arXiv:2303.13427v1 [math.NT] 23 Mar 2023

关于 Viazovska 的模形式不等式

丹·罗米克

Abstract. Viazovska 证明， E_8 格的球堆积是 8 维空间中最密的球堆积。她的证明依赖于两个不等式，这两个不等式涉及由模形式和拟模形式定义的函数。我们直接证明了这些不等式，无需依靠计算机计算。

1. Introduction

Viazovska [9] 证明，与 E_8 格相关联的球堆积，其堆积密度为 $\frac{\pi^4}{384}$，是 8 维空间中最密的球堆积。她的证明依赖于某些函数的性质，这些函数记作 $\phi_0(z)$和 $\psi_I(z)$，它们由经典模形式和拟模形式定义：艾森斯坦级数 E_2、 E_4 和 E_6，以及雅可比 theta 零函数 θ_2、 θ_3和 θ_4。证明中的关键步骤是证明这些函数满足一对特定的不等式；这对于验证一个径向函数至关重要。该函数由对 $\phi_0(z)$和 $\psi_I(z)$（以特定方式组合）作积分变换得到，正是所谓的魔法函数。Cohn 和 Elkies [4] 曾猜想这种函数存在，而它能够证明球堆积界是正确的。

本文旨在为 Viazovska 的不等式给出一种新的直接证明。回顾这一结果，设 z 表示取值于上半平面的复变量，并记 $q = e^{\pi i z}$。设 $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d\,|\,n} d^\alpha$ 表示约数函数。回顾函数 E_2、 E_4、E_6、θ_2、 θ_3 和 θ_4的定义：

$$\begin{aligned} E_2(z) &= 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{2n}, & \theta_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2},\\ E_4(z) &= 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^{2n}, & \theta_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2},\\ E_6(z) &= 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^{2n}, & \theta_4(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}. \end{aligned}$$

接下来，令

$$\phi_0(z) = 1728\frac{(E_2(z)E_4(z) - E_6(z))^2}{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}, \tag{1}$$

$$\psi_I(z) = 128\left(\frac{\theta_3(z)^4 + \theta_4(z)^4}{\theta_2(z)^8} + \frac{\theta_4(z)^4 - \theta_2(z)^4}{\theta_3(z)^8}\right), \tag{2}$$

并定义实变量 $t > 0$ 的函数 $A(t)$、 $B(t)$如下：

$$\begin{aligned} A(t) &= -t^2\phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it),\\ B(t) &= -t^2\phi_0(i/t) + \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it). \end{aligned}$$

定理1（Viazovska 的模形式不等式）。函数 $A(t)$、 $B(t)$ 满足

$$A(t) < 0 \qquad (t > 0), \tag{V1}$$

$$B(t) > 0 \qquad (t > 0). \tag{V2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11F11, 26D07.*Key words and phrases.* Jacobi theta 零点函数，艾森斯坦级数，模形式，不等式，球堆积。

Viazovska 对定理1的原始证明在很大程度上依赖计算机计算。证明包含两个主要步骤：首先，对 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的近似函数 $A_0^{(6)}(t)$、$A_\infty^{(6)}(t)$、$B_0^{(6)}(t)$、$B_\infty^{(6)}(t)$，数值验证了不等式 (V1)–(V2) 的类似形式；这些近似函数是通过截断 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=\infty$ 附近的渐近展开得到的，因此可以通过有限次计算完成验证。其次，推导出严格界，从而能够根据近似函数所满足的相应不等式，推出不等式 (V1)–(V2)。

Cohn等人 [5] 在随后证明24维Leech格球堆积的最优性时，证明了另一对与(V1)–(V2)风格相似的不等式。他们的证明采用了不同的技巧，但同样依赖大量计算机计算。

下面，我们给出定理1的一个新证明，该证明完全可人工验证，除了对几个标准数学常数进行基本运算外，不需要任何数值计算。这有助于简化并阐明Viazovska著名的球堆积证明中的一个关键步骤。

2. Proof of (V1)

只需证明，对所有 $t>0$，$\phi_0(it)>0$ 且 $\psi_I(it)>0$。第一个结论可由标准恒等式 [10, pp. 20, 21, 49]立即推出

$$E_4^3-E_6^2=1728q^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{24}, \tag{3}$$

$$E_2E_4-E_6=\frac{3}{2\pi i}\frac{dE_4}{dz}=720\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_3(n)q^{2n}, \tag{4}$$

