arXiv:2303.13274v1 [math.LO] 23 Mar 2023

关系结构的代数普适范畴

IOANNIS ELEFTHERIADIS

摘要。我们研究能够满嵌入所有泛代数范畴的关系结构范畴，并利用 Nešetřil 和 Ossona de Mendez 的处处不稠密概念的一种无穷变体，对这类范畴给出部分刻画。更确切地说，我们证明，代数普适范畴的 Gaifman 类包含任意无限基数的细分完全图，并证明任何满足这一条件的单调范畴都可以通过定向构造为代数普适范畴。为证明上述结论，我们还发展了一个用于关系构件构造的范畴框架。这将有限图范畴的已知结果推广到了基数无界的关系结构范畴。

1. 引言

在他那部开创性的图论著作中， [14], König 首先提出了这样一个问题：能否将给定的抽象群表示为某个图的自同构群？Frucht 对有限群给出了肯定的回答，[9], 此后，关于如何在各种有限或无限结构中表示群，出现了一系列研究成果， [3], [5], [22]这些成果最终汇聚于 Isbell 的工作，[12], 他提出用满嵌入作为将这些表示结果推广到一般情形的手段，并由此推动了代数普适范畴的研究，即那些能够满嵌入所有泛代数范畴的范畴。

代数普适范畴在 20 世纪 60 年代曾受到布拉格范畴论学派的广泛研究，并由此取得了一系列重要成果，综述见 [21]。其中，研究表明，代数普适范畴能够满嵌入所有小范畴 [11], ，即其态射类为集合的范畴；因此，任何幺半群都可以实现为某个代数普适范畴中一个对象的自同态幺半群。此外，研究还证明，所有以同态为态射的图构成的范畴 Gra 具有代数普适性 [20]。这又促使人们开始探究 Gra 的哪些满子范畴具有代数普适性。

2020 数学主题分类。18B15、08C05、03C98、05C62。本文得到剑桥信托基金颁发的George and Marrie Vergottis奖学金、Onassis基金会奖学金和Robert Sansom助学金的资助。

近年来，Nešetřil 和 Ossona de Mendez 在有限集合论框架下，对这类图范畴作出了部分刻画 [18]。令人惊讶的是，这将代数普适性与一种称为处处不稠密的图稀疏性概念联系起来。处处不稠密由同样两位作者提出 [16], [17] ，作为有限图类的一种结构性质，它概括了许多性质良好的图类，包括有界度图、平面图、排除固定子式的图以及有界扩张图。

代数普适性的这一刻画所用到的一个重要事实是：有限图的单调类处处不稠密，当且仅当它在模型论意义下是稳定的。稳定性与组合稀疏性之间的这一联系，最初是在无限图背景下由 Podewski 和 Ziegler 建立的 [19], ，随后由 Adler 和 Adler 推广到有限图类 [1]。为回答 Adler 和 Adler 提出的问题，Braunfeld、Dawar、Papadopoulos 和作者又通过 Gaifman 图，将这一图景推广到任意关系结构类 [4]。

受上述工作的启发，本文将 Nešetřil 和 Ossona de Mendez 对代数普适范畴所作的刻画推广到带同态的关系结构范畴，并去除了 [18]中对有限性的假设。该刻画基于处处不稠密的一个无穷变体，以及对 [4]中论证的推广。我们的贡献可概括为以下定理。

定理 1.1。 设 $\mathfrak{C}$ 是一个代数普适的关系结构范畴。那么 $\mathrm{Gaif}(\mathfrak{C})$ 完全某处稠密。此外，若 $\mathfrak{C}$ 是一个单调的关系结构范畴，且 $\mathrm{Gaif}(\mathfrak{C})$ 完全某-$\tilde{}$ $\tilde{}$处稠密，则存在 $\mathfrak{C}$ 的一个满定向 $\mathfrak{C}$，使得 $\mathfrak{C}$ 是代数普适的。

上述证明中使用的各种技巧被发展成一套一般性工具，可能具有更广泛的意义。例如，我们定义了可解释范畴，并说明如何利用这些范畴之间的满嵌入构造模型论解释。此外，我们为关系构件构造发展了一种范畴框架，它以一种实质性的方式扩展了图的相关框架；在这里，小工具以一种允许其不同副本相互作用的方式黏合在一起。最后，我们定义了有向关系结构，推广了有向图的概念。这些结构自然地带有一个指向有向图范畴的忠实函子。

必要的背景知识和记号在第 2 节中确立。第 3 节介绍可解释范畴，随后利用它们证明泛范畴在第 4 节中是某处稠密的。接下来的四节将证明单调性情形下部分逆命题。第 5 节定义关系小工具，并着手

研究它们在同态下构成的范畴。借助小工具技术，我们在第 6 节证明，良基图及其同态构成的范畴是代数普适的。这一结果与第 7 节引入的有向结构一起，在第 8 节的证明中发挥关键作用：完全某处稠密的单调范畴具有一个代数普适的满定向。

2. 预备知识

我们在带有选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论（ZFC）中工作。本文中，L 表示一阶关系语言。我们用 ar(R) 表示关系符号 $R \in$L 的元数。对于范畴 $\mathfrak{C}$，我们用 obj($\mathfrak{C}$) 表示其对象类，用 morph($\mathfrak{C}$) 表示其态射类。对于基数 κ，我们用 $\mathfrak{C}_{<\kappa}$ 表示 $\mathfrak{C}$ 在基数为 $<\kappa$ 的对象上构成的满子范畴。我们有时会滥用记号，用 $M \in \mathfrak{C}$ 表示 $M \in$ obj($\mathfrak{C}$)。元素或变量的元组视为函数，例如，给定元组$\bar{a}$，我们用 $\bar{a}(i)$ 表示 $\bar{a}$ 的第 i 个元素。同样，从基数 λ 到集合 S 的函数通常视为由 S 中元素组成、长度为 λ 的元组。对于有限基数 $n \in \omega$，我们用 $[n]$ 表示集合 $n+1 \setminus 1 = \{1, \ldots, n\}$。

2.1. 图与关系结构。 L-结构记作 $(M, R^M)_{R \in \mathcal{L}}$，其中 M是其底层集合，$R^M \subseteq M^{\mathrm{ar}(R)}$是关系符号 $R \in$ L 在 M中的解释。滥用记号时，我们常常不区分 L-结构及其底层集合。

我们称 $x \in M$ 为 M 的孤立点，如果不存在来自 M的元组 $\bar{m}$，使得 $x \in \bar{m}$ 且对于某个 $R \in$L，$\bar{m} \in R^M$。

从一个 L-结构 M 到一个 L-结构 N 的同态 是一个映射$f : M \to N$，满足对于 L 中所有的关系符号 $R \in$ 和元组 $\bar{m} \in M^{\mathrm{ar}(R)}$

$$(*) \qquad \bar{m} \in R^M \implies f(\bar{m}) \in R^N.$$

当且仅当 (*) 是一个双向蕴含时，称同态 $f : M \to N$ 为强同态。我们用 Str(L) 表示由所有 L-结构及其同态组成的范畴。

如果公式 $\phi(\bar{x})$ 等价于存在公式 $\exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$，且其中 ϕ 是原子公式的合取，则称其为原始正公式。对于每个原始正公式 $\phi(\bar{x})$（可能属于无穷逻辑），我们可以关联一个带点的L-结构 $(M_\phi, \bar{x})$，其论域是 ϕ 中变量的集合，并且对于所有 $R \in$L $M_\phi \vDash R(v_1, \ldots, v_n)$，当且仅当 $R(v_1, \ldots, v_n)$ 是 $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ 中的一个合取项时，$M_\phi \vDash R(v_1, \ldots, v_n)$ 成立。我们称之为 的典范结构。容易看出，对于任意 L-结构 A 和 $\bar{a} \in A$，$A \vDash \phi(\bar{a})$ 成立，当且仅当存在一个从带点结构 $h : (\mathrm{M}\phi, \bar{x})$ 到 $\to (A, \bar{a})$ 的同态。

我们称一个 L-结构类是单调的，如果它在单射同态的逆像下封闭，也就是说，若 $B \in$C，A 是一个 L-结构，且 $f : A \to B$ 是

一个单射同态，则 $A \in \mathsf{C}$。同理，我们称 C 是遗传的，如果它在逆单射强同态下封闭。所谓 L-结构的单调（分别为遗传）范畴 $\mathfrak{C}$，是指 obj($\mathfrak{C}$) 为单调（分别为遗传）的范畴。

如果可以通过对每个元组 $\bar{m} \in R^M$ 应用唯一的置换 $\sigma_{\bar{m}} \in S_{\mathrm{ar}(R)}$，从 M 得到 N，我们就称两个 L-结构 M, N 为置换等价。更确切地说，只要存在一个双射 $f : M \to N$，使得对所有 $R \in \mathsf{L}$ 和所有 $\bar{m} \in R^M$，都存在一个置换 $\sigma_{\bar{m}} \in \mathsf{S}_n$ 满足 $R^N = \{\sigma_{\bar{m}}(f(\bar{m})) : \bar{m} \in R^M\}$，我们就称 M 和 N 置换等价。

定义 2.1. 设 C 是一个 L-结构类。如果对于每个 $M \in \mathsf{C}$，C 都包含某个与 M 置换等价的 M，我们就称类 C 是 C 的一种~~定向。对于 Str(L) 的一个子范畴 $\mathfrak{C}$，如果 $\mathfrak{C}$ 是 Str(L) 中以 obj($\mathfrak{C}$) 为对象的满子范畴，且 obj($\mathfrak{C}$) 是 obj($\mathfrak{C}$) 的某种定向，我们就称 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{C}$ 的满~~定向。

图 G 指一个 $\{E\}$-结构，其中 E 是固定的二元关系符号（因此这里的图可以有自环和对称有向边）。我们用 $E(G)$ 而非 E^G 表示图的边集。若图 G 的 $E(G)$ 是非自反且对称的，我们称其为无向图；若 $E(G)$ 是非对称且反对称的，则称其为有向图。我们分别用 Gra、ĐĐ→SymGra 和 Gra 表示图、无向图和有向图的范畴，其态射为图同态。

对于无向图 G 和 $S \subseteq G$，我们用 $N^G(S)$ 表示 G 中可从某个 $s \in S$ 沿路径到达的顶点。此外，给定无向图 G 和 $r \in \omega$，我们用 G^r 表示 G 的-次细分，即将 G 的每条边替换为长度为 $r+1$ 的无向路径所得到的无向图。同样，给定有向图 G，我们用 $G^{(r)}$ 表示将 G 的每条有向边 (u, v) 替换为一条从 u 指向 v、长度为 $r+1$ 的路径所得到的有向图。我们将 G 中也存在于 G^r ($G^{(r)}$ 分别) 的顶点称为原生顶点，其余顶点称为细分点。对于基数 λ，我们用 K_λ 表示以 λ 个顶点构成的完全无向图。

定义 2.2。设 C 是一个无向图类，κ 是一个基数。若对每个 $r \in \omega$，都存在某个基数$\lambda < \kappa$，使得 K^r_λ 不是任何 $G \in \mathsf{C}$ 的子图，则称 C 为 κ-处处稀疏。否则，称 C 为 κ-某处稠密。如果一个类对于某个基数 κ 是 κ-处处稀疏的，我们也称它为最终处处稀疏。反之，如果对于所有基数 κ，C 都是 κ-某处稠密的，则称 C完全某处稠密。

容易看出，对于基数 $\lambda < \kappa$，λ-处处不稠密意味着 κ-处处不稠密。此外，鸽巢原理（见事实 4.4）表明，一个类$\mathcal{C}$ 完全某处稠密，当且仅当存在某个 $r \in \omega$，使得对于所有基数

κ，大小为 κ 的 r-细分团是 C 中某个图的（不一定是诱导）子图。

在此背景下，Nešetřil 和 Ossona de Mendez 所指的标准意义上的处处不稠密 [16]，恰好就是 ω- 处处不稠密。Podewski 和 Ziegler [19] 最早通过图说明了 ω-处处不稠密与稳定性之间的联系。回顾一下，若对于所有 L-公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$，都存在 $n\in\omega$，使得不存在满足 $M\vDash\phi(\bar{a}_i,\bar{a}_j)\Leftrightarrow i<j$ 的 $M\in$ C 和 $(\bar{a}_i)_{i\in n}$ from$M$，则称 L-结构的类 C 是稳定的。要将研究从图推广到关系结构，就需要处理 Gaifman 图这一类。

定义 2.3（Gaifman 图）。给定一个 L-结构 $(M,R^M)_{M\epsilon\mathcal{L}}$，我们定义 M 的*Gaifman* 图（或底层图），记作 Gaif(M)，它是以 M 为顶点集并满足以下条件的无向图：

$$(x,y)\in E(\mathsf{Gaif}(M))\iff\exists R\in\mathcal{L},\exists v_1,\dots,v_{\mathrm{ar}(R)-2},\\ \exists\sigma\in\mathcal{S}_{\mathrm{ar}(R)}\text{ such that }\sigma(x,y,v_1,\dots,v_{\mathrm{ar}(i)-2})\in R^M.$$

直观地说，这是通过在 M 中的两个元素之间添加一条边形成的，只要它们共同出现在某个关系中。对于一个 L-结构类 C，我们将 C 的 *Gaifman* 类定义为 Gaif(C) := {Gaif(M) : $M\in$ C}。同样，给定一个 L- 结构范畴 $\mathfrak{C}$，我们用 Gaif($\mathfrak{C}$) 表示无向图类 Gaif(obj($\mathfrak{C}$))。

用本文采用的术语来说，以下结果由 Braunfeld、Dawar、Papadopoulos 和作者证明，推广了 Podewski-Zigler 和 Adler-Adler 的结果。

定理 2.4 ([4])。设 $\mathcal{C}$ 是一个$\mathcal{L}$-结构类，且 Gaif($\mathcal{C}$) ω处处稀疏。那么 $\mathcal{C}$ 是稳定的。此外，若 $\mathcal{C}$ 是单调的且 ω某处稠密，则 $\mathcal{C}$ 是不稳定的。

2.2. **拉姆齐理论**。拉姆齐理论的核心思想是，只要一个结构足够大，其中的规律性就不可避免。这一思想在有限和无限情形下都成立。最简单的形式下，这一思想给出了鸽巢原理。

事实 2.5（鸽巢原理）。设 κ 是一个基数，$\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$ 且 $f:\kappa\to\lambda$是一个映射。那么存在一个基数为 κ 的集合 $X\subseteq\kappa$，使得 f 在 X 上为常值。

回顾标准的 Erdös 分割箭号记法。设 κ、λ、μ 为基数，且 $m\in\omega$。我们记 $\kappa\to(\lambda)^m_\mu$，如果对于集合 κ 的所有基数为 m 的子集的着色 $\chi:[\kappa]^m\to\mu$，使用 μ 种颜色，则存在一个序型（等价地，基数）为 λ 的集合 $X\subseteq\kappa$，使得 χ 在 $[X]^m$ 上为常值。我们还回顾由 Erdös 和 Rado 定义的典范分割箭号记法。

定义 2.6。设 μ、κ 为基数，$m \in \omega$ 为 κ 的所有基数为 m 的子集的 μ 着色，且 $\chi : [\kappa]^m \to \mu$。固定一个子集 $\Delta \subseteq m$。若以下条件对所有递增枚举的 $Y_1 = \{a_i : i \in m\}$ $Y_2 = \{b_i : i \in m\} \in [X]^m$ 均成立，则称集合 $X \subseteq \kappa$ 为 Δ-典范染色：

$$\chi(Y_1) = \chi(Y_2) \text{ if and only if } \Delta = \{i \in m : a_i = b_i\}.$$

如果存在一个 $\Delta \subseteq m$，使得 X 是 Δ-典范染色的，那么我们就称 X 是典范染色的。对于 $\lambda < \kappa$，如果对所有 μ 以及所有着色 $\chi : [\kappa]^m \to \mu$，都存在一个序型为 λ 的集合 $X \subseteq \kappa$，使得 X 被 χ 典范染色，我们记作 $\kappa \to \star(\lambda)^m$。

考虑 $m = 2$ 的特殊情形。若对于所有来自 X 的 $i < j$ 和 $k < \ell$，以下情况之一成立，则子集 $X \subseteq \kappa$ 关于着色 $\chi : [\kappa]^2 \to \mu$ 是典范的：

(1) $\chi(i, j) = \chi(k, \ell)$; (2) $\chi(i, j) = \chi(k, \ell)$ 当且仅当 $i = k$；(3) $\chi(i, j) = \chi(k, \ell)$ 当且仅当 $j = \ell$；(4) $\chi(i, j) = \chi(k, \ell)$ 当且仅当 $i = k$ 且 $j = \ell$。

今后，若完全图的边染色对所有边都满足上述条件 1（分别为 2、3、4），也就是说，满足所有来自 κ 的点对 $i < j$，我们就称这种边染色为类型 *1* 的典范（分别为类型 2、3、4 的典范）。更一般地，只要这种染色属于任意一种类型的典范染色，我们就称其为典范染色。

Erdös 和 Rado 的一项著名结果表明，在足够大的结构中，我们总能找到单色子集。同一作者的一项较少为人所知的结果则证明，典范染色的子集也具有这一性质。

定理 2.7 (Erdös, Rado, [8])。以下结论对 κ 一个无限基数以及 $m \in \omega$成立：

i. $\beth_m(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{m+1}_\kappa$;

ii. $\beth_{2m+1}(\kappa)^+ \to \star(\kappa^+)^{m+1}$.

