arXiv:2303.13348v1 [math.SG] 23 Mar 2023

高阶容量比的局部极大值

LUCA BARACCO、OLGA BERNARDI、CHRISTIAN LANGE 和 MARCO MAZZUCCHELLI

ABSTRACT. 我们证明了高阶 Ekeland-Hofer 容量的四维局部 Viterbo 猜想的一个类似命题：在配备 C^3 拓扑的单位体积四维光滑星形域空间中， k阶 Ekeland-Hofer 容量的局部极大值点是那些与适当的有理椭球辛同胚的域。

CONTENTS

1. 引言1.1. Viterbo猜想 1.2. 主要结果 1.3. 关于更高阶容量比的开放问题 1.4. 定理 A 的证明概要A1.5. 论文结构 2. Clarke 作用泛函 2.1. 光滑凸体 2.2. 谱不变量 2.3. 有限维约化 2.4. Besse 凸体 2.5. 谱比的局部极大值点 3. Ekeland-Hofer 容量 3.1. 容量的定义 3.2. 容量与谱不变量 3.3. 容量比的局部极大值点 4. 椭球中的容量比最大化者 5. 环面域中的容量比最大化者 5.1. 凹环面域 5.2. 凸环面域 附录 A. Fadell-Rabinowitz 指数 致谢 参考文献

1 1 2 3 6 8 8 8 10 11 12 16 17 17 19 24 27 28 29 29 36 40 40

1. INTRODUCTION

1.1. Viterbo猜想。 辛容量是基本不变量，它支配着辛拓扑和接触拓扑中的许多刚性现象。在这

Date：2023年3月23日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 37J39，53D05，53D35。*Key words and phrases.* Viterbo猜想、辛容量、Ekeland-Hofer 容量。Marco Mazzucchelli 获得 ANR资助 CoSyDy（ANRCE40-0014）和 COSY（ANR-21-CE40-0002）的部分支持。Olga Bernardi 和 Marco Mazzucchelli 获得 PRIN项目 2017S35EHN 003 2019-2021“动力系统中的常规与随机行为”的部分支持。

本文中，我们考虑定义在辛向量空间 $(\mathbb{C}^n, \omega)$ 子集 B 上的辛容量 c，其中 $n \geq 2$。若 B 是一个有限体积域（即某个非空开子集的闭包），则其对应的 容量比 定义为

$$\widehat{c}(B) = \frac{c(B)}{\mathrm{vol}(B,\omega)^{1/n}}.$$

这里，体积是 ω^n 在 B 上的积分。在他的开创性论文中 [Vit00], Viterbo 猜想，对于任意凸体 $\widehat{c}(B) \leq \widehat{c}(B^{2n})$，以及任意辛容量 $B \subset \mathbb{C}^n$，其中 c， B^{2n} 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的任意圆球。这个猜想目前尚未解决，尤其困难之处在于它将辛不变量与非辛概念——凸性结合起来。正如 Artstein-Avidan、Karasev 和 Ostrover 所指出的 [AAKO14]，若该猜想成立，将产生远超辛几何领域的深远影响：它将意味着凸几何中由来已久的 Mahler猜想成立。

所谓 $2n$ 维光滑凸体，是指具有非空内部和光滑正曲率边界 ∂B 的紧子集 $B \subset \mathbb{C}^n$；为方便起见，我们总是假设 B 的内部包含原点。我们在光滑凸体空间上考虑 C^k 拓扑：当两个光滑凸体 $B_0, B_1 \subset \mathbb{C}^n$ 的边界 $\partial B_0, \partial B_1$ 是 C^k 接近的子流形时，称它们 C^k 接近。Abbondandolo 和 Benedetti 的定理 [AB19]，将 Abbondandolo、Bramham、Hryniewicz 和 Salomao 关于 4维下 Ekeland-Hofer 容量的早期结果 [ABHS18] 推广，并证明了 Viterbo猜想的一个局部版本：在圆球 B^{2n} 的一个足够小的 C^3 邻域内，函数 $B \mapsto \widehat{c}(B)$ 的局部极大值点恰好是与 B^{2n} 辛同胚的光滑凸体。Edtmair [Edt22] 最近进一步加强了这个定理：在圆球 B^{2n} 的一个足够小的 C^3 邻域内，所有辛容量都相等。

1.2. 主要结果。 本文旨在探讨与高阶辛容量的（局部和全局）Viterbo猜想类似的问题，其定义如下。每个元组 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (0, \infty]^n$ 定义了一个 $2n$ 维区域

$$E(\boldsymbol{a}) = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \frac{|z_j|^2}{a_j} = \frac{1}{\pi} \right\}.$$

如果所有条目 a_i 均为有限值，则 $E(\boldsymbol{a})$ 是一个椭球。$\mathbb{C}^n$ 上的一个辛 k容量 是一个函数 $c_k : 2^{\mathbb{C}^n} \to [0, \infty]$，其中 $2^{\mathbb{C}^n}$ 是 $\mathbb{C}^n$的子集所组成的集合，并满足以下三个性质：

- **（单调性）** $c_k(U) \leq c_k(V)$，若存在 $\psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{C}^n, \omega)$，使得$\psi(U) \subset V$。
- **（共形性）**对每个 $b \in \mathbb{R}$ 和 $U \subset \mathbb{C}^n$， $c_k(bU) = b^2 c_k(U)$。
- **（归一化）**对每个 $\boldsymbol{a} \in (0, \infty]^n$ 且满足 $a_1 < \infty$ 的情形，若将条目 a_j 的正倍数按递增顺序排列为 $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$，则值 $c_k(E(\boldsymbol{a}))$ 是该序列中的第 k 个元素

$$\underbrace{\tau_1, \ldots, \tau_1}_{\times m_1}, \underbrace{\tau_2, \ldots, \tau_2}_{\times m_2}, \underbrace{\tau_3, \ldots, \tau_3}_{\times m_3}, \cdots$$

其中， m_h 是将 τ_h 作为正倍数的参数 a_j 的数量。

Viterbo猜想中出现的 $\mathbb{C}^n$上的普通辛容量是 1-容量[1]。文献中有许多 1-容量，但据作者所知，辛 k-容量的构造方法却很少：通过无限维链接论证定义的 Ekeland-Hofer 容量 c_k^{EH} [EH89、EH90]（见第 3.1 节）、通过有限维约化定义的 Viterbo 容量 c_k^{V} [Vit89] 、通过 c_k^{GH} [GH18] - 等变辛同调定义的 Gutt-Hutchings容量S^1，以及最近通过层的微局部理论定义的 Zhang容量 [Zha21]。至少有三种 k-容量 c_k^{EH}、c_k^{V}和 c_k^{GH}预计彼此相等[2]。

我们称 $B \subset \mathbb{C}^n$ 为 $2n$ 维光滑星形域，如果它与一个紧致的 $2n$ 维球微分同胚，并且具有光滑边界 ∂B，该边界与 $\mathbb{C}^n$ 上的所有径向直线均横截。注意，光滑凸体，尤其是椭球，都是光滑星形域。再次，我们考虑光滑星形域空间上的 C^k 拓扑：当 B_0 和 B_1 的边界 $\partial B_0, \partial B_1$ 作为子流形彼此 C^k 接近时，称它们是 C^k-接近的。

当椭球 $E = E(a_1, \dots, a_n)$ 的所有比值 a_j/a_h 均为有理数时，称其为有理的 。此时，我们用 $\tau(E)$ 表示参数 $a_1, \dots, a_n$ 的最小公倍数。对每个整数 $m \geq 1$，我们定义 $k_m(E)$ 为满足 $c_k(E) = m\,\tau(E)$ 的最小整数 $k \geq 1$。这里， c_k 是任意辛 k-容量，而数值 $k_m(E)$ 显然与这类 c_k 的选取无关。最后，我们令 $K(E) := \{k_m(E) \mid m \geq 1\}$。我们的主要结果证实了局部 Viterbo 猜想的一个版本，该猜想针对 4 维中的高阶 Ekeland-Hofer 容量。

定理 A. 在赋予 C^3 拓扑的4维光滑星形域空间中， $B \mapsto \widehat{c}_k^{\mathrm{EH}}(B)$ 的局部极大值点恰好是与某个4维有理椭球 E 辛同胚、且满足 $k \in K(E)$的那些域。

1.3. **关于高阶容量比的开放问题**。 在 Viterbo 猜想中，不能去掉对域的凸性假设：在一篇未发表笔记中 [Her98], Hermann 证明，对于任意辛 1-容量 c_1 在 $\mathbb{C}^n$上，相应的容量比 $\widehat{c}_1$ 在星形域空间上无界。相比之下，Artstein-Avidan、Milman 和 Ostrover 的一条定理 [AAMO08] 指出，任意 1- 容量比在凸体空间上都有一致上界，该上界是一个与维数无关的常数（此前，Viterbo [Vit00]证明存在一个随维数线性增长的一致上界）。对他们的证明稍作修改，即可得到以下适用于所有 k-容量比的一致上界。

定理 1.1 (Artstein-Avidan、Milman、Ostrover)。 存在一个常数 $a > 0$，使得对于每个整数 $n \geq 1$、每个定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的辛 k-容量 c_k，以及每个 $2n$ 维凸体 B，都有 $\widehat{c}_k(B) \leq ak$。

证明。 根据 [AAMO08，定理 1。6], 存在一个常数 $a > 0$ 使得，对于任意 $n \geq 1$ 以及任意凸体 $B \subset \mathbb{C}^n$，我们有

$$\frac{c_{\mathrm{lin}}(B)}{\mathrm{vol}(B)^{1/n}} \leq a,$$

[1]在文献中，尤其是在 Viterbo猜想的表述中，有时会假设辛容量满足一种更强形式的单调性： $c(U) \leq c(V)$ 如果存在一个从 U 到 V的辛嵌入。满足上述较弱单调性的容量，以及更一般地， k-容量，有时称为相对的或非内在的 [MS17，第 12 节。1]。[2]等式 $c_k^{\mathrm{EH}} = c_k^{\mathrm{GH}}$最近由 Gutt 和 Ramos 宣布 [GR23]。

其中

$$c_{\mathrm{lin}}(B) := \inf\big\{b>0 \;\big|\; \psi(B)\subset \underbrace{E(b)\times\mathbb{C}^{n-1}}_{=E(b,\infty,\dots,\infty)} \text{ for some } \psi\in \mathrm{Sp}(2n)\big\}.$$

辛 k容量的归一化意味着 $c_k(E(b)\times\mathbb{C}^{n-1}) = kb$，结合单调性可得 $c_k(B)\le k\,c_{\mathrm{lin}}(B)$。因此

$$\widehat{c}_k(B)\le k\frac{c_{\mathrm{lin}}(B)}{\mathrm{vol}(B)^{1/n}}\le ak. \qquad \square$$

鉴于定理 1.1，自然会提出以下问题；如果 Viterbo猜想得到证实，那么对于 1-容量，该问题便有答案。

问题 B。 对于任意辛 k容量 c_k，在 $\mathbb{C}^n$ 中所有凸体构成的空间上，函数 $B\mapsto \widehat{c}_k(B)$ 的全局极大值点是什么？

通过简单的代数计算，可以确定椭球空间上 $\widehat{c}_k$ 的局部和全局极大值点。

命题 C。 设 c_k 是定义在$\mathbb{C}^n$上的任意辛 k容量。

(i) $2n$维椭球空间上的容量比 $\widehat{c}_k$ 的局部极大值点恰好是满足 $k\in K(E)$的有理椭球 E 。(ii) $2n$维椭球空间上的容量比 $\widehat{c}_k$ 的全局最大值为

$$\max_{\boldsymbol{a}}\ \widehat{c}_k(E(\boldsymbol{a})) = (q+1)^{\frac{n-r+1}{n}}(q+2)^{\frac{r-1}{n}},$$

其中 $q\ge 0$和 $r\in\{1,\dots,n\}$是满足 $k=qn+r$的整数。全局极大值点恰好是形如$(\boldsymbol{a})$ 的有理椭球 E

$$\frac{a_i}{a_n}=\begin{cases}\frac{q+1}{q+2}, & \text{if } r>1 \text{ and } 1\le i\le r-1,\\ 1 & \text{if } r\le i\le n.\end{cases}$$

人们或许会猜想，每个容量比 $\widehat{c}_k$ 都能在椭球空间上达到其最大值。对于 $k=1$ ，这由 Viterbo猜想可知；但对于较大的 k ，事实证明这并不成立！

例 1.2。 命题 C表明，使任意 k-容量比 $\widehat{c}_k$达到最大值的四维椭球是 $E(\lceil\frac{k}{2}\rceil, \lceil\frac{k+1}{2}\rceil)$，并且

$$\widehat{c}_k\big(E(\lceil\tfrac{k}{2}\rceil,\lceil\tfrac{k+1}{2}\rceil)\big)=\sqrt{\lceil\tfrac{k}{2}\rceil\lceil\tfrac{k+1}{2}\rceil},$$

其中 $\lceil x\rceil$ =min$\{y\in\mathbb{Z}\mid y\ge x\}$ 表示上取整函数。对于任意 k容量 $c_k\in\{c_k^{\mathrm{EH}}, c_k^{\mathrm{V}}, c_k^{\mathrm{GH}}\}$，多圆盘 $P(a,b)=E(a)\times E(b)$ 的容量比为

$$\widehat{c}_k(P(a,b))=k\frac{\min\{a,b\}}{\sqrt{2ab}},$$

正如 [EH90、Moa94、GH18],例 5.1 中所计算的；特别是 $P(1,1)$ 在所有容量比中均为最大值 $\widehat{c}_k$ ，在四维多圆盘中:

$$\widehat{c}_k(P(1,1))=\frac{k}{\sqrt{2}}.$$

对于 $k=2$，极大化多圆盘 $P(1,1)$ 与极大化椭球 $E(1,2)$ 的容量比相同

$$\widehat{c}_2(P(1,1)) = \widehat{c}_2(E(1,2)) = \sqrt{2},$$

而对于任意 $k \geq 3$，我们有

$$\widehat{c}_k(P(1,1)) > \widehat{c}_k\big(E(\lceil \tfrac{k}{2} \rceil, \lceil \tfrac{k+1}{2} \rceil)\big), \qquad \forall k \geq 3. \qquad \square$$

例 1.2 表明 $P(1,1)$ 对高阶容量比可能具有相关的极大性。对于 $\mathbb{C}^n$ 中的某个适当环面域类，情况确实如此，现介绍如下。令 $S^1 \subset \mathbb{C}$ 为复平面中的单位圆周，并考虑环面 $\mathbb{T}^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的作用，定义如下：

$$(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n).$$

环面域是 $\mathbb{C}^n$ 中由某个非空开集的闭包给出的 $\mathbb{T}^n$-不变子集。任意域 $\Omega \subset [0,\infty)^n$ 是一个关联环面域的剖面

$$X_\Omega := \big\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\big|\; (\pi|z_1|^2, \ldots, \pi|z_n|^2) \in \Omega\big\}.$$

两类环面域在辛几何中尤为重要：

- 那些满足$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (|x_1|, \ldots, |x_n|) \in \Omega\}$ 为紧凸集的凸环面域 X_Ω。
- 那些剖面 Ω 为紧集且满足 $[0,\infty)^n \setminus \Omega$ 为凸集的凹环面域 X_Ω。

多圆盘 $P(\boldsymbol{a}) = E(a_1) \times \ldots \times E(a_n)$ 是凸环面域的例子，而椭球 $E(\boldsymbol{a})$ 是唯一同时为凸和凹的环面域。需要强调的是，这里的“凸”和“凹”并非指 X_Ω 作为 $\mathbb{C}^n$的子集所具有的凸性：所有凸环面域都是$\mathbb{C}^n$的凸子集，但有些凹环面域同样也是$\mathbb{C}^n$ 的凸子集。在其博士论文中，[Moa94],Moatty 给出了计算凸或凹环面域的 Viterbo容量的组合公式。Gutt 和 Hutchings c_k^{V} 也为其容量给出了类似公式 [GH18]，c_k^{GH}。

若 $B \subset \mathbb{C}^n$ 是一个光滑星形域，其边界 ∂B 带有典范接触形式 $\lambda|_{\partial B}$，它是 $\mathbb{C}^n$ 上如下 1-形式的限制：

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \big(x_j dy_j - y_j dx_j\big). \tag{1.1}$$

这里，x_1，y_1，……，x_n，y_n 是 $\mathbb{C}^n$上的标准达布坐标。如 [GH18], 所指出，凸环面域和凹环面域的公式适用于满足以下附加条件的所有辛k容量：

- **(闭 Reeb 轨道)** 对于所有光滑星形域 $B \subset \mathbb{C}^n$，若 $(\partial B, \lambda)$ 具有非退化闭 Reeb 轨道，则 $c_k(B)$ 是一个康利-泽恩德指数为 $2k+n-1$ 的闭 Reeb 轨道的周期。

Moatty-Gutt-Hutchings 公式可用于研究凸环面域和凹环面域上的高阶容量比全局极大值点。相关组合学相当复杂。我们已在 4维情形下完成了详细推导。

命题 D. 对于满足额外“闭 *Reeb* 轨道”假设的任意辛 k-容量，在$\mathbb{C}^2$ 上，以下结论成立。

(i) 在4维凹环面域的空间上， $\widehat{c}_k$ 在椭球 $E\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil\right)$上取得全局最大值。

(ii) 在4维凸环面域的空间上， $\widehat{c}_k$ 在以下对象上取得最大值：

- 圆球 $E(a,a)$， $a>0$，若 $k=1$，
- 椭球 $E(a,2a)$ 和多圆盘 $P(a,a)$， $a>0$，若 $k=2$，
- 多圆盘 $P(a,a)$， $a>0$，若 $k\geq 3$。

高维情形尚未得到充分研究。令 $P_{2n}:=P(1,...,1)$ 为带单位参数的 $2n$ 维多圆盘，而 E_{2n} 为 $\widehat{c}_k$ 在 $2n$ 维椭球空间上的全局极大化者（见命题 C(ii)）。简单计算表明，存在一个最小整数 $\kappa(n)\geq 2$ 使得

$$\widehat{c}_k(P_{2n})\geq \widehat{c}_k(E_{2n}), \qquad \forall k\geq \kappa(n).$$

此外， $\kappa(n)\to\infty$ 当 $n\to\infty$时。这引出了以下问题。

问题 E. 对于每个维数 $2n\geq 4$ 以及每个 $k\geq\kappa(n)$，在所有 $2n$维凸环面域构成的空间中，多圆盘P_{2n} 是否是 k容量比 $\widehat{c}_k$ 的全局极大值点？

问题 F. 是否存在某个维数 $2n\geq 4$，使得存在任意大的整数 k以及 $2n$维凸体 $B\subset\mathbb{C}^n$，满足 $\widehat{c}_k(B)>\widehat{c}_k(P_{2n})$？

1.4. 定理 A 证明概要。局部 Viterbo 猜想是由 Zoll 接触流形的短程特征刻画推导而得的，我们现在简要回顾这一刻画。设(N,α)为闭接触流形， X 为其 Reeb 向量场，由 $\alpha(X)\equiv 1$ 和 $d\alpha(X,\cdot)\equiv 0$定义； $\phi^t: N\to N$ 为其 Reeb 流。Weinstein 猜想对于若干类闭接触流形（包括所有三维闭接触流形）已是一个定理，它断言 Reeb 流 ϕ^t 至少有一条闭轨道。若此猜想成立，我们记 $\tau_1(N,\alpha)=\inf\{t>0\mid \mathrm{fix}(\phi^t)\neq\varnothing\}$为最短周期，即闭 Reeb 轨道的周期中的最小值；若 Weinstein 猜想对(N,α)不成立，则令 $\tau_1(N,\alpha)=0$。我们考虑相应的短程比

$$\widehat{\tau}_1(N,\alpha)=\frac{\tau_1(N,\alpha)}{\mathrm{vol}(N,\alpha)^{1/n}}, \tag{1.2}$$

