双四元数插值

Benjamin Kenwright

摘要

计算机图形学和几何学领域中的变换，是在二维和三维空间中高效操控和控制对象的最重要概念之一。变换形式多种多样，各有优缺点。双四元数是一种尤为强大的工具，可用于以统一形式表示变换。这种统一形式的优势在于其插值特性，能够克服多种局限（其紧凑形式可将旋转分量和平移分量耦合起来）。本文考察了多种双四元数插值方法，这些方法在计算成本、美学因素和耦合依赖性之间实现了不同的权衡。令人惊讶的是，尽管双四元数是图形库中常用的工具，但关于插值细节的资料却很有限。本文尝试阐释插值概念，详细说明其基础理论，同时介绍相关概念以及为增强控制能力而进行的定制修改。

索引词

双四元数、四元数、插值、控制、图形学、动画

arXiv:2303.13395v1 [cs.CG] 23 Mar 2023

1 引言

双四元数如今已成为计算机图形学中广泛应用的工具，可用统一形式表示旋转和平移解 [7]。其应用已在多个领域得到探索，从关节刚体结构 [4] 和逆运动学系统[5] 到蒙皮 [2]以及曲面和曲线 [6]。

贡献本文的主要贡献是阐释双四元数，尤其是其在插值及相关领域中的应用。我们回顾并介绍双四元数插值技术，并提出一种混合方法（称为 KenLERP），用于控制旋转与平移分量之间的耦合关系，以获得理想的视觉效果。除了提供实用细节，我们还提供了一个交互式示例，方便读者直观评估并比较不同的插值技术。

2 双四元数转换操作

为使文章内容完整，并为标准类型之间的转换提供一套一致的符号规范，我们在此给出基本的转换方程。

平移和旋转转换为双四元数 给定一个四元数旋转（q）和一个三维平移向量（$\vec{t}$），双四元数（ζ（q，$\vec{t}$））如下所示：

$$\begin{aligned} \zeta(q,\vec{t}) &= q_r + q_d \\ q_r &= q \\ q_t &= (0,t_x,t_y,t_z) \quad \text{quaternion, w=0} \\ q_d &= (q_r q_t)\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

双四元数转换为位置和旋转 给定一个双四元数（ζ），提取其四元数旋转（q）和平移向量（$\vec{t}$）分量的方法如下：

$$\begin{aligned} \zeta &= q_r + q_d \\ q &= q_r \\ q_t &= (2q_d)q_r^* \\ \vec{t} &= (q_{tx},q_{ty},q_{tz}) \end{aligned} \tag{2}$$

虽然上述两种主要形式展示了与向量形式之间的转换，但值得注意的是，正如 Kenwright [4] 所示，与矩阵形式之间的转换同样直接而简单。

3 双四元数插值类型

我们将阐述、比较并演示双四元数插值的四种主要方法，涵盖简单的“解耦”方法、螺旋线性插值，以及用于美学控制（阻尼或限制耦合因子）的混合方法。

• *BENJAMIN KENWRIGHT*
bkenwright@ieee.org

SEP(LERP) SEP(LERP) – 提取平移和方向，分别进行插值，并重建新的双四元数。

$$\begin{aligned} \text{LERP}(t; \vec{v0}, \vec{v1}) &= (1-t)\vec{v0} + (t)\vec{v1} \\ \text{SLERP}(t; q_0, q_1) &= q_0(q_0^* q_1)^t \end{aligned} \tag{3}$$

DLB 对偶四元数线性混合——对每个分量（8 个独立浮点数）进行插值并重新归一化，是 QLB 的一种推广 [3]。

$$\text{DLB}(t; \zeta_A, \zeta_B) = \frac{(1-t)\zeta_A + (t\zeta_B)}{||(1-t)\zeta_A + (t\zeta_B)||} \tag{4}$$

ScLERP – 对偶四元数幂／螺旋参数 ScLERP（螺旋线性插值），是 SLERP 的一种推广 [9]。

$$\text{ScLERP}(t; \zeta_A, \zeta_B) = \zeta_A(\zeta_B^* \zeta_B)^t \tag{5}$$

KenLERP 一种混合方法，用于控制插值过程中旋转分量和平移分量之间的影响。添加一个介于 0.0 和 1.0 之间的偏置因子 β。值为 0.0 时，旋转和平移分量彼此解耦；值为 1.0 时，则产生完全耦合的响应（ScLERP）。此外，对于大于 1.0 的值，还有一种情况：它会添加“放大”因子，以夸大插值值（产生美学效果——类似于过阻尼／欠阻尼）。

$$\begin{aligned} [v_0, q_0] &= ScLERP(\zeta_A, \zeta_B, t) \\ [v_1, q_1] &= SEPLERP(\zeta_A, \zeta_B, t) \\ \zeta &= [LERP(v_0, v1, \beta), SLERP(q0, q1, \beta)] \end{aligned} \tag{6}$$