上述结果连同经典的有限拉姆齐定理和 Erdös-Rado 典范拉姆齐定理 [7]，推出以下推论，我们将会频繁用到它。回顾一下，若对所有基数 $\lambda < \kappa$、$2^\lambda < \kappa$，基数 κ 都满足强极限基数的条件。

事实 2.8. 设 κ 是一个强极限基数。那么对于所有 $m \in \omega$ 以及所有基数 λ，$\mu < \kappa$，存在基数 $\rho_1, \rho_2 < \kappa$，使得

$$\rho_1 \to (\lambda)^m_\mu, \quad \rho_2 \to *(\lambda)^m.$$

我们用 $R(m,\lambda,\mu)$ 表示满足此条件的最小 ρ_1，并用 $C(m,\lambda)$ 表示满足此条件的最小 ρ_2。此外，令 $\mathcal{K}(\lambda) := C(2,\lambda)$。

我们还将用到以下拉姆齐型引理，它与定理 4.2 和 8.1 的证明有关。

引理 *2.9.* 设 $n \in \omega$, λ 是一个无限基数，S 是一个集合。假设对于每个 $i < j \in \lambda$，都存在函数 $f_{i,j} : n \to S$，使得对于所有 $x \in n$ 以及所有满足 $i < j$ 和 $k < \ell$ 来自 λ 的有序对 $(i,j) \neq (k,\ell)$，都有 $f_{i,j}(x) \neq f_{k,\ell}(x)$。那么存在一个序型为 λ 的子集 $X \subseteq \lambda$，使得对于所有 $x, y \in n$ 以及满足 $i < j$ 和 $k < \ell$ 来自 X 的有序对 $(i,j) \neq (k,\ell)$，都有 $f_{i,j}(x) \neq f_{k,\ell}(y)$。

证明。 我们称满足 $(i,j) \neq (k,\ell)$ 且来自 λ 的两个有序对 $i < j$ 和 $k < \ell$ 为相容，如果对于所有 $x, y \in n$，$f_{i,\ j}(x) \neq f_{k,\ \ell}(y)$ 成立；否则称这两个有序对不相容。我们通过超限递归构造一个链 $I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq \lambda$，使得对于所有 $2 \leq \alpha < \lambda$:

i. $I_\alpha \subseteq \max\{\omega, |a|^+\}$;

ii. I_α 的序型为 α;

iii. I_α 中的所有两两不同的配对 $i < j$ 和 $k < \ell$ 都是相容的。

从 $I_2 = \{0, 1\}$ 开始。注意，对于来自 λ 的任意配对 $i < j$，至多有 n^2 个配对 $k < \ell$ 与之不相容。因此，给定 I_α，至多有 $n^2 \times |\alpha^{(2)}|$ 个配对 $k < \ell$ 与某个来自 I_α的$i < j$ 不相容。由于 I_α 的序型为 α，且 $\max\{\omega, |\alpha|^+\}$ 是正则的，集合 $\{t \in \max\{\omega, |\alpha|^+\} : t > \sup I_\alpha\}$ 的基数为 $\max\{\omega, |\alpha|^+\}$。由此可知，至少存在一个 $t \in \max\{\omega, |\alpha|^+\}$，使得 $t > \sup I_\alpha$，并且对于所有 i、j、$k \in I_\alpha$，$i < j$ 和$k < t$都相容。令 t_α为满足此条件的最小 t，我们可以定义 $I_{\alpha+1} = I_\alpha \cup \{t_\alpha\}$。显然，这满足上述条件。

设 $\gamma < \lambda$ 是一个极限序数，并且对于所有 $\alpha < \gamma$，所有 I_α 都满足所需条件。令 $I_\gamma = \bigcup I_\alpha$。显然，$I_\gamma$ 的序型为 γ，而$I_\gamma \subseteq \sup_{\alpha<\gamma} |a|^+ \subseteq |\gamma|^+$。此外，对于所有$i < j$和 I_γ中的 $k < \ell$，所有 $i < j$和 $k < \ell$ 都是相容的。用同样的论证可知，$X = \bigcup_{\alpha<\lambda} I_\alpha \subseteq \sup_{\alpha<\lambda} |a|^+ = \lambda$的序型为 λ，且仅包含两两相容的对，满足该命题的条件。□

2.3. 代数普适范畴。 设 Δ 为一种相似类型，即一种仅包含函数符号的一阶语言。我们将类型为 Δ的泛代数简单定义为一个具有标准模型论意义的 Δ-结构。泛代数之间的同态是一个映射 $\chi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，使得对于来自 $\mathbb{A}$ 的所有元组 $\bar{a}$ 以及所有 $f \in \Delta$，均有

$$\chi(f^A(\bar{a})) = f^B(\bar{b}).$$

我们用 Alg(Δ) 表示由同态构成的相似类型为Δ 的所有泛代数所组成的范畴。

定义 2.10. 若对于所有相似类型 Δ，都存在一个全忠实函子 $\Phi : \mathrm{Alg}(\Delta) \to \mathfrak{C}$，则称范畴 $\mathfrak{C}$ 为代数普适的。

关系结构的代数普适范畴的例子包括$\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 对任意一个$\mathcal{L}$，只要它至少含有一个二元关系符号，则范畴$-\!\!\!\longrightarrow$有向图的范畴$\mathbf{Gra}$、连通图的范畴，以及n-部无向图的范畴，其中 $n \geq 3$ （所有范畴均以同态为态射），还有许多其他例子（见 [21]）。另一方面，二分图的范畴显然不是代数普适的，因为任何基数为 ≥ 2 的二分图都有一个真自同态。同样，所有全序及其保序映射构成的范畴也不是代数普适的。事实上，根据 Dushnik 和 Miller 的定理 [6]，每个无限线性序的自同态幺半群都是非平凡的。因此，刚性全序只有有限的，所以对于任意两个刚性全序 L_1，L_2 要么存在一个同态 $L_1 \to L_2$，要么存在一个同态 $L_2 \to L_1$；刚性图显然不满足这一条件。

关于代数范畴，$\mathrm{Alg}(\Delta)$ 是代数普适的，当且仅当 $\sum \Delta \geq 2$，也就是说，函数符号的元数之和为 ≥ 2（见 [21] 中第二章定理 5.5）。此外，半群范畴、特征零整环范畴、分配格范畴和布尔代数范畴（均以同态为态射）都是代数普适的（见 [21]）。在 [2], 中证明了，带有克隆同态的抽象克隆范畴是代数普适的。另一方面，带有群同态的群范畴显然不是代数普适的，因为每个基数为 ≥ 2 的群都有一个非平凡自同构。

偏序集范畴 Pos 尤其值得关注。事实上，该范畴是代数普适的，但其普适性取决于无限偏序集的存在。容易看出，任意有限偏序集要么是刚性的，要么有一个真自同态，也就是说，有一个不是自同构的自同态（例如见 [21] 中第四章命题 5.8）。由此可知，非平凡群不可能是有限偏序集的自同态幺半群。半群范畴也存在类似问题。为此，我们提出以下定义，将结构在该范畴中的基数纳入考量，从而对代数普适性的概念作出合理的相对化。

定义 2.11。设 κ 是一个无限基数。若对于所有相似类型 Δ，都存在一个全忠实函子 $\Phi : \mathrm{Alg}(\Delta)_{<\kappa} \to \mathfrak{C}_{<\kappa}$，将类型为 Δ、基数为 $< \kappa$ 的泛代数范畴映入 $\mathfrak{C}$ 中由基数为 $< \kappa$的对象构成的满子范畴，则称范畴 $\mathfrak{C}$ 是κ-代数普适的，或称 κ-普适的。

在此语境下，偏序集范畴不是 ω-普适的，但对于所有 $\kappa > \omega$，它都是 κ-普适的。因此请注意，代数普适并不等同于对所有无限基数 κ都 κ-普适。尽管如此，对于所有无限 κ，图范畴都是 κ-普适的。实际上，这意味着 κ-普适性取决于一个范畴能否将基数为 $< \kappa$的图范畴全嵌入其中。

事实 2.12 ([21])。 范畴 $\mathfrak{C}$ 是 κ-代数普适的，当且仅当存在一个全忠实函子 $\Phi : \mathbf{Gra}_{<\kappa} \to \mathfrak{C}_{<\kappa}$。

据此，我们可以将 Nešetřil 和 Ossona deMendez 对图的代数普适范畴的刻画表述如下。

定理 2.13 ([18])。 设 $\mathfrak{C}$是一个图的 ω-泛范畴。那么Gaif($\mathfrak{C}$) 是 ω-某处稠密的。此外，若 $\mathfrak{C}$ 是一个图的单调范畴，且Gaif($\mathfrak{C}$) 是 ω-某处稠密的，那么就存在一个完整的定向-*tion* $\mathfrak{C}$ ，它是 ω-普适的。

3. 可解释范畴

在模型论中，解释允许在一个结构中通过定义构造另一个结构，而后者可能使用不同的语言。这意味着，被解释结构的某些模型论性质会传递到解释它的结构上。在此背景下，我们证明满嵌入会产生原始正解释，从而提供一种将范畴的代数野性转化为其相应对象类的模型论野性的方法。这一思想见于 [18], ，但我们在此将其推广到更广泛的情形。

固定一个无限基数 κ 和一个关系语言 L′。我们将 L-结构在 L′-结构中的 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ 解释方案定义为一个元组 I $=(\phi(\bar{x})\ \psi_R(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{\mathrm{ar}(R)}))_{R\in\mathcal{L}}$，其中各项均为 $\mathrm{L}'_{\kappa,\kappa}$-公式，且满足 $|\bar{x}| = |\bar{y}_i| = \lambda < \kappa$。这定义了一个映射 $I : \mathrm{Str(L')} \to \mathrm{Str(L)}$，使得对于一个 L′-结构 M， $I(M)$ 是论域为 M^λ 的 L-结构，并且当且仅当对所有满足 $\mathrm{ar}(R) = n$ 的 $R \in$ L，都有 $(f_1, \ldots, f_n) \in R^{I(M)}$ 当且仅当 $M \vDash \psi_R(f_1, \ldots, f_n)$ 时成立。若一个 L-结构对象类$\mathfrak{C}$ 可在一类 L′-结构 $\mathfrak{D}$ 中通过 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$-解释定义，则称其在该类中可解释；这意味着存在一个 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ 解释方案 I，使得对于所有 $N \in \mathfrak{C}$ ，都存在某个 $M \in \mathfrak{D}$ 满足 $N \simeq I(M)$。若 $\mathfrak{C}$ 可在 $\mathfrak{D}$ 中通过 $\mathrm{L}_{\omega,\omega}$-解释定义，我们就简称 $\mathfrak{C}$ 可在 $\mathfrak{D}$ 中解释，或称 $\mathfrak{D}$ 解释 $\mathfrak{C}$。

事实 3.1. 如果 $\mathfrak{C}$ 可在 $\mathfrak{D}$ 中解释，且 $\mathfrak{D}$ 稳定，那么 $\mathfrak{C}$ 也如此。

为了从满嵌入得到解释，我们应确保嵌入范畴满足某些条件。以下定义给出了一组充分条件。

定义 3.2。 设 $\mathfrak{C}$是 Str(L) 的一个子范畴。若存在 ● $\in$ obj($\mathfrak{C}$)，且对于每个元数为 n 的 $R \in$L，都存在某个 $\mathrm{A}_R \in$ obj($\mathfrak{C}$)，使得：则称 $\mathfrak{C}$ 是可解释的

i. 对每个 $i \in n$，都有同态 $h_i : \bullet \to \mathrm{A}_R \in$ morph($\mathfrak{C}$)；

ii. 对所有 $M \in$obj($\mathfrak{C}$)，Hom(● M) 都是一个集合，并且 L-结构

$$M_\bullet := \mathrm{Hom}(\bullet, M)$$

$$(f_0, \dots, f_{n-1}) \in R^{M_\bullet} \iff \exists g : \mathcal{A}_R \to M \in \mathrm{morph}(\mathfrak{C}) \text{ with } f_i = g \circ h_i$$

与 M （在 Str(L) 中）同构。

直观来说，● 对象表示一个“自由”的单点，而每个 A_R表示 $\mathfrak{C}$ 中一个“自由”的 R 关系。例如，在由所有图构成的范畴 Gra 中，A_E 是一条有向边；而在由无向图构成的范畴 SymGra 中，A_E 是一条对称边（因此由两个不同的关系组成）。显然，Str(L) 是可解释的；其他例子还包括单纯范畴、由所有二分图构成的范畴、由所有偏序集构成的范畴，以及由所有一致 n-超图构成的范畴等。另一方面，连通无向图范畴不可解释，因为不存在 ● 对象。

虽然上述定义当然可以更加严格，例如要求 End(●) 是平凡的，但对于我们这里的目的而言，这一定义已经足够；这意味着，任何来自可解释范畴的满嵌入都会产生一个原始正 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ 解释，其中基数 κ 足够大。

定理 *3.3.* 设 $\mathfrak{C}$ 是 *Str(L)* 的一个可解释子范畴， $\mathfrak{D}$ 是 *Str(L′)* 的一个子范畴，其中 L' 是一种关系语言。假设存在一个满嵌入 $\Psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$，并令 $\kappa = \sup\{|L'|^+, |\Psi(\bullet)|^+, |\Psi(A_R)|^+ : R \in L\}$。那么存在一个 $\mathfrak{C}$ 在 $\mathfrak{D}$ 中的原始正 $L_{\kappa,\kappa}$-解释。