其中 $n=\frac{1}{2}(\dim(N)+1)$， $\mathrm{vol}(N,\alpha)$ 是对 $\alpha\wedge(d\alpha)^{n-1}$ 的积分。在赋予 C^3-拓扑的 N 上的接触形式空间中，函数 $\alpha\mapsto\widehat{\tau}_1(N,\alpha)$ 的局部极大值点恰好是佐尔接触形式：即其对应的 Reeb 轨道全部闭合且具有相同最小周期的接触形式（也就是说， $\phi^{\tau_1(N,\alpha)}=\mathrm{id}$，且对所有 $t\in(0,\tau_1(N,\alpha))$， $\mathrm{fix}(\phi^t)=\varnothing$）。这一重要定理由 Abbondandolo 和 Benedetti [AB19]在一般情形下完整证明；此前，针对 3 维情形的一系列论文也已证明该定理 [APB14, ABHS18, BK21]。

一个闭接触流形（N， α）或仅指接触形式 α，若其所有 Reeb 轨道均为闭轨道，则称为$Besse$。此时，根据 Wadsley 的一个定理，这些轨道自动具有一个公共周期 [Wad75]。Besse 闭接触流形最简单的例子是有理椭球的边界。事实上，在4维中，对于每个具有 Besse 边界的光滑星形域 $B\subset\mathbb{C}^2$，都存在一个辛同胚 $\psi\in\mathrm{Symp}(\mathbb{C}^n,\omega)$，使得 $\psi(B)$是一个有理椭球；这是3维Besse接触流形分类的推论

球面 [MR23，定理1。1]，再结合[ABHS18，命题4。3]。

现在假设 $(N,\ \alpha)$ 是一个闭接触三维流形。对于每个 $k \geq 1$，我们将 $\tau_k(N,\ \alpha)$ 记为满足以下条件的 $\tau > 0$ 值的下确界：存在至少 k 条周期小于 τ 的闭 Reeb 轨道（迭代也计入其中）；用公式表示为：

$$\tau_k(N,\alpha) := \inf\left\{\tau > 0 \;\middle|\; \sum_{t\in(0,\tau)} \#\big(\mathrm{fix}(\phi^t)/\sim\big) \geq k\right\},$$

其中，$\sim$ 是将所有 $z \sim \phi^t(z)$ 对 $z \in N$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 视为相同的等价关系。沿用记号 (1.2)，我们写作

$$\widehat{\tau}_k(N,\alpha) := \frac{\tau_k(N,\alpha)}{\mathrm{vol}(N,\alpha)^{1/2}}.$$

若 (N,α) 是 Besse 的，我们将 $k_1 := k_1(N,\alpha)$ 记为满足以下条件的最小正整数：τ_{k_1} 是这些 Reeb 轨道的公共周期，即 $\phi^{\tau_{k_1}} = \mathrm{id}$。此记号与第 1.2 节中用于四维有理椭球体 E 的记号一致：我们有 $k_1(E) = k_1(\partial E,\alpha)$。Abbondandolo、Lange 和 Mazzucchelli [ALM22] 的一项结果将上述关于 Zoll接触三维流形的短程特征刻画推广如下：在闭三维流形 N 上的接触形式空间中，赋予 C^3 拓扑后，函数 $\alpha \mapsto \widehat{\tau}_k(N,\alpha)$ 的局部极大值点恰好是满足 $k_1(N,\alpha) = k$ 的 Besse接触形式 α。

现在考虑一个 $2n$ 维光滑星形域 B。斯托克斯定理表明，$\mathrm{vol}(B,\omega) = \mathrm{vol}(\partial B,\lambda)$。此外，若 B 是光滑凸体，且 c_1 表示上述任一 1-容量 c_1^{EH}、c_1^{V} 或 c_1^{GH}，则有 $c_1(B) = \tau_1(\partial B,\lambda)$；这一结论分别由 Sikorav [Sik90], 、Viterbo [Vit89], 以及 Abbondandolo 和 Kang [AK22] 针对这三种容量证明。因此 $\hat{c}_1(B) = \widehat{\tau}_1(\partial B,\lambda)$，而 Zoll 型测地流的特征刻画蕴含局部 Viterbo 猜想。

定理 A 的证明运用了与光滑凸体 B相关联的 Clarke作用泛函，其临界值集合恰为作用谱$\sigma(\partial B)$，也就是 ∂B的闭 Reeb 轨道的周期集合。Ekeland 和 Hofer 引入了谱不变量 $s_k(B)$，它们是通过适当的极小极大过程从 Clarke作用泛函中选出的临界值。Ginzburg、G¨urel 和 Mazzucchelli [GGM21] 的一个结果断言，$2n$ 维光滑凸体 B_0 具有 Besse 边界，当且仅当对某个 $k \geq 1$，有 $s_k(B_0) = s_{k+n-1}(B_0)$。作为定理 A 证明的第一个关键要素，我们证明，对于任意一个与该 B_0充分 C^2接近的光滑凸体 B_1，谱不变量$s_{k_1}(B_1)$ 是作用谱 $\sigma(\partial B_1)$ 中接近 $s_{k_1}(B_0)$ 的元素里的最小值（引理 2.2）。

现在假设上述 B_0 的维数为 $2n = 4$。我们用 $K(B_0)$ 表示满足 $s_k(B_0) = s_{k+1}(B_0)$ 的值 k 的集合，并用 $k_m = k_m(B_0)$ 表示 $K(B_0)$ 中第 m 小的元素。再一次，这一记号与第 1.2 节中用于有理椭球的记号一致。对于每个 $m \geq 1$，引理 2.2 结合关于 Clarke 作用泛函的一些莫尔斯理论，表明对于所有充分接近 B_0 的光滑凸体 B_1，都有 $s_{k_m}(B_1) \leq m\tau_{k_1}(B_1)$；若 $B_1 = B_0$，则等号成立（引理2.3）。因此，根据 Abbondandolo、Lange 和 Mazzucchelli [ALM22], 上述结果，我们在定理 2.4 中得出，任何这样的 B_0 都是谱比 C^3 的一个局部极大值点，

拓扑下

$$\widehat{s}_{k_m}(B) := \frac{s_{k_m}(B)}{\mathrm{vol}(B)^{1/2}}.$$

众所周知，对于所有 $2n$ 维光滑凸体 B，$s_1(B) = \tau_1(\partial B, \lambda) = c_1^{\mathrm{EH}}(B)$。我们推测，对于所有 $k \geq 2$，$s_k(B) = c_k^{\mathrm{EH}}(B)$ 也成立。我们将证明，至少不等式 $c_k^{\mathrm{EH}}(B) \leq s_k(B)$ 对所有 $k \geq 2$ 都成立（命题 3.1）。此外，利用前面提到的事实——每个这样的 B 都与一个有理椭球辛同胚——可知，对于所有 $k \geq 2$ 以及所有四维 Besse 凸体，等式 $c_k^{\mathrm{EH}}(B) = s_k(B)$ 成立。结合这些事实与定理 2.4，我们推得，Besse 四维光滑凸体 B_0（其对应的整数为 $k_m = k_m(B_0)$）是容量比 $\widehat{c}_k^{\mathrm{EH}}$ 关于 C^3 拓扑的局部极大值点。

最后，基于 Alvarez Paiva 和 Balacheff 最初提出的一个著名论证 [APB14]，，我们证明，容量比 B 在 $\widehat{c}_k^{\mathrm{EH}}$维光滑星形域构成的空间上 $2n$的任意局部极大值点都具有 Besse 边界，且其中的 Reeb 轨道具有公共周期 $c_k(B)$。特别地，每个这样的 B 都与一个有理椭球辛同胚 E，而该椭球是 $\widehat{c}_k^{\mathrm{EH}}$的局部极大值点。我们关于椭球的尖锐结果（命题C(i)）表明 $k \in K(E)$。

1.5. **论文结构**。在第2节中，我们回顾 Clarke 作用泛函的一般性质，并证明 Besse 凸体是适当谱比的局部极大值点（定理2.4）。在第3 节中，我们证明光滑凸体的 Ekeland-Hofer 容量不超过 Clarke 作用泛函相应的谱不变量（命题3.1），并利用这一结果和定理2.4 证明定理A。命题3.1 的证明需要运用 Fadell-Rabinowitz 指数的一些微妙性质；这些性质要么是在略有不同的假设下陈述的，要么在文献中未被明确陈述，因此我们在附录A中补充了详细论证。在第4节中，我们证明命题C。最后，在第5节中，我们证明命题D。

2. The Clarke action functional

2.1. 光滑凸体。设 $B \subset \mathbb{C}^n$ 为一个 $2n$ 维光滑凸体，并且按照惯例，假设 B 的内部包含原点。我们考虑哈密顿量 $h : \mathbb{C}^2 \to [0, \infty)$，它是 2 次齐次的，并且在边界 ∂B上恒等于 1，即

$$h(cz) = c^2, \qquad \forall c \geq 0,\ z \in \partial B.$$

其哈密顿向量场按通常方式定义为 $\omega(X_h, \cdot) = dh$，其中 $\omega = d\lambda$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准辛形式，而 λ 是其原函数 (1.1)。哈密顿流 ϕ_h^t 是 1 次齐次的，即 $\phi_h^t(cz) = c\,\phi_h^t(z)$，且其限制 $\phi_h^t|_{\partial B}$ 与 ∂B 的 Reeb 流重合（相对于典范接触形式 $\lambda|_{\partial B}$）。特别地，∂B的闭 Reeb 轨道与 ϕ_h^t的周期轨道柱面之间存在一一对应。作用谱 $\sigma(\partial B)$是闭 Reeb 轨道的周期集合，即

$$\sigma(\partial B) = \left\{ t > 0 \;\middle|\; \mathrm{fix}(\phi_h^t) \neq \varnothing \right\}.$$

由于哈密顿量 h 在原点之外处处具有正定 Hessian，因此它存在勒让德对偶 h^*：$\mathbb{C}^n \to [0,\infty)$，其定义为

$$h^*(w) = \max_{z\in\mathbb{C}^n} \Big(\langle w, z\rangle - h(z) \Big), \tag{2.1}$$

它也是 2-齐次的。令 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，并考虑希尔伯特空间

$$L_0^2(S^1,\mathbb{C}^n) = \left\{ u \in L^2(S^1,\mathbb{C}^n) \;\middle|\; \int_{S^1} u(t)\,dt = 0 \right\}.$$

其元素恰为形如 $u = \dot\gamma$ 的映射，其中 $\gamma \in W^{1,2}(S^1,\mathbb{C}^n)$。我们考虑泛函 $\mathcal{A}: L_0^2(S^1,\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{H}: L_0^2(S^1,\mathbb{C}^n) \to [0,\infty)$，定义如下

$$\mathcal{A}(\dot\gamma) = \frac{1}{2}\int_{S^1} \langle J\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle\,dt, \qquad \mathcal{H}(\dot\gamma) = \int_{S^1} h^*(-J\dot\gamma(t))\,dt.$$

注意，$\mathcal{A}$的表达式涉及 $\dot\gamma$ 的一个原函数，但实际上与原函数的选取无关。泛函 $\mathcal{A}$ 是一个非退化二次型，我们考虑它的正开锥 $\mathcal{A}^{-1}(0,\infty)$。圆周 S^1 通过平移作用于其上，即对所有 $t \in S^1$ 和 $u \in \mathcal{A}^{-1}(0,\infty)$，都有 $t\cdot u = u(t+\cdot)$，并且 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{H}$ 都是 S^1-不变的。

*Clarke*作用泛函 $\widetilde{\Psi}: \mathcal{A}^{-1}(0,\infty) \to (0,\infty)$ 定义为

$$\widetilde{\Psi}(u) = \frac{\mathcal{H}(u)}{\mathcal{A}(u)}.$$

我们来总结它的性质（有关非平凡性质的证明，请读者参阅 Ekeland-Hofer 的 [EH 87] ）：

- **($\mathbb{C}_*$-不变性）**它是零次齐次的，且具有 S^1-不变性，即对所有 $c>0$、$t\in S^1$ 和 $u\in\mathcal{A}^{-1}(0,\infty)$，有 $\widetilde{\Psi}(cu) = \widetilde{\Psi}(u) = \widetilde{\Psi}(t\cdot u)$。总之，$\widetilde{\Psi}$ 具有 $\mathbb{C}_*$-不变性，其中 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}\setminus\{0\} \equiv (0,\infty)\times S^1$。
- **（正则性）**它与 $\mathcal{H}$ 具有相同的正则性：它是 $C^{1,1}$，并且在每一点都存在盖托意义下的 Hessian。
- **（克拉克变分原理）**存在一一对应关系

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{crit}(\widetilde{\Psi}) \cap \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathrm{fix}(\phi_h^\tau) \\ u_z & \longleftrightarrow & z \end{array}$$

  其中 $u_z(t) = \frac{d}{dt}\phi_H^{\tau t}(z)$，反之亦然，$z = \tau^{-1}\nabla h^*(-Ju_z(0))$。
- **（莫尔斯指标）**莫尔斯指标和零度[3] 任意临界点 $u_z \in \mathrm{crit}(\widetilde{\Psi}) \cap \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau)$均为有限值。事实上，莫尔斯指标（相差一个约定的加性常数）等于相应的马斯洛夫指标 τ- 周期轨道 $t\mapsto\phi_h^t(z)$，而零度等于 $\dim\ker(d\phi_h^\tau(z) - I) - 2$。

- (Palais-Smale条件) </style}由于 Ψ 是零次齐次的，因此不满足Palais-Smale条件。不过，令 V 为 Ψ的反梯度经过重新缩放后的版本，其定义为

$$V(u) := -\|u\|_{L^2}\nabla\widetilde{\Psi}(u),$$

[3]这里，我们考虑 $\widetilde{\Psi}$ 的 $\mathbb{C}_*$-不变性：临界点 u $\widetilde{\Psi}$ 的零度定义为 $\dim\ker(d^2\widetilde{\Psi}(u)) - 2$。

其流 g_t ： $\mathcal{A}^{-1}(0, \infty) \to \mathcal{A}^{-1}(0, \infty)$是一齐次的，并保持 L^2 范数不变，即$\frac{d}{dt}\|g_t(u)\|_{L^2} = 0$。在任意半径 $r > 0$的 L^2球面上，Clarke作用泛函 Ψ相对于 V满足Palais-Smale条件：任意序列 $u_k \in \mathcal{A}^{-1}(0, \infty)$，只要满足 $V(u_k) \to 0$、 $\|u_k\|_{L^2} = r$，且 $\sup \Psi(u_k) < \infty$ ，就存在一个收敛子序列。

由于其 0 次齐次性，文献中的 Clarke作用泛函 Ψ 通常被限制在与 S^1-不变的超曲面 $\mathcal{A}^{-1}(0, \infty)$ 上，且该超曲面与径向方向横截：例如 $\mathcal{A}^{-1}(1)$ 或 $\mathcal{H}^{-1}(1)$。本文则等价地将 $\widetilde{\Psi}$ 限制在光滑超曲面 $\Lambda = \left\{u \in \mathcal{A}^{-1}(0, \infty) \;\middle|\; \|u\|_{L^2} = 1\right\}$ 上，并将其限制记为

$$\Psi := \widetilde{\Psi}|_{\Lambda}.$$

我们仍将 Ψ 称为 Clarke作用泛函。显然， Ψ 是 S^1-不变的，并且当且仅当 $\mathbb{C}_* \cdot u \subset \mathrm{crit}(\widetilde{\Psi}) \cap \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau)$ 时，有$S^1 \cdot u \subset \mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(\tau)$。总的来说， Ψ满足 S^1-等变莫尔斯理论所要求的经典性质，但缺乏 C^2 正则性这一点除外；不过，这一点稍后很容易规避。

2.2. **谱不变量**。 在他们开创性的工作中 [EH87], Ekeland 和 Hofer 为 Clarke作用泛函引入并研究了谱不变量。我们简要回顾其构造。

考虑子空间 Λ_+ ，它由所有具有如下形式的 $u \in \Lambda$ 构成

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i2\pi kt} u_k,$$

其中某个 $u_k \in \mathbb{C}^n$。注意， Λ_+ 是 $L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n)$ 中一个无限维希尔伯特子空间的单位球面，并且在 S^1作用下不变。由于 Λ_+ 是可缩的， S^1-丛 $\Lambda_+ \times ES^1 \to \Lambda_+ \times_{S^1} ES^1$ 的 Gysin 正合列直接推出，其S^1等变上同调（有理系数）为 $H^*_{S^1}(\Lambda_+; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e]$，其中 e 是 $H^2_{S^1}(\Lambda_+; \mathbb{Q}) \cong$ 的生成元。今后，所有上同调环均假定取有理系数，我们将从记号中省略 $\mathbb{Q}$。包含映射 $\Lambda_+ \hookrightarrow \Lambda$ 是一个 S^1等变同伦等价，因此诱导出 S^1等变上同调中的环同构。综上所述，我们有

$$H^*_{S^1}(\Lambda) = \mathbb{Q}[e],$$

其中 e 现在表示 $H^2_{S^1}(\Lambda)$ 的一个生成元 $\cong \mathbb{Q}$。特别地， $e^k \neq 0$ 对于 $H^*_{S^1}(\Lambda)$，对所有 $k \geq 0$均成立；用 Fadell-Rabinowitz 指数（见附录 A）表示，即 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\Lambda) = \infty$。

对于每个 $k \geq 1$，光滑凸体 B 的第 k 个谱不变量 定义为

$$s_k(B) := \inf\left\{c > 0 \;\middle|\; \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\Psi < c\}) \geq k\right\},$$

其中 $\{\Psi < \tau\}$表示次水平集 $\Psi^{-1}(0, \tau)$。我们回顾这些值的一些经典性质：

- **(谱性)** 每个 $s_k(B)$ 都是与 B相关联的 Clarke作用泛函的临界值，也就是说，它属于作用谱 $\sigma(\partial B)$。
- **(最短周期)** $s_1(B) =$ 最小值 $\Psi = \sigma(\partial B)$。

- **(Lusternik-Schnirelmann)** 对于所有 $k \geq 1$，我们都有 $s_k(B) \leq s_{k+1}(B)$。若 $s_k(B) = s_{k+j}(B)$ 对某个 $j \geq 1$成立，则对 crit(Ψ) ∩ $\Psi^{-1}(s_k(B))$ 的任意 S^1-不变邻域 $\mathcal{U} \subset \Lambda$，都有 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{U}) > j$。
- **（C^0 连续性）**对于任意一列在 C^0 拓扑下收敛到光滑凸体 B 的光滑凸体 B_j，我们有 $s_k(B_j) \to s_k(B)$）。

2.3. **有限维约化**。Clarke作用泛函 $C^{1,1}$ 的正则性 Ψ 不足以应用莫尔斯理论中涉及 Hessian 的结果，例如莫尔斯引理。然而，只要将 Ψ限制在 $W^{1,2}$ 不经过 $\mathbb{C}^n$原点的曲线子空间上，它就会变得光滑。但作此限制后，会失去紧致性等性质，例如 Palais-Smale条件。为了既改善 Ψ的正则性，又保留紧性，我们将采用 Ekeland 和 Hofer 引入的有限维约化方法，下面简要回顾这一方法。证明请参见 [EH87，第 II 节。2]

令 $b > \min \Psi$ 为一个固定值，并考虑Clarke作用泛函的次水平集 $\{\Psi < b\}$。对每个整数 $N \geq 1$，令 $F = F_N \subset L^2_0(S^1,\mathbb{C}^n)$为由形如以下形式的 $u \in L^2_0(S^1,\mathbb{C}^n)$组成的 S^1-不变有限维Hilbert子空间

$$u(t) = \sum_{0<|k|\leq N} e^{i2\pi kt} u_k,$$

其中 $u_k \in \mathbb{C}^n$。我们考虑开子集 $V = \{u \in F \mid W_u \neq \varnothing\}$，其中

$$W_u := \left\{ v \in F^\perp \;\middle|\; \mathcal{A}(u+v) > 0,\ \widetilde{\Psi}(u+v) < b \right\}.$$

$\widetilde{\ }$函数 $W_u \to (0,\infty)$，$v \mapsto \Psi(u+v)$有唯一非退化全局极小值点 $\nu(u) \in F^\perp$。我们将希尔伯特空间F的单位球面记为 $S \subset F$，并令 $U := V \cap S$。约化*Clarke*作用泛函定义为

$$\psi : U \to (0,b), \qquad \psi(u) = \widetilde{\Psi}(u + \nu(u)) = \Psi(\iota(u)),$$

其中

$$\iota : U \hookrightarrow \Lambda, \qquad \iota(u) := \frac{u + \nu(u)}{\|u + \nu(u)\|_{L^2}}.$$

