arXiv:2303.13436v1 [math.NT] 23 Mar 2023

辛 L-函数与辛 Reidemeister 扭率（模平方数）

AMINA ABDURRAHMAN 和 Akshay Venkates H

摘要。我们提出（并在某些限制条件下证明），处处非分歧的辛伽罗瓦表示的 L-函数中心值的平方类由一个普适的上同调公式给出。这一现象与量子化中元辛群的出现相呼应。在证明过程中，我们还确立了这一陈述的一个拓扑类比，涉及三维流形的 Reidemeister 扭率。

目录

1. 引言 1 2. 三维流形的 Reidemeister 扭率（模平方数）9 3. 曲线上辛局部系统的 L-函数 26 4. 定理 3.1 的证明：概要 34 5. 定理 3.1 的证明：步骤 (A) 39 6. 定理 3.1 的证明：步骤 (B) 48 附录 A. 庞加莱复形 61 附录 B. Reidemeister 扭率平方类与配边 67 附录 C. 圆周纤维化三维流形的显式计算 86 附录 D. 涉及超椭圆曲线的数值例子 90 参考文献 96

1. 引言

本文旨在探究辛型的 L-函数何时会在其中心点取平方值。正如我们将看到的，这个问题与算术和拓扑学中的多种现象有关（见 §1.3）。

我们在以下背景下研究这一问题。设 X 是有限域 k 上的一条射影光滑曲线，$X_{\bar{k}}$ 是其到 $\bar{k}$ 的基变换。设 $\rho\colon \pi_1^{\text{et}}(X) \to \mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 是一个取值于 ℓ 向量空间的辛局部系统。我们将范围限定在 ℓ 为特征不等于 2 且不等于 $\mathrm{char}(k)$ 的有限域这一情形；这一情形也涵盖特征零的情形，见 §1.3.2。

我们固定 $\sqrt{q} \in \ell$ q 的一个平方根。记 $H^i = H^i_{\text{et}}(X_{\bar{k}}, \rho)$ 为几何 étale 上同调，并假设 H^0 和 H^2 消失。于是，L 函数由下列特征多项式给出：

$$L(X, \rho, t) = \det(1 - t \cdot \mathrm{F} | H^1) \in \ell[t]. \tag{1.1}$$

该多项式是几何弗罗贝尼乌斯通过拉回作用于 H^1 所得。关于这一设定的更多细节，请参见 §3。此作用在缩放意义下保持一个正交形式：$\langle \mathrm{F}\ x, \mathrm{F}\ y\rangle = q\langle x, y\rangle$. 这意味着 L 函数关于 $t \mapsto \frac{1}{qt}$ 对称。我们关注它在对称中心 $t = \frac{1}{\sqrt{q}}$ 处的值，尤其是当该值非零时，关注它的平方类，即它在群中的像

$$\ell^\times/2 := \text{ nonzero elements of } \ell^\times \text{ modulo squares.}$$

定理：（正文中表述为定理 3.1）。假设
(a) ρ在几何上是满射，(b) ℓ 的阶模 8 为 ± 1，k 的阶模 8 为 1，且它是 ℓ 的素域中的一个平方，并且与 #Sp$_{2r}(\ell)$ 互素。

令 $L(X, \rho) \in \ell^\times/2$ 表示中心值 $L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}})$ 的平方类，假设该中心值非零（一般情形见 (3.4)）。那么我们有以下平方类等式

$$L(X, \rho) = \mathrm{trace}_X(\rho^* c_{\mathrm{et}}) \in \ell^\times/2 \tag{1.2}$$

其中
- $c_{\mathrm{et}} \in H^3(\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)\ \ell^\times/2)$ 是 (2，1) étale 陈类，见下文；- $\rho^* c_{\mathrm{et}}$ 是 c_{et} 到绝对 étale 上同调 $H^3(X, \ell^\times/2)$ 的拉回。- $\mathrm{trace}_X : H^3(X, \ell^\times/2) \to \ell^\times/2$ 是迹同构。

该定理与现有范式不太契合。关键在于，辛 L函数的中心值，若按平方数取模来看，是一个非常简单的全局上同调不变量。我们认为，该定理应被视为元辛结构在伽罗瓦表示理论中所起作用的证据（见 §1.3.1）。我们还认为，(a) 和 (b) 中的大多数条件，或许甚至全部条件，都可以去掉；一些简单的数值例子见 §D。

具体而言，类 c_{et} 由辛群分类空间上的典范向量丛的第二陈类导出。令 R 为任意含单位元且 2 可逆的交换环。我们考虑 Spec R上的平凡丛 R^{2r}，但将其视为关于离散群$\Gamma := \mathrm{Sp}_{2r}(R)$作用的等变丛；该群在基底 Spec$R$上平凡作用。于是，等变 étale 陈类给出 $c_2 \in H^4_\Gamma(\mathrm{Spec}\ R, \mu_2)$。正如 Soulé [53, 第 258], 页所解释的，取帽积可从 c_2 中提取一个同态，在上述文献中记作 c_{31}，

$$c_{\mathrm{et}} : H_3(\mathrm{Sp}_{2r}(R), \mu_2) \to H^1(R, \mu_2), \tag{1.3}$$