证明。 不失一般性，我们可以假设 Ψ(●) 的底层论域是一个基数 $\mu < \kappa$，同样， $\Psi(\mathrm{A}_R)$ 的论域是一个基数 $\lambda_R < \kappa$。设 $\bar{x}$ 由 μ 索引，并考虑公式

$$\phi_\bullet(\bar{x}) := \bigwedge_{P \in \mathcal{L}'} \bigwedge_{(c_0,\dots,c_{\mathrm{ar}(P)-1}) \in \mu^{ar(P)}} \bigwedge_{\Psi(\bullet) \vDash P(\bar{c})} P(x_{c_0}, \dots, x_{c_{\mathrm{ar}(P)-1}}),$$

定义为对所有 $N \in obj(\mathfrak{D})$ 和 $f \in N^\mu$:

$$N \vDash \phi_\bullet(f) \iff f \in \mathrm{Hom}(\Psi(\bullet), N)$$

类似地，对于所有 $R \in$ L，我们定义公式 $\phi_R(\bar{z})$，其中 $|\bar{z}| = \lambda_R$ 满足对所有 $f \in N^{\lambda_R}$:

$$N \vDash \phi_R(f) \iff f \in \mathrm{Hom}(\Psi(\mathcal{A}_R), N)$$

对于所有满足 ar(R) = n 的 $R \in \mathrm{L}$，令 $h_i \in \mathrm{Hom}(\bullet, \mathrm{A}_R)$ 为定义 3.2 中 (i) 的同态 $\hat{}$，并考虑 $h_i = \Psi(h_i) \in \mathrm{Hom}(\Psi(\bullet)\ \Psi(\mathrm{A}_R))$。固定由 μ 标记的变量元组 $\bar{y}_0$、…、$\bar{y}_{n-1}$，并定义公式:

$$\psi_R(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{n-1}) := (\exists \bar{z})\Big(\bigwedge_{i\in n} \bigwedge_{\alpha\in\mu} [\bar{y}_i(\alpha) = \bar{z}(\hat{h}_i(\alpha))] \wedge \phi_R(\bar{z})\Big).$$

我们断言，元组 $\mathrm{I} = (\phi_\bullet, \psi_R)_{R\in\mathcal{L}}$ 是一个 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ 解释。事实上，给定 $M \in \mathbb{C}$，考虑 $I \circ \Psi(M)$。这是一个 L-结构，对于所有满足 ar(R) = n 和 f_0 的 $R \in \mathrm{L}$，均有 …，$f_{n-1} \in \Psi(M)^\mu$

$$(f_0, \dots, f_{n-1}) \in R^{I\circ\Psi(M)} \iff \Psi(M) \vDash \bigwedge_{i\in n} \phi_\bullet(f_i) \wedge \psi_R(f_0, \dots, f_{n-1}).$$

后者成立当且仅当 $f_i \in \mathrm{Hom}(\Psi(\bullet)\ \Psi(M))$，并且存在一个同态 $\hat{}$ 态射 $g \in \mathrm{Hom}(\Psi(\mathrm{A}_R)\ \Psi(M))$，使得对于所有 $i \in n$，都有 $f_i = g \circ h_i$。由于 Ψ是全忠实的，这当且仅当存在 $F_i = \Psi^{-1}(f_i) \in \mathrm{Hom}(\bullet\ M)$ 和 $G = \Psi^{-1}(g) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{A}_R, M)$，使得 $F_i = G \circ h_\circ$

因此可得，该映射

$$\begin{aligned} \chi : I \circ \Psi(M) &\to M_\bullet \\ f &\mapsto \Psi^{-1}(f) \end{aligned}$$

是 L-结构的同构，因此 $I \circ \Psi(M) \simeq M_\bullet \simeq M$。 □

因此，若 Ψ 映射到 $\mathfrak{D}_{<\omega}$，我们便可在 $\mathfrak{D}$中得到对 $\mathfrak{C}$的解释。特别地，这意味着以下结论。

推论 3.4. 设 $\mathfrak{C}$是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个 ω-普适子范畴。那么， $\mathfrak{C}$解释了所有有限图组成的类。

由于所有有限图组成的类是不稳定的，且稳定性在解释下保持不变，推论 3.4 意味着所有 ω-普适的关系结构类都是不稳定的。事实上，还有更强的结论。若 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$的一个子范畴，且存在一个满嵌入 $\mathbf{Pos}_{<\omega} \to \mathfrak{C}_{<\omega}$，那么 $\mathfrak{C}$ 具有 严格普适序性质，其定义见 [10]。这里的假设严格更弱，因为偏序集范畴并非 ω-普适的。此外，该推论更强，因为严格普适序性质蕴含若干模型论上的野性性质，包括不稳定性（见 [10]）。

最后，结合定理 2.4，以上结果有如下推论。

推论 3.5. 设 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个 ω-普遍子范畴。那么 Gaif($\mathfrak{C}$) 是 ω-处处稠密的。

下一节旨在将推论 3.5 推广到 κ-普遍范畴，其中 κ是某个更大的无限基数。关于 ω 的情形的论证依赖于定理 ，而该定理又运用了 ω的各种拉姆齐型性质。人们会预期，若 κ具有类似性质，同一论证也可以挽救过来。然而，事实并非如此；该论证要求对每个 $\kappa \to (\kappa)^{\lambda}_{2}$ 都成立，而这虽然对 ω成立，却与更大的无限基数情形下的选择公理不相容（见 [13],命题 7.1）。因此，这里采用了另一种论证。

4. 泛范畴中的某处稠密性

我们首先指出，原始正公式的满足取决于其各个连通分支是否分别得到满足。这个简单的引理有助于在原始正公式进行任何形式的组合编码时找到路径。

引理 4.1. 设 κ 是一个无限基数， $\phi(\bar{x})$ 是一个原始正 $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$公式，且 $\mathcal{M}\phi$ 是其典范结构。设 $(G_\gamma)^{\gamma\in\lambda}$ 是 $\mathsf{Gaif}(\mathcal{M}\phi) \smallsetminus \bar{x}$ 的连通分支，且 $M_\gamma = \mathcal{M}_\phi[G_\gamma, \bar{x}]$。那么，对于任意 $\mathcal{L}$ 结构A 和元组 $\bar{a} \in A$

$$A \vDash \phi(\bar{a}) \iff \forall \gamma \in \lambda \ \exists \ homomorphism \ h_\gamma : (M_i, \bar{x}) \to (A, \bar{a}).$$

证明。 给定如上所述的一组同态 $h_\gamma : (M_\gamma, \bar{x}) \to (A, \bar{a})$，它们的并集 $h = \bigcup_{\gamma\in\lambda} h_\gamma$ 是一个同态 $(\mathbf{M}\phi, \bar{x}) \to (A, \bar{a})$。这一定义良好，因为各个分支 G_γ 互不相交，因此 $M_\gamma \cap M_\delta = \bar{x}$ 对于 $\gamma \neq \delta$ 成立，而 $\bar{x}$ 在所有 h_γ 下具有相同的像。此外，若 $(v_1, \dots, v_n) \in R^{\mathcal{M}_\phi}$ 对某个 $R \in \mathbf{L}$ 成立，则 $\bar{v} \smallsetminus \bar{x}$ 中的元素属于 $\mathsf{Gaif}(\mathbf{M}\phi) \smallsetminus \bar{x}$ 的同一个连通分支，不妨设为 G_α。由于 h_α 是一个同态，可得$h_\alpha(\bar{v}) = h(\bar{v}) \in R^A$。□

据此，我们论证：只要存在一个满嵌入 $\mathbf{Card} \to \mathfrak{C}$，将基数范畴视为带有保序映射的 $\in$-结构的范畴，那么 $\mathsf{Gaif}(\mathfrak{C})$ 就完全某处稠密。注意，这一假设严格弱于代数普适性，因为基数范畴并非代数普适。另一方面，正如第 6 节所论证的那样，它的单调闭包具有代数普适性。这一差距反映出，处处不稠密本质上是一个关于某个类的单调闭包的性质。

首先，我们证明这一结论对基数有界于某个不可达基数的结构范畴也成立。回顾一下，若一个基数不可数、是强极限且为正则基数（即等于其共尾数），则称其为不可达基数。不可达基数的存在性独立于 ZFC (参见 [13]) 。由于代数普适性并不等价于对所有基数 κ-普适性 κ，我们选择给出一个相对化证明，以准确展示定理在哪些层次成立。

不过，显然，即使不将结果限制于不可达基数，这一结论也成立。为清晰起见，证明分为一系列断言。

定理 4.2。设 κ 是一个不可达基数，$\mathfrak{C}$ 是$\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个子范畴，满足 $|\mathcal{L}| < \kappa$，且存在一个满嵌入 $\Psi : \mathbf{Card}_{<\kappa} \to \mathfrak{C}_{<\kappa}$。那么 Gaif($\mathfrak{C}$) 是 κ-处处稠密的。

证明。由于 $\mathbf{Card}_{<\kappa}$ 是可解释的，根据假设和定理3.3 可知，存在一个原始正 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ 解释，将 $\mathrm{Card}_{<\kappa}$解释在 $\mathfrak{C}_{<\kappa}$中。因此，存在公式 $\phi(\bar{x},\bar{y}) = \exists\bar{w}\psi(\bar{x},\bar{y},\bar{w})$，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 由 $\mu < \kappa$枚举；并且对于每个基数 $\lambda < \kappa$，存在某个 $M_\lambda \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ 和函数 $(f_i)_{i\in\lambda}$，从 $(M_\lambda)^\mu$ 映射，使得

$$M_\lambda \vDash \phi(f_i, f_j) \iff i < j \quad (\star)$$

为明确起见，我们写作 f_i^λ，以强调这些来自 $(M_\lambda)^\mu$。将 $\bar{w}$ 中的变量枚举为 $\nu < \kappa$，并选取存在见证 $h^\lambda_{i,\,j}$，使其来自 $(M_\lambda)^\nu$，且满足

$$i < j \implies M_\lambda \vDash \psi(f_i^\lambda, f_j^\lambda, h^\lambda_{i,j}).$$

对于 $i < j < k < \ell \in \lambda$，令 $\Delta_\lambda(i,j,k,\ell)$ 表示元组 $(f_i^\lambda, f_j^\lambda, f_k^\lambda, f_\ell^\lambda, h^\lambda_{i,j}, h^\lambda_{k,\ell}, h^\lambda_{j,k}, h^\lambda_{j,\ell})$ 的相等类型，也就是说，它是仅使用等号符号的原子公式集合 $\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4,\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3,\bar{w}_4)$，满足 $M_\lambda \vDash \eta(f_i^\lambda, f_j^\lambda, f_k^\lambda, f_\ell^\lambda, h^\lambda_{i,j}, h^\lambda_{k,\ell}, h^\lambda_{j,k}, h^\lambda_{j,\ell})$。

命题 4.2.1. 我们不妨假设，对于所有 $\lambda < \kappa$ 和 $i < j < k < \ell \in \lambda$，$\Delta_\lambda(i,\ j,\ k,\ \ell)$ 均为常数。

证明：令 $\delta = 2^{\max\{\mu,\nu\}}$ 和 $r(\lambda) = R(4,\lambda,\delta)$。注意，相等类型至多有 δ 个，而 δ 和 $f(\lambda)$ 都严格小于 κ，因为 κ 是强极限。因此，从 $M_{r(\lambda)}$ 开始，我们可以根据 Δ_λ 对四元组 $i < j < k < \ell \in r(\lambda)$ 着色。由事实 2.8，可找到序型为 λ 的集合 $I \subseteq r(\lambda)$，使其在这种着色下为单色的。因此，我们可以转而考虑子序列 $(M_{r(\lambda)})_{\lambda<\kappa}$ 并重新标记，从而不失一般性地假设，对于所有 $i < j < k < \ell \in \lambda$，$\Delta_\lambda(i,j,k,\ell)$ 都是常数。此外，由于相等类型的数量至多为 $\delta < \kappa$，且 κ 是正则的，根据鸽巢原理，存在一个基数为κ 的集合 $X \subseteq \kappa$，使得对于所有 $\lambda \in X$，Δ_λ 都是常数。转而考虑子序列 $(M_\lambda)_{\lambda\in X}$ 并重新标记后，我们最终可以假设，对于所有 $i < j < k < \ell \in \lambda$ 和所有 $\lambda < \kappa$，$\Delta_\lambda(i,j,k,\ell)$ 都是常数。■

今后，我们将上述内容无歧义地记作 Δ。令 $S = \{s \in \mu : (\bar{x}_1(s) = \bar{x}_2(s)) \in \Delta\}$，并令 $T = \{t \in \nu : (\bar{w}_1(t) = \bar{w}_2(t)) \in \Delta\}$。注意，根据定义，它们满足

$$f_i^\lambda(s) = f_j^\lambda(s) \iff s \in S;$$

$$h^\lambda_{i,j}(t) = h^\lambda_{k,\ell}(t) \iff t \in T,$$

对所有 $i < j < k < \ell \in \lambda$ 均成立。

命题 4.2.2. 存在 $m \in \omega$，使得对于所有 $\lambda \in \kappa$ 和 $i < j \in \lambda$，都存在单射 $p^\lambda_{i,j} : m+2 \to M_\lambda$，满足以下条件：对于所有来自 λ 的 $i < j$ 和 $k < \ell$：

i. $p^\lambda_{i,j}(0), p^\lambda_{i,j}(1), \dots, p^\lambda_{i,j}(m+1)$ *is a path in* $\mathsf{Gaif}(M_\lambda)$*;*

ii. $p^\lambda_{i,j}(0) = p^\lambda_{k,\ell}(0) \iff i = k$*;*

iii. $p^\lambda_{i,j}(m+1) = p^\lambda_{k,\ell}(m+1) \iff j = \ell$*;*

iv. $p^\lambda_{i,j}(n) \neq p^\lambda_{k,\ell}(n)$ *for* $i < j < k < \ell$ *and* $n \in [m]$*;*

v. the equality type of $p^\lambda_{i,j} \mathbin{^\frown} p^\lambda_{k,\ell} \mathbin{^\frown} p^\lambda_{j,k} \mathbin{^\frown} p^\lambda_{j,\ell}$ *is constant for* $i < j < k < \ell < \lambda$*.*

证明：首先我们说明，存在 α、$\beta \in \mu \setminus S$，以及一条位于 $\mathsf{Gaif}(\mathsf{M}\phi)$ 中、从 $\bar{x}(\alpha)$ 到 $\bar{y}(\beta)$ 的路径，该路径仅经过 $\bar{w}$ 中的元素，并且避开变量 $\bar{x}(s)$（对于 $s \in S$）和 $\bar{y}(s)$（对于 $t \in T$）。事实上，考虑 $G = \mathsf{Gaif}(\mathsf{M}\phi) \setminus (\{\bar{x}(s)\ \bar{y}(s) : s \in S\} \cup \{\bar{w}(t) : t \in T\})$，$N_x = N^G(\{\bar{x}(s) : s \notin S\})$，$N_y = N^G(\{\bar{y}(s) : s \notin S\})$。反设 N_x 和 N_y 不相交。由于 $M_\lambda \vDash \psi(f^\lambda_1, f^\lambda_2, h^\lambda_1, 2) \wedge \psi(f^\lambda_3, f^\lambda_4, h^\lambda_3, 4)$，由引理 4.1 可得 $M \vDash \phi(f^\lambda_3, f^\lambda_2)$。这与 $(\star)$ 矛盾。因此，$N_x \cap N_y \neq \varnothing$，于是存在 α、$\beta \in \mu \setminus S$，使得 G 中存在一条从 $\bar{x}(\alpha)$ 到 $\bar{y}(\beta)$ 的路径，正如所需。