这一有限维情形具有以下性质。

- **（S^1-不变性）**映射 ν 是 $\mathbb{C}_*$-等变的，因此约化的 Clarke 作用泛函 ψ 是 S^1-不变的。
- **（临界点）** ν 和 ψ 均为 $C^{1,\,1}$，且二者之间存在一一对应关系

$$\begin{aligned} \mathrm{crit}(\psi) &\xleftrightarrow{1:1} \mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(0,b) \\ u &\longleftrightarrow \iota(u). \end{aligned}$$

  ν、ψ以及 S^1 作用在临界集 crit(ψ) 的充分小邻域内均为光滑的。此外，对于每个 $u \in$ crit(ψ)，Hessians$d^2\psi(u)$ 与 $d^2\Psi(\iota(u))$ 的莫尔斯指标和零度均相同。

- **（紧致性）**对于每个 $c \in (0,\ b)$，闭次水平集 $\{\psi \leq c\}$ 是紧致的。

- **（近似）**对于每个 $a \in (0,\ b)$，映射 $\iota\colon \{\psi < a\} \hookrightarrow \{\Psi < a\}$ 是一个 S^1-等变同伦等价。

2.4. **Besse 凸体**。我们称一个 $2n$维光滑凸体B 是 $Besse$ 的，当其边界 ∂B配备典范接触形式 $\lambda|_{\partial B}$（方程（1.1））后成为 Besse 接触流形：其所有 Reeb 轨道都是闭合的，因此根据 Wadsley 的定理，它们具有公共周期 [Wad75]。Ginzburg、G¨urel 和 Mazzucchelli 的定理 [GGM21] 表明，Besse 性质可由谱不变量刻画：

- **（谱刻画）**存在 $c := s_k(B) = s_{k+n-1}(B)$，使得$k \geq 1$ 当且仅当 B 是 Besse，且 c 是 ∂B 上 Reeb 轨道的公共周期（即 $\phi_h^c = \mathrm{id}$，其中 $h : C^n \to [0, \infty$ 是满足 $h^{-1}(1) = \partial B)$ 的二次齐次哈密顿量。在这种情况下，临界流形 $\mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(c)$ 的莫尔斯指标为 $2k - 2$，零度为 $2n - 2$。此外，$c < s_{k+n}(B)$，并且当 $k \geq 2$ 时，$c > s_{k-1}(B)$。

Clarke作用泛函 Ψ与 Besse 凸体相关联 B 也满足以下性质，这些性质由 Mazzucchelli 和 Radeschi 建立[MR23]。在测地流这一不同背景下的类似性质，早先由 Radeschi 和 Wilkings 建立 [RW17]。

- **(临界流形)** 对于每个 $c \in \sigma(\partial B)$，临界流形
$$\mathcal{K} := \mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(c) \cong \mathrm{fix}(\phi_h^c|_{\partial B})$$
是非退化的（即对所有 $u \in \mathcal{K}$，$\ker d^2\Psi(u) = T_u\mathcal{K}$），连通的奇数维有理同调球面。
- **(完美性)** 对于具有有理系数的 S^1-等变莫尔斯理论，Clarke作用泛函 Ψ是完美的：对每个 $a < b$，包含映射诱导短正合列
$$0 \to H^*_{S^1}(\{\Psi < b\}, \{\Psi < a\}) \to H^*_{S^1}(\{\Psi < b\}) \to H^*_{S^1}(\{\Psi < a\}) \to 0.$$

注 2.1。对于有理椭球 E（它是一个 Besse 凸体），相关联的 Clarke作用泛函的完美性与 Lusternik-Schnirelmann 性质结合起来，可以直接推出对所有 $k \geq 1$，$s_k(E) = c_k^{\mathrm{EH}}(E)$。由于 $\boldsymbol{a} \mapsto s_k(E(\boldsymbol{a}))$ 和 $\boldsymbol{a} \mapsto c_k^{\mathrm{EH}}(E(\boldsymbol{a}))$ 都是连续的，后一个恒等式对无理椭球也成立。□

为了证明我们的主要定理 A，我们将证明谱不变量 $s_k(B)$ 的类似结论：定理 2.4 以及最终的 3.11。这些结论的一个关键要素是以下关于谱不变量的扰动结果。回顾一下，两个 $2n$维光滑凸体 B_0 和 B_1若其边界是 C^k-接近的嵌入超曲面，则称它们 C^k在 $\mathbb{C}^n$ 意义下 -接近。

引理 2.2。设 B_0 为一个 $2n$维 $\boldsymbol{Besse}$ 凸体，$k \geq 1$ 为满足 $s_k(B_0) = s_{k+n-1}(B_0)$ 的整数，且 $[a, b]$ 为 $s_k(B_0)$ 的一个紧邻域，使得$[a, b] \cap \sigma(\partial B_0) = s_k(B_0)$。那么，对于任意充分$C^2$-接近于 B_0的光滑凸体 B_1，有
$$s_k(B_1) = \min\big(\sigma(\partial B_1) \cap [a, b]\big).$$

引理的证明 2.2。当 $k = 1$时，结论显而易见。事实上，$B \mapsto s_k(B)$ 是关于 C^0 拓扑的连续函数，定义在

光滑凸体构成的空间上，并且对于每个光滑凸体 B， $s_1(B) = \min\sigma(\partial B)$。从此处起，我们假设 $k \geq 2$。

设 h_0 为满足 $h_0^{-1}(1) = \partial B_0$ 的二次齐次哈密顿量，且 $\Psi_0 : \Lambda \to (0,\infty)$ 为相应的 Clarke 作用泛函。考虑临界值 $c := s_k(B_0) = s_{k+n-1}(B_0)$。谱Besse刻画表明，临界流形 $\mathcal{K} := \mathrm{crit}(\Psi_0) \cap \Psi_0^{-1}(c)$ 微分同胚于 ∂B_0，是非退化的，且莫尔斯指标为 $d := 2k-2$。

设 $[a,b]$ 是 c 的一个紧邻域，满足 $[a,b] \cap \sigma(\partial B_0) = c$，并考虑约化Clarke作用泛函 $\psi_0 = \Psi_0 \circ \iota_0 : U_0 \to (0,\infty)$，其中所选的约化方式使得 ψ_0 在高于 b 的某一层级上逼近 Ψ_0 （见第2.3节）。我们用 $K := \iota_0^{-1}(\mathcal{K}) = \mathrm{crit}(\psi_0) \cap \psi_0^{-1}(c)$ 表示 ψ_0 的相应临界流形，并回顾一下， K 和 $\mathcal{K}$ 具有相同的莫尔斯指标 d。 K 的法丛 $N \subset TU_0|_K$ 存在一个 S^1-不变分解 $N = N^+ \oplus N^-$，使得对每个 $u \in K$，$\pm d^2\psi_0(u)$ 在 $N_u^\pm$ 上正定。 N^- 的秩为莫尔斯指标 d。对于每个 $u \in K$ 和 $r > 0$，我们用 $D_u^\pm(r) \subset N_u^\pm$ 表示以原点为中心、半径为 r 的闭球，其半径由 U_0 的黎曼度量度量。并集 $D^\pm(r) := \cup_{u\in K} D_u^\pm(r)$ 是零截面的半径为 r 的闭邻域。根据 Morse-Bott 引理，存在一个足够小的闭 S^1- 不变邻域 $D \subset U_0$ ，使得 $\psi_0|_D$ 光滑，并存在一个 S^1-等变微分同胚，将 $D \equiv D^+(r_+) \oplus D^-(r_-)$ 识别起来，其中 $r_- > r_+ > 0$，从而将 K 识别为零截面，并且

$$\psi_0|_D(u;x,y) = c + \|x\|^2 - \|y\|^2, \qquad \forall u \in K,\ x \in D_u^+(r_+),\ y \in D_u^-(r_-).$$

在这些局部坐标中，我们有 $\partial_{yy}^2 \psi_0|_D \equiv -I$。我们要求半径 r_+ 足够小，使得

$$\max_D \psi_0 = c + r_+^2 < b.$$

从现在起，为简化记号，我们直接写作 $D^\pm = D^\pm(r_\pm)$。

由于 B 是 Besse， Ψ_0 对有理系数的 S^1-等变莫尔斯理论而言是完美的，而 ψ_0 也因其逼近性质而具有这一性质（见第2.3节）。因此，嵌入 $\iota_0 : U_0 \to \Lambda$ 诱导出一个同构

$$\iota_0^* : H_{S^1}^d(\Lambda, \{\Psi_0 < c\}) \xrightarrow{\cong} H_{S^1}^d(D^-, \partial D^-).$$

由于 K 是单连通的，负法丛 $N^- \to K$ 可定向，因此包含映射和 Thom 同构给出

$$H_{S^1}^d(D^-, \partial D^-) \xrightarrow{\cong} H_{S^1}^d(D^-|_{S^1\cdot u}, \partial D^-|_{S^1\cdot u}) \cong H_{S^1}^0(S^1\cdot u) \cong \mathbb{Q}, \quad \forall u \in K.$$

我们考虑乘积 $S^1 \times D_u^-$，并赋予其从第一个因子继承的 S^1-作用。对于每个 $u \in K$ 和 $x \in D_u^+$，我们考虑 S^1-等变映射

$$j_x : S^1 \times D_u^- \to D, \qquad j_x(t,y) = t \cdot (u;x,y),$$

它连续依赖于 x。对于 $x = 0$，映射 j_0 是到 $D^-|_{S^1\cdot u}$上的一个 m重覆盖映射，其中 $m \geq 1$ 是 u的迭代阶数，即满足 $\frac{1}{m}\cdot u = u$的最大整数 m。此外，$\psi_0 \circ j_x|_{S^1 \circ \overline{\partial D_u^-}} \leq c + r_+^2 - r_-^2 < c$。因此，复合映射 $\iota_{0,\,x} := \iota_0 \circ j_x$ 诱导出这些同构

$$\iota_{0,x}^* = \iota_{0,0}^* : H_{S^1}^d(\Lambda, \{\Psi_0 < c\}) \xrightarrow{\cong} H_{S^1}^d(S^1 \times D_u^-, S^1 \times \partial D_u^-). \tag{2.2}$$

我们固定一个足够小的 $\epsilon > 0$ ，使得

(i) $[(1-\epsilon)^3 c,\ (1-\epsilon)^{-2} c] \subset [a,b]$。

(ii) $c + r_+^2 - r_-^2 < (1-\epsilon)^2 c$。

我们考虑一个二次齐次哈密顿量 $h_1 : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$，使得

$$\delta := \|h_1 - h_0\|_{C^2(B_0 \setminus \{0\})}$$

足够小。也就是说，$B_1 := h_1^{-1}[0,1]$ 是一个与 B_0相距 C^2的凸体。对于每个 $s \in [0,1]$，凸组合 $h_s := sh_1 + (1-s)h_0$ 定义了凸体 $B_s := h_s^{-1}[0,1]$，在 B_0 和 B_1之间进行插值。我们要求 $\delta \le \epsilon$，因此

$$(1-\epsilon)h_s \le h_0 \le (1-\epsilon)^{-1} h_s, \qquad \forall s \in [0,1], \tag{2.3}$$

我们将 $\Psi_s :\ \Lambda \to (0,\ \infty)$ 表示与 h_s相关的 Clarke作用泛函，而$\psi_s = \Psi_s \circ \iota_s :\ U_s \to (0,\ \infty)$ 表示其有限维约化。只要选取足够小的 δ，就能确保所有定义域 U_s 都是 $L_0^2(S^1;\ \mathbb{C}^n)$ 中同一个有限维向量子空间的开子集，并且包含紧集 D。对偶哈密顿量 h_s^* 满足与（2.3）类似的不等式，Clarke作用泛函 Ψ_s也满足，即

$$(1-\epsilon)\Psi_s \le \Psi_0 \le (1-\epsilon)^{-1}\Psi_s, \qquad \forall s \in [0,1]. \tag{2.4}$$

我们要求 δ 足够小，使得对每个 $s \in [0,1]$，都有：

(iii) $\sigma(\partial B_s) \cap [a,b] = \sigma(\partial B_s) \cap [(1-\epsilon)c, (1-\epsilon)^{-1}c]$;

(iv) $\psi_s|_D$ 光滑，且与 ψ_0 足够接近；特别地，$\psi_s|_D \le (1-\epsilon)^{-1}\psi_0|_D$，并且 $\partial^2_{yy}\psi_s$ 在 D 的所有点处均为负定。

(v) $\mathrm{crit}(\psi_s) \cap \psi_s^{-1}[a,b] \subset D$。

不等式（2.4）表明，我们有以下次水平集的包含映射

$$\{\Psi_s < (1-\epsilon)^3 c\} \hookrightarrow \{\Psi_0 < (1-\epsilon)^2 c\} \hookrightarrow \{\Psi_s < (1-\epsilon)c\} \hookrightarrow \{\Psi_0 < c\}. \tag{2.5}$$

注意，$[(1-\epsilon)^3 c,\ (1-\epsilon)c)$ 是 Ψ_s的一个正则值区间，且 $[(1-\epsilon)^2 c,\ c)$是 Ψ_0的一个正则值区间，这由性质（i）和（iii）可知。因此，（2.5）中任意两个相邻包含映射的复合都是 S^1-等变同伦等价。这意味着（2.5）中的每个包含映射都会在 S^1-等变上同调中诱导一个同构，特别是最后一个：

$$H^*_{S^1}(\{\Psi_0 < c\}) \xrightarrow{\cong} H^*_{S^1}(\{\Psi_s < (1-\epsilon)c\}). \tag{2.6}$$

不等式（2.4）和性质（i）进一步表明，我们有以下包含映射

$$\{\Psi_0 \le c\} \hookrightarrow \{\Psi_s \le (1-\epsilon)^{-1}c\} \hookrightarrow \{\Psi_0 \le b\},$$

并且由于它们的复合是一个 S^1-等变同伦等价，第二个包含映射诱导出一个单射同态

$$H^*_{S^1}(\{\Psi_0 \le b\}) \hookrightarrow H^*_{S^1}(\{\Psi_s \le (1-\epsilon)^{-1}c\}). \tag{2.7}$$

方程（2.6）和（2.7）表明

$$s_k(\partial B_1) \in \big[(1-\epsilon)c, (1-\epsilon)^{-1}c\big).$$

特别地，$[(1-\epsilon)c,\ (1-\epsilon)^{-1}c)$ 包含 Clarke作用泛函 Ψ_1的一些临界值，我们将其中最小的一个记为

$$c_1 := \min\big(\sigma(\partial B_1) \cap [a,b]\big) \in [(1-\epsilon)c, (1-\epsilon)^{-1}c].$$

对于每个 $s \in [0,1]$ 和 $x \in D_u^+$，性质 (ii) 和 (iv) 意味着

$$\begin{aligned}\psi_s \circ j_x|_{S^1\times\partial D_u^-} &\le (1-\epsilon)^{-1}\psi_0 \circ j_x|_{S^1\times\partial D_u^-}\\ &\le (1-\epsilon)^{-1}(c + r_+^2 - r_-^2)\\ &< (1-\epsilon)c.\end{aligned}$$

因此，若记作 $\iota_{s,\ x} := \iota_s \circ j_x$，则有

$$\iota_{s,x}(S^1 \times \partial D_u^-) \subset \{\Psi_s < (1-\epsilon)c\} \subset \{\Psi_0 < c\}.$$

由于 $\iota_{s,\ x}$ 关于 s 和 x连续变化，因此它在相对上同调中诱导出与（2.2）中相同的同构，即

$$\iota_{s,x}^* = \iota_{0,0}^* : H_{S^1}^d(\Lambda, \{\Psi_0 < c\}) \xrightarrow{\cong} H_{S^1}^d(S^1 \times D_u^-, S^1 \times \partial D_u^-). \tag{2.8}$$

我们考虑一个临界圆 $S^1 \cdot p \in \mathrm{crit}(\psi_1) \cap \psi_1^{-1}(c_1)$。性质 (v) 保证 $S^1 \cdot p \subset D$，因此我们可以将 p 写成

$$p = (u; x, y) \in D^+ \oplus D^- \equiv D.$$

性质 (iv) 意味着，限制 $\psi_1|_{\{x\}\oplus D_u^-}$ 是一个严格凹函数，并在 y处取得唯一极大值。因此

$$\iota_{1,x}(S^1 \times D_u^-) \subset \{\Psi_1 \le c_1\}.$$

因此，同构 (2.8) 分解为

$$\begin{array}{ccc} H_{S^1}^d(\Lambda, \{\Psi_0 < c\}) & \xrightarrow[\cong]{\iota_{s,x}^*} & H_{S^1}^d(S^1 \times D_u^-, S^1 \times \partial D_u^-) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i^*} & \nearrow_{\iota_{s,x}^*} & \\ H_{S^1}^d(\{\ \Psi_1 \le c_1\}, \{\Psi_1 \le (1-\epsilon)c\}) & & \end{array}$$

其中 i^* 由包含映射诱导。该图表明 i^* 是单射。最后，考虑以下交换图，其中各行是包含映射的长正合序列的一部分，垂直同态由包含映射诱导：

$$\begin{array}{ccccc} H_{S^1}^{d-1}(\{\Psi_0 < c\}) & \xrightarrow{\partial^*=0} & H_{S^1}^d(\Lambda, \{\Psi_0 < c\}) & \xhookrightarrow{l^*} & H_{S^1}^d(\Lambda) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j^*} \\ H_{S^1}^{d-1}(\{\Psi_1 < (1-\epsilon)c\}) & \xrightarrow{\partial^*} & H_{S^1}^d(\{\Psi_1 \le c_1\}, \{\Psi_1 < (1-\epsilon)c\}) & \xrightarrow{m^*} & H_{S^1}^d(\{\Psi_1 \le c_1\}) \end{array}$$

上同调类 $e^{k-1} \in H_{S^1}^d(\Lambda)$ 属于 l^*的像，因为 $c = s_k(\partial B_0)$。令 $f \in H_{S^1}^d(\Lambda, \{\Psi_0 < c\})$ 为满足 $l^* f = e^{k-1}$ 的非零上同调类。该图表明底部直线上的连接同态 ∂^* 是零同态，即 m^* 是单射。因此，

$$j^* e^{k-1} = m^* i^* f \neq 0,$$

这意味着 $s_k(\partial B_1) \le c_1$。由于 $s_k(\partial B_1) \in \big[(1-\epsilon)c,\ (1-\epsilon)^{-1}c\big)$，并且由于$c_1$是 Ψ_1 在 $\big[(1-\epsilon)c,\ (1-\epsilon)^{-1}c\big)$中的较小临界值，我们得出$s_k(\partial B_1) = c_1$。□

2.5. **谱比的局部极大值点**。从现在起，我们将聚焦于4维情形。设 B 为一个四维光滑凸体，$h : C^2 \to [0,\infty)$为满足 $h^{-1}(1) = \partial B$的二次齐次哈密顿量，而 $\Psi : \Lambda \to (0, \infty)$为相应的Clarke作用泛函。我们用 $\tau_k(B)$表示满足$\mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(0, \tau)$包含至少 k 个临界圆的那些值$\tau > 0$ 的下确界。用哈密顿流 ϕ_h^t表示，这可以写成

$$\tau_k(B) := \inf\left\{\tau > 0 \;\middle|\; \sum_{t\in(0,\tau]} \#\Big(\tfrac{\mathrm{fix}(\phi_h^t)\setminus\{0\}}{\sim}\Big) \geq k\right\},$$

其中，$\sim$ 是等价关系，它将所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $c > 0$ 的 $z \sim c\,\phi_h^t(z)$ 识别为同一对象。

