arXiv:2303.13398v1 [math.QA] 23 Mar 2023

SO(3)-贝雷津-托普利茨量子化与 AJ 猜想

HONGHUAI FANG

Abstract. 我们研究作用于与 SO(3)-维滕-切恩-西蒙斯理论相对应的几何量子化空间上的 Berezin-Toeplitz 算子。我们猜想，由 A 多项式量子化得到的 SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子会消去相应的 SO(3)-纽结态。

1. Introduction

在 [1] 中，我们研究与环面的 SO(3)-维滕-切恩-西蒙斯理论相对应的几何量子化空间，记作 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$。该空间是环面的 SU(2)-特征簇上 $L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta$ 的全纯截面的交错子空间。相关综述见第 2 节。此外，我们提出一个猜想，可视为体积猜想的几何版本。

猜想1.1. 对于任意纽结 K in S^3，设 $Z'_r(S^3\backslash K)\in\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$ 为其第 r 个SO(3)-纽结态，$\mathrm{vol}\left(S^3\backslash K\right)$ 为其补空间的单纯体积。那么我们有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\pi}{r}\log||Z'_r(S^3\backslash K)||^2_{r+\frac{1}{2}}=\mathrm{vol}\left(S^3\backslash K\right). \tag{1}$$

受全息信息论的启发，我们将方程 (1) 左边视为定义在共形量子空间 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$ 上的一种量子复杂度。为研究量子复杂度，有必要深入探究环面的 SO(3)-特征簇的变形量子化。本文重点研究作用于几何量子化空间 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$ 上的 Berezin-Toeplitz 算子。具体而言，在第 3 节中，我们利用塞格投影算子的施瓦茨核证明， SO(3)-曲线算子空间包含于 SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子空间。

AJ猜想[2], 建立了 A多项式与带色琼斯多项式之间的联系，这表明由 A 多项式量子化得到的SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子的量子复杂度值得关注。在第 4 节中，我们证明了 $*$-代数的 SO(3)-Berezin-Toeplitz 曲线算子空间与 SO(3)-skein 理论曲线算子空间之间存在同构。我们利用这一同构提出猜想：由 A 多项式量子化得到的SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子会消去相应的 SO(3)-纽结态。

我们攻击猜想(1.1)的策略如下。令 $T_{r+\frac{1}{2}}(A)$ 表示由 A多项式量子化得到的 SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子，并注意到 $T_{r+\frac{1}{2}}(A)Z'_r(S^3\backslash K)=0$。我们的目标是将

算子 $T_{r+\frac{1}{2}}(A)$ 的量子复杂度与 $Z'_r(S^3\backslash K)$ 的 L^2-范数联系起来。实现这一目标有几种方法，例如使用量子复杂度的原始定义，即通过
$*$-代数同构，或研究 $SO(3)$-Berezin-Toeplitz 算子空间上的复杂度度量。然而，我们提出了一种基于体积猜想和 A 多项式[3]的马勒测度的新方法。具体而言，我们尝试对马勒测度进行量子化，并考察 $T_{r+\frac{1}{2}}(A)$的量子马勒测度的半经典极限。最后，我们旨在通过几何朗兰兹理论建立马勒测度与纽结补空间的双曲体积之间的联系。更多细节请参见第 5 节。

2. Review of $SO(3)$-Geometric Quantization

本节按照几何量子化方法[1]回顾 $SO(3)$-TQFT。设 (V,ω) 为一个实二维辛向量空间，配备相容的线性复结构 j。设 $\alpha\in\Omega^1(V,\mathbb{C})$ 由 $\alpha_x(y)=\frac{1}{2}\omega(x,y)$ 给出，并在平凡线丛 $L=V\times\mathbb{C}$ 上赋予联络 $\nabla=d-i\alpha$、标准厄米结构 h和唯一的全纯结构，使其成为预量子线丛。设 $\Lambda\subset V$为 V的一个格，使得基本域的辛体积等于 4π。设 $L^{\frac{1}{2}}$ 为L 的半线丛，并赋予标准厄米结构 $h_{\perp}$。同时，对于 V上的典范 2 线丛 $K_j=\{\alpha\in\Omega^1(V,\mathbb{C})|\alpha(j\cdot)=i\alpha\}$，我们选取 K_j的一个半形式 δ，并配备一个同构 $\varphi\colon\delta^{\otimes 2}\to K_j$。$K_j$ 具有自然的标量积，使得 α 的范数平方为 $i\alpha\wedge\frac{\bar{\alpha}}{\omega}$。我们在 δ 上赋予厄米结构 h_δ，使 φ 成为等距映射。