这意味着 $E_4^3-E_6^2$ 和 $E_2E_4-E_6$ 在正虚轴上都取正实值。

关于 $\psi_I(it)$ 的论断，回忆雅可比恒等式 $\theta_2^4+\theta_4^4=\theta_3^4$（见 [10, 第 28] 页），并令 $\lambda(z)=\theta_2^4/\theta_3^4=1-\theta_4^4/\theta_3^4$（模拉姆达函数 [10, 第 63] 页）。从 $\lambda(z)$ 的这些定义关系可清楚看出，对于 $t>0$，$\lambda(it)$ 在 $(0,1)$ 中取实数值。现在注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{128}\psi_I&=\frac{\theta_3^4+\theta_4^4}{\theta_2^8}+\frac{\theta_4^4-\theta_2^4}{\theta_3^8}=\frac{1}{\theta_3^4}\cdot\frac{\theta_3^8+\theta_3^4\theta_4^4}{\theta_2^8}+\frac{1}{\theta_3^4}\cdot\frac{\theta_4^4-\theta_2^4}{\theta_3^4}\\&=\frac{1}{\theta_3^4}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1-\lambda}{\lambda}+(1-\lambda)-\lambda\right)=\frac{1}{\theta_3^4}\frac{(1-\lambda)(2+\lambda+2\lambda^2)}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

由于函数 $x\mapsto\frac{(1-x)(2+x+2x^2)}{x^2}$ 在 $x\in(0,1)$ 上为正，且对于 $t>0$，$\theta_3(it)^4>0$，我们便得到论断 $\psi_I(it)>0$。□

3. Proof of (V2)

We w我将利用标准的模变换性质 [9, 第 996–997 页]

$$\theta_2(z+1)^4=-\theta_2(z)^4,\qquad \theta_2(-1/z)^4=-z^2\,\theta_4(z)^4, \tag{5}$$

$$\theta_3(z+1)^4=\theta_4(z)^4,\qquad \theta_3(-1/z)^4=-z^2\,\theta_3(z)^4, \tag{6}$$

$$\theta_4(z+1)^4=\theta_3(z)^4,\qquad \theta_4(-1/z)^4=-z^2\,\theta_2(z)^4, \tag{7}$$

$$E_2(z+1)=E_2(z),\qquad E_2(-1/z)=z^2E_2(z)-\frac{6iz}{\pi}, \tag{8}$$

$$E_4(z+1)=E_4(z),\qquad E_4(-1/z)=z^4E_4(z), \tag{9}$$

$$E_6(z+1)=E_6(z),\qquad E_6(-1/z)=z^6E_6(z). \tag{10}$$

利用 (8)–(10)，经过简单计算可得

$$z^2\phi_0(-1/z)=1728\left[\frac{(E_2E_4-E_6)^2}{E_4^3-E_6^2}z^2-\frac{12i}{\pi}\cdot\frac{E_4(E_2E_4-E_6)}{E_4^3-E_6^2}z-\frac{36}{\pi^2}\left(\frac{E_4^2}{E_4^3-E_6^2}\right)\right].$$

（这是对 [9]中公式 (29) 稍作简化后的版本。）类似地，借助 (5)–(7) 可得

$$z^2\psi_I(-1/z) = -128\left(\frac{\theta_3^4+\theta_2^4}{\theta_4^8} + \frac{\theta_2^4-\theta_4^4}{\theta_3^8}\right).$$

我们将把 (V2) 的证明分成两部分，分别证明

$$B(t) > 0 \quad \text{for } t \geq 1 \quad \text{and} \quad t^2 B(1/t) > 0 \quad \text{for } t \geq 1,$$

也就是说，等价地，证明

$$\frac{\pi^2}{36}t^2\phi_0(i/t) < \psi_I(it) \quad \text{for } t \geq 1 \quad \text{and} \quad \frac{\pi^2}{36}\phi_0(it) < t^2\psi_I(i/t) \quad \text{for } t \geq 1.$$