其中 $H_3(\Gamma, -)$ 是 Γ 的群同调，也就是分类空间$B\Gamma$的同调。假设左端或右端有限，则可以取对偶得到

$$c_{\mathrm{et}} \in H^3(\mathrm{Sp}_{2r}(R), H^1(R, \mu_2)) \tag{1.4}$$

这非正式地说是 c_2 的一个 Künneth 分量。这就是上文定理中出现的类。

在 §1.1 中，我们将说明这一条定理的一个拓扑类比，它也将在该定理的证明中发挥关键作用。接着，我们会在 §1.2 中概述证明策略，最后在 §1.3 中讨论若干相关主题，希望借此展现周边数学的丰富内涵。

1.1. 拓扑学中的定理。 证明中的一个关键步骤，是给出该定理的一个纯拓扑类比；这个类比本身也颇有研究价值。尽管这条定理实际上涉及三维流形，我们还是从曲面的角度入手，以凸显它与 L-函数之间的类比。在这一类比中，$X_{\bar{k}}$ 将成为一个配备有辛局部系统 ρ 的曲面 Σ（紧致、定向且无边界），其中 ρ 是由 ℓ构成的向量空间。我们继续假设 $H^0(\rho)$ 为零（因此 $H^2(\rho)$ 也为零）。

映射类 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 将发挥弗罗贝尼乌斯的作用。假设$f^*\rho \simeq \rho$。固定这样一个同构后，我们将局部系统 ρ 扩张为映射环面 M_f 上的局部系统 ρ_f，其中 M_f 是 f的映射环面。在这种情况下，f^* 定义了正交空间 $H^1(\Sigma,\rho)$上的一个等距变换。接下来我们将证明

$$\text{spinor norm}\big(f^* : H^1(\Sigma,\rho) \to H^1(\Sigma,\rho)\big) = \mathrm{trace}_{M_f}\left(\rho_f^* c_{\mathrm{et}}\right), \tag{1.5}$$

其中

- 左端的有理数域 ℓ 上的正交群的旋量范数，是到 $\ell^\times/2$ 的唯一同态，它将使非退化向量v 取反的反射映到 $\langle v,v\rangle$的平方类；- 上述右端的解释方式与 (1.2) 类似。现在，迹是与 M_f的基本类的配对。

为了了解 (1.2) 与 (1.5) 的关系，注意到我们可以写成 $L(X,\rho,\frac{1}{\sqrt{q}}) = \det(1-\bar{\mathrm{F}}|H^1)$，其中 $\bar{\mathrm{F}}$ 表示“归一化 Frobenius” $\bar{\mathrm{F}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\mathrm{F}$，此时它是 H^1 上的正交自同构。现在，若 f 是一个偶数维、判别式为平方且没有特征值 1 的正交空间的自同构，则有（Zassenhaus，见 (B.31)）

$$\det(1-f) = \text{spinor norm}(f) \text{ modulo squares}. \tag{1.6}$$

由此，(1.5) 是 (1.2) 的精确拓扑类比。通常最好使用旋量范数，而不是 (1.6) 的左端：它显然是一个同态，而且即使当 f 有特征值 1 时也有意义。

事实上，结果 (1.5) 可由一个关于所有三维流形的定理推出，只需专门考虑圆周纤维化的三维流形这一情形。对于任意光滑三维流形 M 及其上的局部系统 ρ（不一定是辛的）组成的一对 (M,ρ)，我们可以赋予其 ***Reidemeister*** 扭率。它总可以看作某个行列式线中的元素，但在满足进一步条件时可以转化为一个数。例如，若 ρ 无环且其行列式为 1，则这个不变量可视为取值于 $\ell^\times/\{\pm 1\}$。若 ρ 是辛的且 M 定向，则情况会进一步改善，正如我们在 §2 中所解释的：无论 ρ 是否无环，都可以定义 Reidemeister 扭率

$$RT(M,\rho) \in \ell^\times/2$$

平方类，无需进一步选择。[1] 除了解决符号歧义相关的问题之外，这并不困难；我们将在附录 B 中详细讨论这些问题。

我们实际要证明的是关于 $RT(M,\rho)$ 的一个公式，而 (1.5) 是该公式的推论。此结果对一般的域 ℓ 都成立，且对 ρ 的满射性没有任何要求。事实上，我们有如下

拓扑定理：（在正文中表述为定理 2.1。）

$$RT(M,\rho) = \pm\mathrm{trace}_M(\rho^* c_{\mathrm{et}}) \tag{1.7}$$

[1]“Reidemeister 扭率”这一说法用于若干相关概念；若要明确所指，我们将此 $RT(M,\rho)$ 称为“Reidemeister 扭率平方类”。

