arXiv:2303.13260v2 [math.RA] 8 Jun 2023

接触海藻代数的分类

Vincent E. Coll, Jr.* 和 Nicholas Russoniello**

*利哈伊大学数学系，伯利恒，宾夕法尼亚州 18015：vec208@lehigh.edu**威廉与玛丽学院数学系，威廉斯堡，弗吉尼亚州 23185：nrussoniello@wm.edu

2023年6月12日

摘要

Gromov 的一项著名结果保证，任意连通、非紧致的奇数维李群上都存在接触结构。一般而言，这类结构并非在左平移下不变。要确定哪些李群具有左不变接触结构，归根结底就是判断李代数 $\mathfrak{g}$ 何时是接触的；也就是说，何时存在一个 1-形式 $\varphi \in \mathfrak{g}^*$，使得 $\varphi \wedge (d\varphi)^k \neq 0$.

一般情况下，这仍是一个未解问题；不过，我们通过证明指标为一的海藻代数当且仅当它是拟约化的才是接触的，解决了这一问题在一个重要范畴中的情形——这个范畴中的代数有一个颇为形象的名称：海藻代数。海藻代数由 Dergachev 和 Kirillov 引入，他们开创了其指标理论的研究；此后，约瑟夫、 Panyushev 、 Yakimova 、 Coll 等人完成了这项工作。请注意，接触李代数的指标为一，但指标为一并非其特征。借助 Panyushev、Baur、Moreau、Duflo、哈勒吉、托拉索、Yakimova 和 Ammari 的近期研究成果——他们共同完成了拟约化海藻代数的分类——我们的等价关系由此给出了接触海藻代数的完整分类。值得指出的是，A 型和 C 型海藻代数事实上都是拟约化的（这是 Panyushev 的一项结果），因此在这两类中，仅凭指标为一就足以确保接触形式的存在。

2020年数学主题分类：17Bxx，53D10 关键词和短语：接触李代数，接触结构，海藻代数，拟约化，稳定

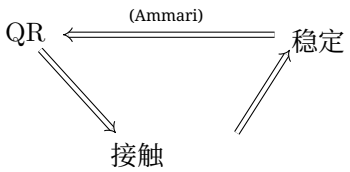
1 引言

这篇短札是三篇系列论文的收尾之作；根据以下定理，它给出了接触海草代数（或双抛物李代数）的完整分类。

定理5. 指标为一的海草代数是接触的，当且仅当它是拟约化的。

本系列的前两篇论文分别通过证明，在 A 型（Coll 等人 [**12**], 2022）和 C 型（Coll 和 Russoniello [**13**], 2022）海藻代数这一经典情形中，指标为一足以判定该海藻代数具有接触结构，从而确立了定理5。这一结果出人意料，因为接触李代数的指标为一——但这并非其特征性性质。这两篇前导论文采用构造性的组合方法，为指标为一的海藻代数构造显式的接触形式。Panyushev 关于 A 型和 C 型海藻代数均为拟约化代数的结果（[**25**], 2005），为上述定理的最终形式提供了线索。尽管全面的定理5涵盖了前两篇论文的结果，但本文用于确立这一分类的方法是代数性的、存在性的，而非构造性的。更具体地说，我们借助 Ammari 的一系列近期论文中提出的结果（[**3**], 2014； [**4**], 2014；以及 [**2**], 2022），这些结果证明，海藻代数的“稳定性”蕴含其拟约化性。由此得到的定理5证明思路可用下图表示。

Vincent E. Coll, Jr.（vec208@lehigh.edu）是通讯作者。



备注。乍看之下，定理5似乎只是接触与拟约化这两个概念之间的简单等价；然而，Panyushev [**25**], Baur 和 Moreau（[**6**], 2011）、Duflo等人（[**18**], 2012）、Panyushev 和 Yakimova（[**26**], 2018）以及 Ammari [**2**] 的共同研究，已经给出了拟约化海藻代数完整而明确的分类。因此，按照该术语的通常含义，定理5提供了具体的分类。

本文的结构如下。第2节先介绍一些预备性的技术结果，随后在第3节证明定理5。第4节是简短的后记，为定理5提供更广阔的背景。由此，我们得以提出几个值得持续研究的有趣后续问题。

