矩形棱锥的体积

现在，我们回到 SMT 第14号的第一个问题。第1至3行告诉我们，谷堆的体积 $V = V_\Lambda + V_{P_1} + V_{P_2}$ 等于 14，即 24 体积 sar，因此由(8) 可得

$$xh^2 + 2(1 - 0;20)h^3 = 14,24. \tag{13}$$

由于[7]

$$1 \text{ kùš} = 0;5 \text{ nindan}$$

and

$$1 \text{ volume-sar} = \left(1 \text{ nindan}^2\right) \times (1 \text{ kùš}) = 0;5 \text{ nindan}^3$$

因此，根据第3至4行，

$$14,24 \text{ volume-sar} = (14,24) \times (0;5) \text{ nindan}^3 = 1,12 \text{ nindan}^3.$$

根据第 5 至 14 行，为了计算 x 的值，我们可以将 $h = 3$尼丹代入(13) 并化简。请注意，我们已将涉及的所有单位都换算为

[7] 请注意，1 尼丹等于 12 k`u˘s。

尼丹。我们有

$$\begin{aligned}
& xh^2 + 2(1-0;20)h^3 = 14,24 \\
\Longrightarrow\quad & 3^2x + 2(1-0;20)3^3 = 1,12 \\
\Longrightarrow\quad & 9x + (1;20) \times 27 = 1,12 \\
\Longrightarrow\quad & 9x + 36 = 1,12 \\
\Longrightarrow\quad & 9x = 1,12 - 36 \\
\Longrightarrow\quad & 9x = 36 \\
\Longrightarrow\quad & x = \frac{1}{9} \times 36 \\
\Longrightarrow\quad & x = (0;6,40) \times 36 \\
\Longrightarrow\quad & x = 4.
\end{aligned}$$

最后，根据第 16–17 行，我们可以用(7) 来表示

$$y = 2 \times 3 = 6$$

and

$$z = 4 + (2 \times 3) = 4 + 6 = 10.$$

在第二道题中，体积 sar 14,24 通过容量常数s`ıla换算为单位 $8{,}0{,}0$[8]:

$$14,24 \text{ volume-sar } = (8,0,0) \times (14,24) \text{ sìla} = 1,55,12,0,0 \text{ sìla}$$

进而换算为

$$23 \text{ gur}_7 \text{ and } 2,24 \text{ gur}$$

其中 gur_7 是容量最大的单位；在古巴比伦时期，1 gur_7 $=$ 5,0,0,0 s`ıla，而且如前所述，1 gur $=$5,0 s`ıla。

5 结论

显然，埃兰书吏和巴比伦同行一样，熟悉立体几何的基础知识，也知道如何计算立方体、棱柱和截头棱锥等三维图形的体积。

我们对 SMT 第14号的数学解释表明，苏萨的抄写员使用了一种长方形棱锥体积公式，能够据此算出正确的数值。这证实了他们懂得棱锥的体积公式，即使他们可能并未明确表述出来；他们具备这种能力，对于研究数学史的人而言颇具意义。

附录：数学泥板 BM 85194

本附录给出 BM 85194 反向第41—49行的转写、翻译和数学解释。

[8] 实际上，1 体积 sar 等于 5,0,0 s`ıla（或 18,800 升）。这里的常数略大一些，原因不明！

转写

反面第二栏：第41—49行

(L41) h◡i-ri-tum 10-ta-`am mu-h◡u 18 sukud i-na 1 k`u˘s 1 ˘s`a-gal
(L42) s`a-s´um `u sah◡ar-h◡i-a za-e 5 `u 5 ul-gar 10 ta-mar (L43)
[10] a-na 18 sukud i-˘si 3 ta-mar 3 i-na 10 ba-zi 7 (L44) [ta-mar] s`
a-s´um n´ıgin-na s`a-s ´um `u mu-h◡u 10 ul-gar 17 ta-mar (L45)
[$\frac{1}{2}$ 17 h◡e-p´e] 8,30 ta-mar nigin 1,12,15 ta-mar (L46) 1,12,[15gar]-
ra igi-2-g´al 3 dirig ˘sa mu-h◡u ugu (L47) s`a-s´um nig[in ˘su˘sana
] 45 a-na 1,12,15 dah◡-h◡a-ma (L48) 1,13 ta-mar 1[8] a-na 1,13 i-˘si
22,30 (sic) ta-mar (L49) 2 (`e˘se) 1 (iku) 1 (ubu) g´an sah◡ar-h◡i-a
ki-<a-am>ne-p´e-˘sum

译文

反面第二栏：第41—49行

（第41行）地面上挖了一个坑。上表面的每条边长为10（尼丹 $\approx 60m$）。深度为18（k`u˘s $\approx 9m$）。斜坡的倾斜度为每1 k `u˘s ($\approx 50cm$)下降1（k`u˘s）。（第42行）（底面）边长和体积是多少？（进行运算时），将0;5和0;5相加，得到0;10。（第43行）将0;10乘以深度18，得到3。从10中减去3，得到7，（第44行）即底面的边长。另一方面，将底面的边长与上表面的边长相加，得到17。（第45行）将17减半，得到8;30。将其平方，得到1,12;15。（第46行）写下1,12;15。1 2 是上边长与底边长之差的3。（第47行）将其平方，并（取）1 3 （所得结果）。将0;45加到1,12;15上，（第48行）得到1,13。将18乘以1,13，（则）得到22,30（21,54的误差）。（第49行）2（`e˘se）1（iku）1（ubu）（= 22，30体积 sar）是坑的体积。步骤就是这样。