其中符号取决于半特征数的模 4 类。

关于如何从这一结果推导出 (1.5)，请参见引理 C.2.1。

1.2. **基本证明策略**。虽然这些定理的证明占据了本文其余部分，但总体策略可以很容易地概述。§2.2 将更详细地概述拓扑论证，§4 将更详细地概述算术论证。

拓扑定理实际上是证明算术定理不可或缺的一环！

除了这种依赖关系，两者的策略都颇为相似。在这两种情形下，我们研究的是流形 M 或曲线 X 上的一个 ℓ-模局部系统。

关键点如下：

(a) 源的变化：我们能够将陈述的有效性从一个 M转移到另一个 M'，或从一个 $X/_k$ 转移到另一个 $X'/_{k'}$。具体做法如下：

– 在拓扑学中，利用 Reidemeister 扭率的配边不变性；– 在算术中，利用存在配备适当非阿贝尔层结构的曲线模空间这一事实。这里使用拓扑定理来证明该模空间一般纤维上的所需陈述，从而能够在亏格相同的曲线之间进行转换。利用分歧覆盖的论证则可以在不同亏格之间进行转换。

(b) 目标的变化：我们能够将陈述的有效性从一个域ℓ转移到另一个域 ℓ'：– 在拓扑学中，利用代数 K-理论的定理，为 S 数域的整数环构造“足够多”的例子，然后使用图表$\ell \leftarrow S \rightarrow \ell'$。– 在算术中，利用曲线 X上的相容局部系统的例子。这些例子是通过切片 Hilbert-Siegel 模簇构造的。必须谨慎操作，以确保得到非零 L-值。

综合运用这些技巧，可以从少数已知情形出发，制定策略来证明完整定理。之所以能够利用 (a) 型和 (b) 型的各种步骤涵盖所有可能情形，是因为低维配边群非常简单，且有同调描述。这一点在拓扑学中表现得十分直接，在算术中则不那么明显，它是某个不可约性陈述的关键要素——见引理 5.1.1。

因此，接下来需要构造一些例子，以便明确验证拓扑定理的陈述。事实上，我们将问题归结为构造一个例子：在 $\ell =$ **有理数域**(i)上存在一个辛局部系统，其 Reidemeister 扭率不是平方数。附录 C 中通过直接计算完成了这一构造。我们还在附录 D 中给出了涉及函数域的数值例子，但这些例子并非主要证明所必需。

这种论证方式有一个令人遗憾的缺点：它几乎无法让人了解 (1.2) 的右端究竟从何而来。

1.3. **讨论**。

1.3.1. 周期与边界条件的对偶性。 这项工作的一个主要动机，是更好地理解论文 [7]，中遇到的现象及其在物理学文献中的相关结果。我们从 [7]中仅摘取这一类比中最相关的部分。

辛伽罗瓦表示 ρ 的 L-函数的构造，类似于在辛向量空间上构造函数环。事实上， $H^1(X_{\bar{k}},\ \rho)$带有一个正交配对，但也可以视为奇奇偶性下的辛向量空间。于是，其上的“函数环”就是它的外代数；根据 (1.1)，外代数上的弗罗贝尼乌斯迹可还原 L-函数。相应地，对 ρ 的 L-函数取平方根，类似于对 $H^1(X_{\bar{k}},\ \rho)$进行几何量子化——非正式地说，就是对其函数环取平方根。现在， [7] 中研究的一般对偶性表明，对 $H^1(X_{\bar{k}},\ \rho)$进行几何量子化的问题，应类似于自守形式研究中更为熟悉的其他量子化问题；尤其是，类似于如何将 p-进群的元辛覆盖完全分裂这一问题。

让我们从上同调观点来讨论这个分裂问题。暂且设 ℓ 是一个非阿基米德局部域，则拓扑群 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 有一个唯一的拓扑双重覆盖，即元辛群，它给出一个上同调类

$$\mathsf{m} \in H^2(\mathrm{Sp}_{2r}(\ell), \{\pm 1\}). \tag{1.8}$$

这个类 m 也可以看作 (2，2) étale 陈类：如果我们仿照 (1.4) 的做法，只是将次数 (3，1) 替换为 (2，2)，便得到一个属于 $H^2(\mathrm{Sp}_{2r}(\ell))$ 、系数取自 $H^2(\ell,\ \mathbf{Z}/2)$ 的类。局部类域论将最后提到的这个群与 $\{\pm 1\}$ 等同起来。由此得到的 $H^2(\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)\ \pm 1)$ 中的类，正是前面所述的“元辛”类 m。

类 m 可以视为在辛向量空间 ℓ^{2r} 上量子化 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 作用的障碍；这正是它在 [64] 中的来源。通常，这一障碍限制到某个合适的子群 ρ 后会消失： $G \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$。这在研究 θ-对应中发挥着重要作用（例如参见 [31]）。这一消失由 m 的拉回控制：

$$\text{the action of } G \text{ on } \ell^{2r} \text{ can be quantized} \iff \rho^*\mathsf{m} = 0. \tag{1.9}$$