2 预备知识

约定：所有李代数（$\mathfrak{g}, [-,-]$）均定义在 $\mathbb{C}$上。

若一个 $2k+1$–维李代数 $\mathfrak{g}$ 存在接触形式，则称其为接触李代数；也就是说，存在一个 1-形式$\varphi \in \mathfrak{g}^*$，使得 $\varphi \wedge (d\varphi)^k \neq 0$. 若 G 是 $\mathfrak{g}$ 对应的李群，则每个这样的 φ 都会在 G上诱导出一个左不变接触结构，并且 $\varphi \wedge (d\varphi)^k$是 G上的体积形式。Gromov 的一项现已成为经典的结果（[**21**], 1969）保证，任意连通、非紧的[1] 奇数维李群都存在接触结构。但一般而言，这类结构并不在李群的左平移下保持不变。要找出哪些李群具有左不变接触结构，归根结底是要编目接触李代数；这一问题至今仍是一个备受关注的前沿课题（参见 [**1**], [**10**], [**15**], [**20**], [**23**], 和 [**27**]）。本文对海藻代数给出了完整分类。

回顾一下，海藻代数，或简称“海藻”，是约化李代数 $\mathfrak{r}$ 的一个子代数，由两个抛物子代数的交集定义；这两个子代数的和为 $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{r}$。[2] Dergachev 和 Kirillov 最早于 [**14**], 2000 引入海藻代数，并研究了此类代数在 $\mathfrak{r} = \mathfrak{gl}(n)$ 情况下的“指标”。形式上，李代数 $\mathfrak{g}$ 的指标是一种代数不变量，由 Dixmier 首次于（[**16**],）1974年提出，定义如下：

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{\varphi \in \mathfrak{g}^*} \dim(\ker(B_\varphi)),$$

其中，B_φ 是由 $B_\varphi(x, y) = -d\varphi(x, y) = \varphi([x, y])$ 给出的反对称 Kirillov形式，对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$。接触代数的指标必为一。

为了补充本研究所需的概念，我们需要了解李代数的“拟约化性”和“稳定性”。若 $\mathfrak{g}$ 是一个中心为 $Z(\mathfrak{g})$ 的代数李代数（特别地，若它是一个海藻代数），则当存在一个1-形式 $\varphi \in \mathfrak{g}^*$，使得 $\ker(B_\varphi) \not\subset Z(\mathfrak{g})$ 是一个约化李代数，且其中心由 $\mathfrak{g}$. 的半单元素构成时，$\mathfrak{g}$ 称为拟约化的。这样的1-形式 φ 称为约化型形式。拟约化李群最早由 Duflo [**17**], 1982 引入，其中特别证明了，约化型形式的余伴随轨道可与该群的平方可积酉表示相联系（见 [**5**], [**18**], 和 [**24**]）。近期的研究促成了拟约化海藻代数的分类（见 [**2**],[**6**],[**18**],[**25**], 和 [**26**]）。这里值得关注的是 Duflo等人（[**18**], 定理`3.4.1）的一个结果，该结果特别证明了所有拟约化海藻代数都存在稳定 1-形式，即一个1-形式 $\varphi \in \mathfrak{g}^*$

[1]这里所讨论的李代数所对应的群是非紧的，因为所有紧复李群必然都是阿贝尔群。[2]这种不依赖基的海藻代数定义，使得其他人将这些代数称为 *biparabolic*。形象生动的“海藻”一词，源自这些代数以经典型的矩阵形式表示时所呈现的波浪状形态。

对于该形式，存在一个扎里斯基开邻域 $V \ni \varphi$ ，使得对所有 $\psi \in V$，核 $\ker(B_\varphi)$ 和 $\ker(B_\psi)$ 在 $\mathfrak{g}$. 的代数伴随群作用下共轭。由于我们将在定理5的证明中考虑稳定 1-形式，下面给出一个有用的等价表述。

引理 1（Tauvel和Yu [28], Th´eor`eme 1.7，2004年；参见Ammari [4], 2014）。设 $\mathfrak{g}$ 为代数的。1-形式φ 稳定，当且仅当

$$[\ker(B_\varphi), \mathfrak{g}] \cap \ker(B_\varphi) = \{0\}.$$

我们将存在稳定 1-形式的李代数称为稳定李代数，因此根据Duflo等人的结果，每个拟约化海草代数都是稳定的。此前，所有稳定海藻代数是否都是拟约化的，仍是一个悬而未决的问题；直到Ammari通过一系列文章 [2], [3], 和 [4] 证明，对于海藻代数，这两个概念是等价的。