令 $P \subseteq \nu \setminus T$ 为 $\bar{w}$ 中出现在此路径上的变量指标的有限集，并记为 $m = |P|$。不失一般性，我们可以假设上面的路径从 $\bar{x}(\alpha)$ 开始，到 $\bar{y}(\beta)$ 结束，且仅经过满足 $p \in P$ 的变量 $\bar{w}(p)$。事实上，如果当前路径不满足这一条件，则 μ 中存在 u' 和 v'，以及一条子路径，它从 $\bar{x}(u')$ 开始，到 $\bar{y}(v')$ 结束，且仅经过 $\bar{w}$ 中的变量。于是，我们可以考虑这条子路径，并进行适当的重新标记。

令 $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ 为 P 的枚举，其顺序与 $\mathsf{Gaif}(\mathsf{M}\phi)$ 中相应路径 $\bar{x}(\alpha)\ \bar{w}(p_1) \dots, \bar{w}(p_m)\ \bar{y}(\beta)$ 的顺序一致。由此可知，对于所有 $\lambda < \kappa$ 和 $i < j < \lambda$，$f^\lambda_i(\alpha)\ h^\lambda_{i,j}(p_1) \dots, h^\lambda_{i,j}(p_m)\ f^\lambda_j(\beta)$ 是 $\mathsf{Gaif}(M_\lambda)$ 中的一条路径。注意，$f^\lambda_i(\alpha) \neq f^\lambda_j(\beta)$；事实上，若情况如此，那么对任意 $j' > j$，根据命题 4.2.1，都有 $f^\lambda_j(\beta) = f^\lambda_{j'}(\beta)$，这与 $\beta \notin S$ 矛盾。因此，不失一般性，我们可以假设上述路径不含重复顶点；否则，我们可以考虑从 $f^\lambda_i(\alpha)$ 到 $f^\lambda_j(\beta)$ 的真子路径。由于根据 4.2.1，所有此类路径都具有相同的相等类型，因此对所有 $i < j$ 和 $\lambda < \kappa$，都可以考虑完全相同的子路径。

因此，对所有 $\lambda<\kappa$ 以及来自 λ 的成对 $i<j$，定义单射映射

$$\begin{aligned} p^{\lambda}_{i,j}: m+2 &\to M_\lambda \\ 0 &\mapsto f^{\lambda}_i(\alpha) \\ n\in[m] &\mapsto h^{\lambda}_{i,j}(p_n) \\ m+1 &\mapsto f^{\lambda}_i(\beta). \end{aligned}$$

条件（i）显然成立；此外，由于 α，$\beta\notin S$，条件（ii）和（iii）也成立。又由于 $P\subseteq\nu\setminus T$，条件（v）由命题4.2.1得证。■

接下来我们证明，可以加强（iv）。

命题 4.2.3。我们可以假设，对所有 n_1，$n_2\in[m]$以及满足 $i<j$ 且 $k<\ell$ 来自 λ的任意两对 $(i,j)\neq(k,\ell)$，有，$p^{\lambda}_{i,j}(n_1)\neq p^{\lambda}_{k,\ell}(n_2)$。

证明：对每个 $n\in m+2$ 和 $\lambda<\kappa$，定义着色 $\chi_{\lambda,n}(i,j)=p^{\lambda}_{i,j}(n)$。从一个足够大的 $\rho(\lambda)<\kappa$ 出发，我们可以使用这些着色，将事实 2.8（$m+2$）中的典范 Erdős–Rado 定理迭代应用 $m+2$ 次。事实上，$\rho(\lambda)=\beth_\omega(\lambda)$ 可行，因为 $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$ 蕴含 $\rho(\lambda)<\kappa$。再次重新标记后，对每个 $\lambda<\kappa$ 都有一个映射 $t_\lambda:[m+2]\to[4]$，使得 $p^{\lambda}_{i,j}(n)=h^{\lambda}_{k,\ell}(n)$ 是否成立取决于典范情形 $t_\lambda(n)$。由于4^{m+2} 是有限的，根据鸽巢原理，存在一个基数为 κ 的集合$X\subseteq\kappa$，使得对所有 $\lambda\in X$，t_λ 都相同。将其限制到子序列 $(M_\lambda)_{\lambda\in X}$ 并重新标记后，我们可以假设对所有 $\lambda<\kappa$，t_λ 都相同。记此映射为 $t:[m+2]\to[4]$。

注意到，条件（ii）和（iii）保证 $t(0)=2$ 和 $t(m+1)=3$。此外，对所有 $n\in[m]$，都有 $t(n)\neq1$。否则，对某个 $n\in[m]$，有 $p^{\lambda}_{i,j}(n)=p^{\lambda}_{k,\ell}(n)$，对所有 $i<j$ 和 $k<\ell$均成立；然而，根据条件（iv），对任意$i<j<k<\ell$，都有 $h^{\lambda}_{i,j}(p)\neq h^{\lambda}_{k,l}(p)$。显然，若对所有$n\in[m]$都有 $t(n)=4$，则结论成立。

因此，假设至少存在一个 $n\in[m]$ 属于典范情形（2），即 $t(n)=2$，并令 $c\in[m]$ 为满足 n 的最大者。由此可得，$p^{\lambda}_{i,j}(c)=h^{\lambda}_{k,\ell}(c)$ 当且仅当 $i=k$。由于 $t(m+1)=3$，存在一个最小的 $d>c$，使得 $t(d)=3$。接着，定义 $\tilde{p}^{\lambda}_{i,j}:(d-c+1)\to M_\lambda$ 为$n\mapsto p^{\lambda}_{i,j}(n+c)$；由于 $t(d)=3$，$p^{\lambda}_{i,j}(d)=p^{\lambda}_{k,\ell}(d)$ 当且仅当 $j=\ell$，因此映射 $\tilde{p}^{\lambda}_{i,j}$ 满足命题 4.2.2 的条件。由于对所有 $n\in[d-c-1]$都有 $t(n)=4$，在此情形下，考察映射 $\tilde{p}^{\lambda}_{i,j}$即可得出结论。最后，至少存在一个 $n\in[m]$ 属于情形（3）的情况，可通过对称地处理得到。

因此，我们已经确保，对于$p^{\lambda}_{i,j}(n)\neq p^{\lambda}_{k,\ell}(n)$，对于所有 $n\in[m]$ 以及任意两对$(i,j)\neq(k,\ell)$ 满足 $i<j$ 且 $k<\ell$ 来自 λ。因此，引理2.9 推出

对于所有 $\lambda<\kappa$，存在一个序型为 λ 的集合 $I_\lambda\subseteq\lambda$，使得 $p^\lambda_{i,\,j}(n_1)\neq p^\lambda_{k,\,\ell}(n_2)$ 对所有 n_1 以及来自 $[m]$ 的 n_2，和所有满足 $i<j$ 且 $k<\ell$ 来自 I_λ 的数对 $(i,j)\neq(k,\ell)$ 均成立。因此，只需将其限制在这些集合上并进行适当的重新标记，即可得出结论。■

命题 4.2.4. 映射 $p^\lambda_{i,j}$ 满足 $p^\lambda_{i,j}(0)\neq p^\lambda_{k,\ell}(n)$ 以及 $p^\lambda_{i,j}(m+1)\neq p^\lambda_{k,\ell}(n)$，对所有 $n\in[m]$ 以及来自 λ 的所有数对 $0<i<j$ 和 $0<k<\ell$ 均成立。

证明：我们先证明前一个结论。反设存在某个 $n\in[m]$ 和 $i<k<\ell$，使得 $p^\lambda_{i,j}(0)=p^\lambda_{k,\ell}(n)$。那么 $p^\lambda_{i,j}(0)=p^\lambda_{i,k}(0)=p^\lambda_{k,\ell}(n)$，因此由条件（v）可得 $p^\lambda_{i,k}(0)=p^\lambda_{k,\ell+1}(n)$。由此可知 $p^\lambda_{k,\ell}(n)=p^\lambda_{k,\ell+1}(n)$，这与命题 4.2.3 矛盾。同理，若对某些 $n\in[m]$ 和$k<i<\ell$，有 $p^\lambda_{i,j}(0)=p^\lambda_{k,\ell}(n)$，则 $p^\lambda_{i,j}(0)=p^\lambda_{i,\ell}(0)=p^\lambda_{k,\ell}(n)$，因此由条件（v）可知 $p^\lambda_{k,\ell}(n)=p^\lambda_{i,\ell}(0)=p^\lambda_{0,\ell}(n)$。这同样与命题 4.2.3 矛盾。最后，若对某些 $n\in[m]$ 和 $k<\ell<i$，有$p^\lambda_{i,j}(0)=p^\lambda_{k,\ell}(n)$，则由条件（v）可知 $p^\lambda_{k,\ell}(n)=p^\lambda_{i,j}(0)=p^\lambda_{0,\ell}(n)$，再次与命题 4.2.3 矛盾。后一个结论可通过分析 $j<k<\ell$、$k<j<\ell$ 和 $k<\ell<j$ 的情形类似地证明。■

考虑元素 $a^\lambda_i:=p^\lambda_{i,j}(0)\in M_\lambda$ 和 $b^\lambda_i:=p^\lambda_{0,i}(m+1)\in M_\lambda$ for$0<i<j$。由条件（ii）和（iii），这些都是良定义的。注意，对任意 $i<j$，都有 $a^\lambda_i\neq b^\lambda_j$，因为每个 $p^\lambda_{i,j}$ 都是单射。此外，对于 $j<i$，有 $a^\lambda_i\neq b^\lambda_j$；若情况如此，则 $p^\lambda_{0,j}(m+1)=p^\lambda_{i,i+2}(0)$，因此条件（ v ）将推出 $p^\lambda_{i,i+2}(0)=p^\lambda_{x_\lambda,j}(m+1)=p^\lambda_{i+1,i+2}(0)$，这与条件（iii）矛盾。最后，根据 $a^\lambda_i=b^\lambda_i$ 是否成立，需要区分两种情况。

若对某个 $\lambda<\kappa$ 和 $i\in\lambda$ 有 $a^\lambda_i=b^\lambda_i$，则由命题 4.2.1 可知，对所有 $\lambda<\kappa$ 和所有 $i\in\lambda$，都有 $a^\lambda_i=b^\lambda_i$。因此，对所有 $\lambda<\kappa$，元素 $a^\lambda_j:=p^\lambda_{i,j}(m+1)$ 是 Gaif(M_λ) 中一个大小为 λ 的 m-细分团的原生顶点。事实上，我们已确保对所有 $i<j$ 都有 $a^\lambda_i\neq a^\lambda_j$，而映射 $p^\lambda_{i,j}$ 指定了从 a^λ_i 到 a^λ_j、长度为 $m+1$ 的两两不相交路径。由于这对所有 $\lambda<\kappa$ 都成立，因此 Gaif($\mathfrak{C}$) 是 κ-某处稠密的。另一方面，若对所有 $\lambda<\kappa$ 和所有 $i\in\lambda$ 都有 $a^\lambda_i\neq b^\lambda_i$，则元素 a^λ_i 和 b^λ_j 是 Gaif(M_λ) 中一个大小为 λ 的 m-细分半图的原生顶点。由于任何大小为 λ^+ 的 m-细分半图都包含一个大小为 λ 的 $2m$-细分团，且 κ 是极限基数，因此 Gaif($\mathfrak{C}$) 是 κ-某处稠密的。□

推论 4.3. 设 κ 是不可达基数，且 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个 κ-泛子范畴，并满足 $|\mathcal{L}|<\kappa$。那么 Gaif($\mathcal{C}$) 是 κ- 处处稠密的。

请注意，上文给出的定理 4.2 的证明依赖于事实 2.5 和事实 2.8。这两条事实对无界 κ 的情形都成立。无界版本

的事实 2.8 正是厄德ős–拉多定理（定理 2.7），而事实 2.5 的无界版本是以下显然的陈述。

事实 4.4. 设 λ 是一个基数，且 $\phi : \mathbf{Card} \to \lambda$ 是一个类函数。那么存在某个 $\mu < \lambda$ 使得 $\phi^{-1}[\mu]$ 无界，即对所有基数 α，都存在某个 $\beta > \alpha$ 使得 $\phi(\beta) = \mu$。

因此，将证明中事实 2.8 和事实 2.5 分别替换为完整的厄德ős–拉多定理和上述事实，即可得出上述推论，该证明见定理 4.2。

推论 4.5. 设 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个代数通用子范畴。那么，$\mathsf{Gaif}(\mathcal{C})$ 是完全某处稠密的。

本文余下部分的目标是证明这一结论的一个部分逆命题。显然，完整的逆命题无从实现。例如，所有二分无向图构成的范畴是完全某处稠密的，但并非代数普适。不过，我们将证明，在为任意完全某处稠密范畴中的对象赋予一种“定向”之后，可以实现代数普适性。为此，第 5节首先建立必要的工具，以证明关系结构范畴的代数普适性。

5. 小工具范畴

证明一个范畴具有代数普适性的标准技巧之一是所谓的箭头构造。最简单的形式是：将一个固定“箭头”（可以是图、代数、拓扑空间等）的副本粘接到图的每条边上，使得在粘接箭头之后，底层图的每个同态都会给出所得结构之间的一个态射。因此，这一构造具有函子性；在对箭头附加额外假设的情况下，还可以证明它保持代数普适性。

在大多数情形下，除非不同的箭头副本沿着具有公共顶点的边粘合，否则它们不会共享任何点。在这里，我们将箭头构造扩展到关系结构，允许不同的箭头副本共享多个顶点，以反映典范 Erdős–Rado 定理中的情形。虽然乍看之下这种选择似乎随意，但其用处将在第 8 节中显现。

定义 5.1. 设 M 是一个 L-结构，A、B、P 是 M 的互不相交子集，α、$\beta \in M$ 是两个不同的元素，且不属于 A、B、P。我们称元组 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 为一个 L-小工具。两个 L-小工具 $(M, \alpha_1, \beta_1, A_1, B_1, P_1)$ 和 $(N, \alpha_2, \beta_2, A_2, B_2, P_2)$ 之间的同态是一个映射 $\rho : M \to N$，它是底层 L-结构之间的同态，此外还满足

$$\rho : \alpha_1 \mapsto \alpha_2, \beta_1 \mapsto \beta_2, A_1 \mapsto A_2, B_1 \mapsto B_2, P_1 \mapsto P_2,$$

其中后者表示 $\rho[A_1] \subseteq A_2$， B_i 和 P_i 也同样如此。我们用 Gdg(L) 表示由 L-小工具及其同态构成的范畴。此外，若 A、B、P 为空集，我们就称该 L-小工具是简单 的。

显然，存在一个自然的遗忘函子 $\mathrm{F} : \mathrm{Gdg(L)} \to \mathrm{Str(L)}$，它将一个 L-小工具映射到其底层的 L-结构。以下定义及随后的引理说明了 L-小工具如何产生一个从图范畴出发的函子。

定义 5.2。 固定一个 L-小工具 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 和一个图 (G, E)。令 $G \star M := G \sqcup (\pi_0[E] \times A) \sqcup (\pi_1[E] \times B) \sqcup (E \times (M \setminus (\{a, b\} \cup A \cup B \cup P))) \sqcup P$，其中 π_i 是第 i 个投影函数。对于一条边 $(u, v) \in E$，定义映射 $\phi^{G}_{,M\,(u,v)} : M \to G \star M$ 如下：

$$\phi^{G,M}_{(u,v)}(x) = \begin{cases} u, & \text{if } x = \alpha \\ v, & \text{if } x = \beta \\ x, & \text{if } x \in P \\ (u, x), & \text{if } x \in A \\ (v, x), & \text{if } x \in B \\ (u, v, x), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 $G \star M$ 上定义一个 L-结构，使得对于每个 $R \in \mathrm{L}$