假设 B 是 Besse。我们用 $\tau(B)$ 表示 ∂B 上闭 Reeb 轨道的最小公周期，即使得 $\phi_h^t = \mathrm{id}$ 的最小 $t > 0$。临界集 $\mathrm{crit}(\Psi)\cap\Psi^{-1}(0, \tau(B))$ 由有限个非退化临界圆组成（事实上，根据下文的命题 3.7，既然 B 与一个椭球辛同胚，至多有两个临界圆）。更一般地，对于每个整数 $m \geq 1$，$\mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(m\tau(B), (m + 1)\tau(B))$ 由有限个非退化临界圆组成：它们是 $\mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(0, \tau(B))$ 中临界圆的适当迭代。由于 Clarke作用泛函 Ψ 是完美的，Ψ 的每个临界值都等于某个谱不变量 $s_k(B)$，即

$$\sigma(\partial B) = \big\{s_k(B) \;\big|\; k \geq 1\big\}.$$

对于所有整数 $m \geq 1$，我们定义

$$k_m = k_m(B) := \min\big\{k \geq 1 \;\big|\; s_k(B) = m\,\tau(B)\big\}.$$

若 $k_1 \geq 2$，则对每个 $k \in \{1, ..., k_1 - 1\}$，临界集 $\mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(s_k(B))$ 是一个单一的非退化临界圆。因此，Ψ 的完美性和 Lusternik-Schnirelmann 性质意味着

$$s_k(B) = \tau_k(B), \qquad \forall k \in \{1, ..., k_1\}. \tag{2.9}$$

此外，Besse 凸体的谱刻画（见第 2.4 节）意味着 $s_{k_m}(B) = s_{k_m+1}(B) < s_{k_m+2}(B)$，并且若 $k_m > 1$，$s_{k_m-1}(B) < s_{k_m}(B)$。我们定义

$$K(B) := \big\{k_m(B) \;\big|\; m \geq 1\big\}.$$

引理2.3。设 B_0 是一个 4 维 *Besse* 凸体，且 $m \geq 1$ 是一个整数。对于每个与 B_0 足够 C^2-接近的光滑凸体 B_1，有

$$s_{k_m(B_0)}(B_1) \leq m\,\tau_{k_1(B_0)}(B_1).$$

证明。固定一个整数 $m \geq 1$，并考虑 $k_1 = k_1(B_0)$ 和 $k_m = k_m(B_0)$。令$[a, b] \subset (0, \infty)$为 $s_{k_m}(B_0)$ 的一个足够小的紧邻域，使得

$$\sigma(\partial B_0) \cap [a, b] = \{s_{k_m}(B_0)\}.$$

令 $\epsilon > 0$ 足够小，使得 $m(s_{k_1}(B_0) - \epsilon) \geq a$。令 Ψ 为与 B_0 相关联的 Clarke作用泛函。由于对于每个 $k \in \{1, ..., k_1 - 1\}$，$\mathrm{crit}(\Psi) \cap \Psi^{-1}(\tau_k(B_0))$ 都是一个非退化临界圆，任何与 B_0 足够 C^2-接近的光滑凸体 B_1 都满足

$$|\tau_k(B_1) - \tau_k(B_0)| < \epsilon, \qquad \forall k \in \{1, ..., k_1\}.$$

这与（2.9）一起，推出 $\tau_{k_1}(B_1) > s_{k_1}(B_0) - \epsilon$，因此

$$m\,\tau_{k_1}(B_1) \geq a.$$

由引理2.2，可得

$$s_{k_m}(B_1) = \min\big(\sigma(\partial B_1) \cap [a,b]\big).$$

由于 $m\,\tau_{k_1}(B_1) \in \sigma(\partial B_1)$，我们得出 $s_{k_m}(B_1) \le m\,\tau_{k_1}(B_1)$。 □

最后，我们可以证明本节的主要结果。对于每个 $k \ge 1$，以及每个四维光滑凸体 $B \subset \mathbb{C}^n$，我们定义

$$\widehat{\tau}_k(B) = \frac{\tau_k(B)}{\mathrm{vol}(B)^{1/2}}, \qquad \widehat{s}_k(B) = \frac{s_k(B)}{\mathrm{vol}(B)^{1/2}},$$

其中，体积 $\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B, \omega)$ 是通过对 $\omega \wedge \omega$ 积分得到的。

定理 2.4. 设 B_0 是一个4维 *Besse* 凸体。对于每个整数$k \in K(B_0)$，任何与 B_0 充分 C^3接近的光滑凸体 B_1 都满足$\widehat{s}_k(B_1) \le \widehat{s}_k(B_0)$。

证明. 考虑与 B_0相关联的整数 $k_m = k_m(B_0)$。谱不变量$s_{k_m}(B_0)$由下式给出

$$s_{k_m}(B_0) = m\,\tau_{k_1}(B_0).$$

Abbondandolo、Lange 和 Mazzucchelli 的一个定理 [ALM22], 推广了 Abbondandolo、Bramham、Hryniewicz 和 Salomao 的早期定理 [ABHS18]对于特殊情形 $k_1 = 1$，该定理意味着，任何光滑凸体 B_1 只要与 C^3充分接近，就满足 B_0。

$$\widehat{\tau}_{k_1}(B_1) \le \widehat{\tau}_{k_1}(B_0).$$

固定一个整数 $m \ge 1$。根据引理 2.3，若 B_1 与 B_0充分接近，则有

$$s_{k_m}(B_1) \le m\,\tau_{k_1}(B_1).$$

总而言之，我们证明了：对于每个充分 C^3-接近 B_0的光滑凸体 B_1，都有 $\widehat{s}_{k_m}(B_1) \le \widehat{s}_{k_m}(B_0)$。 □

在定理3.11 第 3.3 节的末尾中，我们将加强这一结果，并完整刻画谱比 $\widehat{s}_k$的局部极大值点。

3. The Ekeland-Hofer capacities

3.1. **容量的定义**。我们先简要回顾 Ekeland 和 Hofer 构造 [EH89,EH90] 其辛容量的方法。其泛函分析框架涉及索伯列夫空间 $E := W^{1/2,2}(S^1, \mathbb{C}^n)$，该空间由所有形如以下形式的周期曲线 $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}^n$ 组成：

$$\gamma(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi kt} \gamma_k,$$

其中 $\gamma_k \in \mathbb{C}^n$，且满足

$$\|\gamma\|_E^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \cdot \|\gamma_k\|^2 < \infty.$$

圆周 S^1 通过平移作用于 E，即对于所有 $t \in S^1$ 和 $\gamma \in E$，都有 $t \cdot \gamma = \gamma(t + \cdot)$。索伯列夫空间 E 具有正交直和分解

$$E = E_- \oplus E_0 \oplus E_+, \tag{3.1}$$

其中， $E_\pm$ 由满足对所有 $\mp k \geq 0$ 均有 $\gamma_k = 0$ 的 γ 构成，而 E_0 由常数 $\gamma \equiv \gamma_0$ 构成。我们考虑二次型 a： $E \to \mathbb{R}$，其定义为

$$a(\gamma) = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k \, \|\gamma_k\|^2.$$

在稠密子空间 $W^{1,2}(S^1, \mathbb{C}^n) \subset E$ 上，这个二次型与上一节中使用的二次型 $\mathcal{A}$： $L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}$ 有如下关系：

$$a(\gamma) = \mathcal{A}(\dot\gamma).$$

Ekeland-Hofer 框架中涉及的哈密顿函数是非负光滑函数，形式为 $H : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$，它们在 $\mathbb{C}^n$ 的某个非空开子集上为零，并且在紧集之外具有形式 $H(z) = r\|z\|^2$，其中 $r > \pi$ 不是 π 的倍数；我们将此类哈密顿函数简称为可容许的哈密顿函数。相应的哈密顿作用泛函 $\Phi_H : E \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\Phi_H(\gamma) = a(\gamma) - \int_0^1 H(\gamma(t))\, dt,$$

它是 C^∞，S^1-不变的，满足 Palais-Smale条件，其临界圆$S^1 \cdot \gamma$ 恰好是形如 $\gamma(t) = \phi^t_H(\gamma(0))$ 的曲线所构成的圆，其中 ϕ^t_H 是 H的哈密顿流。然而，与 Clarke作用泛函不同， Φ_H 的临界圆具有无限莫尔斯指标。

构造 Ekeland-Hofer 容量的一个预备步骤，是为 Φ_H定义合适的谱不变量。由于所有莫尔斯指标都是无穷的，这一方法并非普通的极小极大，而是更精细的链接论证。我们将 E中的每个元素按照正交分解（3.1）写成 $\gamma = \gamma_- + \gamma_0 + \gamma_+$的形式。令 $\mathcal{D}$ 为由如下 S^1-等变同胚 Θ： $E \to E$ 组成的群，其形式为

$$\Theta(\gamma) = e^{\theta_-(\gamma)}\gamma_- + \gamma_0 + e^{\theta_+(\gamma)}\gamma_+ + \mathcal{K}(\gamma), \tag{3.2}$$

其中 $\theta_\pm$： $E \to \mathbb{R}$，且 $\mathcal{K} : E \to E$ 是连续的 S^1-不变映射，它们将有界集映为相对紧集，在次水平集 $\{a \leq 0\}$上取零，并且在 E中足够大半径的球外也取零。令 S_+ 为希尔伯特子空间 $E_+ \subset E$的单位球面。 S^1-不变子集$\mathcal{V} \subset E$ 的 *Ekeland-Hofer* 指数 定义为

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{EH}}(\mathcal{V}) = \inf_{\Theta\in\mathcal{D}} \inf_{\mathcal{U}} \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{U}),$$

其中，内层下确界取遍所有包含$\mathcal{V} \cap \Theta(S_+)$的 S^1-不变开子集 $\mathcal{U} \subset E$。对每个整数 $k \geq 1$，我们定义与 Ekeland-Hofer 指数相关联的第 k 个谱不变量如下

$$c^{\mathrm{EH}}_k(H) := \inf\left\{c \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathrm{ind}_{\mathrm{EH}}(\{\Phi_H < c\}) \geq k\right\}.$$

这些值满足以下性质：

- **(有限性)** 我们有 $c_{\mathrm{EH}1}(H) \leq c_{\mathrm{EH}2}(H) \leq \ldots \leq c_{\mathrm{EH}nk}(H) < \infty$ 对所有满足以下条件的哈密顿量 $H \in \mathcal{F}(B)$ 均成立： $H(z) > k\pi\|z\|^2$ 在某个紧集之外。从现在起，每当我们写 $c_{\mathrm{EH}k}(H)$ 时，都默认假设 H满足上述后一条件。
- **(正性)** $c_{\mathrm{EH}1}(H) > 0$。
- （**谱性**）每个 $c_{\mathrm{EH}k}(H)$ 都是哈密顿作用泛函 Φ_H 的临界值。

- **（单调性）**如果 $H_1 \le H_2$ 逐点成立，那么 $c_{\mathrm{EH}k}(H_1) \ge c_{\mathrm{EH}k}(H_2)$。

对于有界子集 $B \subset \mathbf{C}^n$，我们用 $\mathcal{F}(B)$ 表示容许哈密顿量 $H : \mathbf{C}^n \to [0,\infty)$ 的族，它们在闭包 B 的某个邻域上取零。k阶 ***Ekeland-Hofer*** 容量 定义为

$$c_k^{\mathrm{EH}}(B) = \inf_{H \in \mathcal{F}(B)} c_k^{\mathrm{EH}}(H).$$

对于无界子集 $U \subset \mathbb{C}^n$，k阶 Ekeland-Hofer 容量 $c_k^{\mathrm{EH}}(U)$ 定义为对所有有界子集 $B \subset U$取 $c_k^{\mathrm{EH}}(B)$ 的上确界。满足辛k容量的单调性、共形性和归一化性质（见第 1.2 节）。

在本节中，为简化记号，我们将 Ekeland-Hofer 谱不变量和容量 c_k^{EH} 简记为 c_k。

3.2. **容量与谱不变量。** 若存在标准辛形式 ν 的原函数 ω，使得$\mathbb{C}^n$ 上的 $\nu|_N$ 为接触形式，则称闭超曲面 $N \subset \mathbb{C}^n$ 为受限接触型。注意，作用谱 $\sigma(N)$ 是 (N,ν) 的闭 Reeb 轨道的周期集合，它与原函数 ν的具体选择无关。Ekeland 和 Hofer[EH90，命题 2] 证明了以下重要事实。

- **（Hausdorff 连续性）**函数 $B \mapsto c_k(B)$ 在具有光滑受限接触型边界的连通紧致区域 $B \subset \mathbf{C}^n$ 构成的空间上连续，该空间赋有由 Hausdorff 距离诱导的拓扑。

- **（谱性）**对于每个具有光滑受限接触型边界的连通紧子集 $B \subset \mathbf{C}^n$，都有 $c_k(B) \in \sigma(\partial B)$。

特别要注意的是，若 $B \subset \mathbb{C}^n$ 是一个光滑凸体，则 Ekeland-Hofer 容量 $c_k(B)$ 和谱不变量 $s_k(B)$（见第 2.2 节）均属于作用谱 $\sigma(\partial B)$。Sikorav 的一个结果 [Sik90，第 6 节。5] 表明，对于 $k = 1$，这些不变量相等，即

$$c_1(B) = s_1(B) = \min \sigma(\partial B). \tag{3.3}$$

目前尚不清楚对于 $k \ge 2$，是否也有 $c_k(B) = s_k(B)$。本节将证明至少存在一个不等式。

命题 3.1。 对于每个光滑凸体 $B \subset \mathbb{C}^n$，我们有

$$c_k(B) \le s_k(B), \qquad \forall k \ge 2.$$

这个命题的证明较为技术性，将占用本小节余下的篇幅。主要关注应用的读者可以跳过证明，直接阅读下一节3.3。

设 $B \subset \mathbb{C}^n$ 为一个光滑凸体，$h : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ 是满足 $h^{-1}(1) = \partial B$，$\widetilde{\Psi} = \mathcal{H}/\mathcal{A} : \mathcal{A}^{-1}(0,\infty) \to (0,\infty)$ 的二次齐次哈密顿量，相关的无约束Clarke作用泛函为$\widetilde{\ }$，而 $\Psi = \Psi|_\Lambda$ 为其限制。下面的引理摘自 [Sik90第 6 节中的论证。5]。

引理 3.2. 对于每个 $\gamma \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{C}^n) \cap a^{-1}(0,\infty)$ 以及 $\zeta \in E_- \oplus E_0 \oplus \mathbb{R}\gamma$，我们有

$$a(\zeta) \le \widetilde{\Psi}(\dot\gamma) \int_{S^1} h(\zeta(t))\, dt.$$

证明。 由于 $a(\gamma) > 0$ 和 $a|_{E_- \oplus E_0} \leq 0$，多项式

$$c \mapsto a(\zeta + c\gamma) = a(\zeta) + c\,\langle J\zeta, \dot\gamma\rangle_{L^2} + c^2 a(\gamma)$$

至少有一个根。因此，其判别式非负，即

$$a(\gamma)a(\zeta) \leq \frac{\langle J\zeta, \dot\gamma\rangle_{L^2}^2}{4} \tag{3.4}$$

对偶哈密顿量 h^*，由（2.1）定义，满足芬切尔不等式

$$h(z) + h^*(w) \geq \langle w, z\rangle.$$

因此，对于每个 $c > 0$，我们有

$$c^2\mathcal{H}(\dot\gamma) = \mathcal{H}(c\dot\gamma) = \int_{S^1} h^*(-Jc\dot\gamma)\,dt \geq c\,\langle J\zeta, \dot\gamma\rangle_{L^2} - \int_{S^1} h(\zeta)\,dt,$$

也就是说，

$$c\,\langle J\zeta, \dot\gamma\rangle_{L^2} - c^2\mathcal{H}(\dot\gamma) \leq \int_{S^1} h(\zeta)\,dt.$$

左侧在 $c = \frac{1}{2}\langle J\zeta, \dot\gamma\rangle_{L^2}\mathcal{H}(\dot\gamma)^{-1}$ 处取最大值，因此我们得到估计

$$\frac{\langle J\zeta, \dot\gamma\rangle_{L^2}^2}{4} \leq \mathcal{H}(\dot\gamma)\int_{S^1} h(\zeta)\,dt.$$

这一点结合式（3.4），便可推出该引理。 □

希尔伯特空间 $L_0^2(S^1,\mathbb{C})$ 和 E 在时间平移作用下具有 S^1 作用，在数乘作用下具有 $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ 作用。因此，它们整体上具有 $\mathbb{C}_* \equiv \mathbb{R}_+ \times S^1$ 作用。我们引入 $\mathbb{C}_*$-等变单射连续映射

$$i : L_0^2(S^1, \mathbb{C}^n) \to E_- \oplus E_+, \qquad i(\dot\gamma) = \gamma - \int_{S^1} \gamma(t)\,dt.$$

对于每个 $c > \min\sigma(\partial B)$，我们考虑非限制和限制的克拉克作用泛函的 c-次水平集，它们之间的关系为

$$\{\widetilde{\Psi} \leq c\} = \mathbb{R}_+\{\Psi \leq c\}.$$

包含映射 $\{\Psi \leq c\} \hookrightarrow \{\widetilde{\Psi} \leq c\}$ 是一个 S^1-等变同伦等价，因此

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\widetilde{\Psi} \leq c\}) = \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\Psi \leq c\}).$$

设

$$\mathcal{U}_c := i\big(\{\widetilde{\Psi} \leq c\}\big) \subset (E_- \oplus E_+) \setminus E_-.$$

引理 3.3. 对所有 $\epsilon > 0$，都存在一个容许哈密顿量 $H \in \mathcal{F}(B)$ 使得

$$\sup_{E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{U}_c} \Phi_H \leq c + \epsilon.$$

证明。 由于 $B = h^{-1}[0,1]$，我们可以选取一个容许哈密顿量 $H \in \mathcal{F}(B)$，使得 $H \geq c\,h - c - \epsilon$。对于每个 $\zeta \in E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{U}_c$，引理 3.2 表明

$$\Phi_H(\zeta) = a(\zeta) - \int_{S^1} H(\zeta)\,dt < c\int_{S^1} h(\zeta)\,dt - \int_{S^1} H(\zeta)\,dt \leq c + \epsilon.$$ □

对于任意整数 $N \geq 0$，我们引入由以下形式的所有周期曲线 $\gamma \in E$ 构成的有限维Hilbert子空间$F_N \subset E$

$$\gamma(t) = \sum_{|k| \leq N} e^{i2\pi kt}\gamma_k. \tag{3.5}$$

我们用 $\Pi_N : E \to F_N$ 表示正交投影。

引理 3.4。对于每个 $c > \min \sigma(\partial B)$，都存在 $N_c \geq 1$，使得

$$\Pi_N(\mathcal{U}_c) \cap E_- = \varnothing, \qquad \forall N \geq N_c.$$

证明。考虑任意一个 $\gamma \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{C}^n)$，满足 $\gamma_0 = 0$, $a(\gamma) > 0$ 且$\Pi_N\gamma \in E_-$。后一个条件意味着

$$a(\gamma) = \underbrace{a(\Pi_N\gamma)}_{\leq 0} + a((\mathrm{id} - \Pi_N)\gamma) \leq a((\mathrm{id} - \Pi_N)\gamma) \leq \pi \sum_{k>N} k\|\gamma_k\|^2. \tag{3.6}$$

考虑常数

$$r := \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{h^*(w)}{\|w\|^2} > 0,$$

我们用它来界定

$$\mathcal{H}(\dot\gamma) \geq r\|\dot\gamma\|_{L^2}^2 \geq r \sum_{k>N} 4\pi^2 k^2 \|\gamma_k\|^2 \geq 4\pi^2 rN \sum_{k>N} k\|\gamma_k\|^2. \tag{3.7}$$

估计（3.6）和（3.7）意味着

$$\widetilde{\Psi}(\dot\gamma) = \frac{\mathcal{H}(\dot\gamma)}{a(\gamma)} \geq 4\pi rN,$$

引理中所需的量可设为 $N_c := c/(4\pi r)$。 □

出于技术原因，考虑 $\mathcal{U}_c$ 的一个紧 S^1-不变子集将会很有用。

引理 3.5。存在一个 S^1-不变紧子集 $\mathcal{V}_c \subset \mathcal{U}_c$，使得

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathbb{R}_+\mathcal{V}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{V}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\Psi \leq c\}).$$

证明。考虑约化Clarke作用泛函 $\psi : \ U \to (0, c+1)$，它在第 2.3 节中引入。回顾一下，U 是单位球面 $S \subset F$的一个开子集，其中 $F = F_N$ 是上文引入的有限维希尔伯特空间，并且 N 足够大。函数 ψ 具有如下形式

$$\psi(u) = \widetilde{\Psi}(u + \nu(u)),$$

其中 $\nu : \ U \to L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n)$ 是一个 S^1-等变 $C^{1,\,1}$ 映射。次水平集

$$\mathcal{K}_c := \big\{u + \nu(u) \;\big|\; \psi(u) \leq c\big\}$$

在 $L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n)$ 中是紧的，且包含映射 $\mathcal{K}_c \hookrightarrow \{\widetilde{\Psi} \leq c\}$ 是一个 S^1-等变同伦等价。特别是