定理 2（Ammari [2], Th´eor`eme 5.4； [3], 命题4.22、4.24、5.27和5.28； [4], Th´eor`eme4.2.2）。海藻代数是拟约化的，当且仅当它是稳定的。

结合引理 1 和定理 2，我们已做好准备，可在下一节继续对接触海藻代数进行代数分类。

3 主要结果的证明

本节给出定理5的证明。我们首先介绍一些术语并证明两个技术性引理，其中第一个引理是接触李代数的一个经典刻画。

引理 3. 设 $\mathfrak{g}$ 是任意李代数。若 $\operatorname{ind}\ \mathfrak{g} = 1$，则满足 $\ker(B_\varphi) = \mathbb{C}x$ 的正则1-形式 $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ 是接触形式，当且仅当 $\varphi(x) \neq 0$.

证明。见 [12] 中的引理23。 □

引理 3 表明，在指标为1的李代数 $\mathfrak{g}$ 上存在接触形式，等价于存在一个与正则1-形式 φ 相关联的 Reeb 向量；也就是说，正则 $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ 是接触形式，当且仅当存在某个 $x_\varphi \in \mathfrak{g}$ ，使得 $\ker(B_\varphi) = \mathbb{C}x_\varphi$ 且 $\varphi(x_\varphi) = 1.$ 。Reeb 向量的确定给出了接触李代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}x_\varphi \oplus \ker(\varphi)$ 的一个有用的向量空间分解。子空间 $\ker(\varphi) \subset \mathfrak{g}$ 定义了底层李群 G 上的接触结构 $\mathfrak{g}$ （见 [19]），这样的分解进一步导出 $\mathfrak{g}$ 关于 φ 的一个特定接触基，具体描述如下一个引理所示。

引理 4（Goze 和 Remm [20], 2014；参见 Alvarez 等人 [1], 2021）。设 $\mathfrak{g}$ 是一个带有接触形式 $\varphi \in \mathfrak{g}^*$. 的（$2k+1$）–维接触李代数。那么存在 $\mathfrak{g}^*$的一组基 $\{E_1^*, E_2^*, \ldots, E_{2k+1}^*\}$，使得$E_1^* = \varphi$ 并且

$$B_\varphi = E_2^* \wedge E_3^* + \cdots + E_{2k}^* \wedge E_{2k+1}^*.$$

此外，若 $\{E_1, E_2, \ldots, E_{2k+1}\}$是 $\{E_1^*, E_2^*, \ldots, E_{2k+1}^*\}$的对偶基，则有

$$[E_{2\ell}, E_{2\ell+1}] = E_1 + \sum_{r=2}^{2k+1} c_{2\ell,2\ell+1}^r E_r, \qquad \ell = 1, \ldots, k, \ \textit{and}$$

$$[E_i, E_j] = \sum_{r=2}^{2k+1} c_{i,j}^r E_r, \qquad 1 \leq i, j \leq 2k+1 \ \textit{such that}\ (i,j) \neq (2\ell, 2\ell+1),$$

其中 $c_{i,\ j}^r \in \mathbb{R}$ 对所有 i、j、$r = 2$、.....、$2k+1$.

现在我们可以证明本文的主要结果了。

定理5。指标为一的海草代数是接触的，当且仅当它是拟约化的。

证明。我们先证明逆命题（拟约化 $\implies$ 接触）。设 $\mathfrak{s}$ 是一个指标为一的拟约化海草代数。若 $\mathfrak{s}$ 的中心非零，则显然 $\mathfrak{s}$ 是接触的，因此假设 $Z(\mathfrak{s}) = 0$. 设 $\varphi \in \mathfrak{s}^*$ 是一个约化型正则形式，并设 h 是 $\mathfrak{s}$ 中张成 $\ker(B_\varphi)$ 的半单元。若 $\varphi(h) \neq 0$，则根据引理 3，$\mathfrak{s}$ 是接触的。

若 $\varphi(h) = 0$，则构造一个包含 h 的嘉当子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{s}$，并令 $\mathscr{B}_h$ 为由 h 生成的 $\mathfrak{s}$ 的嘉当–外尔基（参见 Coll 等人的 [11]，引理 55）。由于对所有 $x \in \mathfrak{s}$，$\dim(\ker(B_\varphi))$ 关于 $\varphi(x)$ 上半连续，因此存在 $\varepsilon > 0$ 和一个 1-形式 $\psi \in \mathfrak{s}^*$，使得若对所有 $x \in \mathscr{B}_\mathfrak{h} \setminus \{h\}$，$\psi(x) = \varphi(x)$ 且 $|\psi(h)| < 2\varepsilon$，则