$\bar{y} \in R^{G \star M} \Longleftrightarrow$ 存在 $\bar{x} \in R^{M}$，且 $(u, v) \in E$，使得 $\phi_{(u,v)}(\bar{x}) = \bar{y}$.对于图同态 $f : (G, E) \to (H, S)$，定义映射

$$f \star M : G \star M \to H \star M, \text{by}$$

$$(f \star M)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in G \\ x, & \text{if } x \in P \\ (f(u), a), & \text{if } x = (u, a) \\ (f(v), b), & \text{if } x = (v, b) \\ (f(u), f(v), c), & \text{if } x = (u, v, c). \end{cases}$$

引理 5.3。 对于每个$(u, v) \in E, \phi_{(u,v)} : M \to G \star M$都是单射强同态。对于图同态 $f : (G, E) \to (H, S)$， $f \star M : G \star M \to H \star M$是 L-结构之间的同态。

证明。 根据 $G \star M$ 的定义可直接得出 $\phi_{(u,v)}$ 是一个单射强同态。若 $f : (G, E) \to (H, S)$ 是图的一个同态，则对于每个 $(u, v) \in E$，都有

$$(f \star M) \circ \phi^{G,M}_{(u,v)} = \phi^{M,H}_{(f(u),f(v))}.$$

设 $R \in \mathbf{L}$ 且 $\bar{y} \in R^{G\star M}$。那么存在一个 $\bar{x} \in R^M$ 和 $(u,v) \in E$，使得$\phi_{(u,v)}(\bar{x}) = \bar{y}$。由此可得

$$(f \star M)(\bar{y}) = \phi_{(f(u),f(v))}(\bar{x}),$$

因此 $(f \star M)(\bar{y}) \in R^{H\star M}$。 □

因此，对于任意固定的 L-小工具 M，赋值 $(- \star M) : \mathbf{Gra} \to \mathbf{Str(L)}$ 是函子性的。事实证明，对于任意固定的图 G，赋值 $(G \star -) : \mathbf{Gdg(L)} \to \mathbf{Str(L)}$ 也同样如此。

定义 5.4。固定一个图 G，并令

$$\rho : (M, \alpha_1, \beta_1, A_1, B_1, P_1) \to (N, \alpha_2, \beta_2, A_2, B_2, P_2)$$

为一个 L-小工具的同态。定义映射

$$G \star \rho : G \star M \to G \star N, \text{by}$$

$$(G \star \rho)(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in G \\ \rho(x), & \text{if } x \in P \\ (u, \rho(a)), & \text{if } x = (u,a) \\ (v, \rho(b)), & \text{if } x = (v,b) \\ (u, v, \rho(c)), & \text{if } x = (u,v,c). \end{cases}$$

引理 5.5。对于上述的 G 和 ρ，$(G \star \rho)$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构的同态。

证明。首先，$(G \star \rho)$ 定义良好，因为 ρ 满足

$$\rho : \alpha_1 \mapsto \alpha_2, \beta_1 \mapsto \beta_2, A_1 \mapsto A_2, B_1 \mapsto B_2, P_1 \mapsto P_2.$$

此外，对于每个 (u,v)，都有 $\in E$

$$(G \star \rho) \circ \phi^{G,M}_{(u,v)} = \phi^{N,G}_{(u,v)} \circ \rho.$$

因此，若对于某个 $R \in \mathbf{L}$，$\bar{a} \in R^{G\star M}$，则存在某个 $\bar{x} \in R^M$ 以及一个 $(u,v) \in E$，使得 $\phi_{(u,v)}(\bar{x}) = \bar{a}$。由此可得 $\rho(\bar{x}) \in R^N$，因此

$$\phi_{(u,v)} \circ \rho(\bar{x}) = (G \star \rho) \circ \phi_{(u,v)}(\bar{x}) = (G \star \rho)(\bar{a}) \in R^{G\star N}.$$

所以，$(G \star \rho)$ 是一个 L-结构同态。 □

事实上，情况甚至更进一步。我们用 $\mathbf{Gra}^+$ 表示至少含有一条边且以同态为态射的图范畴。

命题 5.6。$\star : \mathbf{Gra}^+ \times \mathbf{Gdg}(\mathcal{L}) \to \mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 是忠实双函子。

证明。设 $f : G \to H$ 是一个图同态，且 $\rho : (M, \alpha_1, \beta_1, A_1, B_1, P_1) \to (N, \alpha_2, \beta_2, A_2, B_2, P_2)$ 是一个 L-小工具的同态。定义映射

$$f \star \rho : G \star M \to H \star N \text{ by:}$$

$$(f \star \rho)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in G \\ \rho(x), & \text{if } x \in P \\ (f(u), \rho(a)), & \text{if } x = (u, a) \\ (f(v), \rho(b)), & \text{if } x = (v, b) \\ (f(u), f(v), \rho(c)), & \text{if } x = (u, v, c). \end{cases}$$

与较简单的情形一样，对于所有 $(u, v) \in E(G)$，结论成立

$$(f \star \rho) \circ \phi^{G,M}_{(u,v)} = \phi^{N,G}_{(f(u),f(v))} \circ \rho,$$

由此可容易验证，$(f \star \rho)$ 是 L-结构的同态。

设 $(f, \rho) \neq (g, \mu) \in \mathrm{Hom}((G, M), (H, N))$。若 $f \neq g$，则显然 $(f \star \rho) \neq (g \star \mu)$。此外，若 $\rho \neq \mu$，则 M 必然包含 α_1 和 β_1 以外的点。因此，存在某个 $x \notin \{\alpha_1, \beta_1\}$，使得 $\rho(x) \neq \mu(x)$。由于 G 至少有一条边，故存在某个 $(u, v) \in G$，使得 x 等于 (u, a)、(v, b)、(u, v, c) 或 p 之一，其中 $p \in P$。因此可得 $(f \star \rho)(x) \neq (g \star \mu)(x)$。□

我们不得不将范围限制在至少有一条边的图上，以确保 $G \star M \neq G$，从而确保 $(- \star -)$ 的忠实性。在实践中，为避免所得结构出现不需要的自同态，我们也常要求 G 和 M 均不含孤立点。下面的引理说明，在此背景下，L-结构 $G \star M$ 可以通过泛性质来定义。

引理 *5.7*。固定一个 *L*-小工具 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$、一个不含孤立点的图 G，以及一个 *L*-结构 N。假设对于每个 $(u, v) \in E(G)$，都存在单射同态 $f_{u,v} : M \to N$，使得 $f_{u,v}(x) = f_{s,t}(y)$ 当且仅当 $x = y$ 且以下条件之一成立：

- $(u, v) = (s, t)$ *and* $x \in M$;
- $u = s, v \neq t$ *and* $x \in \{\alpha\} \cup A \cup P$;
- $u \neq s, v = t$ *and* $x \in \{\beta\} \cup B \cup P$;
- $u \neq s, v \neq t$ *and* $x \in P$.

于是存在一个单射同态 $G \star M \to N$。

证明。 考虑映射

$$\Phi := \bigcup_{(u,v)\in E(G)} f_{u,v} \circ (\phi_{u,v}^{M,G})^{-1} : G \star M \to N.$$

由于 G 不含孤立点，因此 Φ 在$G \star M$的每一点上都有定义。我们证明它是良定义的。

事实上，

$$\phi_{u,v}[M] \cap \phi_{s,t}[M] = \begin{cases} \phi_{u,v}[M] & \text{if } (u,v) = (s,t); \\ \{u\} \cup \{(u,a) : a \in A\} \cup P & \text{if } u = s \wedge v \neq t; \\ \{v\} \cup \{(v,b) : b \in B\} \cup P & \text{if } u \neq s \wedge v = t; \\ P & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于映射$f_{u、v}$ 和$f_{s、t}$ 在这四种情形下相同，因此 Φ是良定义的。此外，由于每个$f_{u、v}$ ○（$\phi^{M、G}_{u\,v}$，）$^{-1}$ 都是单射，并且当 $x \neq y$ 或 $x = y$ 时，$f_{u、v}$ ○（$\phi^{M、G}_{u\,v}$，）$^{-1}$（x）$\neq f_{s、t}$ ○（$\phi^{M、G}_{s\,t}$，）$^{-1}$（y），而根据假设，$x \notin \phi_{u、v}[M] \cap \phi_{s、t}[M]$，因此 Φ 是单射。最后， Φ 是同态：每个$f_{u、v}$ 和 $\phi^{M、G}_{u\,v}$均如此；并且根据构造，出现在 $G \star M$某个关系中的所有元组都包含在某个（u、v）$\in E$（G）的$\phi_{u、v}[M]$中。□

如前所述，广义箭头构造之所以有用，是因为在仅需满足少数额外假设的情况下，该构造不仅具有函子性，事实上还保持普适性。以下定理给出了这样一组充分假设；该定理将在第 8 节中发挥关键作用，同时也具有独立的研究价值。

定理 5.8. 固定 **Gra** 的某个子范畴 $\mathfrak{G}$，使得其中没有任何 $G \in$ 对象$(\mathfrak{G})$ 含有孤立点。设 $\mathfrak{C}$是 **Str**$(\mathcal{L})$的一个子范畴，并假设存在某个 $\mathcal{L}$-小工具 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 满足

(1) $M \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ *and for every* $G \in \mathrm{obj}(\mathfrak{G})$, $G \star M \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$*;*

(2) $\phi^{G,M}_{(u,v)}$ *are the only morphisms* $M \to G \star M$ *in* $\mathfrak{C}$*;*

(3) $f \star M$ *is in* $\mathrm{morph}(\mathfrak{C})$ *for every* $f \in \mathrm{morph}(\mathfrak{G})$*;*

那么，由 $\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{C}$ 给出的函子

$$\Phi(G) = G \star M, \quad \Phi(f) = f \star M$$

是一个满嵌入。因此，若 $\mathfrak{G}$ 是代数普适的，则 $\mathfrak{C}$也是如此。此外，若 $|M| < \kappa$ 对于某个无限基数 κ 成立，且 $\mathfrak{G}$ 是 κ-普适的，则 $\mathfrak{C}$也是如此。

证明。 只需证明函子 $\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{C}$ 是满嵌入。其余结论由定义可直接得出。

根据命题 5.6，$\star : \mathbf{Gra}^+ \times \mathbf{Gdg}(\mathcal{L}) \to \mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 是忠实双函子，因此 Φ是忠实的。因此，只需证明其具有满性。设

$$g : (G, E) \star M \to (H, S) \star M$$

是 $\mathfrak{C}$ 中的一个态射。由（2）可知，对于每条边 $(u, v) \in E$，都存在一条边 $(u', v') \in S$，使得 $g \bigcirc \phi_{(u,v)} = \phi_{(u',v')}$。定义映射

$$f : G \to H, \quad u \mapsto u'.$$

这是良定义的：由于 G 没有孤立点，对于每个 $u \in G$，都存在某个 $v \in G$，使得 $(u, v) \in E$ 或 $(v, u) \in E$。不失一般性，假设前者成立，因此 $u = \phi_{(u,v)}(\alpha)$。于是 $g(u) = g \bigcirc \phi_{(u,v)}(\alpha) = \phi_{(u',v')}(\alpha) = u'$。此外，由于 $(u, v) \in E$ 蕴含 $(f(u)\ f(v)) \in S$，可知 $f : (G, E) \to (H, S)$ 是一个图同态。我们断言 $(f \star M) = g$。

事实上，令 $(u, a) \in G \times A \subseteq G \star M$。根据构造，必定存在一个 $v \in G$以及一条边 $(u, v) \in E$。因此，

$$g(u, a) = g \circ \phi_{(u,v)}(a) = \phi_{(f(u),f(v))}(a) = (f(u), a).$$

同样，若 $(v, b) \in G \times B \subseteq G \star M$，则 $g(v, b) = (f(v)\ b)$。若 $(u, v, c) \in (E \times (M \setminus (\{a, b\} \cup A \cup B \cup P)))$，则

$$g(u, v, c) = g \circ \phi_{(u,v)}(c) = \phi_{(f(u),f(v))}(c) = (f(u), f(v), c).$$

最后，若 $p \in P \subseteq G \star M$，则对任意 $(u, v) \in E$，都有

$$g(p) = g \circ \phi_{(u,v)}(p) = \phi_{(f(u),f(v))}(p) = p,$$

因此 $g = f \star M$，如所需。 □

注意，条件（2）蕴含 M 是刚性的（因此尤其没有孤立点），然而反过来并不成立，例如 $\mathcal{L} = \{<\}$ 和 M是 $n \in \omega$ 上的全序。此外，它蕴含 P 被所有同态 $G \star M \to H \star M$逐点固定。此外，每当 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$的满子范畴时，条件（3）显然自动成立。

注意到，由于 $\star$映射到 L-结构的范畴中，因此尝试将 L-结构 $H \star M$ 用作箭头是合理的。要在此框架下实现这一点，我们需要在 $G \star M$上指定一个 L-小工具结构。幸运的是，这个结构可以从 G 和 M继承而来。在本节余下部分，我们将展示如何把 $\star$ 扩展为作用于小工具的运算。虽然也可以通过函子性的方式实现这一点，但由于这与我们的证明无关，这里不再深入探讨。

定义 5.9. 设 (H, s, t) 是一个简单图构件，$(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 是一个 L-小工具。定义该 L-小工具

$$H \circledast M := (G \star M, s, t, A', B', P), \text{ where}$$
$$A' = \{(s, a) : a \in A\}, \quad B' = \{(t, b) : b \in B\}.$$

命题 5.10. 设 G 是一个图，$(H,\ s,\ t)$ 是一个简单图构件，使得 $s \in \pi_1[E(H)]$，$t \in \pi_2[E(H)],$，并且 M 是一个 $\mathcal{L}$-小工具。那么：

$$(G \star H) \star M \simeq G \star (H \circledast M).$$

证明。注意，若 G 有 κ 个孤立点，且 H 有 λ个孤立点，那么 $(G \star H) \star M$和 $G \star (H \circledast M)$ 都恰有 $\kappa + |E(G)| \times \lambda$ 个不来自 M副本的孤立点。由于这两者之间存在双射，我们可以将范围限制在 G和 H 中不含孤立点的子图上。

因此，不失一般性，假设 G 和 H 不含孤立点。回顾一下，$(x, y) \in E(G \star H)$ 当且仅当存在 $(u, v) \in E(G)$ 和 $(z, w) \in E(H)$，使得

$$\phi^{G,H}_{u,v}(z, w) = (x, y).$$

因此，对于所有 $(u, v) \in E(G)$ 和 $(z, w) \in E(H)$，考虑单射强同态

$$\psi^{u,v}_{z,w} = \phi^{G\star H,M}_{\phi_{u,v}(z,w)}.$$

考虑

$$f_{u,v,z,w} = \phi^{G,H\circledast M}_{u,v} \circ \phi^{H,M}_{z,w} \circ (\psi^{u,v}_{z,w})^{-1} : \psi^{u,v}_{z,w}[M] \to G \star (H \circledast M),$$

$$f = \bigcup_{(u,v)\in E(G)} \bigcup_{(z,w)\in E(H)} f_{u,v,z,w} : (G \star H) \star M \to G \star (H \circledast M).$$

因此，对于每个 $(u, v) \in E(G)$ 和每个 $(z, w) \in E(H)$，我们都有一个图表：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi^{u,v}_{z,w}} & (G \star H) \star M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi^{H,M}_{z,w}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ H \circledast M & \xrightarrow[\phi^{G,H\circledast M}_{u,v}]{} & G \star (H \circledast M) \end{array}$$