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{K}_c) = \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\widetilde{\Psi} \leq c\}) = \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\Psi \leq c\}).$$

像 $\mathcal{V}_c = i(\mathcal{K}_c)$ 是 S^1-不变的 $\mathcal{U}_c$紧子集，根据 Fadell-Rabinowitz 指数的单调性性质（参见附录A），我们得出

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathbb{R}_+\mathcal{V}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{V}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{K}_c).$$ □

在 [EH90，命题 1], Ekeland 和 Hofer 证明了

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{EH}}(E_- \oplus E_0 \oplus V) = \dim_{\mathbb{C}}(V) = \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(V \setminus \{0\})$$

对每个有限维 S^1-不变向量子空间 $V \subset E_+$。基于 Ekeland 和 Hofer 的论证，我们需要证明以下关于 $\mathbb{C}_*$-不变集合 $\mathcal{W}_c$ 的类似结论：$= \mathbb{R}_+\mathcal{V}_c$。我们将采用附录 A 中相同的记号：若 W 是向量空间的一个子集，我们记 $W_* := W \setminus \{0\}$。

引理 3.6。对每个 $c > \min \sigma(\partial B)$，均有 $\mathrm{ind}_{\mathrm{EH}}(E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c)$。

证明。任取一个 $\Theta \in \mathcal{D}$，以及 S^1-等变开邻域$\mathcal{U} \subset E$ of $\Theta(E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c) \cap S_+$。我们需要证明

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{U}) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c).$$

考虑前文引入的有限维希尔伯特子空间 $F = F_N \subset E$，取充分大的 N，其值稍后确定。该希尔伯特子空间可分解为直和 $F = F_- \oplus F_0 \oplus F_+$，其中 $F_0 = E_0$ 且 $F_\pm = F_{N,\pm} := E_\pm \cap F$。记 $\Pi_\pm = \Pi_{N,\pm} : E \to F_\pm$ 和 $\Pi = \Pi_N : E \to F$ 为正交投影。我们要求 $N \geq N_c$，从而由引理 3.4 可知 $\Pi_+(\mathcal{W}_c)$ 不包含原点。我们设

$$W := \Pi_+(\mathcal{W}_c) \cup \{0\}, \qquad W_* := \Pi_+(\mathcal{W}_c) = W \setminus \{0\},$$

因此

$$\Pi(E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c) = F_- \oplus F_0 \oplus W_*.$$

Fadell-Rabinowitz 指数的单调性（见附录A）意味着

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(W_*) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c).$$

向量空间 F_- 的复维数为 nN，圆周 S^1 通过无不动点的旋转作用于其上。我们定义 $Y = Y_N := F_- \oplus W$。引理A.2 和$\mathcal{W}_c \neq \varnothing$ 推出

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) = \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(W_*) + nN \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c) + nN > nN.$$

我们声称，若将 $N \geq N_c$ 固定得足够大，则有

$$\big(\Pi \circ \Theta(Y \oplus F_0)\big) \cap S_+ \subset \mathcal{U}. \tag{3.8}$$

事实上，反设存在一个序列 $\gamma_N \in Y_N \oplus F_0$，使得对于任意大的 $N \geq N_c$，都有 $\Pi_N \circ \Theta(\gamma_N) \in S_+ \setminus \mathcal{U}$。记

$$\gamma_N = \gamma_{N,-} + \gamma_{N,0} + \gamma_{N,+},$$

其中$\gamma_{N,\pm} = \Pi_{N,\pm}(\gamma_N)$。由于$(\Pi_{N,-} + \Pi_{N,0}) \circ \Theta(\gamma_N) = 0$，且 Θ 具有(3.2)的形式，因此有

$$\gamma_{N,-} + \gamma_{N,0} + \big(e^{-\theta_-(\gamma_N)}\Pi_{N,-} + \Pi_0\big)\mathcal{K}(\gamma_N) = 0. \tag{3.9}$$

由于 θ_- 和 $\mathcal{K}$ 将有界集映射为相对紧集，并且在 E的某个有界子集之外为零，方程（3.9）意味着序列 $\gamma_{N,-} + \gamma_{N,0}$ 是相对紧的。由于 Θ 在 E的某个有界集之外是恒等映射，序列$\gamma_{N,+}$ 也有界；否则，抽取一个子序列后，我们将有 $\|\gamma_{N,+}\|_E \to \infty$

当 $N \to \infty$时，而对于足够大的 N，我们将有 $\gamma_N = \Theta(\gamma_N)$，从而得到矛盾

$$1 = \|\Pi_N \circ \Theta(\gamma_N)\|_E = \|\gamma_N\|_E \geq \|\gamma_{N,+}\|_E \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

注意到 $\gamma_{N,+}$ 包含于 $\Pi_{N,+}(Y_N) = \Pi_{N,+}(\mathcal{W}_c) = \mathrm{R}_+\Pi_{N,+}(\mathcal{V}_c)$，并且我们回忆一下，$\Pi_{N,+}(\mathcal{V}_c)$是紧的（引理 3.5）。由于序列 $\gamma_{N,+}$ 一致有界，它在 $\Pi_{N,+}(\mathcal{W}_c)\cup\{0\}$中相对紧。总之，我们证明了序列$\gamma_N$ 相对紧；取一个子列后，它收敛于

$$\lim_{N\to\infty} \gamma_N = \gamma \in \left(E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c \cup \{0\}\right) \setminus \mathcal{U}.$$

但是 $\Theta(\gamma) \in S_+$，并且由于 $\Theta(0) = 0$ 我们必有 $\gamma \neq 0$，因此 $\gamma \in E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c$。这就导出了矛盾，因为 $\mathcal{U}$ 是$\Theta(E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c) \cap S_+$的开邻域，并完成了（3.8）的证明。

我们引入 S^1-等变连续映射 $\phi := \Pi \circ \Theta|_F \colon F \to F$，它满足

$$\phi(Y \oplus F_0) \cap S_+ \subset \mathcal{U}$$

根据（3.8）。我们用 $B' \subset F$ 表示闭单位球，它是 S^1-不变的。由于同胚 Θ 在 $E_- \oplus E_0$ 上以及在半径充分大的球 E 之外都是恒等映射，因此映射 ϕ 在 $F_- \oplus F_0$ 上以及在某个紧集之外都是恒等映射。因此 $B := \phi^{-1}(B') \subset F$ 是原点的一个 S^1-不变紧邻域。我们定义另一个 S^1-等变连续映射

$$\psi := (\mathrm{id} - \Pi_+) \circ \phi|_{Y\oplus F_0} : Y \oplus F_0 \to F_- \oplus F_0,$$

它满足 $\psi(0, x) = (0, x)$，对所有 $x \in F_0$ 均成立。这个 S^1-不变子集

$$Z := \psi^{-1}(0) \cap \partial B,$$

满足

$$\phi(Z) \subset \phi(Y \oplus F_0) \cap S_+ \subset \mathcal{U}.$$

设 $U \subset Y \oplus F_0$ 是一个 S^1-不变开子集，包含 Z 且充分小，使得 $\phi(U) \subset \mathcal{U}$。将命题 A.4 应用于映射 ψ 可得 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(U) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) - nN$。综上，我们得到了所需的下界

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{U}) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(U) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) - nN \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c). \qquad \square$$

命题 *3.1* 的证明。假设 $s_k(B) < c$，因此

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\{\Psi \leq c\}) \geq k.$$

根据引理 3.3，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个容许哈密顿量 $H \in \mathcal{F}(B)$，使得

$$\sup_{E_-\oplus E_0\oplus \mathcal{W}_c} \Phi_H \leq c + \epsilon.$$

引理3.6 推出

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{EH}}(E_- \oplus E_0 \oplus \mathcal{W}_c) \geq \mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathcal{W}_c) \geq k.$$

因此 $c_k(B) \leq c_k(H) \leq c + \epsilon$。由于 $\epsilon > 0$ 可以任意小，我们推得 $c_k(B) \leq c$。最后，由于这一不等式对所有 $c > s_k(B)$ 都成立，我们得出 $c_k(B) \leq s_k(B)$。$\square$

3.3. **容量比的局部极大值点**。 我们将 Besse 凸体的概念推广至光滑星形域这一类。若一个 $2n$维光滑星形域 $B \subset \mathbb{C}^n$ 满足以下条件，则称其为 $Besse$： 其边界 ∂B配备方程（1.1）中的典范接触形式 $\lambda|_{\partial B}$ 后构成一个 Besse 接触流形：其所有 Reeb 轨道都是闭合的，因此根据 Wadsley 定理，它们具有公共周期 [Wad75]。Besse 凸体，尤其是有理椭球，是贝塞星形域的一个子类。事实上，在 4维中，这些类在辛同胚意义下相同。

命题 3.7。 设 B 是一个4维光滑星形域。以下条件等价：

(i) B 是 *Besse* 型的。(ii) ∂B 与有理椭球 E 的边界严格接触同胚，也就是说，存在一个微分同胚 $\psi\colon \partial B \to \partial E$，使得 $\psi^*\lambda|_{\partial E} = \lambda|_{\partial B}$。$(iii)$ 存在一个微分同胚 $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$，使得 $\psi(B) = E$、$\psi^*\omega = \omega$ 和 $\psi|^*_{\partial B}\lambda = \lambda|_{\partial B}$。$(iv)$ B 与有理椭球 E 辛同胚，也就是说，存在一个微分同胚 $\psi\colon B \to E$，使得 $\psi^*\omega = \omega$。

证明。 假设 B 是一个四维Besse星形域。正如 [MR23，定理 11], 接触分类[GL18，CGM20] 所指出的， B 的边界与一个有理椭球的边界严格接触同胚 E: 存在一个微分同胚 ψ： $\partial B \to \partial E$ 使得 $\psi^*\lambda|_{\partial E} = \lambda|_{\partial B}$。对 [ABHS18，命题 4 3] 的直接推广表明， ψ 可以延拓为一个辛同胚 $\psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{C}^2, \omega)$。因此，条件 (i) 和 (ii) 等价，且它们蕴含条件 (iii)。

条件 (iii) 立即蕴含条件 (iv)。现在假设一个四维光滑星形域 B 通过辛同胚 ψ: $B \to E$与一个有理椭球 E辛同胚。 ∂B 和 ∂E 上的 Reeb 轨道分别是特征叶状结构 $\ker(\omega|_{\partial B})$ 和 $\ker(\omega|_{\partial E})$ 的叶。由于 $\psi^*\omega = \omega$，限制映射 $\psi|_{\partial B}$ 将 ∂B 上的 Reeb 轨道映为经过时间重参数化的∂E上的 Reeb 轨道。由于 ∂E 上的所有 Reeb 轨道都是闭合的， ∂B 上的所有 Reeb 轨道也都是闭合的。因此，条件 (iv) 蕴含条件 (i)。□

设 B 是一个四维Besse星形域，并且 $\psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{C}^2, \omega)$ 是一个将 B 映射到有理椭球 $E := \psi(B)$ 的辛同胚，其限制映射 $\psi|_{\partial B} : \partial B \to \partial E$ 是严格接触同胚。由于 $\psi|_{\partial B}$ 将 ∂B 和 ∂E上的 Reeb 流共轭，特别地， $\sigma(\partial B) = \sigma(\partial E)$。Ekeland-Hofer 容量的单调性表明 $c_k(E) = c_k(B)$。特别地，容量 $c_k(B)$ 覆盖整个谱 $\sigma(\partial B)$，即

$$\sigma(\partial B) = \big\{c_k(B) \;\big|\; k \geq 1\big\},$$

因为椭球 E也满足同样的性质。我们用 $\tau(B)$ 表示 ∂B上闭 Reeb 轨道的最小公周期。对于所有整数 $m \geq 1$，我们定义

$$k_m(B) := \min\big\{k \geq 1 \;\big|\; c_k(B) = m\,\tau(B)\big\},$$
$$K(B) := \big\{k_m(B) \;\big|\; m \geq 1\big\}.$$

显然， $\tau(E) = \tau(B)$以及 $K(E) = K(B)$。这些 $k_m(B)$和 $K(B)$的定义与第1.2 节中的定义一致（在有理椭球这一特殊情形下）。它们

也与第2.5 节中针对Besse凸域给出的定义一致，这归功于以下引理。

引理 3.8. 对于每个4维 *Besse* 凸体 B，有 $c_k(B) = s_k$对所有 $k \geq 1$均成立。 (B)

证明。令 $\psi \in$ Symp(C$^2, \omega$) 为一个将 B 映射到有理椭球 $E := \psi(B)$ 的辛同胚，使得 $\tau = \tau(B) = \tau(E)$。我们已经知道，谱不变量 $s_k(B)$ 和 Ekeland-Hofer 容量 $c_k(B) = c_k(E)$ 都覆盖整个作用谱 $\sigma = \sigma(\partial B) = \sigma(\partial E)$，即

$$\sigma = \{s_k(B) \mid k \geq 1\} = \{c_k(E) \mid k \geq 1\}.$$

此外， $s_1(B) = c_1(E) = \min \sigma$， $s_k(B) \leq s_{k+1}(B)$，且 $c_k(E) \leq c_{k+1}(E)$。Clarke作用泛函的谱Besse刻画（第2.4节）意味着， $s_1(B) = \tau$ 当且仅当 $s_1(B) = s_2(B)$；此外，对于任意 $k \geq 2$，它意味着 $s_k(B)$ 是 τ 的倍数，当且仅当 $s_{k-1}(B) = s_k(B)$ 或 $s_k(B) = s_{k+1}(B)$。这些性质完全确定了 Besse 凸体 B的 $s_k(B)$。辛 k 阶容量的归一化性质意味着 $c_k(E)$ 满足类似的性质： $c_1(E) = \tau$ 当且仅当 $c_1(E) = c_2(E)$；对于任意 $k \geq 2$，$c_k(E)$ 是 τ 的倍数，当且仅当 $c_{k-1}(E) = c_k(E)$ 或 $c_k(E) = c_{k+1}(E)$。由此得出， $s_k(B) = c_k(E)$。□

由定理 A 可推出其前半部分2.4。

引理 3.9。 设 B_0 是一个 4 维贝塞星形域。对于每个整数 $k \in K(B_0)$，任意充分 C^3接近B_0 的光滑星形域 B_1 都满足 $\widehat{c}_k(B_1) \leq \widehat{c}_k(B_0)$。

证明。固定 $k \in K(B_0)$，并取一个辛同胚 $\psi \in$ Symp(C$^2, \omega$)，将 B_0映射到一个有理椭球。如果光滑星形域 B_1 与 B_0足够 C^3接近，那么$\psi(B_1)$与 $\psi(B_0)$足够 C^3接近。特别地， $\psi(B_1)$是一个光滑凸体，而由定理 2.4 可知 $\widehat{s}_k(\psi(B_1)) \leq \widehat{s}_k(\psi(B_0))$。由命题 3.1 可知 $c_k(\psi(B_1)) \leq s_k(\psi(B_1))$，由引理 3.8 可知 $c_k(\psi(B_0)) = s_k(\psi(B_0))$。因此我们得出

$$\widehat{c}_k(B_1) = \widehat{c}_k(\psi(B_1)) \leq \widehat{s}_k(\psi(B_1)) \leq \widehat{s}_k(\psi(B_0)) = \widehat{c}_k(\psi(B_0)) = \widehat{c}_k(B_0). \qquad \square$$

接下来，我们讨论定理A中的逆命题。以下引理对任意维数都成立。

引理 3.10. 设 B_0 是容量比 $\widehat{c}_k$ 在赋予 C^∞ 拓扑的 $2n$ 维光滑星形域空间上的局部极大值点。那么 B_0 是一个贝塞星形域，并且 $c_k(B_0)$ 是 ∂B_0 上 ***Reeb*** 轨道的公共周期。

证明。 证明基于 Alvarez Paiva 和 Bal- acheff 最初提出的一种论证 [APB14]。令 B_0 为一个 $2n$维光滑星形域，且h_0 : $\mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ 为满足 $h_0^{-1}(1) = \partial B_0$的二次齐次哈密顿量。其哈密顿流 $\phi^t_{h_0}|_{\partial B_0}$ 在 ∂B_0上的限制即为 Reeb 流。反设 $c_k(B_0)$ 不是边界∂B_0上 Reeb 轨道的公共周期。也就是说，存在 $\delta > 0$ 以及一个非空开子集 $U \subset \partial B_0$ ，使得

$$\phi^t_h(z) \neq z, \qquad \forall z \in U,\ t \in [c_k(B_0) - \delta, c_k(B_0) + \delta].$$

设 χ : $\partial B_0 \to [0, \infty)$ 是一个支撑于 U 且不恒为零的光滑函数。对于 $\epsilon > 0$，令 h_ϵ : C$^n \to [0, \infty)$ 为满足下式的二次齐次哈密顿量

$h_\epsilon|_{\partial B_0} = h_0|_{\partial B_0} + \epsilon\chi$。对于所有充分小的 $\epsilon > 0$，次水平集 $B_\epsilon := h_\epsilon^{-1}[0,1]$ 是一个严格包含于 B_0 中的光滑星形域，特别地

$$\mathrm{vol}(B_\epsilon) < \mathrm{vol}(B_0).$$

根据我们对 χ 的选择，对于所有足够小的 $\epsilon > 0$，我们有

$$\mathrm{fix}(\phi^t_{h_\epsilon}) = \mathrm{fix}(\phi^t_{h_0}), \qquad \forall t \in [c_k(B_0) - \delta, c_k(B_0) + \delta].$$

因此，连续函数 $\epsilon \mapsto c_k(B_\epsilon)$ 对所有足够小的 $\epsilon \geq 0$ 都取值于交集$\sigma(\partial B_0) \cap [c_k(B_0) - \delta, c_k(B_0) + \delta]$。由于作用谱 $\sigma(\partial B_0)$处处稀疏（例如，参见 [Sik90，命题 7.4]），我们得出$c_k(B_\epsilon) = c_k(B_0)$，因此对于所有足够小的 $\epsilon > 0$，都有 $\widehat{c}_k(B_\epsilon) > \widehat{c}_k(B_0)$。□

定理A的证明。我们考虑容量比 $\widehat{c}_k$，其定义在四维光滑星形域空间上，并赋予 C^3 拓扑。设 B 是一个与有理椭球辛同胚的四维光滑星形域E。命题3.7 表明 B 是 Besse 的，而引理3.9 断言 B 是 $\widehat{c}_k$ 的局部极大值点，对所有 $k \in K(B) = K(E)$ 均成立。

反过来，设某个四维光滑星形域 B_0 是 $\widehat{c}_k$的局部极大值点。引理3.10 推出 B_0 是 Besse 的，因此命题3.7 推出存在 $\psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{C}^2, \omega)$，将 B_0 映射到有理椭球 $E(\boldsymbol{a})$。对每个 $\boldsymbol{b}$ 充分接近 $\boldsymbol{a}$的 $B_1 := \psi^{-1}(E(\boldsymbol{b}))$ 的原像都是光滑星形域，且与 C^3 相距 B_0很近，因此

$$\widehat{c}_k(E(\boldsymbol{b})) = \widehat{c}_k(B_1) \leq \widehat{c}_k(B_0) = \widehat{c}(E(\boldsymbol{a})).$$

也就是说，$E(\boldsymbol{a})$ 是 $\widehat{c}_k$ 在四维椭球空间上的局部极大值点，而命题C(i) 推出 $k \in K(E(\boldsymbol{a})) = K(B_0)$。□

我们还可以完成定理2.4，从而完整刻画谱比 $\widehat{s}_k$ 在四维光滑凸域空间上的局部极大值点。

定理 3.11. 在赋予 C^3 拓扑的四维光滑凸域空间中，$B \mapsto \widehat{s}_k(B)$ 的局部极大值点恰好是那些与一个(E)的维有理椭球 $2n$ 辛同胚的凸域 E，其中 $k \in K$。

证明。 定理 2.4与命题 3.7共同给出一个方向的结论：与四维有理椭球 E辛同胚的光滑凸体 B 是 $\widehat{s}_k$ 在所有 $k \in K(B) = K(E)$下的局部极大值点。