我们的主要结果表明， $L(X,\ \rho)$ 是一个平方，当且仅当 $\rho^* c_{\mathrm{et}}$ 消失。这个条件与 (1.9) 非常相似；事实上，它正是基于这一类比猜想出来的。这两种情形之间并无形式上的联系。实际上，在我们的定理背景下，障碍属于 H^3，而非 H^2。尽管如此，将（在我们定理背景下的）条件 $\rho^* c_{\mathrm{et}} = 0$ 视为与（在上述背景下） ρ 提升到元辛群的条件性质相似，似乎是合理的。

1.3.2. 相容局部系统。 我们的主定理（见 (1.2)）讨论了 ℓ为有限域的情形。然而，通过约化，它也控制了所有特征零环上的情况。

一个特别重要的例子类来自伽罗瓦表示的相容系统。在此背景下，在一些温和的附加条件下，该定理确定中心 L值模平方数，相差一个2。详情见3.10。2的损失源于定理陈述中的限制 $\ell \equiv \pm 1$(8)。如果放宽定理中的“几何满射性”断言，我们便可对有限像表示 $\pi_1(X) \to \mathrm{Sp}_{2r}(E)$推导出类似结果，其中 E 是一个数域（因此也适用于 $E = \mathbf{R}$ 或 $E = \mathbf{C}$，因为任何此类 ρ 都可经由一个取值于$\mathrm{Sp}_{2r}(E)$、且 E 为数域的表示分解）。

1.3.3. 函数的正性 L。 我们将说明，如何将我们的定理视为对 L函数中心值正性的一种代数观点；这种正性先验地属于解析现象。

在本节讨论中，我们假设定理的陈述对$\ell = \mathbf{R}$ 仍然成立（讨论见 §1.3.2），也就是说，现在取 $\rho\colon \pi_1(X) \to$ 辛群$_{2r}(\mathbf{R})$，为有限像的非分歧伽罗瓦表示。于是 $L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}})$ 是一个实数，我们假设它非零。已知它为正：这是黎曼猜想的推论，因为容易验证，当 t 很小且为正时， $L(X, \rho, t)$ 为正，并且它在区域 $|t| < 1/\sqrt{q}$ 内没有零点。我们将看到，同样的现象也出现在我们定理陈述的右端：事实上，我们将看到，迹$_X(\rho^* c_{\mathrm{et}}) \in \mathbf{R}^\times/2$ 是平凡的。

为此，只需证明 $H^3(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbf{R}), \mathbf{R}^\times/2)$ 中的 étale 陈类是平凡的。我们利用这样一个事实（[53, IV.3.1], [63, 命题 2.8]）：étale 陈类与 Bockstein同态相容：

$$\begin{array}{ccc} H_3(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & H_2(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2) \\ \downarrow{\scriptstyle c_{31}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{22}} \\ H^1_{\mathrm{et}}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^2_{\mathrm{et}}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/2) \end{array} \tag{1.10}$$

在上面的图表中，我们按照 Soulé 的编号，为两个 étale 陈类标注了不同的下标，以便区分它们。因此， βc_{31}作为一个取值于 $H^2_{\mathrm{et}}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/2)$ 的 Sp$_{2r}(\mathbf{R})$ 上的 H^3 类， $\simeq \mathbf{Z}/2$ 实际上是 c_{22} 在 Sp$_{2r}(\mathbf{R})$,$\mathbf{Z}/2$ 中的像；这里的 c_{22} 被视为一个元素，而该像是由 Sp$_{2r}(\mathbf{R})$ 的上同调中的 Bockstein同态给出的。但 c_{22} 来自拓扑双重覆盖（见 (1.8)），该覆盖可提升为一个拓扑 $\mathbf{Z}$-覆盖——即 Sp$_{2r}(\mathbf{R})$ 的万有覆盖，因此 c_{22} 在 Bockstein同态下的像为零。所以 βc_{31} 为零；又由于 β 是一个同构， c_{31} 恒为零。（注意，我们确实用到了这样一个事实：这里讨论的是 Sp，而非 GL。）

因此，上同调形式体系以代数方式刻画了 $L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}})$的非负性。（不过，我们应当指出，这种非负性——它是黎曼猜想的推论——实际上也用到了我们的定理证明中。）

1.3.4. 与周期公式的关系。 在许多由自守形式产生的情形中，可以通过显式公式得知，辛 L-函数 $L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}})$是一个平方：

$$L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}}) = (\text{explicit automorphic period})^2 . \tag{1.11}$$

这确实与我们的结果相符。在我们所知的所有这类情形中， π_1 表示都经由一个子群 $G \leqslant \mathrm{Sp}_{2r}$ 分解，而 c_{et} 在该子群上消失。例如，Gross-Prasad猜想在以下情形中给出了这样的预言

$$G = \mathrm{SO}_{2r_1} \otimes \mathrm{Sp}_{2r_2} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Sp}_{4r_1r_2},$$