选取 Λ 的基 $\{\mu,\lambda\}$，使得 $\omega(\mu,\lambda)=4\pi$。取复数 $\tau=a+bi$，使得 $\lambda=a\mu+bj\mu$。令 $p,q\colon V\to\mathbb{R}$ 为分别与 μ,λ对偶的线性坐标。因此，$z=p+\tau q$是(V,j)的全纯坐标。在此坐标下，$\omega=4\pi dp\wedge dq$。对于任意 $x\in\Lambda$ 和任意 $\Phi\in\Gamma(V,L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta)$，定义$T_x^*\in End(\Gamma(V,L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta))$为

$$(T_x^*\Phi)(y)=exp\left(\frac{(2r+1)}{4}i\omega(x,y)\right)\Phi(x+y). \tag{2}$$

记$\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$为 $H^0(V,L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta)$的 Λ-不变子空间，并赋予其如下内积:

$$\langle\Psi_1,\Psi_2\rangle'_{r+\frac{1}{2}}=\int_D\left(h^{\otimes r}\otimes h_{\frac{1}{2}}\otimes h_\delta\right)_z(\Psi_1(z),\Psi_2(z))\,\omega.$$

存在$\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$的一组标准正交基$(\Psi_l)_{l\in\mathbb{Z}/(2r+1)\mathbb{Z}}$，使得

$$T^*_{\frac{\mu}{2r+1}}\Psi_l=exp(\frac{2l\pi i}{2r+1})\Psi_l, T^*_{\frac{\lambda}{2r+1}}\Psi_l=\Psi_{l+1}.$$

具体来说，

$$\Psi_0=(\frac{2r+1}{4})^{\frac{1}{4}}g_0t^{r+\frac{1}{2}}\Omega_\mu,\Psi_l=(T^*_{\frac{\lambda}{2r+1}})^l\Psi_0,$$

其中 $g_0(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}exp(m\pi i\tau((4r+2)z+(2r+1)m\tau))$, $t(p,q)=exp(2\pi iq(p+\tau q))$，且 Ω_μ 是 δ 的一个向量，使得 $\varphi(\Omega_\mu^2)(\mu)=1$。

环面 $SU(2)$ 的特征簇 $Hom(\pi_1(T^2)\ SU(2))/conj$ 可表示为 $V/(\Lambda\rtimes\mathbb{Z}_2)$。因此我们聚焦于空间

$$\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)\triangleq\{\Psi\in\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)|\Psi(z)=-\Psi(-z)\}.$$

因此，

$$\left(\Phi_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_l - \Psi_{-l}\right)\right)_{l=1,\ldots,r}$$

构成 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$ 的一组标准正交基。

固定一个纽结 K 于 S^3 中，并令 Σ 为 $S^3\backslash K$的边界。选取一个定向微分同胚 $\psi\colon \Sigma \to S^1\times S^1$，并令 μ和 λ分别为 $\psi^{-1}\left(S^1\times\{1\}\right)$ 和 $\psi^{-1}\left(\{1\}\times S^1\right)$ 的同调类。在拓扑方面，我们有一个厄米空间 $V'_r(\Sigma)$，其标准正交基为 $(e_n)_{n=0,\ldots,r-1}$；这是通过编织理论在 [4] 中定义的 $SO(3)$-拓扑量子空间。在几何方面，簇 $Hom(\pi_1(\Sigma), SU(2))/conj$可视为 $H_1(\Sigma,\mathbb{R})/(H_1(\Sigma,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2)$，其中我们赋予 $H_1(\Sigma,\mathbb{R})$辛形式 $\omega(x,y) = 4\pi x\cdot y$、线性复结构 j以及梅塔普列克形式 δ。取 $\{\mu,\lambda\}$作为 $H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$的一组基，我们得到厄米空间 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$，其标准正交基为 $(\Phi_l)_{l=1,\ldots,r}$。对于任意定向曲线 $\gamma\subset\Sigma$，我们定义 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$上的一个自同态:

$$T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma) = -\left(T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}} + T^*_{-\frac{\gamma}{2r+1}}\right).$$

在 [1] 中，我们证明，对于任意定向曲线 $\gamma\subset\Sigma$，存在一个同构I'_r: $V'_r(\Sigma)\to\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$，使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V'_r(\Sigma) & \xrightarrow{\quad I'_r \quad} & \mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Z'_r(\gamma)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma)} \\ V'_r(\Sigma) & \xrightarrow{\quad I'_r \quad} & \mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta) \end{array}$$

其中 $Z'_r(\gamma)$ 属于 Kauffman skein模 $K_A(T^2\times I)$，且 $A = exp(\frac{2\pi i}{4r+2})$。