通过将两边同乘 $E_4^3 - E_6^2$，可以方便地消去这些不等式中的分母；根据一个众所周知的恒等式，这也等于 $_{27\,4}(\theta_2\theta_3\theta_4)^8$。 [10, p. 29]因此，我们定义

$$f(z) = \frac{1}{864}\cdot\frac{\pi^2}{36}(E_4^3 - E_6^2)\phi_0(z) = \frac{\pi^2}{18}(E_2E_4 - E_6)^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z) &= -\frac{1}{864}\cdot\frac{\pi^2}{36}(E_4^3 - E_6^2)z^2\phi_0(-1/z)\\ &= -\frac{\pi^2}{18}(E_2E_4 - E_6)^2z^2 + \frac{2\pi i}{3}E_4(E_2E_4 - E_6)z + 2E_4^2,\end{aligned} \tag{12}$$

$$g(z) = -\frac{1}{864}(E_4^3 - E_6^2)z^2\psi_I(-1/z) = \theta_2^8(\theta_3^{12} + \theta_2^4\theta_3^8 + \theta_2^4\theta_4^8 - \theta_4^{12}). \tag{13}$$

$$\widetilde{g}(z) = \frac{1}{864}(E_4^3 - E_6^2)\psi_I(z) = \theta_4^8(\theta_3^{12} + \theta_4^4\theta_3^8 + \theta_2^8\theta_4^4 - \theta_2^{12}), \tag{14}$$

根据上述余数，为了推出 (V2)，只需证明以下不等式：

$$f(it) < g(it) \qquad \text{for } t \geq 1, \tag{V2-I}$$

$$\widetilde{f}(it) < \widetilde{g}(it) \qquad \text{for } t \geq 1. \tag{V2-II}$$

最后，作为准备工作，回顾以下已知的显式求值

$$E_2(i) = \frac{3}{\pi}, \qquad E_4(i) = \frac{3\Gamma(1/4)^8}{64\pi^6}, \qquad E_6(i) = 0, \tag{15}$$

$$\theta_2(i) = \frac{\Gamma(1/4)}{(2\pi)^{3/4}}, \qquad \theta_3(i) = \frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}}, \qquad \theta_4(i) = \frac{\Gamma(1/4)}{(2\pi)^{3/4}}. \tag{16}$$

这里，$\Gamma(\cdot)$表示欧拉伽马函数。（$\Gamma(1/4)$的数值约为3.62561。 [3]）关于（16）的证明，见 [2, 第 325], [6, 页，式（2.21），第 307]页。恒等式 $E_2(i) = 3/\pi$可直接由（8）推出。关系式 $E_6(i) = 0$ 在 [1, 第 40], 页得到证明，而 $E_4(i)$的公式则由（16）以及恒等式 $E_4 = \frac{1}{2}(\theta_2^8 + \theta_3^8 + \theta_4^8)$推出；后者的证明见例如 [10, 第 29]页；另见 [8, 第 290]页。

3.1. （V2-I）的证明。函数 $f(z)$、$g(z)$的傅里叶展开为

$$f(z) = 28800\pi^2q^4 + 1036800\pi^2q^6 + 14169600\pi^2q^8 + \ldots =: \sum_{n=4}^{\infty} a_n q^n, \tag{17}$$

$$g(z) = 20480q^3 + 2015232q^5 + 41656320q^7 + \ldots =: \sum_{n=3}^{\infty} b_n q^n. \tag{18}$$

(17) 中的系数 a_n 非负：这由 (4) 立即可得。同样，对所有 n，我们有 $b_n \geq 0$。为说明这一点，令 $\gamma(z) = \theta_2^8\theta_3^{12} + \theta_2^{12}\theta_3^8$，并注意到，根据 (5)–(7)，$g(z)$ 可以表示为

$$g(z) = \gamma(z) - \gamma(z+1). \tag{19}$$

γ 的傅里叶系数显然非负；并且，由于替换 $z \mapsto z+1$相当于在傅里叶级数中将每个 q 替换为 $-q$ ，关系式 (19) 意味着 g 的傅里叶展开由 γ 的傅里叶展开中的奇数项的两倍组成，因此其系数也非负。