反过来，设 B_0 是一个局部极大化 $\widehat{s}_k$ 的光滑凸域。引理 3.10 的证明中类似的论证表明，B_0 是 Besse 的；命题 3.7 给出一个辛同胚 $\psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{C}^2, \omega)$，将 B_0 映射到有理椭球 $E(\boldsymbol{a})$。对于每个充分接近 $\boldsymbol{a}$ 的 $\boldsymbol{b}$，其原像 $B_1 := \psi^{-1}(E(\boldsymbol{b}))$ 是一个与 B_0 相距 C^3 的光滑凸体，因此 $\widehat{s}_k(B_1) \leq \widehat{s}_k(B_0)$。命题 3.1 表明 $c_k(B_1) \leq s_k(B_1)$，引理 3.8 表明$s_k(B_0) = c_k(B_0)$。综上，我们得到

$$\widehat{c}_k(E(\boldsymbol{b})) = \widehat{c}_k(B_1) \leq \widehat{s}_k(B_1) \leq \widehat{s}_k(B_0) = \widehat{c}_k(B_0) = \widehat{c}_k(E(\boldsymbol{a})).$$

也就是说，$E(\boldsymbol{a})$ 是 $\widehat{c}_k$ 在四维椭球空间上的一个局部极大值点。命题 C(i) 表明，$k \in K(E(\boldsymbol{a})) = K(B_0)$。□

4. Maximizers of the capacity ratios among ellipsoids

我们回顾一下，在本文中，我们始终通过积分体积形式 ω^n 来计算 $\mathbb{C}^n$ 中区域的体积；也就是说，对于一个 $2n$ 维区域 K，体积 $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K, \omega)$ 是通常的 $2n$ 维欧几里得体积的 $n!$ 倍。对于一个 $2n$ 维椭球 $E(\boldsymbol{a})$，其中 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$，我们有

$$\mathrm{vol}(E(\boldsymbol{a})) = a_1 \ldots a_n$$

根据归一化性质，所有辛 k-容量在椭球空间上均相同（参见第1.2节）。在本节中，我们用 c_k表示任意辛 k-容量。

命题 C 的证明（i）。设 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是函数$\boldsymbol{a} \mapsto \widehat{c}_k(E(\boldsymbol{a}))$的一个局部极大值点，并且不失一般性地假设 $0 < a_1 \le \ldots \le a_n < \infty$。我们首先证明，每个 a_i 都整除 $c_k(E(\boldsymbol{a}))$。事实上，若存在某个整数 $r \ge 0$ 和某个最小的 $i \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $r a_i < c_k(E(\boldsymbol{a})) < (r+1)a_i$，那么对于任意充分接近 1 的 $t < 1$，由配置 $\boldsymbol{b}(t) = (b_1(t) \ldots, b_n(t))$ 给出

$$b_j(t) = \begin{cases} t\, a_i, & \text{if } j = i, \\ a_j, & \text{if } j \ne i \end{cases}$$

将满足 $c_k(E(\boldsymbol{b}(t))) = c_k(E(\boldsymbol{a}))$ 且 $\mathrm{vol}(E(\boldsymbol{b}(t))) < \mathrm{vol}(E(\boldsymbol{a}))$，这与 $\boldsymbol{a}$ 的最大性矛盾。

因此，对于某些整数 $r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n \ge 1$，有 $c_k(E(\boldsymbol{a})) = r_1 a_1 = \ldots = r_n a_n$。现在我们证明

$$c_k(\boldsymbol{a}) = c_{k+n-1}(\boldsymbol{a}),$$

这很容易推出 $r_1 + \ldots + r_n = k + n - 1$，进而得到 $k \in K(E(\boldsymbol{a}))$。反设 $c_k(\boldsymbol{a}) < c_{k+n-1}(\boldsymbol{a})$。这意味着 $c_k(E(\boldsymbol{a})) = c_{k-1}(E(\boldsymbol{a}))$。对于任意充分接近 1 的 $t < 1$，构形 $\boldsymbol{b}(t) = (t a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ 的容量为 $c_k(E(\boldsymbol{b}(t))) = c_k(E(\boldsymbol{a}))$，但体积较小，$\mathrm{vol}(E(\boldsymbol{b}(t))) < \mathrm{vol}(E(\boldsymbol{a}))$，这与 $\boldsymbol{a}$ 的最大性矛盾。

我们还需证明逆向蕴含。设 $E(\boldsymbol{a})$ 是一个有理椭球。照常，不失一般性地假设 $a_1 \le \ldots \le a_n$。任取整数 $k \in K(E(\boldsymbol{a}))$。存在整数 $r_i \ge 1$，使得 $r_1 a_1 = \ldots = r_n a_n$ 且$k = r_1 + \ldots + r_n - n + 1$。对于所有充分接近 $\boldsymbol{a}$ 的 $\boldsymbol{b}$，都有 $\widehat{c}_k(E(\boldsymbol{b})) = f(\boldsymbol{b})$，其中 f 是零次齐次函数

$$f(\boldsymbol{b}) = \frac{\min\{r_1 b_1, \ldots, r_n b_n\}}{(b_1 \ldots b_n)^{1/n}}.$$

与往常一样，不失一般性地假设 $b_1 \le \ldots \le b_n$。令

$$t := \frac{r_1 a_1}{\min\{r_1 b_1, \ldots, r_n b_n\}}.$$

注意到 $t\, b_i \ge a_i$。因此，对于所有充分接近 $\boldsymbol{a}$ 的 $\boldsymbol{b}$，都有

$$\widehat{c}_k(E(\boldsymbol{b})) = f(\boldsymbol{b}) = f(t\, \boldsymbol{b}) = \frac{r_1 a_1}{(t\, b_1 \ldots t\, b_n)^{1/n}} \le \frac{r_1 a_1}{(a_1 \ldots a_n)^{1/n}} = f(\boldsymbol{a}) = \widehat{c}_k(E(\boldsymbol{a})). \quad \square$$

命题$C(ii)$的证明。 对于配置 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$，满足

$$0 < a_1 \le \ldots \le a_n < \infty, \tag{4.1}$$

我们有

$$\widehat{c}_k(E(\boldsymbol{a})) \leq \frac{ka_1}{(a_1 \ldots a_n)^{1/n}} \xrightarrow[a_n \to \infty]{} 0.$$

因此，函数 $\boldsymbol{a} \mapsto \widehat{c}_k(E(\boldsymbol{a}))$ 在某个 $\boldsymbol{a}$ 处取得最大值，我们不失一般性地假设其满足（4.1）。根据命题C(i)，我们有$k \in K(E(\boldsymbol{a}))$。也就是说

$$c_k(E(\boldsymbol{a})) = c_{k+n-1}(E(\boldsymbol{a})) = s_1 a_1 = \ldots = s_n a_n$$

对于某些整数 $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n \geq 1$。

我们断言

$$s_i - s_j \leq 1, \qquad \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

否则，我们可以找到 $i < j$，使得 $s_i - s_j \geq 2$、 $s_i - s_{i+1} \geq 1$ 和 $s_{j-1} - s_j \geq 1$（允许出现 $i = j-1$ 的情形）。由下式给出的构型 $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots\ldots, b_n)$

$$b_l = \begin{cases} \frac{s_i}{s_i - 1} a_i, & \text{if } l = i, \\ \frac{s_j}{s_j + 1} a_j, & \text{if } l = j, \\ a_l, & \text{if } l \neq i, j \end{cases}$$

具有相同的值 $c_k(E(\boldsymbol{b})) = c_k(E(\boldsymbol{a}))$，但是

$$\operatorname{vol}(E(\boldsymbol{b})) = \frac{s_i s_j}{(s_i - 1)(s_j + 1)} \operatorname{vol}(E(\boldsymbol{a})) = \frac{s_i s_j}{s_i s_j + \underbrace{s_i - s_j - 1}_{\geq 1}} \operatorname{vol}(E(\boldsymbol{a})) < \operatorname{vol}(E(\boldsymbol{a})),$$

这与 $\boldsymbol{a}$ 的极大性矛盾。

综上，我们证明了

$$\begin{aligned} c_k(E(\boldsymbol{a})) = c_{k+n-1}(E(\boldsymbol{a})) &= (s+2)a_1 = (s+2)a_2 = \ldots = (s+2)a_{i-1} \\ &= (s+1)a_i = (s+1)a_{i+1} = \ldots = (s+1)a_n \end{aligned}$$

对于某些整数 $s \geq 0$ 和 $i \in \{1, \ldots, n\}$。由于 $c_k(E(\boldsymbol{a})) = c_{k+n-1}(E(\boldsymbol{a}))$，我们有

$$k + n - 1 = (s+2)(i-1) + (s+1)(n-i+1),$$

也就是说， $k = sn + i$，这意味着 $q = s$ 和 $r = i$。 □

5. Maximizers of the capacity ratios among toric domains

在本节中，我们用 c_k 表示满足额外“闭 Reeb 轨道”假设的任意辛 k-容量（见第 1.2 节）。我们将考察四维环面域 X_Ω，其剖面 Ω 是单调不增函数 $f\colon [0, x_0] \to [0, \infty)$ 的下方图形，且满足 $f|_{[0,x_0)} > 0$ 和 $f(x_0) = 0$，即

$$\Omega = \Omega_f := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [0, x_0],\ y \in [0, f(x)] \right\}.$$

5.1. 凹环面域。 设 X_Ω 是一个四维凹环面域。其剖面 $\Omega = \Omega_f \subset [0,\infty)^2$ 必须是一个（单调递减）凸函数 $f\colon [0,x_0] \to [0,\infty)$ 的下方图形，且满足 $f|_{[0,x_0)} > 0$ 和 $f(x_0) = 0$。与通常一样，我们用 $\mathrm{vol}(X_\Omega) = \mathrm{vol}(X_\Omega,\omega)$ 表示通过对体积形式 ω^2 积分计算得到的 X_Ω 的体积。体积 $\mathrm{vol}(X_\Omega)$ 是 Ω 的欧几里得面积的两倍。

Gutt 和 Hutchings [GH18，定理 1。14] 给出了 $2n$维凹环面域的高阶容量公式。对于我们的四维 X_Ω 情形，该公式为：

$$c_k(X_\Omega) = \max\Big\{ [v]_\Omega \;\Big|\; v = (v_1,v_2) \in \{1,\dots,k\}^2,\ v_1 + v_2 = k+1 \Big\}, \tag{5.1}$$

其中

$$[v]_\Omega = \min\big\{ \langle v, w\rangle \;\big|\; w \in \mathrm{graph}(f) \big\}.$$

命题D（i）可直接由该公式及辛 k容量的性质推出。

命题 D(i) 的证明。设 $v \in \{1,\dots,k\}^2$ 为一个满足 $c_k(X_\Omega) = [v]_\Omega$ 的向量，并设 $w = (w_1, w_2) \in \mathrm{graph}(f)$ 为一个满足 $[v]_\Omega = \langle v, w\rangle$ 的向量。记$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为满足 $g(w_1) = w_2$ 且 $g \le f$ 的仿射函数。令 $a_2 := g(0)$， $a_1 := a_2/g'(0)$，于是 $g(a_1) = 0$。椭球 $E(a_1,a_2) = X_\Upsilon$ 是一个凹环面域，其对应的剖面 $\Upsilon = \Omega_g$ 满足 $\Upsilon \subseteq \Omega$，因此

$$\mathrm{vol}(E(a_1,a_2)) = 2\,\mathrm{area}(\Upsilon) \le 2\,\mathrm{area}(\Omega) = \mathrm{vol}(X_\Omega).$$

此外，将公式（5.1）应用于 $E(a_1,a_2)$，可得

$$c_k(E(a_1,a_2)) \ge [v]_\Upsilon = [v]_\Omega = c_k(X_\Omega).$$

综上，我们得到 $\widehat{c}_k(E(a_1,a_2)) \ge \widehat{c}_k(X_\Omega)$。最后，由命题 C，函数 $(a_1,a_2) \mapsto \widehat{c}_k(E(a_1, a_2))$ 在以下位置取得最大值

$$(a_1,a_2) = \big(\lceil \tfrac{k}{2} \rceil, \lceil \tfrac{k+1}{2} \rceil\big). \qquad \square$$

5.2. 凸环面域。 设 X_Ω 是一个四维凸环面域。其剖面 $\Omega = \Omega_f \subset [0,\infty)^2$ 必须是某个凹且非递增函数 $f\colon [0,x_0] \to [0,y_0]$ 的下方图形，满足 $f(0) = y_0 > 0$ 且 $f(x_0) = 0$。我们考虑凸体

$$\widehat{\Omega} := \big\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; (|x_1|,|x_2|) \in \Omega \big\}.$$

我们用 $\|\cdot\|_\Omega$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的范数，其单位球是 $\widehat{\Omega}$ 的极集，即

$$\|v\|_\Omega := \max_{w\in\Omega} \langle v, w\rangle, \qquad \forall v \in [0,\infty)^2.$$

令 $V_k := \{v_0,\dots,v_k\}$，其中 $v_j = (j,\ k-j) \in [0,k]^2$。Gutt 和 Hutchings [GH18，定理 1。16]给出了 $2n$ 维凸环面域的高阶容量公式；在我们所研究的四维 X_Ω 情形下，该公式为：

$$c_k(\Omega) = \min_{v\in V_k} \|v\|_\Omega.$$

例5.1. 对于每个 $a,b > 0$，多圆盘 $P(a,b) := E(a) \times E(b) = X_\Omega$是一个剖面为 $\Omega = [0,a] \times [0,b]$的凸环面域。因此 $c_k(P(a,b)) = k\min\{a,b\}$，$\mathrm{vol}(P(a,b)) = 2ab$，并且

$$\widehat{c}_k(P(a,b)) = k\frac{\min\{a,b\}}{\sqrt{2ab}}.$$

使 $\widehat{c}_k$ 取最大值的多圆盘（在缩放意义下）为 $P(1,1)$，此时 $\widehat{c}_k(P(1,1)) = k/\sqrt{2}$。□

命题 D (ii) 的证明需要若干引理。

引理 5.2。在 4 维凸环面域的空间中，容量比 $\widehat{c}_k$ 存在一个全局最大化者。

证明。考虑剖面 $\Omega = \Omega_f$，它是一个凹且非递增函数 $f\colon [0,x_0] \to [0,y_0]$ 的下方区域，并满足 $f(0) = y_0$ 且 $f(x_0) = 0$。由于容量比具有尺度不变性，我们总可以假设 $y_0 = 1$。此外，假设 $x_0 \le 1$。相应凸环面域 X_Ω 的体积有如下下界：

$$\operatorname{vol}(X_\Omega) = 2\operatorname{area}(\Omega) \ge x_0.$$

X_Ω 的第 k 个容量有如下上界：

$$c_k(X_\Omega) = \min_{j\in\{0,\dots,k\}} \max_{w\in\Omega} \langle v_j, w\rangle \le \min_{j\in\{0,\dots,k\}} \big(jx_0 + (k-j)\big) \le kx_0.$$

因此，如果 $x_0 < 1/2$，则 $\overline{c}_k(X_\Omega) \le k\sqrt{x_0} < \widehat{c}_k(P(1,1))$。类似地，如果 $x_0 > 2$，则 $\widehat{c}_k(\overline{X}_\Omega) \le k/\sqrt{2}$。

设 $\mathcal{T}$ 为四维凸 toric 域的空间，$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ 为其中满足 f 的那些 X_{Ω_f} 所构成的子空间：$[0,x_0] \to [0,1]$ 是凹函数、单调不增，且满足 $f(0) = 1$ 和 $x_0 \in [1/2, 2]$。上一段的结论意味着

$$\sup_{\mathcal{T}} \widehat{c}_k = \sup_{\mathcal{T}'} \widehat{c}_k.$$

空间 $\mathcal{T}'$ 在豪斯多夫拓扑下是紧的，并且由于 $\widehat{c}_k|_{\mathcal{T}}$ 连续，它在 $\mathcal{T}'$ 上的限制能取到最大值。□

我们定义

$$\Delta_\pm := \big\{(x,y) \in (0,\infty)^2 \;\big|\; \pm x < \pm y\big\}, \qquad \Delta := \big\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x > 0\big\},$$

and

$$\partial_\pm\Omega := \Delta_\pm \cap \partial\Omega, \qquad \partial_0\Omega := \Delta \cap \partial\Omega, \qquad \partial_*\Omega := \partial_+\Omega \cup \partial_0\Omega \cup \partial_-\Omega.$$

注意，$\partial_0\Omega$ 是单点集，而 Ω 是由 $\partial_*\Omega$ 与沿着 x 轴和 y 轴的两条线段围成的凸集。

引理 5.3。假设 X_Ω 在凸环面域空间上使 $\widehat{c}_k$ 达到最大值。那么 $\partial_*\Omega$ 是分段线性的，且至多有 $k-1$ 个角点。

证明。对每个 $v \in V_k$，都存在一个 $w_v \in \partial_*\Omega$，使得 $\|v\|_\Omega = \langle v, w_v\rangle$。点 w_v 不一定唯一，但对于 $v = (0,k)$，我们选取 $w_v = (0,y_0)$；对于 $v = (k,0)$，我们选取 $w_v = (x_0,0)$。我们用 $\Omega' \subset \Omega$ 表示以下有限集合的凸包

$$\big\{(0,0)\big\} \cup \big\{w_v \;\big|\; v \in V_k\big\} \subset \partial\Omega.$$

注意到 $X_{\Omega'}$ 是一个凸环面域，且 $c_k(\Omega') = c_k(\Omega)$。因此，$\widehat{c}_k(\Omega') \ge \widehat{c}_k(\Omega)$，当且仅当 $\Omega = \Omega'$ 时取等号。这表明 $\partial_*\Omega$ 是至多有 $k-1$ 个角点的分段线性边界。□

引理 5.3与命题 C共同推出了命题 D(ii) 在以下情形下的结论 $k = 1$。因此，从现在起我们考虑 $k \geq 2$。此外，根据引理 5.3，从现在起我们只需考虑凸域 X_Ω，其剖面 Ω 具有分段线性边界。

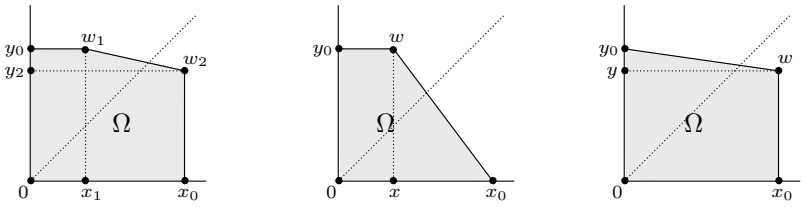
引理 5.4. 假设 X_Ω 在凸环面域空间上使 $\widehat{c}_k$ 达到最大值。对于 $\partial_*\Omega$的每个角点 w，都存在 $v \in V_k$，使得 $c_k(X_\Omega) = \|v\|_\Omega = \langle v, w\rangle$。

证明。 如果不存在这样的 v，那么在 w 附近对 Ω 进行倒角，就会得到 $\Omega' \subsetneq \Omega$，它仍定义一个凸环面域 $X_{\Omega'}$，其容量 $c_k(X_{\Omega'})$ 与 $= c_k(X_\Omega)$ 相同，但体积 $\mathrm{vol}(X_{\Omega'})$ $< \mathrm{vol}(X_\Omega)$ 更小，这与 X_Ω 使 $\widehat{c}_k$ 达到最大值的事实矛盾。□

引理 5.5. 假设 X_Ω 在凸环面域空间上使 $\widehat{c}_k$ 达到最大值。那么 $\partial_*\Omega$ 是分段线性的，且最多有两个角点。此外：

(i) 如果 $\partial_*\Omega$没有角点，那么 X_Ω 是一个椭球。*(ii)* 如果 $w = (x, x) \in \partial_0\Omega$是 $\partial_*\Omega$的一个角点，那么它是其唯一的角点，并且$X_\Omega = P(x, x)$。*(iii)* $\partial_+\Omega$至多包含 $\partial_*\Omega$的一个角点 $w = (x, y)$，若这样的角点存在，则 $y = y_0$。*(iv)* $\partial_-\Omega$至多包含 $\partial_*\Omega$的一个角点 $w = (x, y)$，若这样的角点存在，则 $x = x_0$。