3. $SO(3)$-Berezin-Toeplitz Quantization

本节证明，曲线算子 $\left(T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma)\right)_{r=1,\ 2,\ \ldots\ldots}$是一个 Berezin-Toeplitz 算子。令 $L^2(V/\Lambda, L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta))$ 为 $\Gamma(V/\Lambda, L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta))$ 关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle'_{r+\frac{1}{2}}$ 的完备化。令 $\Pi_{r+\frac{1}{2}}$ 为从 $L^2(V/\Lambda, L^r\otimes L^{\frac{1}{2}}\otimes\delta))$ 到 $\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$ 的正交投影算子。对于 $f\in\mathcal{C}^\infty(V/\Lambda)$，与 f 关联的 Berezin-Toeplitz 算子是一族算子

$$\left(T_{r+\frac{1}{2}}(f) = \Pi_{r+\frac{1}{2}}M_f : \mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)\to\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)\right)_{r=1,2,\ldots},$$

其中 M_f 表示由 f给出的乘法算子。如果 f 是交错的（即 $f(z) = -f(-z)$），那么 $\left(T_{r+\frac{1}{2}}(f)\right)_{r=1,2,\ldots}$可视为与 f相关联的 Berezin-Toeplitz 算子，其元素作用于 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$。

此外，Berezin-Toeplitz 算子是如下形式的一族 $\left(T_{r+\frac{1}{2}}\in\mathrm{End}(\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta))\right)_{r=1,2,\ldots}$

$$T_{r+\frac{1}{2}} = \Pi_{r+\frac{1}{2}}M(f(\cdot,r)) + R_r : \mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)\to\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta),\quad r = 1,2,\ldots$$

其中 $(f(\cdot,r))_r$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty(V/\Lambda)$ 序列，它存在如下形式的渐近展开 $f_0+r^{-1}f_1+\cdots$，其系数为 $f_0,f_1,\ldots\in\mathcal{C}^\infty(V/\Lambda)$，而族 $\left(R_r\in\mathrm{End}(\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta))\right)_r$ 是一个 $O(r^{-\infty})$，即对于任意 N，都存在一个正的 C_N，使得对每个 r，$\|R_r\|\leqslant C_N r^{-N}$。我们称形式级数 $f_0+r^{-1}f_1+\cdots$ 为 $\left(T_{r+\frac{1}{2}}\right)_r$ 的全符号，称 f_0 为 $\left(T_{r+\frac{1}{2}}\right)_r$ 的主符号。此外，如果 Berezin-Toeplitz 算子的符号是交错的，那么它可以视为作用在 $\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$ 上的 Berezin-Toeplitz 算子

我们需要以下定理，它们可以直接推广到 $SO(3)$ 的情形。

定理 3.1. *[5]* 对于任意 $f\in\mathcal{C}^\infty(V/(\Lambda\rtimes\mathbb{Z}_2))$，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\left\|T_{r+\frac{1}{2}}(f)\right\|=\sup_{z\in V/(\Lambda\rtimes\mathbb{Z}_2)}|f(z)|.$$

定理 3.2. *[6]* 族 $\left(T_{r+\frac{1}{2}}\in\mathrm{End}(\mathcal{H}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta))\right)_{r=1,\ 2,\ \ldots\ldots}^{\infty}$ 是 Berezin-Toeplitz 算子，当且仅当其施瓦茨核 $\left(K_{r+\frac{1}{2}}(\cdot,\cdot)\right)_r$ 满足以下条件：

- $\left(K_{r+\frac{1}{2}}(\cdot,\cdot)\right)_r$ 在任何不与对角线相交的 $(V/\Lambda)^2$ 紧集上均为 $O(r^{-\infty})$。

- 设 U 为对角线的一个邻域。我们在 U 上有

$$K_{r+\frac{1}{2}}(z,w)=\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)f(z,w,r)+O\left(r^{-\infty}\right).$$

其中，$\Pi_{r+\frac{1}{2}}(\cdot,\cdot)$ 是投影算子 $\Pi_{r+\frac{1}{2}}$ 的施瓦茨核，而 $f(\cdot,r)$ 是一列 $\mathcal{C}^\infty(U)$，其具有如下形式的渐近展开：$f_0+r^{-1}f_1+r^{-2}f_2+\cdots$。此外，$\left(T_{r+\frac{1}{2}}\right)_r$ 的主符号为 g_0，它是 f_0 在对角线上的限制。

现在我们陈述本节的主要定理：

定理 3.3. 对于任意定向曲线 $\gamma\subset\Sigma$，$\left(T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma)\right)_{r=1,\ 2,\ldots}$ 是一个 Berezin-Toeplitz 算子，其主符号为 $F_\gamma(z)=-2\cos(\frac{1}{2}\omega(\gamma,z))$。

证明。回忆一下，$T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma)=-\left(T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}}+T^*_{-\frac{\gamma}{2r+1}}\right)$。因此，只需证明 $\left(T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}}\right)_r$ 是一个 Berezin-Toeplitz 算子，其主符号为 $f_\gamma(z)=exp(-\frac{i}{2}\omega(\gamma,z))$。为了应用定理 (3.2)，我们将计算 $\left(T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}}\right)_r$ 的施瓦茨核 $\left(K^{(\gamma)}_{r+\frac{1}{2}}(\cdot,\cdot)\right)_r$ 的逐点范数。由于 $K^{(\gamma)}_{r+\frac{1}{2}}(\cdot,w)=T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}}\Pi_{r+\frac{1}{2}}(\cdot,w)$，我们需要计算 $\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)$，并分别求出其在远离对角线处和对角线附近的逐点范数。