这种混合方法可以控制插值及影响其美学质量的各种因素。请参阅 Ken2020 [8]，查看该概念的交互式原型。

4 总体讨论与结论

在图形场景中，能够在插值过程中控制双四元数的耦合特性，有助于控制插值结果的美学效果。我们展示了混合方法的可行性与实用性。

附录

对偶四元数代数

为求完整，我们列出双四元数基本运算的数学细节。

对偶四元数算术 **运算** 使用双四元数所需的基本算术运算如下 n

:

- **双四元数**： $\zeta = q_r + q_d\varepsilon$
- **数乘**： $s\zeta = sq_r + sq_d\varepsilon$
- **加法**： $\zeta_1 + \zeta_2 = q_{r1} + q_{r2} + (q_{d1} + q_{d2})\varepsilon$
- **乘法**： $\zeta_1\zeta_2 = q_{r1}q_{r2} + (q_{r1}q_{d2} + q_{d1}q_{r2})\varepsilon$
- **共轭**： $\zeta^* = q_r^* + q_d^*\varepsilon$
- **模**： $||\zeta|| = \zeta\zeta^*$

其中， q_r 和 q_d 分别表示双四元数的实部和对偶部（我们用“q”强调它们是四元数）。关于双四元数的入门介绍、替代方法（例如矩阵和欧拉角）的比较，以及如何实现一个简单的库，请读者参阅 Kenwright 的论文 [4]。

双四元数向量变换 双四元数能够按照公式 7 对三维向量坐标进行变换。注意，对于单位双四元数，其逆与共轭相同 [1]。

$$p' = \hat{\zeta}p\hat{\zeta}^{-1} \tag{7}$$

其中，$\hat{}\ \zeta$是表示该变换的单位双四元数，$\hat{}\zeta^{-1}$ 是单位双四元数变换的逆。 p和 p' 是双四元数，分别表示变换前后的三维向量坐标（即， $p = (1, 0, 0, 0) + \epsilon(0, v_x, v_y, v_z)$ ））。

普吕¨克坐标普吕¨克坐标用于创建螺旋坐标，这是表示直线的一项重要技术。我们需要螺旋坐标，以便用更优雅的形式重写双四元数，从而帮助我们**制定一种更简洁、复杂度更低的插值方法**，使其可与经典四元数的球面线性插值相媲美。普吕¨克坐标的定义：

- $\vec{p}$ 是给定直线 $\vec{}$上的任意一点
- l 是方向向量$\vec{}$
- $\vec{m} = \vec{p} \times l$ 是力矩向量
- （$\vec{l}$， $\vec{m}$）是六个普吕¨克坐标

1. 请注意，对偶四元数的共轭有三种定义：1： $\zeta^* = q_r^* + q_d^*\varepsilon$，2： $\zeta^* = q_r - q_d\varepsilon$，以及 3： $\zeta^* = q_r^* - q_d^*\varepsilon$。若要使用公式 7变换一个点，应使用第二种共轭形式。

我们可以将这八个双四元数参数转换为等价的一组八个螺旋坐标，反之亦然。参数的定义如下，见公式8：

$$\begin{aligned} \text{screw parameters} &= (\theta, d, \vec{l}, \vec{m}) \\ \text{dual-quaternion} &= q_r + \epsilon q_d \\ &= (w_r + \vec{v}_r) + \epsilon(w_d + \vec{v}_d) \end{aligned} \tag{8}$$

除了用 $\vec{l}$ 表示直线方向向量、用 $\vec{m}$ 表示直线矩外，我们还有 d 表示沿轴的平移（即螺距），以及旋转角 θ。

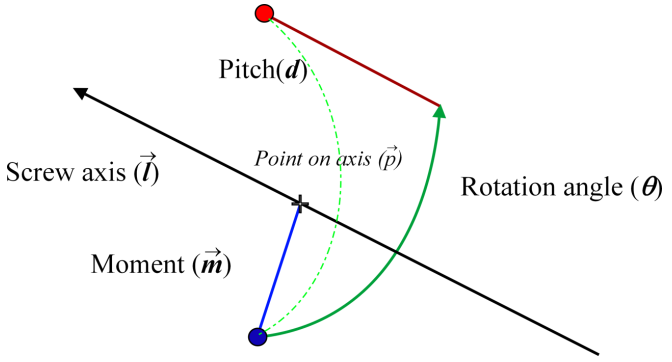

图 1：**螺旋参数**——双四元数的位移等效于绕某条螺旋轴旋转，然后沿该轴平移。

Daniilidis [1] 提供 了双四元数相关螺旋参数的分解（见下方公式9） .