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = 1 \leq \dim \ker(B_\psi) \leq \dim \ker(B_\varphi) = 1;$$

也就是说，若 $\mathscr{B}_h^*$ 是与 $\mathscr{B}_h$ 对偶的 $\mathfrak{s}^*$ 的基，则我们可以选取一个 $\varepsilon > 0$，使得 $\psi = \varphi + \varepsilon h^*$ 在 $\mathfrak{s}$. 上正则。固定这样一个 ψ，并注意到

$$\ker(B_\psi) = \ker(B_\varphi) = \mathbb{C}h$$

因为 $\mathscr{B}_h$ 是嘉当–外尔基。因此，ψ 是 $\mathfrak{s}$ 上的正则1-形式，满足 $\ker(B_\psi) = \mathbb{C}h$ 且$\psi(h) = \varepsilon \neq 0$，所以根据引理 3，$\mathfrak{s}$ 是接触的。

对于正命题（接触 $\implies$ 拟约化），假设 $\mathfrak{s}$ 是一个接触海草代数，其接触形式为 φ。我们断言，φ 也是一个稳定 1-形式。为证明这一断言，令

$$\mathscr{B}_\varphi = \{E_1, E_2, \ldots, E_{\dim(\mathfrak{s})}\}$$

为 {v1}的接触基，并令 $\mathscr{B}_\varphi^*$ 为与 $\mathscr{B}_\varphi$. 对偶的 $\mathfrak{s}^*$ 的基。则 $\varphi = E_1^*$ 是一个 d

$$\varphi([E_1, E_i]) = E_1^* \left(\sum_{r=2}^{\dim \mathfrak{s}} c_{1,i}^r E_r \right) = 0, \tag{1}$$

其中，对所有 $i = 1$，....., $\dim(\mathfrak{s})$，$c_{i,\ j}^r \in \mathbb{R}$；也就是说，$\ker(B_\varphi) = \mathbb{C}E_1$.。因此，由公式 (1)，

$$[\ker(B_\varphi), \mathfrak{s}] \cap \ker(B_\varphi) = \{0\},$$

因此，根据引理 1，φ 是稳定的。应用定理 2 即完成证明。 □

4 后记

李偏序集代数 $\mathfrak{P}$ 是约化李代数 $\mathfrak{r}$ 的一个子代数，并且包含 $\mathfrak{r}$.[3]的一个嘉当子代数。李偏序集代数范畴包含海藻代数和李偏序集代数[4] 作为子范畴。事实上，定理5的证明表明，若 $\mathfrak{P}$ 是指标为一的拟约化李偏序集代数，则 $\mathfrak{P}$ 是接触的，因此也是稳定的。然而，我们尚不清楚拟约化性与稳定性这两个概念对于李偏序集代数是否等价，因此仍有待解答的问题是：每个接触李偏序集代数是否都是拟约化的。一种解决这一问题的方法是证明接触李偏序集代数存在一个接触形式，其 Reeb 向量为半单元。这样便足够了，因为对于中心为零的接触李偏序集代数 $\mathfrak{P}$，若其接触形式为 φ，则 $\ker(B_\varphi) \diagup Z(\mathfrak{P}) \ni \ker(B_\varphi) = \mathbb{C}x_\varphi$，其中 x_φ 是与 φ. 对应的 Reeb 向量。因此，若 x_φ 是 $\mathfrak{P}$中的半单元，则 φ 是约化型形式。这种方法依赖于大量接触李偏序集代数的实例；然而，这类实例很难找到，主要原因是缺乏全面的计算指标理论，无法同时涵盖海藻代数（其指标理论相当完备，见 [7], [14], 和 [22]）以及初具规模（但已颇有成果）的李偏序集代数指标理论（见 [9] 和 [11]）。

[3]“序集”这一名称源于这样一个事实：在经典型中，这些代数的矩阵形式自然对应于预序集（见 [23]）。[4]若 $\mathfrak{r}$ 是一个约化李代数，具有嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 以及相应的博雷尔子代数 $\mathfrak{b}$，那么李序集代数 $\mathfrak{g}$ 是满足 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}$的任意代数。这些代数是李半直积，并由集合上的偏序自然定义，其关系编码在哈斯图中（见 [8]）。