由上述讨论可知，函数 $t \mapsto e^{3\pi t} f(it) = \sum_{n=4}^{\infty} a_n e^{-\pi(n-3)t}$ 是关于 t 的单调不增函数。利用 (15)，我们便得到对所有 $t \geq 1$ 都成立的界

$$e^{3\pi t} f(it) \leq e^{3\pi} f(i) = e^{3\pi} \frac{\pi^2}{18} \left(\frac{3}{\pi} \frac{3\Gamma(1/4)^8}{64\pi^6} - 0 \right)^2 = e^{3\pi} \frac{9\Gamma(1/4)^{16}}{8192\,\pi^{12}} \approx 13130.47. \tag{20}$$

另一方面，由 (18) 以及系数 b_n 非负这一观察可知，对所有 $t > 0$，界 $e^{3\pi t} g(it) = 20480 + \sum_{n=4}^{\infty} b_n e^{-\pi(n-3)t} \geq 20480$ 均成立。将其与 (20) 结合，即得 (V2-I)。□

~3.2. (V2-II) 的证明。类似地，我们考察 $f(z)$、 $\widetilde{g}(z)$ 的 q 级数展开及其性质。由 (12) 和 (14)，可得到如下形式的展开

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(z) &= 2 + (480\pi i z + 960) q^2 + (-28800\pi^2 z^2 + 123840\pi i z + 123840) q^4 \\ &\quad + (-1036800\pi^2 z^2 + 3150720\pi i z + 2100480) q^6 + \ldots =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) q^n, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\widetilde{g}(z) = 2 + 240 q^2 - 10240 q^3 + 134640 q^4 - 1007616 q^5 + \ldots =: \sum_{n=0}^{\infty} d_n q^n. \tag{22}$$

这里，(22) 是通常的傅里叶级数，而 (21) 则是较为特殊的 $q = e^{\pi i z}$ 的幂级数展开，其中每个系数 $c_n(z)$ 本身都是关于 z 的二次多项式。为方便起见，我们对这些表达式重新归一化，定义新函数

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(z) &= -\frac{\widetilde{f}(z) - 2}{q^2} = -\sum_{n=2}^{\infty} c_n(z) q^{n-2} \\ &= (-480\pi i z - 960) + (28800\pi^2 z^2 - 123840\pi i z - 123840) q^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\widetilde{G}(z) = -\frac{\widetilde{g}(z) - 2}{q^2} = -\sum_{n=2}^{\infty} d_n q^{n-2} = -240 + 10240 q - 134640 q^2 + 1007616 q^3 + \ldots. \tag{24}$$

~ ~不等式 (V2-II) 现在可以重述为：对于所有 $t \geq 1$， $G(it) < F(it)$。这可由以下两个引理共同推出。

~引理 2. 对于所有 $t \geq 1$， $G(it) \leq 288$ 。

~引理 3. 对于所有 $t \geq 1$， $F(it) \geq 468$ 。

以下辅助结论将在引理 2 的证明中用到。

引理 4. 对于 $n \geq 0$，我们有 $(-1)^n d_n \geq 0$ 。

证明。由 (5)–(7)，函数 $\widetilde{g}(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n q^n$ 可写为

$$\widetilde{g}(z+1) = \theta_3^{12}\theta_2^8 + \theta_3^8\theta_2^{12} + \theta_3^{12}\theta_4^8 + \theta_3^8\theta_4^{12}. \tag{25}$$

所要证明的是，这个函数的傅里叶级数具有非负系数。Slipper [7, p. 76], 证明了这一事实，他利用某个恒等式，将（25）右侧的函数表示为某个 20 维格的 θ 级数，该格称为“DualExtremal(20,2)a”。下面给出一个自成一体的证明，只用到 theta 零值函数的初等性质。为方便起见，记

$$Z = \theta_3^4, \qquad X = \theta_2^4, \qquad Y = 2Z - X.$$

于是 X 和 Z 的傅里叶级数都具有非负系数；再次回想恒等式$\theta_2^4+\theta_4^4=\theta_3^4$，可知 $Y=\theta_3^4+\theta_4^4=\theta_3(z)^4+\theta_3(z+1)^4$（回顾上面的（6）），因此 Y的傅里叶级数也具有非负系数。现在注意到， $\widetilde{g}(z+1)$可表示为

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(z+1)&=Z^3X^2+Z^2X^3+Z^3(Z-X)^2+Z^2(Z-X)^3\\&=\frac{1}{16}\left(6X^5+15X^4Y+10X^3Y^2+Y^5\right),\end{aligned}$$