由于 $\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)$ 是投影算子的施瓦茨核，因此我们有

$$\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)=\sum_{l=0}^{2r}\Psi_l(z)\otimes\bar{\Psi}_l(w).$$

由第 2 节可知

$$\Psi_l(z)=T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}}\Psi_0(z)=\left(\frac{2r+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}exp(2\pi i\theta_{l,m}(z))t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z),$$

其中 $\theta_{l,m}(z) = z(l+(2r+1)m) + \frac{\tau}{4r+2}(l+(2r+1)m)^2$。因此，

$$\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w) = \left(\frac{2r+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=0}^{2r}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} exp(2\pi i(\theta_{l,m}(z) - \overline{\theta_{l,n}(w)}))\right) \times t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z)\otimes \bar{t}^{r+\frac{1}{2}}(w)\bar{\Omega}_\mu(w). \tag{3}$$

设 $z = p_1 + \tau q_1$和 $w = p_2 + \tau q_2$。我们在以下引理中计算 $\left\|\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\|$。

引理3.4. 对每个 $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$,，若 $dist(q_1 - q_2, \mathbb{Z}) \geq \epsilon$，则 $\left\|\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\| = O(r^{-\infty})$。

证明。我们有

$$\left\|\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\| \leq C\sqrt{r+\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{2r}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} exp(-2\pi\Theta_{l+(2r+1)m,l+(2r+1)m}(z,w)),$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta_{s,t}(z,w) &= b(r+\frac{1}{2})((q_1+\frac{s}{2r+1})^2 + (q_2+\frac{t}{2r+1})^2) \\ &\geq C_1(r+\frac{1}{2})((q_1+\frac{s}{2r+1})^2 + (q_1-q_2+\frac{s-t}{2r+1})^2).\end{aligned} \tag{4}$$

由此可得

$$\left\|\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\| \leq C\sqrt{r+\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{2r}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} exp(-2\pi C_1((q_1+m+\frac{l}{2r+1})^2+(q_1-q_2+n)^2). \tag{5}$$

与一个积分比较可得

$$\sum_{l=0}^{2r}\sum_{m\in\mathbb{Z}} exp(-(r+\frac{1}{2})(q_1+m+\frac{l}{2r+1})^2) = O(r^{\frac{3}{2}}), \tag{6}$$

并利用 $dist(q_1-q_2,\mathbb{Z}) \geq \epsilon$，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}} exp(-(r+\frac{1}{2})(q_1-q_2+n)^2) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} exp(-(r+\frac{1}{2})(\epsilon+n)^2) \\ &\leq 2\sum_{n=0}^{\infty} exp(-(r+\frac{1}{2})(\epsilon+n)^2) \\ &= 2exp(-(r+\frac{1}{2})\epsilon^2) + \sum_{n=1}^{\infty} exp(-(r+\frac{1}{2})n^2) \\ &\leq 2exp(-(r+\frac{1}{2})\epsilon^2) + \sum_{n=1}^{\infty} exp(-(r+\frac{1}{2})n) \leq C_2 exp(-r/C_3).\end{aligned} \tag{7}$$

由 (5)、(6) 和 (7)，引理得证。 □

如下定义截面 $\Pi^{(1)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)$:

$$\Pi^{(1)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)=\left(\frac{2r+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=0}^{2r}\sum_{m\neq n}exp(2\pi i(\theta_{l,m}(z)-\overline{\theta_{l,n}(w)}))\right)\times t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z)\otimes\bar{t}^{r+\frac{1}{2}}(w)\bar{\Omega}_\mu(w). \tag{8}$$

引理 3.5. 若 $|q_1-q_2|\leq\epsilon$，则 $\left\|\Pi^{(1)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\|=O(r^{-\infty})$。

证明。与引理（3.4）的证明相同，只需证明

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}exp(-(r+\frac{1}{2})(q_1-q_2+n)^2)&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}exp(-(r+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})^2)\\&\leq Cexp(-r/C_1).\end{aligned} \tag{9}$$

□

因此，当（z,w）充分接近对角线时，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)&=\left(\frac{2r+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}exp(2\pi im(z-\bar{w})-\frac{2\pi bm^2}{2r+1})\right)\\&\quad\times t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z)\otimes\bar{t}^{r+\frac{1}{2}}(w)\bar{\Omega}_\mu(w)+O(r^{-\infty})\\&=\frac{2r+1}{\sqrt{8\pi b}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}exp(-\frac{(2r+1)\pi}{2b}(n-(z-\bar{w})^2))\right)\\&\quad\times t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z)\otimes\bar{t}^{r+\frac{1}{2}}(w)\bar{\Omega}_\mu(w)+O(r^{-\infty}),\end{aligned} \tag{10}$$