参考文献

[1] M. A. Alvarez、M. C. Rodríguez-Vallarte 和 G. Salgado。《接触李代数作为双扩张的变形理论》。美国数学会会刊，149(5): 1827-1836，2021年。[2] K. Ammari。《简单李代数双抛物子代数的稳定性》。李理论杂志，32(1): 239-260，2022年。[3] K. Ammari。《例外简单李代数抛物子代数的稳定性》。数学科学通报，138(5): 614-625，2014年。[4] K. Ammari。《 $\mathfrak{so}(n)$的抛物子代数的稳定性》。李理论杂志，24(1): 97-122，2014年。[5] N. H. Anh。《具有平方可积表示的代数群》。美国数学会通报，80(3): 539-542，1974年。[6] K. Baur 和 A. Moreau。《约化李代数中的拟约化（双）抛物子代数》。傅里叶研究所年刊，61(2): 417-451，2011年。[7] A. Cameron、V. E. Coll, Jr. 和 M. Hyatt。《海藻型李代数的组合指标公式》。代数通讯，48(12): 5430-5454，2020年。[8] V. E. Coll, Jr. 和 M. Gerstenhaber。《李半直积与偏序集代数的上同调》。李理论杂志，26(1): 79–95，2016年。[9] V. E. Coll, Jr. 和 N. Mayers。《李偏序集代数的指标》。组合理论杂志A辑，177: 105331，2021年。[10] V. E. Coll, Jr.、N. Mayers 和 N. Russoniello。《接触李偏序集代数》。电子组合学杂志，29(3): #P3.35，2022年。[11] V. E. Coll, Jr.、N. Mayers 和 N. Russoniello。《B、C、D型李偏序集代数的指标与谱》。电子组合学杂志，28(3): #P3.47，2021年。[12] V. E. Coll, Jr.、N. Mayers、N. Russoniello 和 G. Salgado。《接触海藻型李代数》。太平洋数学杂志，320(1): 45-60，2022年。[13] V. E. Coll, Jr. 和 N. Russoniello。《接触海藻型李代数II：C型》。arXiv:2211.00095，2022年。[14] V. Dergachev 和 A. Kirillov。《海藻型李代数的指标》。李理论杂志，10(2): 331-343，2000年。[15] A. Diatta。《李群上的左不变接触结构》。微分几何及其应用，26(5): 544-552，2008年。[16] J. Dixmier。《包络代数》。第14卷。Newnes，1977年。[17] M. Duflo。《李代数群的 Mackey 理论》。数学学报，149: 153-213，1982年。[18] M. Duflo、M. S. Khalgui 和 P. Torasso。《拟约化李代数》。变换群，17: 417-470，2012年。[19] H. Geiges。《接触几何》，载于 F. J. E. Dillen 和 L. C. A. Verstraelen 编，《微分几何手册》。第2卷，第5章：315-382。爱思唯尔，2006年。[20] M. Goze 和 E. Remm。《李群上的接触形式与弗罗贝尼乌斯型形式》。微分几何及其应用，35: 74-94，2014年。[21] M. Gromov。《叶状结构到流形的稳定映射》。苏联科学院通报数学辑，33(4): 707-734，1969年；苏联数学科学院通报，3(4): 671-694，1969年。

[22] A. Joseph.《双抛物（海草）代数的半不变量与指标，I》。《代数杂志》，305(1): 487-515，2006年。[23] N. Mayers 和 N. Russoniello.《环面偏序集与接触李代数》。《几何与物理杂志》，190: 104861，2023。[24] A. Moreau 和 O. Yakimova.《抛物子代数与海藻李子代数的约化型余伴随轨道》。《国际数学研究通知》，2012(19): 4475-4519，2012年。[25] D. Panyushev.《Ra¨ıs 定理的推广及单李代数的海藻子代数》。《傅里叶研究所年刊》，55(3): 693-715，2005。[26] D. Panyushev 和 O. Yakimova.《D型中的海藻子代数与蜿蜒图》。《纯粹与应用代数杂志》，222(11): 3414-3431，2018。[27] G. Salgado-Gonz´alez.《接触李代数的不变量》。《几何与物理杂志》，144: 388-396，2019。[28] P. Tauvel 和 R. Yu.《李代数中的指标与稳定线性形式》。《代数杂志》，273(2): 507-516，2004年。