因此也具有非负的傅里叶系数。 □

引理 2 的证明。定义

$$H(z)=\frac{\widetilde{G}(z)-\widetilde{G}(z+1)}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}(-d_{2m+1})q^{2m-1}=10240q+10007616q^3+\dots. \tag{26}$$

$H(z)$ 的两个关键性质是：(a) 函数 $t\mapsto H(it)=\sum_{m=1}^{\infty}(-d_{2m+1})e^{-\pi(2m-1)t}$ 在~单调不增（根据引理 4，每一项都单调不增）；以及 (b) 对所有$t>0$， $G(it)+240\le H(it)$（这由引理 4 以及 (24) 中常数项为 -240 这一观察可得）。现在注意到，根据 (5)–(7)、(14) 和 (24)， $H(z)$ 可以显式表示为

$$\begin{aligned}H(z)&=-\frac{1}{2}q^{-2}\Big[\theta_4^8(\theta_3^{12}+\theta_4^4\theta_3^8+\theta_2^8\theta_4^4-\theta_2^{12})-2-\theta_3^8(\theta_4^{12}+\theta_3^4\theta_4^8+\theta_2^8\theta_3^4+\theta_2^{12})+2\Big]\\&=\frac{1}{2}q^{-2}\left(\theta_2^8\theta_3^{12}+\theta_2^{12}\theta_3^8+\theta_2^{12}\theta_4^8-\theta_2^8\theta_4^{12}\right)=\frac{1}{2}q^{-2}\left(\theta_2^8(\theta_3^{12}-\theta_4^{12})+\theta_2^{12}(\theta_3^8+\theta_4^8)\right).\end{aligned}$$

因此，利用求值结果 (16)，我们得到对所有 $t\ge1$,

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(it)&\le-240+H(it)\le-240+H(i)\\&=-240+\frac{1}{2}e^{2\pi}\left(\frac{\Gamma(1/4)}{(2\pi)^{3/4}}\right)^{20}\left((2^{1/4})^{12}-1+(2^{1/4})^8+1\right)\\&=-240+\frac{1}{2}e^{2\pi}\frac{\Gamma(1/4)^{20}}{(2\pi)^{15}}(8+4)=-240+6e^{2\pi}\frac{\Gamma(1/4)^{20}}{(2\pi)^{15}}\approx287.02,\qquad\text{as claimed.}\end{aligned}$$ □

Pr ~引理 3 的证明。我们有策略地将 $F(z)$ 分成三个部分，定义 g

$$\widetilde{F}_1(z)=-480\pi iz+(28800\pi^2z^2-123840\pi iz-123840)q^2, \tag{27}$$

$$\widetilde{F}_2(z)=\frac{\pi^2}{18}q^{-2}(E_2E_4-E_6)^2z^2-2q^{-2}(E_4^2-1)+(-28800\pi^2z^2+123840)q^2, \tag{28}$$

$$\widetilde{F}_3(z)=-\frac{2\pi i}{3}q^{-2}E_4(E_2E_4-E_6)z+(480\pi iz+123840\pi izq^2), \tag{29}$$

因此，由 (12) 和 (23) 可得

$$\widetilde{F}(z)=\widetilde{F}_1(z)+\widetilde{F}_2(z)+\widetilde{F}_3(z). \tag{30}$$

现在我们给出以下几个初等观察：

~(a) 函数 $t\mapsto F_1(it)$ 在 $[1,\infty)$ 上单调递增，

证明。假设 $t\ge1$。经过简单计算可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\widetilde{F}_1(it)\right)&=480\pi e^{-2\pi t}\left(e^{2\pi t}+120\pi^2t^2-636\pi t+774\right)\\&\ge480\pi e^{-2\pi t}\left(e^{2\pi}+120\pi^2t^2-636\pi t+774\right).\end{aligned}$$

最后一个表达式是 $e^{-2\pi t}$ 与关于 t 的一个二次多项式的乘积，很容易~验证，该二次多项式在实数范围内恒为正。因此，我们证明了对于 $t\ge1$， $F_1'(t)>0$，从而证实了该结论。

~(b) 函数 $t \mapsto F_2(it)$ 在 $[1,\infty)$ 上单调递增。

证明。设 $(\alpha_n)_{n=2}^{\infty}$ 和 $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ 是傅里叶级数中的系数

$$(E_2E_4 - E_6)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n q^{2n}, \qquad E_4^2 - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n q^{2n}.$$