其中，最后一个等式由泊松求和公式得出。

定义另一个截面 $\Pi^{(2)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)$ 如下

$$\Pi^{(2)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)=\frac{2r+1}{\sqrt{8\pi b}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}exp(-\frac{(2r+1)\pi}{2b}(n-(z-\bar{w})^2))\right)\times t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z)\otimes\bar{t}^{r+\frac{1}{2}}(w)\bar{\Omega}_\mu(w). \tag{11}$$

引理 3.6。存在 $\varepsilon>0$，使得对于 $|p_1-p_2|\leq\varepsilon$ 和 $|q_1-q_2|\leq\varepsilon$，有 $\left\|\Pi^{(2)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\|=O(r^{-\infty})$。

证明。我们有

$$\left\|\Pi^{(2)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w)\right\|\leq C(r+\frac{1}{2})\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}exp(-\frac{(2r+1)\pi}{2b}(n-(p_2-p_1)+a(q_2-q_1)^2), \tag{12}$$

并且我们按照引理（3.5）的证明得出结论 □

回到定理的证明。汇总所有引理，我们得到

$$\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)=\frac{2r+1}{\sqrt{8\pi b}}exp(-\frac{(2r+1)\pi}{2b}(z-\bar{w})^2)\times t^{r+\frac{1}{2}}(z)\Omega_\mu(z)\otimes\bar{t}^{r+\frac{1}{2}}(w)\bar{\Omega}_\mu(w)+O(r^{-\infty}), \tag{13}$$

假设 $\gamma = p_0\mu + q_o\lambda$ 和 $z_0 = p_o + q_0\tau$，我们得到

$$K^{(\gamma)}_{r+\frac{1}{2}}(z,w) = T^*_{\frac{\gamma}{2r+1}}\Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w) = \Pi_{r+\frac{1}{2}}(z,w)f(z,w,r) + O(r^{-\infty}), \tag{14}$$

在对角线的一个小邻域上，其中 $f(z,w,r)$ 定义为

$$f(z,w,r) = exp(-\frac{\pi z_0}{b}((z-\bar{w}) + \frac{z_0}{4r+2}))exp(2\pi i q_0(z+\frac{z_0}{2r+1})). \tag{15}$$

将 $f(z,w,r)$ 限制在对角线上，我们得到

$$f(z,z,r) = exp(2\pi i(q_0 p - q p_0) - \frac{\pi}{b(2r+1)}|z_0|^2) = exp(-\frac{i}{2}\omega(\gamma,z)) + O(r^{-1}), \tag{16}$$

由定理 (3.2) 可完成证明。 □

4. Toward the AJ conjecture

本节将证明，作为 $*$-代数， SO(3)-Berezin-Toeplitz 曲线算子空间与 SO(3)-skein 理论曲线算子空间同构。作为应用，我们猜想，与 A 多项式相关联的 Berezin-Toeplitz 算子会湮灭相应的 SO(3)-纽结态。

记 $\mathcal{T}_{BT}$ 为 SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子的集合，并记 $\mathcal{T}_{curv}$为 SO(3)-几何 Berezin-Toeplitz 算子的集合。我们刚刚证明了$\mathcal{T}_{curv} \subset \mathcal{T}_{BT}$。记 $\mathcal{T}_{(r)curv}$为向量空间 $\{T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma)|\gamma \subset \Sigma\}$，其中 $r = 1, 2, \cdots$。在 $\mathcal{T}^{(r)}_{curv}$ 上定义乘法 $*$ 如下:

$$T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma_1) * T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma_2) = T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma_2) \circ T_{r+\frac{1}{2}}(\gamma_1), \tag{17}$$

使 $\mathcal{T}^{(r)}_{curv}$ 成为一个 $*$-代数。

在拓扑方面，将环面上的圆柱体 $\mathcal{S}^{(r)}_{curv}$ 的 Kauffman skein模记为 $K_A(T^2 \times I)$，其中 $A = exp(\frac{2\pi i}{4r+2})$，即

$$\mathcal{S}^{(r)}_{curv} = \{Z'_r(\gamma)|\gamma \subset \Sigma\}. \tag{18}$$

Kauffman skein模 $\mathcal{S}^{(r)}_{curv}$ 具有一种乘法结构，它由将一个圆柱体粘合在另一个圆柱体上方这一拓扑操作诱导而来。乘积 $\gamma_1 * \gamma_2$是将 γ_1 叠放在 γ_2上所得的结果，这使得 $\mathcal{S}^{(r)}_{curv}$ 成为一个 $*$-代数。