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \begin{pmatrix} w_r \\ \vec{v}_r \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} w_d \\ \vec{v}_d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_r \\ \vec{v}_r \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\vec{v}_r \cdot \vec{t} \\ \frac{1}{2}(w_r\vec{t} + (\vec{t} \times \vec{v}_r)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{2}) \\ sin(\frac{\theta}{2})\vec{l} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}sin(\frac{\theta}{2}) \\ sin(\frac{\theta}{2})\vec{m} + \frac{d}{2}cos(\frac{\theta}{2})\vec{l} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

将螺旋参数转换为双四元数
给定方程9，我们可以推导 出与特定螺旋参数相关的双四元数分量（反之亦然).

$$\begin{aligned} w_r &= cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \vec{v}_r &= \vec{l}sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ w_d &= -\frac{d}{2}sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \vec{v}_d &= sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{m} + \frac{d}{2}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{l} \end{aligned} \tag{10}$$

将双四元数转换为螺旋参数

$$\begin{aligned} \theta &= 2cos^{-1}(w_r) && \text{(angle from real component)} \\ \vec{l} &= \vec{v}_r \frac{1}{sin(\frac{\theta}{2})} && \text{(or } ||v_r||| \text{ axis from the real component)} \\ d &= -w_d \frac{2}{sin(\frac{\theta}{2})} && \text{(or } \vec{t} \cdot \vec{l}\text{)} \\ \vec{m} &= v_d \frac{1}{sin(\frac{\theta}{2})} - \frac{d}{2}\frac{cos(\frac{\theta}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}\vec{l} && \text{(cos/sin = cot)} \end{aligned} \tag{11}$$

双四 **四元数幂** 我们可以将双四元数表示写成方程 1 所示的形式 2.

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= cos\left(\frac{\theta + \epsilon d}{2}\right) + (\vec{l} + \epsilon\vec{m})sin\left(\frac{\theta + \epsilon d}{2}\right) \\ &= cos\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) + \hat{v}\sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\hat{\zeta}$ 是单位双四元数，$\hat{v}$ 是单位对偶向量（$\hat{v} = \vec{l} + \epsilon\vec{m}$），而 $\hat{\theta}$ 是对偶角（$\hat{\theta} = \theta + \epsilon d$）。
这种形式的双四元数格外有趣且有价值，因为它使我们能够计算双四元数的幂 .
计算双四元数的幂对于轻松计算球面线性插值至关重要。不过，**与经典四元数只能进行旋转不同，现在我们可以使用双四元数对完整的 6 维自由度进行插值**（即旋转和平移）。

$$\hat{\zeta}^t = cos\left(t\frac{\hat{\theta}}{2}\right) + \hat{v}sin\left(t\frac{\hat{\theta}}{2}\right) \tag{13}$$

双四元数螺旋线性插值（ScLERP）ScLERP 是四元数球面线性插值（SLERP）技术的扩展，可在双四元数之间实现平滑的恒定插值。与四元数球面线性插值类似，我们使用幂函数计算 ScLERP 的插值结果，如公式14所示。

$$\text{ScLERP}(\hat{\zeta}_A, \hat{\zeta}_B : t) = \hat{\zeta}_A(\hat{\zeta}_A^{-1}\hat{\zeta}_B)^t \tag{14}$$

其中 $\hat{\zeta}_A$ 且 $\hat{\zeta}_B$ 是起始和结束的单位双四元数，t 是从 0.0 到 1.的插值量。 0.
另外，Kavan 等人提出了一种 **ScLERP 的快速近似替代方法** [2]，称为双四元数线性混合（DLB）。此外，双四元数在基于角色的蒙皮领域也备受关注。与线性方法相比，采用加权双四元数方法进行蒙皮表面近似，能够保持表面体积，从而减少扭曲和视觉异常。

参考文献

[1] 18 3 286 298, 1999 3 Konstantinos Daniilidis。使用双四元数进行手眼标定。《国际机器人研究杂志》，（）：–。Ladislav Kavan、Steven Collins、Jiˇrı ˇZara 和 Carol O'Sullivan。使用双四元数进行蒙皮。载于交互式研讨会论文集 3 39 46, 2007 1, 4 D 图形与游戏，页码–。Ladislav Kavan 和 Jiˇrı ˇZara。球面混合蒙皮：关节模型的实时变形。载于2005年交互式研讨会论文集 3 9 16, 2005 2 D 图形与游戏，页码–。B Kenwright。双四元数入门指南。载于冬季计算机图形学研讨会，第 2 2012 1, 2 卷。WSCG，。B Kenwright。使用双四元数、指数映射和关节限位进行逆运动学。《智能系统进展国际期刊》，6 1 2013 1（），。B Kenwright。双四元数曲面与曲线。通讯文章，1月 2018 1。B Kenwright。计算机图形学中的双四元数技术：综述。通讯文章，8月 2019 1。B Kenwright。混合双四元数交互示例 KenLERP。在线：*https://xbdev.net/retro/code/dual-quaternions/index.html*（访问日期：01 07 2020 2020 2 //），。Ken Shoemake。使用四元数曲线为旋转制作动画。载于第12届计算机图形学与交互技术年会论文集，第245–254页，1985年。2