显然，$\alpha_n \geq 0$ （见 (4)），且对所有 n，$\beta_n \geq 0$ 。还容易验证 $\alpha_2 = 518400$和 $\beta_2 = 61920$。于是，检查 (28) 可知，

$$\widetilde{F}_2(it) = -2\beta_1 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2}{18}\alpha_n t^2 - 2\beta_n \right) e^{-\pi(2n-2)t}.$$

（与 $n = 2$ 对应的加数恰好被 (28) 中的项 $(-28800\pi^2 z^2 + 123840)q^2$ 抵消。）现在，对每个 $n \geq 2$，这个级数中的第 n 个加数显然是 t 的增函数，其中 $t \geq \quad {}^{1}\!/_{(n-1)\pi}$，特别是对 $t \geq 1$ 也成立。因此，当 $t \geq 1$ 时，$\overline{t \mapsto \widetilde{F}_2(it)}$ 也递增。

~(c) $F_3(it) \geq 0$ 对所有 $t > 0$ 均成立。

证明。设 $\delta_n{}_{n=1}^{\infty}$ 是傅里叶级数 $E_4(E_2E_4 - E_6) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n q^{2n}$. 中的系数。于是$\delta_n \geq 0$ 对所有 n 都成立，并且我们有 $\delta_1 = 720$ 和 $\delta_2 = 185760$。参照 (29)，我们便看到

$$\widetilde{F}_3(it) = \frac{2\pi t}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \delta_n e^{-\pi(2n-2)t} \geq 0,$$

因为与 $n = 1$、2 相关的各项已被 (29) 中的项 $(480\pi iz + 123840\pi izq^2)$ 抵消。

Fin最后，结合 (30) 与上述观察 (a)–(c)，我们得到，对于 $t \geq 1$ ，

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(it) &\geq \widetilde{F}_1(it) + \widetilde{F}_2(it) \geq \widetilde{F}_1(i) + \widetilde{F}_2(i) \\
&= 480\pi + 123840e^{-2\pi} + e^{2\pi}\Big(-\frac{\pi^2}{18}(E_2(i)E_4(i) - E_6(i))^2 - 2(E_4(i)^2 - 1)\Big) \\
&= 480\pi + 123840e^{-2\pi} + e^{2\pi}\left(2 - \frac{45\Gamma(1/4)^{16}}{8192\pi^{12}}\right) \approx 468.39, \qquad \text{as claimed.}
\end{aligned}$$

□

References

[1] T. M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. 施普林格，纽约，第2版，1990年。[2] B. C. Berndt. *Ramanujan's Notebooks, Part V*. 施普林格出版社，1998年。[3] B. Cloitre. 在线整数数列百科全书中的序列A068466。2002年以电子形式发布于 https://oeis.org/A068466。访问于2023年3月22日。[4] H. Cohn 和 N. Elkies. 球堆积的新上界。I. *Ann. Math.*, 157:689–714, 2003年。[5] H. Cohn、A. Kumar、S. D. Miller、D. Radchenko 和 M. Viazovska. 24维中的球堆积问题。*Ann. Math.*, 185:1017–1033, 2017年。[6] D. A. Cox. 高斯的算术几何平均数。 *Enseign. Math.*, 30:275–330, 1984年。[7] A. Slipper. 模形式的魔力：模形式理论与8维和24维中的球堆积问题。学士学位论文，哈佛大学，2018年。以电子形式发布于 https://legacy-www.math.harvard.edu/theses/senior/slipper/slipper.pdf。访问于2023年2月28日。[8] H. Tsumura. 关于某些艾森斯坦级数的类似物及其赫尔维茨型求值公式。

Bull. London , : – . [9]

Math. Soc. 40 289 297, 2008

M. Viazovska. 8维中的球堆积问题。 *Ann. Math.*, 185:991–1015, 2017年。[10] D. Zagier. 椭圆模形式及其应用。载于 R. Kristian（编），

The 1-2-3 of Modular Forms:

Lectures at a Summer School in Nordfjordeid Norway 1 103 2008 , , 第 – 页。

施普林格，。

Department of Mathematics, University of California, Davis, One Shields Ave, Davis CA 95616*Email address*: romik@math.ucdavis.edu