并且可以验证 $\iota^* c_{\mathrm{et}}$ 消失。这是因为 $\iota^* c_2$（即第二陈类的拉回）在 $H^4(BG)$ 中可被 2 整除。值得注意的是，从 (1.9) 的角度来看， $\iota^* c_2$ 模 2 消失也意味着 Sp$_{4r_1r_2}$ 上的元辛覆盖在 G 上分裂。

1.3.5. 模平方数的阶X 与映射类群的稳定拓扑。考虑由光滑射影曲线族 $\pi: \mathcal{C} \to X$ 得到的 ℓ-进表示相容系统 ρ_l，或者等价地，考虑从 X 到亏格为 g 的曲线模空间 $\mathfrak{M}_g$ 的一个态射。具体而言，此时 ρ 由 $R^1\pi_*\mathbf{Z}_\ell(1/2)$ 给出；半扭转是为了确保 ρ 确为辛的，并且要求 q 在 $\mathbf{Z}_\ell$ 中有平方根，但如 §3.4 所述，通过对设置稍作修改即可避免这一要求。

在这种情形下，中心值 $L(X, \rho_\ell, \frac{1}{\sqrt{q}})$ 与相关雅可比簇族的 Tate-Shafarevich 群 X 的阶密切相关。特别是，[43] Poonen 和 Stoll 关于这一问题的工作表明，在这种情形下，$L(X, \rho_\ell, \frac{1}{\sqrt{q}})$ 是有理数域$\mathbf{Q}(\sqrt{q})$ 中的一个平方数。[2]

让我们从我们的视角解释这一现象。令 ℓ 为一个奇素数；我们也用同一个字母表示相应的、阶为该素数的有限域。如果我们假设（看来很可能如此）主陈述 (1.2) 在不施加条件 (a) 和 (b) 的情况下仍然成立，那么 $L(1/2, \rho_l)$ 模 l 的平方类，是通过将 étale 陈类从 $H^3(B$辛群 $\mathrm{Sp}(\ell)\ \ell^\times/2)$ 拉回到 X 并对其积分而得到的。这个拉回经由 $H^3(\mathfrak{M}_g, \ell^\times/2)$ 中的一个类分解；看来很可能这个 $H^3(\mathfrak{M}_g, \ell^\times/2)$ 中的类实际上是平凡的，这从另一个角度说明了 X 的阶为何是平方数。我们尚未证明这种平凡性，但已验证它至少在复纤维上是平凡的。这一计算可以在解析拓扑中进行，因而也可以在离散群的群上同调中进行。接着使用关于稳定映射类群 [55, 35, 48] 的已知（且非平凡的）计算。由此可见，我们的陈述与算术中相当微妙的特征有关。

1.3.6. *Meyer* 符号余循环。公式 (1.5) 可视为对 W. Meyer 一项结果的细化 [38]（另见 [3]）。我们继续采用 §1.1 中的设定。当 ℓ 为实域时，Meyer 用以下形式的公式确定了二次空间 $H^1(\Sigma, \rho)$ 在 ℓ 的 Witt 群 W_ℓ 中的类：

$$\text{Witt class of } H^1(\Sigma, \rho) = \mathrm{trace}_\Sigma(\rho^*\mathsf{M}), \tag{1.12}$$

其中 M 是一个显式的 2-余循环，定义在 $\mathrm{Sp}(\ell)$ 上，取值于 W_ℓ；ρ^*M 给出 $H^2(\Sigma, W_\ell)$ 中的一个类，可以在 Σ 上积分。正如前面提到的，Meyer 研究的是 $\ell = \mathbf{R}$ 的情形，此时“Witt 类”指符号，且 $W_\ell \simeq \mathbf{Z}$；但其方法依赖于将曲面切割成裤子曲面，适用于其他域。

在 §1.1 中，我们研究的不是单个曲面 Σ，而是纤维为 Σ 的族 $M_f \to S^1$。每个纤维的上同调给出 ℓ 的 Witt 群中的一个类；沿 S^1 的变化则给出一个更高 Witt 群中的类，即 Grothendieck-Witt 谱 GW 的 π_1。旋量范数的存在产生了一个映射 $\pi_1\mathrm{GW} \to \ell^\times/2$，而这正是 (1.5) 所捕捉的信息。因此，我们可以将 (1.5) 视为 Meyer 符号公式的高阶类比。不过请注意，像 (1.5) 这样的上同调公式的存在，很可能是低维情形的一种特殊性质。

[2]证明如下。我们只需考虑中心值非零的情形，此时 BSD 猜想已知成立，见 [6, §4]。不失一般性，我们可以将定义 X 的基域 k 替换为一个奇数次扩张，因为如同 (1.6) 中那样，所涉及的平方类至少在模任意素数约化后，都可以表示为旋量范数，而旋量范数在经过奇数次幂后保持不变。最后，经过足够大的此类基变换后，[43, 推论 12] 的判据适用于“$N = 0$”。