我们证明 f 是 L-结构的一个同构。事实上，由于 G 和 H 不包含孤立点，$(G\star H)\star M$ 中的每个元素都属于 $\psi^{u,v}_{z,w}$的像，其中某个 $(u, v) \in E(G)$ 和 $(z, w) \in E(H)$ 满足相应条件。因此，f 在整个 $(G \star H) \star M$上都有定义。此外，它是一个定义良好的映射，因为

$$\psi^{u,v}_{z,w}[M] \cap \psi^{u',v'}_{z',w'}[M] =$$

$$\begin{cases} \psi^u & \\ & \\ P_{,z^{\,v},w}[M], & \text{若 } (u,v) = (u',v') \wedge (z,w) = (z',w'); \ \{\phi_{u,v}(z)\} \cup \{(\phi_{u,v}(z)\ a) : a \in A\} \cup P, \ \text{若 } \phi_{u,v}(z) = \phi_{u',v'}(z') \end{cases}$$

$$\wedge\, \phi_{u,v}(w) \neq \phi_{u',v'}(w')\ ; \ \{\phi_{u,v}(w)\} \cup \{(\phi_{u,v}(w)\ b) : b \in B\} \cup P, \ \text{若 } \phi_{u,v}(z) \neq \phi_{u',v'}(z') \wedge \phi_{u,v}(w) = \phi_{u',v'}(w')\ ; \ \text{否则。}$$

并且映射 $f_{u,v,z,w}$ 在这些集合上一致。最后，由于 H 没有孤立点， $H \circledast M$ 中的每个元素都属于某个 $(z,w) \in E(H)$ 的 $\phi^{H}_{,z\ w}{}^{M}$ 的像；此外，由于 G 没有孤立点， $G \star (H \circledast M)$ 中的每个元素都属于某个 $(u,v) \in E(G)$ 的 $\phi^{G}_{,u\ v}{}^{H\circledast M}$ 的像。因此， f 是满射；又因为 $\psi^{u}_{,z\ w,}{}^{v}, , \phi^{H}_{,z\ w}{}^{M}, , \phi^{G}_{,u\ v}{}^{H\circledast M}$ 都是单射强同态，所以 f 是同构。□

例如，注意到图 r 的有向 H -细分同构于 $H \star P_r$，其中 $(P_r$、 α、 $\beta)$ 是一个简单图构件，包含 P_r 一条长度为 $r+1$ 、从 α 到 β 的有向图路径。因此，引理 7.7 表明，对于所有图 G 以及简单图构件 $(H$、 s、 $t)$

$$G \star H^{(r)} \simeq (G \star H)^{(r)}.$$

下一节中，我们将通过一个简单的构件构造证明，良基图范畴是代数普适的。这对于我们证明推论 4.5 的部分逆命题至关重要，该命题已在第 8 节中证明。

6. 良基图范畴

考虑由序数及其同态（即保序映射）组成的范畴 Ord。容易看出，对于任意无限基数 κ，Ord 都不是 κ-普适的。事实上，对于任意 $\alpha, \beta \in \mathrm{obj(Ord)}$，要么存在一个同态 $\alpha \to \beta$，要么存在一个同态 $\beta \to \alpha$。另一方面，有许多有限图彼此之间不存在同态映射。这里我们要说明，尽管 Ord 不是代数普适的，但它的单调闭包是代数普适的。这恰好对应于良基图范畴。回忆一下，若对于每个非空 $S \subseteq X$，都存在某个 $s \in S$，使得没有 $p \in S$ 满足 pRs，则称二元关系 $R \subseteq X \times X$ 在 X 上是良基的。回忆以下标准引理。

引理 6.1. 良基二元关系 $R \subseteq X \times X$ 的传递闭包是一个良基严格偏序 $(X, <)$。

证明。 我们首先说明，任意良基结构 (X,R) 都是无环有向图。根据定义，显然不存在满足 uRu 的 $u \in X$；而若 uRv，则在定义中取 $S = \{u,v\}$，可得 $s = u$，因此 $u/R\ v$。所以 (X,R) 是有向图。现在，若 $s_1 R s_2 \dots s_n R s_1$ 是 X 中的一个环，则取 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$，必定存在某个 $s \in S$，使得不存在满足 $s_i R s$ 的 s_i；这就产生了矛盾。因此 (X,R) 是无环的。

令 $<$ 为 R 的传递闭包。由于 (X,R) 是无环有向图，根据标准结论可知 $(X,<)$ 是严格偏序。我们说明 $<$ 在 X 上仍然是良基的。假设存在某个 $S \subseteq X$，使得对所有 $s \in S$，都存在某个 $p \in S$ 满足 $p < s$。对于每一对这样的元素，我们可以关联一个由 X 中元素构成的有限序列 $p = u_0 R u_1 R \dots R u_{n_s} = s$。令 S' 为 X 中包含所有这些序列元素的子集，由此可见，S' 证明了 (X,R) 不是良基的。因此，不存在这样的 $S \subseteq X$，所以 $(X,<)$ 是良基的。□

根据上述内容，给定一个良基关系 $R \subseteq X \times X$，我们可以将有序对 (X,R) 视为一个无环有向图。因此，我们称任何满足 E 在 G 中是良基的无环有向图 (G,E) 为良基图。我们用 WGra 表示由良基图及其同态构成的范畴。下面的引理说明，良基图范畴恰好是 Ord 的满单调闭包。

引理 6.2。对于图 (X,R)，以下条件等价：

(1) R 在 X 上是良基的；*(2)* 存在一个序数 $\alpha < |X|^+$ 和一个单射同态 $f : (X,R) \to (\alpha,\in)$；*(3)* (X,R^*) 不包含无限路径，其中 $R^* = \{(x,y) : (y,x) \in R\}$

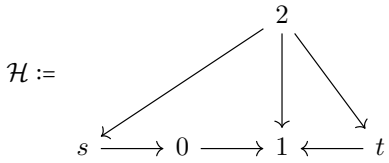
证明。(1) Ô⇒ (2)：假设 (X,R) 是良基的。由前一个引理可知，其传递闭包 $(X,<)$ 是良基严格偏序。根据佐恩引理，$(X,<)$ 可扩张为严格全序 $(X,\prec)$。这是良序。事实上，对于任意 $S \subseteq X$，都存在某个 $s \in S$，使得没有 $p \in S$ 满足 $p < s$，因此 $s \preceq p$。于是，$(X,\prec)$ 同构于唯一的序数 $\alpha < |X|^+$。将此同构与自然的单射同态 $(X,<) \to (X,\prec)$ 复合，得到单射同态 $f : (X,<) \to (\alpha,\in)$。再与单射同态 $(X,R) \to (X,<)$ 复合一次，便得到单射同态 $(X,R) \to (\alpha,\in)$。

(2) Ô⇒ (3)：如果 $f : (X,R) \to (\alpha,\in)$ 是单射同态，且 (X,R^*) 包含一条无限路径 $u_0 R^* u_1 R^* \dots$，那么 $f(u_0) \ni f(u_1) \ni \dots$ 是 α 中的无限严格递减序列；矛盾。

(3) Ô⇒ (1)：如果 (X,R) 不是良基的，那么存在某个 $S \subseteq X$，使得对于每个 $s \in S$，都存在某个 $p \in S$，满足 pRs。因此，我们可以归纳地构造一条路径 $s_0 R^* s_1 R^* s_2 R^* \dots$，从而 (X,R^*) 包含一条无限路径。□

由此我们证明 **WGra** 是代数普适的，事实上， κ-普适于所有基数 κ。这一结论是通过采用与 [21] 第四章定理 3.5 中相同的构造得出的。

定义 6.3. 今后，固定图



以及简单图构件 $(\mathrm{H}\ s,t)$。显然，H 是良基的，因此任何图 $G \star \mathrm{H}$ 也都是良基的。

这将在若干论证中发挥作用，确切地说，是因为它以一种强意义满足定理 2 的条件 5.8 。

引理 6.4. 对于所有 $r \in \omega$ 和图 G，从 $\mathcal{H}^{(r)} \to G \star \mathcal{H}^{(r)}$ 出发的同态只有映射 $\phi^{\mathcal{H}^{(r)}}_{v\ ,u}{}^{G}{}_{,}$其中 $(u,v) \in E(G)$。

证明. 设 $f : \mathrm{H}^{(r)} \to G \star \mathrm{H}^{(r)}$ 是一个同态。由于 H 连通，且 2 是 H 中唯一没有入边的元素，因此对于某个 $(u,v) \in E(G)$，可得 $f(2) = (2,u,v)$。同理，由于 1 是 H 中唯一没有出边的元素，对于某个 $(u',v') \in E(G)$，可得 $f(1) = (1,u',v')$。注意， $G \star H$ 没有自环或重边，因此从 2 到 1 长度为 $r+1$ 的图路径，在 f 下必须映射为从 $(2,u,v)$ 到 $(1,u',v')$ 长度为 $r+1$ 的图路径。由此可得 $(u,v) = (u',v')$。类似地，从 2 到 1、长度为 $2(r+1)$ 且经过 t 的图路径，必然映射为从 $(2,u,v)$ 到 $(1,u,v)$ 长度为 $2(r+1)$ 的图路径。 $G \star \mathrm{H}$ 中唯一这样的图路径是经过 (t,v) 的路径，因此特别有 $f(t) = (t,v)$。最后，从 2 到 1、长度为 $3(r+1)$ 且经过 s 和 0 的图路径，也必须映射为从 $(2,u,v)$ 到 $(1,u,v)$ 长度为 $3(r+1)$ 的图路径。由类似的推理可得 $f(s) = (s,u)$，且 $f(0) = (0,u,v)$。由于 $\mathrm{H}^{(r)}$ 的所有细分点都映射到 $G \star \mathrm{H}^{(r)}$中相应的细分点，因此可得 $f = \phi^{\mathcal{H}^{(r)}}_{v\ ,u}{}^{G}{}_{,}$. □

由此可知，WGra 是代数普适的。

推论 6.5。 良基图范畴是代数普适的。此外，对于所有无限基数 κ，它都是 κ-普适的。

证明。考虑定义 6.3 中的简单图系统 (H s,t)。根据标准结果，连通图范畴 ConGra 是代数普适的，并且对所有无限基数 κ 都是 κ-普适的（见 [21]）。因此，我们证明函子 Φ : ConGra → WGra（由 $G \mapsto G \star$H 给出）是一个满嵌入。根据定理 5.8，只需验证对于任意连通图 G，从 H 到 H 的同态仅有形如 $\phi^{H}{}_{,u\,v}{}^{G}$ 的那些，其中 $(u,v) \in E(G)$。这由引理 6.4 得出。最后，由于 H 是有限的，这意味着对于所有无限基数 κ，WGra 都是 κ-普适的。□

7. 有向构件与路径

尽管某处稠密性是代数普适性的必要条件，但二分无向图范畴的例子显然表明，它并非充分条件。即使存在单调性，我们也可以看到，所有边都仅从左侧指向右侧的二分图构成的满子范畴，其 Gaifman 类是某处稠密的，并且具有单调性，但并非代数普适。尽管如此，为范畴中的图赋予适当的定向后，我们仍可能得到一个代数普适的有向图范畴。本文将这一思路推广到关系结构，方法是引入有向L-结构。这类结构自然地带有一个到有向图范畴的函子。

定义 7.1。 设 M 是一个 L-结构，并记 $V = \bigcup_{R\in\mathcal{L}}(\pi_0[R^M] \cup \pi_1[R^M]) \subseteq M$ 为 M 中出现在 M内任意关系符号解释的前两个坐标中的元素所组成的集合。若对所有 u、$v \in V$，至多存在一个 $R \in$ L，且至多存在一个 $\bar{a} \in R^M$，使得 $(u,v) = (\pi_0(\bar{a})\ \pi_1(\bar{a}))$ 或 $(u,v) = (\pi_1(\bar{a})\ \pi_0(\bar{a}))$，并且不存在 $R \in$ L 和 $\bar{a} \in R^M$ 使得 $\pi_0(\bar{a}) = \pi_1(\bar{a})$，则称 M 是有向的 。

给定一个有向 L-结构，我们定义其弧图，记作 Arc(M)，它是顶点集为 V、边集为

$$E = \{(u,v) \in V^2 : \exists R \in \mathcal{L}, \bar{a} \in R^M \text{ such that } \pi_0(\bar{a}) = u \text{ and } \pi_1(\bar{a}) = v\}.$$

我们用 Đ→Str(L) 表示以同态为态射的有向 L-结构范畴。我们称任意满足 M 有向的 L-小工具 (M,α,β,A,B,P) 为有向 L-小工具，并用 ĐĐ→Gdg(L) 表示以 L-构件同态为态射的有向 L-小工具范畴。

注意， π_0 和 π_1 的选择是任意的，任意两个不同的投影都可以给出一个合适的定义。不过，这一定义略有优势，因为有向{E}-结构就是标准意义上的有向图。因此，我们将有向{E}-小工具称为有向图小工具，ĐĐĐĐĐ→并将有向图小工具范畴记作 GraGdg。此外，

很容易看出，对于任意有向图 G，Arc(G)都是 G在非孤立顶点上诱导出的子图。将范围限制为不含孤立点的 L-结构，可确保 Arc 是一个忠实函子。

引理 7.2. Arc : $\longrightarrow\mathbf{Str}(\mathcal{L})^{-} \to \longrightarrow\mathbf{Gra}^{-}$ 是一个忠实函子，它将没有孤立点的有向 $\mathcal{L}$-结构及其 $\mathcal{L}$-同态所成的范畴映至没有孤立点的有向图及其图同态所成的范畴。

证明。 固定两个有向 L-结构 M、N 以及一个同态 $f : M \to N$。若 $v \in V_M$，则根据定义，存在某个 $R_v \in$L 和 $\bar{a}_v \in R^M$，使得对于 $i \in${0, 1}，有 $v = \pi_i(\bar{a}_v)$。由此可得 $f(\bar{a}_v) \in R^N$，并且还有 $f(v) = \pi_i\bigcirc f(\bar{a}_v)$，因此 $f(v) \in V_N$。于是，将 f限制在 V_M上便得到一个映射

$$\mathsf{Arc}(f) : \mathsf{Arc}(M) \to \mathsf{Arc}(N)$$

我们断言这是一个图同态。事实上，若 $(u, v) \in E$(Arc(M))，则存在唯一的 $R \in$ L 和 $\bar{a} \in R^M$，使得 $u = \pi_0(\bar{a})$ $v = \pi_1(\bar{a})$。同样可得 $f(\bar{a}) \in R^N$，且 $f(u) = \pi_0\bigcirc f(\bar{a})$ $f(v) = \pi_1\bigcirc f(\bar{a})$，因此 $(f(u)\ f(v))$ 是 Arc(N) 中的一条边。

最后，我们声称 Arc 在态射上单射。设 M、N 是没有孤立点的有向结构，且 f、$g : M \to N$ 是两个不同的同态，因此存在某个 $c \in M$，使得 $f(c) \neq g(c)$。若 $c \in V_M$，则 Arc(f) $\neq$Arc(g)。另一方面，若 $c \notin V_M$，则存在某个 $R \in L$ 和 $\bar{a} \in R^M$，使得对于某个 $i > 1$，有 $c = \pi_i(\bar{a})$。由此可得 $f(\bar{a}) \neq g(\bar{a})$。令 $u = \pi_0(\bar{a})$ $v = \pi_1(\bar{a})$，我们看到 $(f(u)\ f(v)) \neq (g(u)\ g(v))$，因为 N 是有向的。由于 u、$v \in V_M$，可得 Arc(f) $\neq$Arc(g)。□