定理 4.1. 存在一个代数同构

$$I'_r : \mathcal{T}^{(r)}_{curv} \to \mathcal{S}^{(r)}_{curv}.$$

证明。将形变参数为 $A = exp(\frac{2\pi i}{4r+2})$ 的量子环面 $\mathcal{QT}^{(r)}$ 记为，即

$$\mathcal{QT}^{(r)} = \mathbb{C}[A^{\pm 1}] < m^{\pm 1}, l^{\pm 1} | lm = A^2 ml > .$$

考虑 $\mathbb{C}$ 上由向量 $e_{a,\ b} = A^{ab}m^a l^{-b}$给出的 $\mathcal{QT}^{(r)}$ 的基。定义乘法 $*$ 为

$$e_{a,b} * e_{c,d} = A^{ad-bc}e_{a+b,c+d}. \tag{19}$$

因此， $\mathcal{QT}^{(r)}$ 是一个非交换代数。考虑代数同态

$$\sigma : \mathcal{QT}^{(r)} \to \mathcal{QT}^{(r)}, \sigma(e_{a,b}) = e_{-a,-b},$$

并令 $\mathcal{QT}_{\sigma}^{(r)}$ 为其不变部分，它由 $e_{a,b}+e_{-a,-b}$ 张成。文献 [7] 已证明， $\mathcal{QT}_{\sigma}^{(r)}$ 与 $\mathcal{S}_{curv}^{(r)}$ 之间存在一个 $*$- 代数同构。我们证明 $\mathcal{T}_{(r)curv}$ 与 $\mathcal{QT}_{\sigma}^{(r)}$ 作为 $*$- 代数同构。

令 $\lambda_{a,\ b}=a\mu+b\lambda$, $a,b\in\mathbb{Z}$。对于任意 $\Phi\in\mathcal{H}^{alt}_{r+\frac{1}{2}}(j,\delta)$，我们计算得到

$$\begin{aligned} T^*_{\frac{\lambda_{a,b}}{2r+1}}\Phi(p,q) &= exp(\frac{i}{4}\omega(a\mu+b\lambda,p+q\tau))\Phi(p+\frac{a}{2r+1},q+\frac{b}{2r+1}) \\ &= exp(i\pi(aq-bp))\Phi(p+\frac{a}{2r+1},q+\frac{b}{2r+1}), \end{aligned} \tag{20}$$

(21)

$$\begin{aligned} T^*_{\frac{\lambda_{c,d}}{2r+1}}\circ T^*_{\frac{\lambda_{a,b}}{2r+1}}\Phi(p,q) &= exp(i\pi(a(q+\frac{d}{2r+1})-b(p+\frac{c}{2r+1})) \\ &\times exp(\frac{i}{4}\omega(c\mu+d\lambda,p+q\tau))\Phi(p+\frac{a+c}{2r+1},q+\frac{b+d}{2r+1}) \\ &= exp(\frac{\pi i(ad-bc)}{2r+1})exp(\pi i((a+c)q-(b+d)p))\Phi(p+\frac{a+c}{2r+1},q+\frac{b+d}{2r+1}) \\ &= A^{ad-bc}T^*_{\frac{\lambda_{a+c,b+d}}{2r+1}}\Phi(p,q). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} T_{r+\frac{1}{2}}(\lambda_{a,b})*T_{r+\frac{1}{2}}(\lambda_{c,d}) &= (T^*_{\frac{\lambda_{c,d}}{2r+1}}+T^*_{\frac{-\lambda_{c,d}}{2r+1}})\circ(T^*_{\frac{\lambda_{a,b}}{2r+1}}+T^*_{\frac{-\lambda_{a,b}}{2r+1}}) \\ &= A^{ad-bc}(T^*_{\frac{\lambda_{a+c,b+d}}{2r+1}}+T^*_{\frac{-\lambda_{a+c,b+d}}{2r+1}}) \\ &+ A^{bc-ad}(T^*_{\frac{\lambda_{a-c,b-d}}{2r+1}}+T^*_{\frac{-\lambda_{a-c,b-d}}{2r+1}}) \\ &= -A^{ad-bc}T_{r+\frac{1}{2}}(\lambda_{a+c,b+d})-A^{bc-ad}T_{r+\frac{1}{2}}(\lambda_{a-c,b-d}). \end{aligned} \tag{22}$$

此外，我们有

$$(e_{a,b}+e_{-a,-b})*(e_{c,d}+e_{-c,-d})=A^{ad-bc}e_{a+c,b+d}+A^{bc-ad}e_{a-c,b-d}. \tag{23}$$

由 (22) 和 (23) 可知，存在一个从 $\mathcal{T}_{(r)curv}$ 到 $\mathcal{QT}_{(r)\sigma}$ 的 $*$-代数同构，使得 $T_{r+\frac{1}{2}}(\lambda_{a,\ b})$ 的像为 $-(e_{a,\ b}+e_{-a,\ -b})$。□