数学解释

这里，抄写员考虑的是一个棱台，其底面和顶面均为正方形，边长分别为 a 和 b，高度（深度）为 h （见 图22）。根据文本中的日期， $a = 10$ 尼丹 $h = 18$ 和 $h = 18$ k`u˘s。由于斜坡为 1，图中的角 α 必定是 $45°$，所以

$$1 = \tan(45°) = \tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{a-b}{2}}$$

因此

$$h = \frac{a-b}{2}.$$

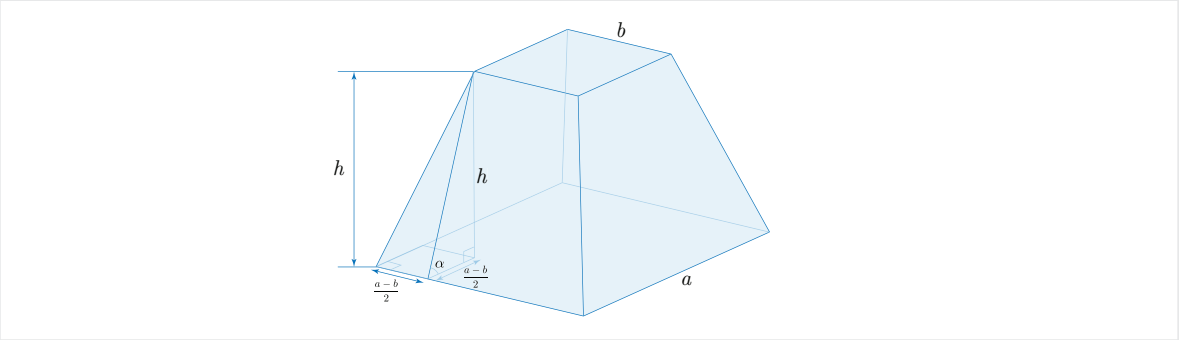


图 22：根据 BM 85194 得出的棱台体积

由于 $a = 10$尼丹、 $h = 18$k`u˘s 和 1 k `u˘s $= 0;5$ 尼丹，我们得到

$$a - b = 2 \times (0;5) \times 18 = 3 \text{ nindan.}$$

这意味着

$$b = a - (a - b) = 10 - 3 = 7 \text{ nindan}$$

and

$$a + b = 7 + 10 = 17 \text{ nindan.}$$

因此

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = (8;30)^2 = 1,12;15 \text{ nindan}^2$$

and

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \times (1;30)^2 = 0;45 \text{ nindan}^2.$$

体积为

$$\begin{aligned} V &= \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] h \\ &= 18 \times (1,12;15 + 0;45) \\ &= 18 \times (1,13) \\ &= 21,54 \text{ volume-sar.} \end{aligned}$$

参考文献

[All89] G. J. Allman，《从泰勒斯到欧几里得的希腊几何》，都柏林大学出版社丛书，1889年。[AS03] M. Atiyah 和 P. Sutcliffe，《物理、化学与几何中的多面体》，《米兰数学杂志》第71卷（2003年），第33–58页。[BR61] E. M. Bruins 和 M. Rutten，《苏萨数学文本》´， [TMS], Paul Geuthner 东方学书店，巴黎，1961年。

[Cro99] P. R. Cromwell, 《多面体》，剑桥大学出版社，1999年。[Fri05-1] J. Friberg, 《埃及数学与巴比伦数学之间意想不到的联系》，世界科技出版公司，2005年。[Fri07-2] J. Friberg, 《希腊数学中巴比伦起源的惊人痕迹》，世界科技出版公司，2007年。[Har00] R. Hartshorne, 《几何：欧几里得及其后》，施普林格，2000年。[Hea21] S. T. Heath, 《希腊数学史：第I–II卷》，牛津大学出版社，1921年。[KB38] W. F. Kern 和 J. R. Bland, 《立体测量（附证明）》，约翰·威立父子公司，第二版，1938年。[Leg21] L. Legrain, 《波斯考古考察回忆录——苏西亚纳考察团（MDP）》，第XVI卷，Ernest Leroux 出版社，巴黎，1921年。[NM14] S. Nakamura 和 K. Muroi, 《数学史：数学发展的5000年》（日文），共立出版株式会社，日本，2014年。[Mur92-2] K. Muroi, 《对苏萨数学泥板第7号的新解读》，《巴比伦数学研究》第2号（1992年），第14–19页。[Mur00] K. Muroi, 《巴比伦数学》（日文），东京大学出版会，2000年。[Mur15] K. Muroi, 《苏美尔最早的复利实例：四分之三的七次方》，arXiv:1510。00330 [math.HO], 2015, 9 页码：https://arxiv.org/pdf/1510.00330.pdf。[Mur17] K. Muroi, 《苏美尔人的数学》（日文），共立智慧精选17，日本，2017年。[Vai61] A. A. Vaiman, 《公元前三千年至前一千年的苏美尔—巴比伦数学》（俄文），莫斯科，1961年。