定义 7.3。 我们将满足 $\alpha, \beta \in$Arc(M) 且 Arc(M) $\cap (A \cup B \cup P) = \varnothing$ 的有向 L-构件 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 称为 L-系统。当 L $=\{E\}$ 时，我们称之为图系统。我们用 Syst(L) 表示由 L-系统及其 L-构件同态构成的范畴。我们还将 Arc 扩展为定义在 L-小工具上的映射，使得

$$\mathsf{Arc} : (M, \alpha, \beta, A, B, P) \mapsto (\mathsf{Arc}(M), \alpha, \beta, \varnothing, \varnothing, \varnothing)$$

虽然此处省略证明，因为它与我们的目的无关，但引理 7.2 的一个改编版本表明， Arc可扩展为 $\mathcal{L}$-系统（不含孤立点）上的忠实函子。接下来，我们证明，只要 $G \star M$ 是有向$\mathcal{L}$-结构， G 是有向图，且 M 是一个 $\mathcal{L}$-系统。

引理 7.4。 设$(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 是一个有向$\mathcal{L}$-小工具，且 G 是一个图。那么对于所有$(u, v) \in E(G)$， $\phi^{G}{}_{,M}{}_{(u,v)} : M \to G \star M$ 限制为一个图同构

$$\phi^{G,M}_{(u,v)} : \mathsf{Arc}(M) \to \mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M]).$$

证明。 显然，由于 $\phi_{(u,v)}$ 是一个单射强同态， $\phi_{(u,v)}[M] \simeq M$ 是有向的，且它们的弧图同构。□

命题 7.5. 设 G 是一个有向图，且 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 是一个 $\mathcal{L}$-系统。那么 $G \star M$ 是有向的。

证明。 我们声称 $V_{G\star M} = \bigcup_{R\in\mathcal{L}}(\pi_0[R^{G\star M}] \cup \pi_1[R^{G\star M}])$ 满足定义 7.1 的条件。事实上，注意到 $m \in V_{G\star M}$ 当且仅当存在一条边 $(u, v) \in E(G)$ $R \in \mathcal{L}$ 且 $\bar{c} \in R^M$ 使得 $\pi_i(\phi_{(u,v)}(\bar{c})) = m$，其中某个 $i \in \{0, 1\}$。因此：

$$V_{G\star M} = \bigcup_{(u,v)\in E(G)} \mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M]).$$

现在注意，由于 $\alpha, \beta \in \mathsf{Arc}(M)$，因此可得 $u, v \in \mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M])$。此外，由于 $\mathsf{Arc}(M)$ 与 A, B, P 不相交，且 G 是有向的，故有：

$$\mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M]) \cap \mathsf{Arc}(\phi_{(u',v')}[M]) = \begin{cases} \mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M]), & \text{if } (u,v) = (u',v'); \\ \{u\}, & \text{if } u = u' \wedge v \neq v' \\ \{v\}, & \text{if } u \neq u' \wedge v = v' \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此， $x \neq y$ 意味着 $\{x, y\} \notin \mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M]) \cap \mathsf{Arc}(\phi_{(u',v')}[M])$ 对于 $(u, v) \neq (u', v')$。因此，鉴于每个 $\mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M])$ 都是有向的，可知对于所有 $x \neq y$，从 $V_{G\star M}$ 出发至多有一个 $R \in \mathrm{L}$，且至多有一个 $\bar{a} \in R^{G\star M}$，使得 $(u, v) = (\pi_0(\bar{a}), \pi_1(\bar{a}))$ 或 $(u, v) = (\pi_1(\bar{a}), \pi_0(\bar{a}))$。因此，$G \star M$ 是有向的。□

因此，由于 $G \star M$ 是有向的，我们可以考虑它的弧图。事实证明，这等于有向图 $G \star \mathsf{Arc}(M)$。

命题 7.6. 对于有向图 G 和一个 $\mathcal{L}$-系统 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$

$$\mathsf{Arc}(G \star M) = G \star \mathsf{Arc}(M).$$

此外，对于所有 $(u, v) \in E(G)$：

$$\mathsf{Arc}(\phi^{M,G}_{u,v}) = \phi^{\mathsf{Arc}(M),G}_{u,v}.$$

证明。 根据引理 7.5， $G \star M$ 是有向的，因此 $\mathsf{Arc}(G \star M)$ 定义良好，且等于 $\bigcup_{(u,v)\in E(G)} \mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M])$。由于 M 是一个系统，且 $\mathsf{Arc}(\phi_{(u,v)}[M]) \simeq \mathsf{Arc}(M)$，这意味着

$$\mathsf{Arc}(G \star M) = G \sqcup \varnothing \sqcup \varnothing \sqcup \{(u, v, m) : (u, v) \in E(G), m \in \mathsf{Arc}(M)\} \sqcup \varnothing.$$

由此可得，$\mathsf{Arc}(G \star M)$ 与 $G \star \mathsf{Arc}(M)$ 作为集合相等。此外，(x, y) 是 $\mathsf{Arc}(G \star M)$ 中的一条边，当且仅当存在一条边 $(u, v) \in E(G)$ 和一条边 $(w, z) \in E(\mathsf{Arc}(M))$，使得 $\phi_{(u,v)}(w, z) = (x, y)$；根据定义，这当且仅当 (x, y) 是 $G \star \mathsf{Arc}(M)$ 中的一条边。

对于第二个断言，回想一下，根据定义，$\mathsf{Arc}(\phi^{M,\,{}_u v^{G},\,})$ 是 $\phi^{M,\,{}_u v^{G},\,}$ 在 $\mathsf{Arc}(M)$ 上的限制。因此，由于 $\mathsf{Arc}(M)$ 是简单的，可得

$$\mathsf{Arc}(\phi^{M,G}_{u,v})(x) = \begin{cases} u & \text{if } x = \alpha; \\ v & \text{if } x = \beta; \\ (x, u, v) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据定义，它因此等于 $\phi^{\mathsf{Arc}(M)}_{v,\,{}_u \quad {}^{G},\,\circ}$。 □

综上所述，以上内容推出下面的引理，它在第 8 节中起着关键作用。

引理 7.7. 设 G 是一个有向图，$(H,\ s,\ t)$ 是一个简单图系统，并且 $(M,\ \alpha,\ \beta,\ A,\ B,\ P)$ 是一个 $\mathcal{L}$-系统。那么 $H \circledast M$ 是一个 $\mathcal{L}$-系统，此外

$$\mathsf{Arc}(G \star (H \circledast M)) \simeq (G \star H) \star \mathsf{Arc}(M).$$

证明。 由引理 7.5，$H \star M$ 是一个有向 L-结构，且 $\mathsf{Arc}(G \star M) = \bigcup_{(u,v) \in E(G)} \mathsf{Arc}(\phi_{u,\,v}[M])$。由于 $\alpha, \beta \in \mathsf{Arc}(M)$，可得 $s, t \in \mathsf{Arc}(G \star M)$，而 $\mathsf{Arc}(M) \cap (A \cup B \cup P) = \varnothing$ 意味着

$$\mathsf{Arc}(G \star M) \cap (\{(s, a) : a \in A\} \cup \{(t, b) : b \in B\} \cup P) = \varnothing.$$

所以 $H \circledast M$ 实际上是一个 $\mathcal{L}$-系统。由命题 5.10，可得

$$G \star (H \circledast M) \simeq (G \star H) \star M,$$

因此由定理 7.6

$$\mathsf{Arc}(G \star (H \star M)) \simeq \mathsf{Arc}((G \star H) \star M) \simeq (G \star H) \star \mathsf{Arc}(M).$$

□

在本节余下部分，我们将引入关系路径。正如稍后在命题 8.1中所示，这些恰好是我们用作箭头、以定义到单调处处稠密范畴的函子的结构。我们可以自然地为它们赋予一个“方向”，并得到一个等价的有向 $\mathcal{L}$-结构。我们注意到，关系路径的一种变体也出现在 [4], 但这里的定义限制较少。

定义 7.8. 我们将长度为 n 的 L-路径定义为一个 L-结构 M，并配有一个单射函数 $p : n + 1 \to M$，使得存在一列来自 M 的元组 $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$，满足：

- $M = \bigcup_{i \in [n]} \bar{e}_i$;

- $p(0) \in \bar{e}_1 \setminus \bar{e}_2, p(n) \in \bar{e}_n \setminus \bar{e}_{n-1}$，且对于所有 $i \in [n-1]$，$p(i) \in \bar{e}_i \cap e_{i+1}$；
- $R_i^M(\bar{e}_i)$，对于某个唯一的关系符号 $R_i \in \mathrm{L}$；
- $R^M(\bar{a}) \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{e}_i$ 对于某个 $i \in [n]$，对于所有关系符号 $R \in \mathrm{L}$ 以及所有元组 $\bar{a} \in M$；

我们将元组 $\bar{e}_i$ 称为路径的步，并将 M 中 $i \in [n-1]$ 对应的元素 $p(i)$ 称为接点。我们也将映射 $p : n+1 \to M$ 称为该路径的路径函数。

请注意，从技术上讲，根据上述定义，没有任何无向图 G 能成为 L-路径。事实上，最后一个条件确保 $E(G)$ 不可能是对称的，因为关系 R 中出现的元组的任何置换都不可能出现在 L 中的其他关系里。为避免混淆，我们始终将图论意义上的路径称为图路径。

引理 7.9。设 (M,p) 是一个长度为 n 的 $\mathcal{L}$-路径。那么存在一个有向 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\mathcal{L}$-结构 M，它与 M 置换等价，且 (M, p) 是一个 $\mathcal{L}$-路径，$\tilde{}$ 并且 $\mathsf{Arc}(M)$ 是有向图路径 $p(0)\ p(1) \ldots, p(n)$。

证明。设 (M,p) 如上所述，$\bar{e}_i$ 是它的步。对于每个 $i \in n+1$，固定一个置换 $\sigma_i \in S_{|\bar{e}_i|}$，使得 $\pi_0(\sigma_i(\bar{e}_i)) = p(i-1)$ 且 $\pi_1(\sigma_i(\bar{e}_i)) = p(i)$。令 M 为一个与 M 具有相同论域的 L-结构，并满足对所有 $R \in \mathrm{L}$ 和 $\bar{a} \in M$：

$$\bar{a} \in R^{\tilde{M}} \iff \bar{a} = \sigma_i(\bar{e}_i) \text{ for some } i \in [n] \text{ and } \bar{e}_i \in R^M.$$

$\tilde{}$ 显然，(M,p) 仍然是长度为 n、步为 $\sigma_i(\bar{e}_i)$（对 $i \in [n]$）的路径。$\tilde{}$ 此外，根据定义，M 与 M 置换等价。我们证明 $\tilde{M}$ 是一个有向 L-结构。事实上，根据构造，$\bigcup_{R \in \mathcal{L}} (\pi_0[R^M] \cup \pi_1[R^M]) = \{p(i) : i \in n+1\}$。此外，由此可知，对于来自 n 的任意两个 $i \neq j$，至多存在一个 M 的步 $\bar{e}$，使得 $(p(i)\ p(j)) = (\pi_0(\bar{e})\ \pi_1(\bar{e}))$ 或 $(p(i)\ p(j)) = (\pi_1(\bar{e})\ \pi_0(\bar{e}))$。由于 M 中出现在关系 R^M 里的元组只有其步，这就意味着 $\tilde{M}$ 是有向的。最后，容易看出

$$E(\mathsf{Arc}(\tilde{M})) = \{(p(i), p(i+1)) : i \in n-1\}$$

正如所要求的。 □

给定一个 L-结构以及 $\mathsf{Gaif}(M)$ 中的一条图路径，我们可以构造一条 L-路径，用来描述这条图路径的“类型”。以下定义概括了这一思想。

定义 7.10（路径类型）。设 N 是一个 L-结构，且 $u_0, \ldots, u_n$ 是 $\mathsf{Gaif}(N)$ 中的一条图路径。对于每个 $i \in n$，我们可以关联一个关系符号 $R_i \in \in \mathrm{L}$、元素 $v_{i,1}, \ldots, v_{i,\mathrm{ar}(R_i)} \in N$，以及一个置换 $\sigma_i \in S_{\mathrm{ar}(R_i)}$，使得

对于 $\sigma_i(u_i, u_{i+1}, \bar{v}_i) \in R_i^N$。令 $M = \{u_i : i \in n+1\} \cup \{v_{i,j} : i \in n, j \in [\mathrm{ar}(R_i)]\}$，我们定义一个以 M 为底集的 L-结构，使得对于所有 $R \in \mathrm{L}$ 以及来自 T 的元组 $\bar{a}$：

$$\bar{a} \in R^M \iff \bar{a} = \sigma_i(u_i, u_{i+1}, \bar{v}_i) \text{ and } R = R_i \text{ for some } i \in n.$$

令 $p : n+1 \to M$ 为单射映射 $i \mapsto u_i$，容易看出 (M, p) 是长度为 n 的路径。我们称元组 (M, p) 为图路径 $u_0, \ldots, u_n$ 在 M 中的 路径类型。

注意，只要 $S = (u_0, \ldots, u_n)$ 是 Gaif(N) 中的一条图路径，就存在 S 在 N 中的路径类型 (M, p)，且恒等映射 $M \to N$ 是一个单射同态。显然，路径类型并非由 S 唯一确定，因为对于 Gaif(N) 中相同的图路径 $u_1, \ldots, u_n$，我们可能会得到不同的关系序列 $R_i, \ldots R_{i-1}$ 和置换 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$，从而满足定义 7.10。

8. 单调代数普适范畴

这里我们证明推论 4.5 的部分逆命题。正如前文所示，即使在˜单调性成立的情况下，我们也不能期待完全的逆命题。通过使用一个定向 $\mathfrak{C}$的 $\mathfrak{C}$，我们可以克服这一困难。选择合适的定向后，我们可以确保˜中的 $\mathfrak{C}$结构是有向的，因此，应用 Arc 函子可以将论证归约到更容易处理的图情形。

我们再次选择相对化证明，以说明定理成立的确切层次。与定理 4.2的情形非常相似，相对化陈述的证明显然涵盖了绝对情形的证明。我们注意到，κ 的正则性仅用于确保任意大小为$\mathcal{L}$ 的语言 $< \kappa$ 都适用。对于有限语言，该断言在强极限基数层次上也成立。我们从下面的命题开始，它实质上是 [4] 中定理 4.3 的一个加强。

命题 8.1。设 κ为 ω 或一个不可达基数，并且 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的单调子范畴，满足 Gaif($\mathfrak{C}$) 是 κ-处处稠密的，且 $|\mathcal{L}| < \kappa$。那么存在一个有限的$\mathcal{L}$-构件$(M, \alpha, \beta, A, B, P)$，使得对于每个基数为 $< \kappa$ 的良基图 G，都有 $G \star M \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$。此外，存在 $r \in \omega$ 和一个映射 $p : r+1 \to M$，使得：

(1) (M, p) *is an* $\mathcal{L}$*-path;*

(2) $p(0) = \alpha$ *and* $p(r) = \beta$*;*

(3) $p(i) \notin (A \cup B \cup P)$ *for all* $i \in r+1$.