推论 4.2。 $SO(3)$-Berezin-Toeplitz 曲线算子 $\mathcal{T}^{(r)}_{curv}$ 的空间是一个有限生成的 $*$-代数。

证明。 [8] 已证明， $\mathcal{S}^{(r)}_{curv}$ 由 $Z_r'(\lambda_{1,\ 0})$、$Z_r'(\lambda_{0,\ 1})$和 $Z_r'(\lambda_{1,\ 1})$在 $\mathbb{C}[A^{\pm1}]$ 上生成。□

设 Y 是一个基本群有限生成的流形。分别记其 $SL(2,\mathbb{C})$ 特征簇和 $SU(2)$ 特征簇为 $\chi(Y)$ 和 $\mathcal{M}(Y)$。 $\pi_1(T^2)$ 的每一对生成元 μ、λ 都确定一个同构，将 $\chi(T^2)$ 映到 $(\mathbb{C}^*)^2/\sigma$，其中 $(\mathbb{C}^*)^2$ 是非零复数对 (m,l) 的集合， σ 是对合 $\sigma(m,l)=(m^{-1},l^{-1})$。设纽结 K 位于 S^3 中，记其补空间为 X。 K 的一个定向将唯一确定一对子午线和经线的定向，使经线与纽结之间的链接数为零。这一对确定了 $\chi(\partial X)$ 与 $(\mathbb{C}^*)^2/\sigma$ 之间的一个识别，且该识别不依赖于 K 的定向。

包含映射 $T^2 = \partial X \hookrightarrow X$ 诱导出映射 $\theta: \chi(X) \to \chi(\partial X)$。在投影 $(\mathbb{C}^*)^2 \to (\mathbb{C}^*)^2/\sigma$ 下，$\theta(\chi(X))$ 的提升的扎里斯基闭包是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个代数集，由维数为 0 或 1 的分支组成。所有一维分支的并集由多项式 $A_K(m,l) \in \mathbb{Z}[m,l]$ 定义，其系数互素。根据定义，该多项式就是 K 的 A多项式。

注意，$\mathcal{M}(\partial X)$ 可以通过将 (p,q) 映射到 $(e^{-2\pi iq}, e^{-2\pi ip})$ 嵌入 $\chi(\partial X)$。因此，$A(p,q) := -\left(A_K(e^{-2\pi iq}, e^{-2\pi ip}) + A_K(e^{2\pi iq}, e^{2\pi ip})\right)$ 可以视为 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}(\partial X))$ 中的光滑函数。我们希望证明，SO(3)-贝雷津-托普利兹算子 $T_{r+\frac{1}{2}}(A)$ 消去相应的 SO(3)-纽结态 $Z'_r(S^3\backslash K)$，这可以视为 AJ 猜想的一个几何版本。

$\hat{}$ 限制映射 $\theta: \chi(X) \to \chi(\partial X)$ 诱导出一个映射 $\theta: \mathbb{C}[\chi(\partial X)] \to \mathbb{C}[\chi(X)]$，作用于正则函数环之间。将 $\mathcal{I}(K)$ 记为 $\hat{}r$ 的核。由于环 $\mathbb{C}[\chi(\partial X)]$ 可以自然地嵌入主理想整环 $\mathbb{C}(m)[l^{\pm 1}]$，我们可以考虑 $\mathcal{I}(K)$ 的理想扩张；该理想由一个与 A 多项式在 m 意义下等价的单个多项式生成。

在量子情形下，有一个映射 $\hat{}\Theta_r: \mathcal{S}^{(r)}_{curv} \to K_{e^{\frac{\pi i}{2r+1}}}(X)$，它是通过将环面上的圆柱体粘合到 X at the $T^2 \times \{0\}$ 而得到的，使得子午线映到子午线，经线映到经线。记 $\mathcal{I}_r(K)$ 为 $\hat{}\Theta_r$ 的核。我们需要以下在 [9] 中证明的定理。

定理4.3. $\lim_{r\to+\infty} \mathcal{I}_r(K) = \mathcal{I}(K)$; 此外，设 $\mathcal{F}_r(K)$ 是 $\mathcal{S}^{(r)}_{curv}$ 中 $Z'_r(S^3\backslash K)$ 的湮灭子。那么，理想 $\mathcal{I}_r(K)$ 包含于 $\mathcal{F}_r(K)$ 中。

现在，假设 $\mathcal{I}_r(K)$ 的理想扩张由单个多项式 $\alpha^{(r)}_K(m,l,q = e^{\frac{2\pi i}{2r+1}})$ 生成，使得

$$\lim_{r\to+\infty} \alpha^{(r)}_K(m,l,q = e^{\frac{2\pi i}{2r+1}}) = -(A_K(m,l) + A_K(m^{-1},l^{-1})).$$