最后两点所允许的可能情形由以下图示说明：



证明。假设 $w = (x, x) \in \partial_0\Omega$是 $\partial_*\Omega$的一个角点。那么，根据引理 5.4，存在 $v \in V_k$ 使得 $c_k(X_\Omega) = \|v\|_\Omega = \langle v, w\rangle$。正方形 $\Omega' := [0, x]^2$ 包含于 Ω 中，并满足 $c_k(X_{\Omega'})$ $= \|v\|_\Omega = c_k(X_\Omega)$。由于 X_Ω 使 $\widehat{c}_k$达到最值，我们推得 $X_\Omega = X_{\Omega'} = P(x, x)$。

反之，假设 $\partial_+\Omega$ 含有一个角点 $w = (x, y)$。我们断言 $y = y_0$（特别是，不存在其他角点 $w' = (x', y') \in \partial_+$属于 Ω，且满足$x' < x$）。事实上，再次由引理 5.4，存在 $v_j = (j, k - j) \in V_k$ 使得 $c_k(X_\Omega) = \|v_j\|_\Omega = \langle v_j, w\rangle$。由于 $x < y$，我们有

$$\langle v_h, w\rangle > c_k(X_\Omega), \quad \text{if } 0 \leq h < j,$$
$$\langle v_h, w\rangle < c_k(X_\Omega), \quad \text{if } j < h \leq k.$$

这意味着凸域 $\Omega' := (\mathbb{R} \times [0, y]) \cap \Omega$ 包含于 Ω 中，且具有相同的容量 $c_k(X_{\Omega'}) = c_k($ $X_\Omega)$。因此，由于 X_Ω 是 $\widehat{c}_k$的最大化者，我们可推知 $\Omega' = \Omega$，从而得到 $y = y_0$。

类似的论证表明，如果 $\partial_-\Omega$ 含有一个角点 $w = (x, y)$，那么$x = x_0$（因此，特别地，Ω 中不存在其他满足$x' > x$的角点 $w' = (x', y') \in \partial_+$）。□

根据引理5.5，只需考虑形如以下形式的区域

$$\Omega = \Omega(\alpha, s, t) := \{0 \le y \le 1+s\} \cap \{0 \le x \le 1+t\} \cap \{1-\alpha(x-1) \le y\}$$

对于 $\alpha \in [0,\infty]$, $s \in [0,\alpha]$ 和 $t \in [0, 1/\alpha]$。$\partial_*\Omega$ 的角点为

$$v^+ := (1 - \tfrac{s}{\alpha}, 1+s), \qquad v^- := (1+t, 1-\alpha t).$$

将 α 参数化为

$$\alpha = \alpha(i,r) = \frac{i+r}{k-(i+r)}$$

其中 $(i,\ r) \in \{0,1,\dots,k-1\} \times [0,1) \cup \{(k,\ 0)\}$。如上所述，我们令 $v_j = (j,\ k-j)$, $j = 1,\ \dots,\ k$。

引理 5.6。我们有

$$\|v_j\|_\Omega = \langle v_j, v^+ \rangle, \qquad \forall j \le i,$$
$$\|v_j\|_\Omega = \langle v_j, v^- \rangle, \qquad \forall j \ge i+1.$$

证明。最大值 $\|v_j\|_\Omega = \max_{w\in\Omega}$ 在 v^+ 或 v^-处取得。如果 $v^+ \neq v^-$，则是在 v^+ 还是 v^- 处取得，取决于点 v_j 位于经过原点且垂直于经过 v^+ 和 v^- 的直线的直线 l 的哪一侧。由于 l 的斜率为 $1/\alpha$，结论得证。□

引理 5.7. 我们有

$$\|v_j\|_\Omega \ge \|v_i\|_\Omega = k\left(1 + \frac{sr}{i+r}\right), \qquad \forall j \le i,$$
$$\|v_j\|_\Omega \ge \|v_{i+1}\|_\Omega = k\left(1 + \frac{t(1-r)}{k-(i+r)}\right), \qquad \forall j \ge i+1.$$

证明。这些不等式可由以下事实推出：v_j 求和至 k，并且 x-坐标 v^+ (v^-) 不大于（小于）其 y-坐标。等式则通过使用引理 5.6计算得到

$$\begin{aligned}\|v_i\|_\Omega = \langle v_i, v^+ \rangle &= i - \frac{s}{\alpha} i + k - i + ks - is = k\left(1 + s\left(1 - i\frac{\alpha+1}{k\alpha}\right)\right) \\ &= k\left(1 + s\left(1 - i\frac{1}{i+r}\right)\right) = k\left(1 + \frac{sr}{i+r}\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|v_{i+1}\|_\Omega = \langle v_{i+1}, v^+ \rangle &= i + it + 1 + t + k - i - 1 - \alpha tk + \alpha it + \alpha t \\ &= k + t\left(1 + i - \alpha(k-i-1)\right) \\ &= k + t\frac{(1+i)\left(k-(i+r)\right) - \left(k-(i+1)\right)(i+r)}{k-(i+r)} \\ &= k\left(1 + \frac{t(1-r)}{k-(i+r)}\right).\end{aligned}$$

□

利用初等几何，我们计算得 Ω 的欧几里得面积为

$$\text{area}(\Omega) = 1 + t + s - \frac{s^2}{2\alpha} - \frac{t^2\alpha}{2}.$$

因此，由 $\mathrm{vol}(X_\Omega) = 2\mathrm{area}(\Omega)$ 和引理 5.7 可得

$$2\,\widehat{c}_k(X_\Omega)^2 = \frac{c_k(X_\Omega)^2}{\mathrm{area}(\Omega)} = \frac{k^2\left(1+\min\left\{\frac{sr}{i+r}, \frac{t(1-r)}{k-(i+r)}\right\}\right)^2}{1+t+s-\frac{s^2}{2\alpha}-\frac{t^2\alpha}{2}} \tag{5.2}$$

我们声称 $2\,\widehat{c}_k(X_\Omega)^2 \le k^2$，等号成立当且仅当 $s=t=0$（此时 Ω 与 α无关），或者 $k=2$ 且 $X_\Omega = E(2,1)$。证明这一声称即可完成命题D(ii) 的证明。该声称等价于

$$\left(1+\min\left\{\frac{sr}{i+r}, \frac{t(1-r)}{k-(i+r)}\right\}\right)^2 \le 1+t+s-\frac{s^2}{2\alpha}-\frac{t^2\alpha}{2} \tag{5.3}$$

等号成立当且仅当 $s=t=0$，或者 $k=2$ 且 $X_\Omega = E(2,1)$。

由于我们已经在例 5.1 中处理了矩形的情形，因此假设 $0<i+r<k$，即 $\alpha\in(0,\infty)$。特别地，我们有 $r<1$。此外，不妨假设 $\frac{sr}{i+r} = \frac{t}{(1-r)\ k-(i+r)}$，即

$$t = \frac{r}{1-r}\frac{s}{\alpha}; \tag{5.4}$$

事实上，否则我们可以通过减小 t 或 s 来减小体积 $\mathrm{vol}(X_\Omega)$，而不改变 $c_k(X_\Omega)$。只需证明在情形 $s\neq 0$ 下，(5.3) 中的不等式是严格的，除非 $k=2$ 且 $X_\Omega = E(2,1)$。对于 $s\neq 0$，利用 (5.3) 中的不等式严格成立，等价于（利用 (5.4)）

$$\begin{aligned} &2s\frac{r}{i+r} + s^2\frac{r^2}{(i+r)^2} < s\left(1+\frac{r}{(1-r)\alpha}\right) - \frac{s^2}{2\alpha}\left(1+\frac{r^2}{(1-r)^2}\right) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{s}{\alpha}\left(\frac{r^2\alpha}{(i+r)^2} + \frac{(1-r)^2+r^2}{2(1-r)^2}\right) < 1+\frac{r}{(1-r)\alpha} - \frac{2r}{i+r}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

注意到 $\frac{s}{\alpha} \le$ 最小值 $\left\{1, \frac{1-r}{r\alpha}\right\}$。因此，尖锐不等式（5.5）可由以下两者推出

$$\frac{r^2\alpha}{(i+r)^2} + \frac{(1-r)^2+r^2}{2(1-r)^2} < 1+\frac{r}{(1-r)\alpha} - \frac{2r}{i+r} \tag{5.6}$$

以及

$$\frac{(1-r)r}{(i+r)^2} + \frac{(1-r)^2+r^2}{2(1-r)r\alpha} < 1+\frac{r}{(1-r)\alpha} - \frac{2r}{i+r}. \tag{5.7}$$

我们先来看不等式（5.6）。

引理 5.8。 对于 $0<i+r<k$ 不等式 (5.6) 等价于

$$0 < \left((k-i)(k-i-2)+r\right)r + (i+r)(k-i-r)\frac{1-2r}{2(1-r)}. \tag{5.8}$$

证明。 事实上，我们有

$$\begin{aligned} (5.6) &\Leftrightarrow \frac{r^2}{(i+r)(k-i-r)} + \frac{2r}{i+r} < \frac{r(k-i-r)}{(1-r)(i+r)} + 1 - \frac{(1-r)^2+r^2}{2(1-r)^2} \\ &\Leftrightarrow \left(r^2+2r(k-i-r)\right)(1-r) < r(k-i-r)^2 + (i+r)(k-i-k)\frac{1-2r}{2(r-1)^2} \\ &\Leftrightarrow 0 < r(k^2+i^2-2ik-2k+2i+r) + (i+r)(k-i-r)\frac{1-2r}{2(r-1)} \\ &\Leftrightarrow (5.8). \end{aligned}$$

□

下面给出不等式（5.8），从而使（5.5）成立的充分条件。

引理 5.9. 对于 $0 < i + r < k$ 不等式 (5.8) 成立，当且仅当
(i) $i \le k-2$ 和 $r \in [0, \frac{1}{2}]$，(ii) $i = k-1$ 和 $r \in [0, u_{k-1} := \frac{k-1}{2k-1})$，$(iii)$ $i = 0$ 和 $r \in [0, u_0 := \frac{2k^2-3k}{2k^2-2k-1})$。

证明。 （i）由引理 5.8立即得出。对于 $i = k-1$，不等式（5.8）等价于

$$\begin{aligned} & 0 < (-1+r)\, r + (k-1+r)(1-r)\frac{1-2r}{2(1-r)} \\ \Leftrightarrow\ & 0 < 2r^2 - 2r + k - 1 + r - 2rk + 2r - 2r^2 \\ \Leftrightarrow\ & r < u_{k-1} = \frac{k-1}{2k-1}, \end{aligned}$$

这表明（ii）。对于 $i = 0$，我们有 $r > 0$，且不等式（5.8）等价于

$$\begin{aligned} & 0 < (k(k-2)+r)\, r + r(k-r)\frac{1-2r}{2(1-r)} \\ \Leftrightarrow\ & (2r-1)(k-r) < 2(1-r)(k(k-2)+r) \\ \Leftrightarrow\ & 2rk - 2r^2 - k + r < 2k^2 - 4k + 2r - 2rk^2 + 4rk - 2r^2 \\ \Leftrightarrow\ & r < u_0 = \frac{2k^2-3k}{2k^2-2k-1}, \end{aligned}$$

这表明 (iii) 成立，并完成了该引理的证明。 □

现在我们来考察不等式 (5.7)。

引理 5.10. 对于 $0 < i + r < k$，不等式 (5.7) 等价于

$$r < i^2 + \frac{(i+r)^2(2r-1)}{2(1-r)r\alpha}. \tag{5.9}$$

证明。 事实上，我们有

$$\begin{aligned} (5.7) \Leftrightarrow\ & \frac{r}{(i+r)^2}\left((1-r) + 2(i+r)\right) < 1 + \frac{1}{2(1-r)r\alpha}\left(2r^2 - (1-r)^2 - r^2\right) \\ \Leftrightarrow\ & r - r^2 + 2ir + 2r^2 < i^2 + 2ir + r^2 + \frac{(i+r)^2(2r-1)}{2(1-r)r\alpha} \\ \Leftrightarrow\ & (5.9). \end{aligned}$$

□

现在我们给出不等式 (5.8) 成立的充分条件，从而进一步给出 (5.5)成立的条件。

引理 5.11. 对于 $0 < i + r < k$，若满足以下条件，则不等式 (5.9) 成立
(i) $i > 0$ 且 $r \in [\frac{1}{2}, 1)$，(ii) $i = 0$ 且 $r \in (l_0 := \frac{k}{2k-1}, 1)$，$(iii)$ $i = k-1$ 且 $r \in (l_{k-1} := \frac{k-1}{2k^2-2k-1}, 1)$。

证明。 断言 (i) 由引理 5.10 立即得出。对于 $i=0$，我们有 $r>0$，且不等式（5.8）等价于

$$\begin{aligned} & r<\frac{r^2(2r-1)(k-r)}{2(1-r)r^2}=\frac{(2r-1)(k-r)}{2(1-r)}. \\ \Leftrightarrow\ & 2r-2r^2<2kr-k-2r^2+r \\ \Leftrightarrow\ & l_0=\frac{k}{2k-1}<r, \end{aligned}$$

这表明 (ii)。对于 $i=k-1$ 不等式 (5.8) 等价于

$$\begin{aligned} & r<(k-1)^2+\frac{(k-1+r)^2(1-r)(2r-1)}{2(1-r)r(k-1+r)} \\ \Leftrightarrow\ & r<(k-1)^2+\frac{(k-1+r)(2r-1)}{2r} \\ \Leftrightarrow\ & 2r^2<2rk^2-4rk+2r+2rk-2r+2r^2-k+1-r \\ \Leftrightarrow\ & l_{k-1}=\frac{k-1}{2k^2-2k-1}<r, \end{aligned}$$

这表明 (iii)，并完成了引理的证明。 □

剩下要证明，引理 5.9 和引理5.11 中的条件蕴含 (5.3) 中的严格不等式，除非 $k=2$；并研究 $k=2$时的等号情形。根据引理 i的 (5.9 和引理 5.11 部分，只需考察以下情形： $i=k-1$ 和$i=0$。这将在接下来的两个引理中完成。

引理 5.12。 我们有 $l_{k-1}\le u_{k-1}$，且 $l_{k-1}<u_{k-1}$ 除非 $k=2$。在$k=2$ 的情形下，(5.3) 取等号当且仅当 $\alpha=\alpha(i,\ r)=2,\ s=\alpha=2$ 且$t=\frac{1}{2}$，此时 $X_\Omega=E(2,\ 1)$。

证明。 利用引理 l_{k-1} 和 u_{k-1} 中的表达式5.9 以及引理 5.11 (仍假设 $k\ge 2$)，可快速计算并确认 $l_{k-1}\le u_{k-1}$，且当且仅当 $k=2$时取等号。因此，讨论等号情形只需考虑 $k=2$、 $i=1$和 $r=l_1=u_1=\frac{1}{3}$的情形。于是 $\alpha=\alpha(i,\ r)=2$。将其代入（5.5），并以等式代替不等式，可得 $s=2$，再由（5.4）得$t=\frac{1}{2}$。 □

引理 5.13。 我们有 $l_0\le u_0$，且除非 $k=2$。在 $k=2$的情形下，$r=l_1=u_1=\frac{2}{3}$ 且 $i=0$时，等式 ((5.3) 成立当且仅当 $\alpha=\alpha(i,\ r)=\frac{1}{2}$，$s=\alpha=\frac{1}{2}$且 $t=2$，此时 $X_\Omega=E(2,\ 1)$。

证明。利用引理 5.9 和引理 5.11 中关于 l_0 和 u_0 的表达式进行快速计算（仍假设 $k\ge 2$），可得 $l_0\le u_0$ 等价于 $3k\le k^2+2$。由此可知，当且仅当 $k=2$ 时等号成立。因此，对于等号成立的情形，只需考虑 $k=2$、 $i=0$ 和 $r=l_1=u_1=\frac{2}{3}$。于是 $\alpha=\alpha$（i、 r）$=\frac{1}{2}$。将其代入（5.5），并以等式替代不等式，可推出 $s=\frac{1}{2}$，进而由（5.4）得到 $t=2$。 □

命题D（ii）的证明至此完成。

AppendixA. The Fadell-Rabinowitz index

考虑万有丛 $ES^1 \to BS^1$。分类空间 BS^1 的上同调环为 $H^*(BS^1;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e]$，其中 e 是 $H^2(BS^1;\mathbb{Q})$ 的生成元。此后，所有上同调环均假定取有理系数，并在记号中省略 $\mathbb{Q}$。对于每个配备有 S^1 作用的非空拓扑空间 X，我们考虑 S^1-等变上同调

$$H^*_{S^1}(X) := H^*(X \times_{S^1} ES^1).$$

这里，$X \times_{S^1} ES^1 := (X \times ES^1)/S^1$，圆周 S^1 在乘积上作对角作用。若 $Y \subset X$ 是一个 S^1-不变子空间，则 S^1-等变相对上同调定义为

$$H^*_{S^1}(X,Y) := H^*(X \times_{S^1} ES^1, Y \times_{S^1} ES^1).$$

令 $\pi : X \times_{S^1} ES^1 \to BS^1$，$\pi([x,y]) = [y]$ 为商投影。为避免符号繁琐，我们仍用 e 表示上同调类 $\pi^* e \in H^2_{S^1}(X)$。***Fadell-Rabinowitz*** 指数 X最初由 [FR78],引入，定义为[4]

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(X) = \inf\left\{k \geq 0 \;\middle|\; e^k = 0 \text{ in } H^*_{S^1}(X)\right\},$$

按照通常约定，$\inf \varnothing = \infty$。其基本性质如下：

- **(非平凡性)** $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(X) = 0$ 当且仅当 $X = \varnothing$。
- **(单调性)** $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(X) \leq \operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y)$，若存在一个 S^1-等变连续映射 $f\colon X \to Y$。
- **(次可加性)** $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(X) \leq \operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y) + \operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Z)$，若 $X = \operatorname{int}(Y) \cup \operatorname{int}(Z)$，其中内部是相对于子空间拓扑而言的。

注 A.1. 文献中，定义 Fadell-Rabinowitz 指数时所采用的上同调通常是 Alexander-Spanier 上同调 [Spa95，第 6 节。4],它具有适当的连续性 [HZ94，附录 A。8]：若拓扑空间可度量化，则任意子空间的上同调都同构于其开邻域上同调的直接极限。我们将改用更常见的奇异上同调；它不具备如此强的连续性，因此我们通过在谱不变量的 Lusternik-Schnirelmann 性质（第 2.2 节）、下文的命题 A.4 以及 Ekeland-Hofer 指数的定义（第 3.1 节）等论述中取开邻域，来规避这一问题。

在命题3.1的证明中，我们需要用到 Fadell-Rabinowitz 指数的一些性质。这些性质基本上已在原始文献 [FR78]及 Fadell-Husseini-Rabinowitz 的文献 [FHR82], 中确立，但其表述所采用的假设略有不同，或包含在某些结论的证明中。为方便读者，我们在此给出一个自成一体的论述。对于向量空间的任意子集 B，我们记

$$B_* := B \setminus \{0\}.$$

在本附录中，我们用 S^1 表示 C中的单位圆周。我们将考虑向量空间 $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{R}^n$，其中 $m \geq 1$ 和 $n \geq 2$配备了 S^1 作用

$$e^{it} \cdot (z_1, ..., z_m, x_1, ..., x_n) = (e^{ik_1 t} z_1, ..., e^{ik_m t} z_m, x_1, ..., x_n),$$

[4]文献中有时将 Fadell-Rabinowitz 指数定义为 $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(X) - 1$。

其中 k_1，……，k_m为正整数。该作用的不动点集是向量子空间 $\mathbb{R}^n \equiv \{0\}\oplus\mathbb{R}^n$。在 $\mathbb{C}^m\oplus\mathbb{R}^n$ 上，我们还有乘法群 $(0,\ \infty)$ 的作用，该作用由数乘给出，即

$$c\cdot(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n)=(cz_1,...,cz_m,cx_1,...,cx_n).$$

总体而言，S^1 和 $(0,\infty)$ 作用给出了一个 $\mathbb{C}_*\equiv S^1\times(0,\infty)$ 作用。如上所述，向量空间的直和将默认赋予乘积$\mathbb{C}_*$ 作用。若子集$\mathbb{C}^m\oplus\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{C}$-不变的，当它是 $\mathbb{C}_*$-不变且包含原点时，我们称其为 [FR78，命题 43] 的一个特例。