1.3.7. 一般性。理想情况下，应将这些结果推广到以数域取代 X_k 的情形，或允许 ρ 分歧的情形。

例如，对于 $(X,\ \rho)$ 且 ρ 分歧的情形，我们希望能说明，公式 (1.2) 中的“缺陷”可以表示为分歧位点处局部不变量的乘积，并且这些局部不变量是局部 ε-因子的精化。其一般结构可能与 M. Kim [29] 所考察的情形有关。（另可参见 Deligne 关于局部根数的工作 [14] 。）

1.4. **符号**。在全文中，符号问题颇为微妙，最终源于复形行列式中的符号。这是该领域众所周知的问题。我们已尽力在附录 B 中对这一棘手问题作出所需内容的自足论述。尽管如此，读者若愿意，也可以通过对 $\{\pm 1\}$ 取商来忽略这个问题，即对 $\ell^\times/2$ 按 $\{\pm 1\}$ 取商。

1.5. **记号**。 环（通常记作 R）总是交换的、含幺的，并且 2 在 R 中可逆。我们常常会限制在正规整环上，但会明确说明这一点（整环的“正规”是指“在分式域中整闭”）。如果一个环是某个$\mathbf{Z}[x_1,\dots,x_n]$的商环，就称它是有限生成的。

$\mathrm{Sp}_{2r}(R)$ 表示标准辛群，即由生成元 $e_i, f_i (1 \le i \le g)$ 构成的自由 R-模的自同构群，其形式为 $\langle e_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ and $\langle e_i, e_j\rangle = \langle f_i, f_j\rangle =$1。我们用 Sp 表示这些群关于显然的包含映射所构成的直接极限：

$$\mathrm{Sp}(R) := \varinjlim_g \mathrm{Sp}_{2r}(R).$$

$\mathrm{GSp}_{2r}(R)$ 表示辛相似变换群，即对 R^{2g} 的自同构，它们按上述方式缩放形式 $\langle -,-\rangle$ 。缩放特征给出一个同态 $\mathrm{GSp}_{2r}(R) \to R^\times$，或代数地表示为 $\mathrm{GSp}_{2r} \to \mathbb{G}_m$。

符号 ℓ, k 和 K 表示域——且特征始终不等于 2。记号 $K^\times/2$ 表示 K中的平方类（或模平方数的类）的集合，即 $K^\times$ 除以平方数子群所得的商群。

我们经常研究定义在 k 上的曲线，以及一个系数取自ℓ的局部系统。

若 C 是一个有限维 K-向量空间的有界复形，且其上同调满足奇数次数 d 上的庞加莱对偶，因此 $H^i\mathsf{C}$ 和 $H^{d-i}\mathsf{C}$ 是对偶向量空间，我们将 欧拉半特征$\chi_{1/2}(\mathsf{C}) \in \mathbb{Z}$ 定义为

$$\chi_{1/2}(\mathsf{C}) = \sum_{j<d/2} (-1)^j \dim H^j(\mathsf{C}). \tag{1.13}$$

我们主要关注这个模 2 的不变量，此时可以忽略符号。

若 (W, q) 是域 K 上的非退化二次空间，则其判别式

$$\mathrm{disc}(W) \in K^\times/2$$

定义为 $\det(\langle x_i, x_j\rangle)$ 的平方类，其中 x_i 取任意 K-基，$\langle x, y\rangle$ 为其相应的双线性型，取值于 $\langle x, x\rangle = q(x)$。

记号 $[\dots]$ 表示“…的行列式”。该记号将在多种情境中使用。特别地，对于域 K 上的向量空间 W，行列式 $[W]$ 表示最高

非零外幂，即 $\wedge^{\dim W} W$；对于 K 上的向量空间复形 C， [C] 的含义将在附录 B 中说明。

弗罗贝尼乌斯元素的记号将在 (4.2) 中给出。

X 通常表示一条曲线， ρ 表示一个局部系统。通常， X 定义在有限域 k 上，其大小记为 q，特征记为p；而 ρ 具有 ℓ-系数，其中 ℓ 是一个有限域，其大小也记为 ℓ，特征记为 ℓ_0。我们记作 $\ell = \ell_0^s$。

之后， $\delta(X, \rho)$ 将表示与 (X, ρ) 相关联的 étale 陈类与中心 L-值之差。

簇、概形或拓扑空间的上同调群 Y 以$\mathbf{Z}/2$ 为系数时，例如，记作 $H^i(Y, \mathbf{Z}/2)$。这里的上同调，在簇或概形的情形下指绝对 étale 上同调[3] ，在拓扑空间的情形下指奇异上同调。由于复代数簇的 étale 上同调与其点的奇异上同调在有限系数下相同，这种通用记法不会引起混淆。若要强调我们讨论的是 étale 上同调，则加上下标 et： $H^i_{\mathrm{et}}(Y, \mathbf{Z}/2)$。若 S 是一个环， $H^i(S, \mu_2)$表示 Spec S 的、以 μ_2为系数的 étale 上同调。