由定理（4.1），我们得到 $\left((I'_r)^{-1}(\alpha^{(r)}_K)\right)_r$ 是一个 SO(3)-Berezin-Toeplitz 曲线算子。假设 $(I'_r)^{-1}(\alpha^{(r)}_K) = T_{r+\frac{1}{2}}(F_\gamma)$，其中 $F_\gamma \in \mathbb{Z}[e^{2\pi i(aq+bp)}]$。通过一些符号计算，可以证明

$$\lim_{r\to\infty} \|T_{r+\frac{1}{2}}(A - F_\gamma)\| = 0. \tag{24}$$

由定理（3.1）可得 $A = F_\gamma$。由定理（4.3）可知，$T_{r+\frac{1}{2}}(A)$ 应属于 $Z'_r(S^3\backslash K)$ 的湮灭子。

猜想 4.4. 与 $A(p,q)$ 相关联的 SO(3)-Berezin-Toeplitz 算子湮灭对应的 SO(3)-纽结态，即

$$T_{r+\frac{1}{2}}(A)Z'_r(S^3\backslash K) = 0, r = 1,2,\cdots. \tag{25}$$

5. Discussion

受几何体积猜想（1.1）、几何 AJ 猜想（4.4）以及全息复杂度=体积猜想[10], 的启发，人们预期，与 SO(3)-Berezin-Toeplitz 曲线算子 $T_{r+\frac{1}{2}}(A)$ 相关的量子复杂度，能够捕捉关于 L^2-范数、SO(3)-纽结态 $Z'_r(S^3\backslash K)$ 以及 $S^3\backslash K$的单纯体积的相关信息。为了研究空间 $\mathcal{T}^{(r)}_{curv}$上的量子复杂度，可以采用电路复杂度

方法，如推论（4.2）所示；或者，也可以使用 Nielsen 方法在 $\mathcal{T}_{BT}^{(r)}$ 上引入一种复杂度度量。

此外，还存在一种将 A 多项式与纽结补空间的双曲体积联系起来的量。该量称为 A 多项式的马勒测度，记作 $m(A_K) \in \mathbb{C}$，它与 L 函数和二重对数函数有关。猜想马勒测度在本质上等于 $S^3\backslash K$ 的体积。我们预期，马勒测度的量子对应物记作 $\hat{}m$，是一种量子复杂度，其性质是 $\hat{}m(T_{r+\frac{1}{2}}(A))$ 的半经典极限等于 $m(A)$。此外，带色琼斯多项式的量子模性质表明，可以通过几何朗兰兹理论将马勒测度与体积联系起来。更多细节将在后续工作中讨论。

	量子	伽罗瓦	自守
T^2	$\mathcal{H}^{alt}_{r+1/2}(j,\delta)$	$\chi\left(T^2\right)$	$Bun_{L_G}\left(T^2\right)$
$S^3\backslash K$	$Z_r^{'}\left(S^3\backslash K\right)$	$\chi\left(S^3\backslash K\right)$	$Bun_{L_G}\left(S^3\backslash K\right)$
复杂度	$\frac{log\|\|Z_r^{'}\left(S^3\backslash K\right)\|\|}{r}$	$m(A_K)$	$\frac{1}{\pi}vol\left(S^3\backslash K\right)$

References

[1] Honghuai Fang.《SO(3) 结态与体积猜想》。发表于：2022。[2] Stavros Garoufalidis.《纽结的特征簇与变形簇》。发表于：Geom. Topol. Monogr 7（2004），第291–304页。[3] David W Boyd.《马勒测度与双曲流形不变量》。发表于：Number theory for the millennium, I（Urbana, IL, 2000）127（2002），第143页。[4] Christian Blanchet 等。《由考夫曼括号导出的拓扑量子场论》。发表于：Topology 34.4（1995），第883–928页。[5] Martin Bordemann、Eckhard Meinrenken 和 Martin Schlichenmaier。《K¨ahler 流形的托普利兹量子化与 nggl(N)，N→∞ 极限》。发表于：Communica- tions in Mathematical Physics 165.2（1994年10月），第281–296页。[6] Laurent Charles.《Berezin-Toeplitz 算子：一种半经典方法》。发表于：Communications in Mathematical Physics 239（2003），第1–28页。[7] Charles Frohman 和 R˘azvan Gelca.《缠结模与非交换环面》。发表于：Transactions of the American Mathematical Society 352（1998），第4877–4888页。[8] Doug Bullock 和 Jozef H. Przytycki。《考夫曼括号缠结模量子化的乘法结构》。1999年。[9] Charles Frohman、R˘azvan Gelca 和 Walter Lofaro.《从非交换视角看A多项式》。发表于：Transactions of the American Mathemat- ical Society 354（1998），第735–747页。[10] Adam R Brown 等。《复杂度、作用量与黑洞》。发表于：Physical Review D 93.8（2016），第086006页。

Email address: dunjieshe@gmail.com