证明。如果 Gaif(C) 是 κ-某处稠密的，那么存在 $r \in \omega$，使得对所有基数 $\lambda < \kappa$，都存在某个 $N_\lambda \in$ obj($\mathfrak{C}$)，满足 $K^r_\lambda \leq$ Gaif(N_λ)。将 N_λ 中对应于 K^r_λ 原生顶点的元素标记为 $(a^\lambda_i)_{i<\lambda}$。对于

每个 $i<j$，取自 λ，令 $S^{\lambda}_{i,j}$ 为 Gaif(N_λ) 中对应于 K_λ里边 (i,j) 的 r-细分的图路径，其方向从 a_i 指向 a_j。令 $q<\kappa$ 为关系符号 $R\in\mathbf{L}$ 的最大元数。注意，对于每条图路径$S^{\lambda}_{i,j}$，至多有 $p=(|\mathbf{L}|\cdot q!)^{r+1}\cdot 2^{r^2}$ 种路径类型（按同构计）。根据事实 2.8，对于每个 λ，我们可以找到某个大小为 λ 的 $\Sigma_\lambda\subseteq \mathbf{R}(2,\lambda,p)$，使得对于所有来自 Σ_λ 的 $i<j$，$S_i^{\mathcal{R}(2,\lambda,p)},_j$ 都具有相同的路径类型。取 $(N_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ 的一个子序列并重新标记指标后，我们因此可以假设所有 $S^{\lambda}_{i,j}$ 的路径类型都相同（按同构计）。记此类型为 (M_λ,p_λ)。由于路径类型的数量为 $<\kappa$，且 κ 是正则的，事实 2.5 蕴含我们可以再次对序列 $(N_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ 进行删减，从而确保对所有 $\lambda<\kappa$ 都得到相同的路径类型 (M,p)。

根据定义可知，对于每个 $i<j\in\lambda$，都存在一个单射同态 $f^{\lambda}_{i,j}:M\to N_\lambda$，使得对所有 $n\in r+1$，$f^{\lambda}_{i,j}(p(n))=S^{\lambda}_{i,j}(n)$。令 $J=\{p(n):n\in r+1\}$，并考虑满足 $|H|=m$ 的 $H=M\setminus J$。根据事实 2.8 应用 m 次，我们可以假设，对于所有 $x\in H$ 和 $i<j$，以及来自 λ 的 $k<l$，$f^{\lambda}_{i,j}(x)=f^{\lambda}_{k,l}(x)$ 是否成立，取决于该定理中的四种典范情形之一。事实上，对于每个 $\lambda<\kappa$ 及每个 $x\in H$，定义着色 $\chi_{\lambda,k}(i,j)=f^{\lambda}_{i,j}(x)$，其定义域为二元子集 $\{i,j\}$，且满足 $i<j$ of λ。由此可知，$\mathbf{K}^m(\lambda)<\kappa$ 含有一个序型为 λ 的子集 C_λ，在该子集上，对于所有 $x\in H$，$\chi_{\mathcal{K}^m(\lambda)\,x}$ 均为典范形式。因此，我们可以将论证限制在子序列 $(N_{\mathcal{K}^m(\lambda)})_{\lambda<\kappa}$ 以及映射 $f^{\mathcal{K}^m(\lambda)}{}_{i,j}$（$i<j\in C_\lambda$），并作适当的重新标记。对于每个 $\lambda<\kappa$，重新标记后，我们由此得到一个元组 $t_\lambda\in[4]^H$，使得 $\chi_{\lambda,x}$ 是类型为 $t_\lambda(x)$ 的典范形式。由于这样的 t_λ 只有有限多个，根据鸽巢原理，我们可以考虑 $(N_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ 的一个子序列，使得 t_λ 为常数且等于某个 $t\in[4]^H$，然后再次重新标记。

现在我们继续将路径 M 转化为合适的 L-小工具。具体而言，定义 M 的以下子集：

$$P=\{x\in H:t(x)=1\};$$
$$A=\{x\in H:t(x)=2\};$$
$$B=\{x\in H:t(x)=3\};$$
$$H'=\{x\in H:t(x)=4\}.$$

由上述内容可知，对于所有满足 $(i,j)\neq(k,l)$ 且 $x\in J\cup H'$ 的情形，$f^{\lambda}_{i,j}(x)\neq f^{\lambda}_{k,l}(x)$。因此，由引理 2.9，存在一个序型为 λ 的子集 I_λ，使得对于所有来自 I_λ 且满足 $(i,j)\neq(k,l)$ 的 $i<j,k<l$，对于所有 $x,y\in J\cup H$ 和 $x\neq y$，$f^{\lambda}_{i,j}(x)\neq f^{\lambda}_{k,l}(y)$。因此，对于所有来自 I_λ 的 $i<j,\,k<l$，$f^{\lambda}_{i,j}(x)=f^{\lambda}_{k,l}(x)$ 当且仅当 $x=y$，且以下条件之一成立：

(1) $(i,j)=(k,l)$ 和 $x\in M$; (2) $i=k$,
$j\neq l$ 和 $x\in\{p(0)\}\cup A\cup P$;

(3) $i \neq k, j = l$ and $x \in \{p(r)\} \cup B \cup P$;

(4) $i \neq k, j \neq l$ and $x \in P$.

令 $\alpha = p(0)$ 和 $\beta \in p(r)$，并考虑 L-小工具 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$，引理 5.7 表明存在从 $\lambda \star M$ 到 N_λ 的单射同态。特别地，对于每个基数为 $< \lambda$ 的良基图，都存在从 $G \star M$ 到 N_λ 的单射同态。由于这对所有无限基数 $\lambda < \kappa$ 都成立，且 $\mathfrak{C}$ 是单调的，因此对于每个基数为 $< \kappa$ 的良基图，$G \star M$ 都属于 $\mathsf{obj}(\mathfrak{C})$。□

通过考虑我们范畴的一个定向，可以确保上文得到的 L-小工具实际上是一个 L-系统，其弧图是一条路径。

引理 *8.2.* 设 κ 为 ω 或一个不可达基数，$\mathfrak{C}$ 是 *Str(L)* 的一个单调子范畴，且 *Gaif(C)* 是 κ-某处稠密的，并且 $|L| < \kappa$。那么 $\tilde{}$存在一个 $\mathfrak{C}$ 的满定向 $\mathfrak{C}$ 以及一个有限 *L-系统* $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$，使得 $\tilde{}$对于基数为 $< \kappa$ 的每个良基图 G，都有 $G \star M \in$ *obj(C)*。此外，*Arc*(M) 是一条从 α 到 β 的有向图路径。

证明. 设 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 是由命题 8.1 得到的 L-小工具，$p : r + 1 \to M$ 是其路径函数。由引理 7.9 可知，存在 $\tilde{}$一个定义在与 M 相同论域上的有向 L-结构 M，它与 M 在置换意义下 $\tilde{}$等价，且 $\mathsf{Arc}(M)$ 是有向图路径 $p(0)\ p(1) \ldots, p(n)$。由命题 8.1 的条件 2 和 3 可得，$\alpha = p(0)\ \beta =_{\sim} {}_{\sim}p(1) \in \mathsf{Arc}(M)$，而 $\mathsf{Arc}(M) \cap (A \cup B \cup P) = \varnothing$。因此，L-小工具 $\tilde{}(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 实际上是一个 L-系统。固定一个基数为 $< \kappa$ 的良基图 G，由于 $G \star M \in \mathsf{obj}(\mathfrak{C})$，我们可以选取 C 的一个满 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$定向 $\mathfrak{C}$，使得 $G \star M \in \mathsf{obj}(\mathfrak{C})$。□

综合以上所有结果，我们最终得到如下结论。

定理 8.3. 设 κ 为 ω 或一个不可达基数，且 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个单调子范畴，使得 $\mathsf{Gaif}(\mathfrak{C})$ 是 κ-处稠密的，并且 $|\mathcal{L}| < \kappa$. $\tilde{}$ $\tilde{}$那么，存在 $\mathfrak{C}$ 的一个满定向 $\mathfrak{C}$，使得 $\mathfrak{C}$ 是 κ-代数普适的。

$\tilde{}$证明。设 $\mathfrak{C}$ 是 C 的满定向，且 $(M, \alpha, \beta, A, B, P)$ 是引理 8.2 中的 L-系统。固定定义 6.3 中的简单图构件 $(\mathrm{H}\ s, t)$。注意，由于 H 是有向的，$(\mathrm{H}\ s, t)$ 实际上是一个简单图系统。定义 L-小工具 $M_{\mathcal{H}} = \mathrm{H} \circledast M$。由引理 7.7 可知，$M_{\mathcal{H}}$ 是一个 L-系统；此外，对于每个有向图 G:

$$\mathsf{Arc}(G \star M_{\mathcal{H}}) \simeq (G \star H) \star \mathsf{Arc}(M).$$

由引理 8.2，$\mathsf{Arc}(M)$ 是从 α 到 β 的有向图路径，因此

$$\mathsf{Arc}(G \star M_{\mathcal{H}}) \simeq (G \star H)^{(r)} \simeq G \star H^{(r)}$$

对于某个 $r \in \omega$。因此，考虑函子

$$\Phi : \mathbf{WGra}_{<\kappa} \to \tilde{\mathfrak{C}}_{<\kappa}$$

$$G \mapsto G \star M_{\mathcal{H}}, \quad f \mapsto f \star M_{\mathcal{H}}.$$

我们利用定理 5.8 来证明 Φ 是一个满嵌入。事实上，取定 $G \in \mathrm{obj}(\mathbf{WGra}_{<\kappa})$，并考虑一个 L-结构的同态 $f : M_{\mathcal{H}} \to G \star M_{\mathcal{H}}$。它限制为相应弧图之间的同态 $\mathrm{Arc}(f) : \mathrm{Arc}(M_{\mathcal{H}}) \to \mathrm{Arc}(G \star M_{\mathcal{H}})$。我们证明，对于某个 $(u, v) \in E(G)$，有 $\mathrm{Arc}(f) = \mathrm{Arc}(\phi^{M_{\mathcal{H}}}_{uv}, {}^{G}_{u\ v})$。根据引理 6.4，从 $\mathbf{H}^{(r)}$ 到 $G \star H^{(r)}$ 的唯一同态是映射 $\phi^{\mathcal{H}^{(r)}}_{v}, {}^{G}_{u}$；又因为 $\mathrm{Arc}(M_{\mathcal{H}}) \simeq \mathbf{H}^{(r)}$ 和 $G \star M_{\mathcal{H}} \simeq G \star H^{(r)}$，可知

$$\mathrm{Arc}(f) = \phi^{\mathrm{Arc}(M_{\mathcal{H}}),G}_{u,v} = \mathrm{Arc}(\phi^{M_{\mathcal{H}},G}_{u,v}),$$

第二个等式由命题 7.6得出。最后，根据引理 7.2Arc是定义在无孤立点的有向 $\mathcal{L}$-系统上的忠实函子；由于 $M_{\mathcal{H}}$ 没有孤立点，因此可知 $f = \phi^{M_{\mathcal{H}}}_{u\ v}, {}^{G}$。由于 $\tilde{\mathfrak{C}}$ 是满的˜且$\mathbf{WGra}_{<\kappa}$ 是 κ-代数普适的，定理 5.8 蕴含 $\mathfrak{C}$ 是κ-代数普适的。□

与定理 4.2一样，我们注意到，在命题 8.1中分别用完整的厄德ős–拉多定理（定理 2.7）和事实 4.4 替代事实 2.8 和 2.5，即可得到定理 8.3的绝对版本。

推论 8.4. 设 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathbf{Str}(\mathcal{L})$ 的一个单调子范畴，且 $\mathrm{Gaif}(\mathfrak{C})$˜完全某处稠密。那么存在 $\mathfrak{C}$ 的一个满定向 $\mathfrak{C}$，使得˙$\mathfrak{C}$ 是代数普适的。

9. 一些问题

最后，我们提出几个目前似乎难以解决、但在理论上仍颇有趣味的问题。正如我们所见，有些范畴是代数普适的，却不是 ω-普适的，例如偏序集范畴或半群范畴。这两个例子在模型论意义上都不温和（例如，它们不具有非独立性质），但原则上也可能存在在 $\mathbf{L}_{\omega,\omega}$ 中温和的代数普适范畴。这引出了第一个问题。

问题 9.1。 是否存在一个由非独立性质或非独立性质$_2$的 L-结构组成的代数普适范畴？显然，它不会是 ω-普适的。

此外，本文讨论的所有“自然”范畴示例，只要对某个不可数 κ是 λ-泛的，事实上就对所有不可数λ都是 λ-泛的。尽管可以构造出这一结论不成立的人工示例，但探究这一结论是否适用于所有这类自然示例是合理的，例如：

对于所有带有同态的泛代数簇。这将是莫利定理的一个 [15] 针对泛范畴的类比。

问题 9.2. 设 V 是一个可数相似类型的泛代数簇。如果对于某个不可数 κ，V 是 κ-通用的，那么对于所有不可数 λ，V 是否都是 λ-通用的?

我们也将其表述为关系形式。

问题 9.3. 设 L 是一个可数关系语言，T 是一个 L-理论，而 Mod(T) 表示由 T 的所有模型组成、以 L- 同态为态射的范畴。如果对于某个不可数 κ，Mod(T) 是 κ-通用的，那么对于所有不可数 λ，Mod(T) 是否都是 λ-通用的?

致谢

作者感谢 Tomáš Jakl 向他介绍这一领域，并阅读了本手稿的早期版本，与他进行了讨论。

参考文献

[1] Hans Adler 和 Isolde Adler。将处处稠密图类解释为模型论中的一个经典概念。《欧洲组合学杂志》，36:322–330，2014年。[2] Libor Barto。簇与解释构成的范畴是代数泛的。《纯粹与应用代数杂志》，211(3):721–731，2007年。[3] G Birkhoff。论自同构群（西班牙语）。*Rev. Un. Math. Argentina*，11:155–157，1946年。[4] Samuel Braunfeld、Anuj Dawar、Ioannis Eleftheriadis 和 Aris Papadopoulos。关系结构单调类中的一元 NIP，2023年。[5] Johannes de Groot。由同胚群表示的群 I。*Mathematische Annalen*，138(1):80–102，1959年。[6] Ben Dushnik 和 E. W. Miller。关于线性有序集的相似变换。*Bulletin of the American Mathematical Society*，46(4):322–326，1940年。[7] Paul Erdös 和 Richard Rado。一个组合定理。*Journal of the London Mathematical Society*，1(4):249–255，1950年。[8] Paul Erdös 和 Richard Rado。集合论中的分划演算。*Bulletin of the American Mathematical Society*，62(5):427–489，1956年。[9] Robert Frucht。制造具有给定抽象群的图。*Com- positio Mathematica*，6:239–250，1939年。[10] Darío García 和 Rosario Mennuni。通过偏序集刻画模型论分界线，2022年。[11] Zdeněk Hedrlín 和 Aleš Pultr。关于代数范畴的满嵌入。*Illinois Journal of Mathematics*，10(3):392–406，1966年。[12] John Rolfe Isbell。子对象、适足性、完备性与代数范畴。波兰科学院数学研究所，1964年。[13] A. Kanamori。《更高的无穷：集合论中的大基数及其起源。施普林格数学专著。施普林格，2003年。[14] Dénes König。有限图与无限图理论：线段复形的组合拓扑，第16卷。学术出版社联合体，1936年。[15] Michael Morley。基数范畴性。美国数学会汇刊，114(2):514–538，1965年。

[16] Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona De Mendez。关于处处不稠密图。《欧洲组合学杂志》，32(4):600–617，2011年。[17] Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona De Mendez。稀疏性：图、结构与算法，第28卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[18] Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona de Mendez。迈向泛范畴的刻画。《纯粹与应用代数杂志》，221(8):1899–1905，2017年。[19] Klaus-Peter Podewski 和 Martin Ziegler。稳定图。*Fund. Math*，100(2):101–107，1978年。[20] Aleš Pultr。关于泛范畴。*Commentationes Mathematicae Univer- sitatis Carolinae*，5(4):227–239，1964年。[21] Aleš Pultr 和 Věra Trnková。群、半群与范畴的组合、代数与拓扑表示，第124卷。布拉格，1980年。[22] Gert Sabidussi。具有给定无限群的图。《数学月刊》，64:64–67，1960年。

Ioannis Eleftheriadis，剑桥大学计算机科学与技术系，英国电子邮箱：
ie257@cam.ac.uk