1.6. **致谢**。本工作的第一个版本以 A.A. 的普林斯顿博士论文形式发表， [2]。当前版本经过修订，行文有所简化，尤其是论文的算术部分。

A.A. 谨此感谢 Minhyong Kim 六年前分享他的算术 Chern–Simons 理论论文；这些论文是本研究的重要动机和灵感来源。

A.A. 感谢 Alexander Beilinson、Pierre Deligne、Nicholas Katz、Minhyong Kim 和张寿武，在论文初稿阶段给予启发性的讨论和宝贵意见；也感谢 Aaron Landesman 和姚子健，就论文中提出的问题与我进行了诸多交流。

A.V. 谨此感谢合作者 David Ben-Zvi 和 Yiannis Sakellaridis，在过去五年中与我进行了无数次极具影响力的讨论；本文源于一次尝试，旨在更好地理解 [7] 中发展的一些一般性理念所带来的数值后果。A.V. 也感谢 Edward Witten 和 Soren Galatius 富有启发性的交流。

A.A. 和 A.V. 都要感谢 Nicholas Katz 教授我们（两次授课相隔二十年）§6.4 中使用的一些技巧。

本文还特别感谢 Will Sawin 提出了富有洞见的意见，尤其是建议采用 §5.1 中的框架——也就是说，拓扑陈述或许可以作为证明算术定理的第一步。这一建议对我们至关重要。

2. 流形的 Reidemeister 扭率，模平方数3

本节的目标是证明引言中关于三维流形的 Reidemeister 扭率的陈述 (1.7)，由此可推出公式 (1.5)。更一般的

[3]这里的“绝对”仅仅是指，对于定义在某个域上的簇，我们取其 étale 上同调，而不是取它基变换到代数闭包后的 étale 上同调。

陈述的优点在于，可以运用配边技术对其进行分析；这些技术要求考虑一般的三维流形，而不只是纤维化流形。

2.1. **定理陈述**。 设 K 为一个域，以下假设其特征不为 2。取一个 $2k+1$-流形 M，以及一个由 K-向量空间构成的局部系统 ρ，其中 ρ 在每个纤维上都配备一个局部常值

- （k 奇）辛配对。
- （k 偶）非退化正交配对和一个自对偶体积形式；在此情形下，我们还要求 ρ 是偶维的。[4]

选取一个基点和一组基后，我们便得到一个表示（记号略有滥用，仍用同一个字母表示）：

$$\rho : \pi_1(M, *) \to \begin{cases} \mathrm{Sp}_{2r}(K), k \text{ odd}, \\ \mathrm{SO}_{2r}(K), k \text{ even} \end{cases} . \tag{2.1}$$

在这种情况下，Reidemeister 扭率理论赋予一个不变量

$$\mathrm{RT}(M, \rho) \in K^\times/2$$

到 M 和 ρ。我们将在 §2.3 中简要回顾这一点，并在附录中更详细地讨论。当M 是如 §1.1 所述产生的三维流形，且 ρ 如该节所述时，RT(M, ρ) 除了符号之外，等于式 (1.5) 中出现的 f^* 的旋量范数，证明见引理 C.2.1。于是，我们的主要拓扑定理如下

定理 2.1. 设 M 是一个三维流形， K 是一个域（特征不为 2），且ρ： $\pi_1(M) \to \mathrm{Sp}_{2r}(K)$ 是 M上的一个辛局部系统。那么，我们在 K中有一个平方类等式

$$(-1)^{\chi_{1/2}(M,\rho)/2} RT(M, \rho) = \int_M \rho^* c_{\mathrm{et}} \tag{2.2}$$

其中 c_{et} 如式 (1.4) 所述，并且 $\chi_{1/2}(M, \rho)$ = 维数 $H^0(M, \rho)$ − 维数 $H^1(M, \rho)$ 是半特征数（关于其为何为偶数，见 §2.3.4）。

2.2. **证明思路**。 证明的基本思路沿袭了 Hirzebruch 证明符号定理 [23] 的方法。我们在（§2.4）中指出， $RT(M, \rho)$ 是一个配边不变量。这意味着它源自 $\mathrm{BSp}(K)$ 的一个泛上同调类。接着我们论证，它在改变 K 时具有足够强的性质，因此只需在一个情形下手工验证，就能证明等式（2.2）。

为了完成这一论证，我们需要让 ρ 的系数具有更大的灵活性，因此将证明一个相应的结果，其中以正规整环 R替代 K。

我们将把这个问题（§2.5、§2.6）表述为验证两个函子自然变换之间的相等性：

$$c_{\mathrm{et}}, \mathfrak{R} : \mathcal{B} \to \mathcal{H}. \tag{2.3}$$

[4] ρ 的纤维于是是一个偶数维正交向量空间 W，配有 $x \in \det W$及 $\langle x, x\rangle = 1$，特别地， W 的判别式等于 1。