引理 A.2。对于每个$\mathbb{C}$-不变子集 $Y\subset\mathbb{C}^m$，有

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}((Y\oplus\mathbb{C})_*)=\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)+1.$$

证明。令 $X:=Y\oplus\mathbb{C}$。由于 $X_*=(Y_*\oplus\mathbb{C})\cup(Y\oplus\mathbb{C}_*)$，由 Fadell-Rabinowitz 指数的次可加性可得

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(X_*)&\le\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*\oplus\mathbb{C})+\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y\oplus\mathbb{C}_*)\\&=\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)+\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathbb{C}_*)=\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)+1.\end{aligned}$$

由于 $Y_*\subset X_*$，我们有 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)\le\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(X_*)$。反设 $k:=\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)=\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(X_*)$。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots&\longrightarrow&H^{2k-1}(X_*)&\xrightarrow{\pi_*}&H^{2k-2}_{S^1}(X_*)&\xrightarrow{\smile e}&H^{2k}_{S^1}(X_*)&\longrightarrow&\cdots\\&&{\scriptstyle i^*=0}\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\\\cdots&\longrightarrow&H^{2k-1}(Y_*)&\xrightarrow{\pi'_*}&H^{2k-2}_{S^1}(Y_*)&\xrightarrow{\smile e}&H^{2k}_{S^1}(Y_*)&\longrightarrow&\cdots\end{array}$$

其中，竖直同态由包含映射诱导，且两行都是 Gysin 正合列。注意，$i^*=0$，因为包含映射 $i:Y_*\hookrightarrow X_*$ 与一个常数映射同伦。由于 $k=\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(X_*)$，对于某个 $\mu\in H^{2k-1}(X_*)$，我们有 $e^{k-1}=\pi_*(\mu)$，因此 $e^{k-1}=\pi'_*i^*(\mu)=0$ 属于 $H^{2k-2}_{S^1}(Y_*)$，这与 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)=k$这一事实矛盾。□

由于 S^1 在 $\mathbb{R}^n$上的作用是平凡的，我们有 K¨unneth 同构

$$H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)=H^*(BS^1\times\mathbb{R}^n_*)\cong H^*(BS^1)\otimes H^*(\mathbb{R}^n_*).$$

特别地，$H^*(\mathbb{R}^n_*)\equiv H^0(BS^1)\otimes H^*(\mathbb{R}^n_*)$自然地是 $H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)$的一个子群。

引理A.3. 设 $Y\subset\mathbb{C}^m$ 是一个 $\mathbb{C}$-不变子集，μ 是 $H^{n-1}(\mathbb{R}^n_*)$ 的一个生成元，且 $\delta\colon H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)\to H^{*+1}_{S^1}((Y\oplus\mathbb{R}^n)_*,\mathbb{R}^n_*)$ 是连接同态。那么

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)=\inf\left\{k\ge0\ \middle|\ e^k\smile\delta(\mu)=0\ in\ H^*_{S^1}((Y\oplus\mathbb{R}^n)_*,\mathbb{R}^n_*)\right\}.$$

证明. 令 $X:=Y\oplus\mathbb{R}^n$，将 X_* 分解为 $X_*=(Y_*\oplus\mathbb{R}^n)\cup(Y\oplus\mathbb{R}^n_*)$ 的并，并考虑相应的 S^1-等变上同调中的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots\longrightarrow H^*_{S^1}(X_*)\xrightarrow{a^*}H^*_{S^1}(Y_*\oplus\mathbb{R}^n)\oplus H^*_{S^1}(Y\oplus\mathbb{R}^n_*)\xrightarrow{b^*}H^*_{S^1}(Y_*\oplus\mathbb{R}^n_*)\longrightarrow\cdots$$

由于 Y和 $\mathbb{R}^n$ 是 S^1-等变可缩空间，因此我们有 $H^*_{S^1}(Y_*\oplus\mathbb{R}^n)\cong H^*_{S^1}(Y_*)$，以及 $H^*_{S^1}(Y\oplus\mathbb{R}^n_*)\cong H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)$。此外，由于 S^1 在 $\mathbb{R}^n$上的作用是平凡的，我们有 $H^*_{S^1}(Y_*\oplus\mathbb{R}^n_*)\cong H^*_{S^1}(Y_*)\otimes H^*(\mathbb{R}^n_*)$。因此，Mayer-Vietoris 序列可改写为

$$\cdots\longrightarrow H^*_{S^1}(X_*)\xrightarrow{a^*}H^*_{S^1}(Y_*)\oplus H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)\xrightarrow{b^*}H^*_{S^1}(Y_*)\otimes H^*(\mathbb{R}^n_*)\longrightarrow\cdots$$

现在考虑对 $\mathbb{R}^n_* \subset X_*$的长正合序列，其形式如下

$$\ldots \longrightarrow H^*_{S^1}(X_*) \xrightarrow{j^*} H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*) \xrightarrow{\delta} H^{*+1}_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*) \longrightarrow \ldots$$

令 μ 为 $H^{n-1}(\mathbb{R}^n_*)$ 的生成元，并且 $k := \operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)$。我们有一个非零上同调类

$$e^{k-1} \otimes \mu \in H^*(BS^1) \otimes H^*(\mathbb{R}^n_*) = H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)$$

反设 $\delta(e^{k-1} \otimes \mu) = 0$，则存在一个上同调类 $\nu \in H^*_{S^1}(X_*)$，使得 $j^*\nu = e^{k-1} \otimes \mu$。在上述 Mayer-Vietoris 序列中，我们有 $a^*(\nu) = (\nu|_{Y_*},\ e^{k-1} \otimes \mu)$，因此

$$0 = b^*(\nu|_{Y_*}, e^{k-1} \otimes \mu) = \nu|_{Y_*} \otimes 1 - e^{k-1}|_{Y_*} \otimes \mu,$$

这就导致矛盾，因为 $e^{k-1}|_{Y_*} \otimes \mu \neq 0$。这表明

$$e^{k-1} \smile \delta(1 \otimes \mu) = \delta(e^{k-1} \smile \mu) \neq 0.$$

另一方面，由于 $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) = k$，我们有

$$b^*(0, e^k \otimes \mu) = -e^k|_{Y_*} \otimes \mu = 0.$$

因此，存在 $\eta \in H^*_{S^1}(X_*)$ 使得 $a^*(\eta) = (0,\ e^k \otimes \mu)$。这意味着$j^*(\eta) = e^k \otimes \mu$，由此我们得出

$$e^k \smile \delta(1 \otimes \mu) = \delta(e^k \smile \mu) = \delta j^*(\eta) = 0. \qquad \square$$

最后一个陈述是对 [FHR82，命题 22] 的略微推广。

命题 *A.4.* *设 $Y \subset C^p$ 为一个 C-不变子集，$B \subset C^p \oplus R^n$ 为原点的一个 S^1-不变紧邻域，且 $\psi : Y \oplus R^n \to C^q \oplus R^n$ 为一个S^1-等变连续映射，满足对所有 $x \in R^n$，$\psi(0, x) = (0, x)$。若 $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) > q$，则任何包含交集 $\psi^{-1}(0) \cap \partial B$ 的 S^1-不变开子集 $U \subset Y \oplus R^n$ 的 Fadell-Rabinowitz 指数均为 $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(U) \geq \operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) - q$。*

证明。我们设 $k := \operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*)$，并令 $X := Y \oplus \mathbb{R}^n$。反设存在一个包含 $Z := \psi^{-1}(0) \cap \partial B$ 的 S^1-不变开子集 $U \subset X_*$，使得 $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(U) < k - q$。特别地，由于 $\operatorname{ind}_{\mathrm{FR}}(U)$ 有限，$U \cap \mathbb{R}^n = \varnothing$。令 $V \subset X_* \setminus Z$ 为一个包含 $X \cap \partial B \setminus U$ 的 S^1- 不变开子集，并且取足够小，使得 $X \cap \psi^{-1}(0) = \varnothing$。最后，我们设 $W := U \cup V$，它是包含 $X \cap \partial B$ 的 X_* 的一个 S^1-不变开子集。

我们定义了 $X' := (X_* \cap B) \cup W$ 和 $X'' := (X_* \setminus X') \cup W$ 这两个 S^1-不变子集，它们都是 X_* 的开子集，并且其并为 $X' \cup X'' = X_*$，交为 $X' \cap X'' = W$。注意，对每个 $x \in X_*$，都存在足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $\epsilon x \in X'$ 和 $\epsilon^{-1} x \in X''$。这立即推出以下两个包含映射

$$(X', X' \cap \mathbb{R}^n_*) \hookrightarrow (X_*, \mathbb{R}^n_*), \qquad (X'', X'' \cap \mathbb{R}^n_*) \hookrightarrow (X_*, \mathbb{R}^n_*)$$

存在一个 S^1-等变同伦右逆，因此诱导单态射

$$H^*_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*) \hookrightarrow H^*_{S^1}(X', X' \cap \mathbb{R}^n_*),$$
$$H^*_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*) \hookrightarrow H^*_{S^1}(X'', X'' \cap \mathbb{R}^n_*).$$

这一点与 Mayer-Vietoris正合列结合起来

$$... \to H^*_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*) \to \begin{matrix} H^*_{S^1}(X', X' \cap \mathbb{R}^n_*) \\ \oplus \\ H^*_{S^1}(X'', X'' \cap \mathbb{R}^n_*) \end{matrix} \to H^*_{S^1}(W, W \cap \mathbb{R}^n_*) \to ...$$

这立即意味着该包含映射诱导一个单态射

$$H^*_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*) \hookrightarrow H^*_{S^1}(W, W \cap \mathbb{R}^n_*). \tag{A.1}$$

类似地，由于两个包含映射 $X' \cap \mathbb{R}^n_* \hookrightarrow \mathbb{R}^n_*$ 和 $X'' \cap \mathbb{R}^n_* \hookrightarrow \mathbb{R}^n_*$ 都存在同伦右逆，因此它们在上同调中诱导单态射，而 Mayer-Vietoris 序列

$$... \to H^*(\mathbb{R}^n_*) \to H^*(X' \cap \mathbb{R}^n_*) \oplus H^*(X'' \cap \mathbb{R}^n_*) \to H^*(W \cap \mathbb{R}^n_*) \to ...$$

这立即意味着该包含映射诱导一个单态射

$$H^*(\mathbb{R}^n_*) \hookrightarrow H^*(W \cap \mathbb{R}^n_*). \tag{A.2}$$

考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccc}
H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*) & \xrightarrow{\delta} & H^{*+1}_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^*_{S^1}(W \cap \mathbb{R}^n_*) & \xrightarrow{\delta} & H^{*+1}_{S^1}(W, W \cap \mathbb{R}^n_*) \\
\cong\downarrow & & \downarrow \\
H^*_{S^1}(V \cap \mathbb{R}^n_*) & \xrightarrow{\delta} & H^{*+1}_{S^1}(V, V \cap \mathbb{R}^n_*) \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi^*} \\
H^*_{S^1}(\mathbb{R}^n_*) & \xrightarrow{\delta} & H^{*+1}_{S^1}((\mathbb{C}^q \oplus \mathbb{R}^n)_*, \mathbb{R}^n_*)
\end{array}$$

这里，水平箭头是连接同态，未注明的垂直箭头是由包含映射诱导的同态。令 μ 为 $H^{n-1}(\mathbb{R}^n_*) \subset H^{n-1}_{S^1}(\mathbb{R}^n_*)$的一个生成元。由同态 (A.2) 的单射性可知，在上述图表中，μ映射为 $H^*_{S^1}(V \cap \mathbb{R}^n_*) = H^*_{S^1}(W \cap \mathbb{R}^n_*)$中的一个非零元素，我们仍将其记为 μ。由于 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(Y_*) = k$，由引理 A.3 可得

$$e^{k-1} \smile \delta(\mu) \neq 0 \text{ in } H^*_{S^1}(X_*, \mathbb{R}^n_*),$$

因此，由同态 (A.1) 的单射性可知，

$$e^{k-1} \smile \delta(\mu) \neq 0 \text{ in } H^*_{S^1}(W, W \cap \mathbb{R}^n_*). \tag{A.3}$$

由引理 A.2 可得 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(\mathbb{C}^q_*) = q$。因此，再次应用引理 A.3可得

$$e^q \smile \delta(\mu) = 0 \text{ in } H^*_{S^1}((\mathbb{C}^q \oplus \mathbb{R}^n)_*, \mathbb{R}^n_*).$$

应用 ψ^*，我们得到 $e^q \smile \delta(\mu) = 0$ 属于 $H^*_{S^1}(V, V \cap \mathbb{R}^n_*)$，因此

$$e^q \smile \delta(\mu) \in H^*_{S^1}(W, V).$$

由于 $\mathrm{ind}_{\mathrm{FR}}(U) \leq k - q - 1$，我们有

$$e^{k-q-1} \in H^*_{S^1}(W, U).$$

最后

$$e^{k-1} \smile \delta(\mu) = e^{k-q-1} \smile (e^q \smile \delta(\mu)) \in H^*_{S^1}(W, U \cup V) = H^*_{S^1}(W, W) = 0,$$

这与（A.3）矛盾。 □

致谢。我们感谢 Alberto Abbondandolo。他与 Lange 和 Mazzucchelli 合作时，最先注意到 [ALM22]多圆盘 $P(1, \mathbf{1})$ 的高阶容量比高于四维椭球的相应比值，并建议将定理 A先前的表述推广到光滑凸体空间之外。我们还感谢 Jean Gutt、Felix Schlenk 和 Jean-Claude Sikorav 就辛容量进行的有益讨论。

References

[AAKO14] Shiri Artstein-Avidan、Roman Karasev 和 Yaron Ostrover, *From symplectic measurements to the Mahler conjecture* **163** 2014 11, 2003 2022 ，《杜克数学杂志》（），第 – 期。

MR3263026[AAMO08] Shiri Artstein-Avidan、Vitali Milman 和 Yaron Ostrover, *The M-ellipsoid, symplectic capacities and volume* **83** 2008 2, 359 369 ，《赫尔维数学评论》（），第 – 期。

MR2390048[AB19] Alberto Abbondandolo 和 Gabriele Benedetti, *On the local systolic optimality of Zoll contact forms* 2019 1912 04187 ，。arXiv:。。[ABHS18] Alberto Abbondandolo、Barney Bramham、Umberto L. Hryniewicz 和 Pedro A. S. Salom˜ao, *Sharp systolic inequalities for Reeb flows on the three-sphere*，《数学发明》211（2018年），第2期，687–778。MR3748316[AK22] Alberto Abbondandolo 和 Jungsoo Kang, *Symplectic homology of convex domains and Clarke's duality* **171** 2022 3, 739 830 4382979 ，《杜克数学杂志》（），第 – 期。

MR[ALM22] Alberto Abbondandolo、Christian Lange 和 Marco Mazzucchelli, *Higher systolic inequalities for 3-dimensional contact manifolds*，《J. ´Ec. polytech. Math.》9（2022年），807–851。MR4436034[APB 14] J. C. Alvarez Paiva 和 F. Balacheff, *Contact geometry and isosystolic inequalities*，《几何与泛函分析》24（2014年），第2期，648–669。MR3192037[BK21] Gabriele Benedetti 和 Jungsoo Kang, *Local contact systolic inequality in dimension three* **23** 2021 3, 721 764 4210723 ，《欧洲数学学会杂志》（JEMS）（），第 – 期。MR[CGM20] Daniel Cristofaro-Gardiner 和 Marco Mazzucchelli, *The action spectrum characterizes closed contact 3-manifolds all of whose Reeb orbits are closed* ，《赫尔维数学评论》 **95** 2020 3, 461 481 4152621 （），第 – 期。MR Edt Oliver Edtmair, [22] *Disk-like surfaces of section and symplectic capacities* 2022年 arXiv:2206.07847 。[EH87] I. Ekeland 和 H. Hofer, *Convex Hamiltonian energy surfaces and their periodic trajectories* **113** 1987 3, 419 469 ，《数学物理通讯》（），第 – 期。MR[89] 925924 *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*EH I. Ekeland 和 H. Hofer, ，《Math. Z.》 **200** 1989 3, 355 378 978597 （），第 – 期。MR EH Ivar Ekeland 和 Helmut Hofer, [90] *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics. II*，《Math. Z.》 **203** 1990 4, 553 567 1044064 （），第 – 期。MR FHR E. R. Fadell、S. Y. Husseini 和 P. H. [82] Rabinowitz, *Borsuk-Ulam theorems for arbitrary S^1 actions and applications* **274** 1982 1, 345 ，《美国数学会汇刊》（）第 期 360 MR670937[FR78] Edward R. Fadell 和 Paul H. Rabinowitz, *Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems* **45** 1978 2, 139 174 ，《数学发明》（），第 – 期。MR 478189 [21] ¨ ¸ GGM Viktor L. Ginzburg、Basak Z. Gurel 和 Marco Mazzucchelli, *On the spectral characterization of Besse and Zoll Reeb flows* ´ ´ ，《Ann. Inst. H. Poincare C Anal. Non Lineaire》38（2021年），第3期，549–576。MR4227045[GH18] Jean Gutt 和 Michael Hutchings, *Symplectic capacities from positive S 1 -equivariant symplectic homology* **18** 2018 6, 3537 3600 3868228 ，《代数与几何拓扑》（），第 – 期。MR

[GL18] Hansj¨org Geiges 和 Christian Lange, *Seifert fibrations of lens spaces*, 《Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.》 **88** 2018 1, 1 22 3785783 （），第 – 期。MR GR Jean [23] Gutt 和 Vinicius G. B. Ramos, *The equivalence of Ekeland-Hofer and equivariant symplectic homology capacities* 2023 ，。即将出版。[Her98] David Hermann, *Non-equivalence of symplectic capacities for open sets with restricted contact type boundary* 1998 ´ ´ 32 ，。奥赛预印本编号为[。[HZ94] Helmut Hofer 和 Eduard Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkh¨auser 高级教材，Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1994年。MR1306732[Moa94] Laurent Moatty, *Capacités et équivalence symplectique des domaines de Reinhardt*, 1994 ´ 。博士论文，图卢兹第三大学——保罗·萨巴蒂耶大学。[MR23] Marco Mazzucchelli 和 Marco Radeschi, *On the structure of Besse convex contact spheres* **376** 2023 3, 2125 2153 4549701 ，《美国数学会汇刊》（），第 – 期。MR[MS17]Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, 第三版，牛津数学研究生教材，牛津大学出版社，牛津，2017年。MR3674984[RW17] Marco Radeschi 和 Burkhard Wilking, *On the Berger conjecture for manifolds all of whose geodesics are closed* **210** 2017 3, 911 962 3735632 ，《数学发明》（），第 – 期。MR[Sik90] Jean-Claude Sikorav, *Systèmes hamiltoniens et topologie symplectique*, ETS Editrice Pisa，比萨，1990年。[Spa95] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag，纽约，1995年。原版的更正重印本。MR Vit Claude Viterbo, *Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry*, 《J. Amer. Math. Soc.》13（2000年），第2期，411–431，MR1750956[Vit89]Claude Viterbo, *Capacités symplectiques et applications (d'après Ekeland-Hofer, Gromov)* 1989 714, 345 362 ´ 1988 89 ，，第 Exp. No. – 页。Bourbaki 研讨班，第 / 卷。MR1040580[Wad75] A. W. Wadsley, *Geodesic foliations by circles*, 《J. Differential Geometry》10（1975年），第 4, 541 549 400257 – 期。MR Zha Bingyu Zhang, [21] *Capacities from the Chiu-Tamarkin complex*, 2021年。arXiv:2103.05143。

Luca Baracco and Olga BernardiUniversità di Padova,
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi Civita"Via Trieste 63, 35121 Padova,
Italy*Email address*: baracco@math.unipd.it, obern@math.unipd.it

Christian LangeLudwig-Maximilians-Universität München,
Mathematisches InstitutTheresienstrasse 39, D-80333 Munich,
Germany*Email address*: lange@math.lmu.de

Marco MazzucchelliCNRS, UMPA,
École Normale Supérieure de Lyon46 allée d'Italie,
69364 Lyon, France*Email address*:
marco.mazzucchelli@ens-lyon.fr