它们从正规整环（总是包含 $1/2$）到阿贝尔群： $\mathcal{H}$ 将 R 映射到$H^1(R,\mu_2)$，而 $\mathcal{B}$ 将 R 映射到带有 R 系数的辛群的三阶同调。从现在起， $H^1(R,\mu_2)$表示 Spec R 的 étale 上同调，其系数为 μ_2；它分类配备了 $\mathcal{L}^{\otimes 2}$的平凡化的线丛 $\mathcal{L}$ 的同构类。(2.3)中的自然变换是 étale 陈类 c_{et} 和 Reidemeister 扭率 $\mathfrak{R}$。

理想情况下，我们可以通过充分扩充环的范畴，使这些函子变得可表，并研究其泛例。但我们采用一种更为特设的方式，基本上是将所有问题都归约到有限域上。

(a) 在 §2.9 中，我们证明等式 $c_{\mathrm{et}} = \mathfrak{R}$ 可以从一个有限域转移到另一个有限域。更确切地说，如果所需的陈述 $c_{\mathrm{et}} = \mathfrak{R}$ 对 R 一个有限域 $\mathbf{F}_q$成立，那么只要能用一个配备了 $\mathcal{B}(S)$ 中适当类的特征零环 S“连接”$\mathbf{F}_q$ 和$\mathbf{F}_{q'}$，我们就能推出该陈述对另一个有限域 $\mathbf{F}_{q'}$ 也成立。(b) §2.10 提供了 (a) 中“连接”论证所需的特征零环 S及其在 $\mathcal{B}(S)$ 中的适当类。这用到了代数K理论的结果。更确切地说，我们利用 Merkurjev–Suslin 证明的 étale 陈类的满射性，以及一些同调稳定性结果，以便在辛群 Sp 与 GL 之间转换。(c) 接下来，在 §2.11 中，我们引入“控制域”的概念，用它来索引满足 $c_{\mathrm{et}} = \mathfrak{R}$的有限域集合；在 §2.12 中，我们利用这一概念给出一种方法，以产生大量满足 $c_{\mathrm{et}} = \mathfrak{R}$的有限域。该方法最精确的形式见引理 2.12.3。(d) 在 §2.13 中，我们运用引理 2.12.3 的方法，证明一密度为一的素域 $\mathbf{F}_p$ 集合满足 $c_{\mathrm{et}} = \mathfrak{R}$。论证到此处，我们依赖于附录 C 中计算出的显式例子。(e) 在 §2.14 中，我们利用上述密度陈述，推出该陈述对所有特征零有限生成 R均成立。这用到了到有限域的态射和切博塔廖夫密度定理。借助在 (§2.15) 中详细阐述的提升论证，我们可以证明 $c_{\mathrm{et}} = \mathfrak{R}$ 实际上对所有特征不为 2 的有限域都成立；由此最终在 §2.16 中推出定理 2.1。

在本节中， $H_i(Z)$ 始终表示拓扑空间 Z的系数取$\mathbf{Z}$ 的同调。

2.3. **关于 Reidemeister 扭率的回顾及 Reidemeister 扭率平方类的定义**。我们简要回顾 Reidemeister 扭率的一些重要事实，更细致的讨论留待附录。特别是，此处我们只讨论扭率在相差一个符号的意义下的情形；附录将确定其符号。可以通过始终使用$\mathbf{Z}[\sqrt{-1},\frac{1}{2}]$代数而非$\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$代数来避免所有符号问题，因此$-1$ 仍为一个平方。

设 (M,ρ) 如 §2.1 中所述，因而 $\dim(M) = 2k+1$。令 C 为 M 的上链复形，其系数取自由 ρ 定义的局部系统。这是一个有限维的K-向量空间复形，并具有：

(a) 一个 $(-1)^k$-对称配对 $\mathrm{C} \otimes \mathrm{C} \to K[-2k-1]$ （定义见附录 §A），以及 (b) 行列式 $[\mathrm{C}] := \bigotimes (\det \mathrm{C}_j)^{(-1)^j}$ 中一个特定的类；通常，向量空间的行列式就是其最高外幂。下文我们

将这一结构扩张为一个函子 r

完美复形、拟同构 $\longrightarrow$（分次） K-线，

（详情请参见附录 §B；识别 $[\mathsf{C}] \simeq \bigotimes [\mathsf{C}_j]^{(-1)^j}$ 是在 §B.4.1 中构造的）。

现在我们更详细地讨论 (b)。选取一个与其光滑结构相容的三角剖分。令 X_j 为 j-单形的集合，则

$$\mathsf{C}_j = \bigoplus_{x \in X_j} V_x$$

其中 V_x 可以描述为 ρ_x 与一个定向线 o_x的张量积。根据定义，这条定向线是由 x 的所有定向（即顶点排序）张成的一维向量空间，并满足以下条件：改变一个定向时，相应向量乘以该置换的符号。对于 $y \subset x$ 的一个面，有一个映射$o_x \to o_y$，它将 x 的一个定向映到 y 的一个定向：将缺失的顶点放在最后，再将其删除。

由于每个 ρ_x 的维数都是偶数，为了识别 $\rho_x \simeq V_x$ 而任意选定一个定向后，在 V_x 上得到的体积形式不依赖于这一选择。此外，同样由于每个 V_x 的维数都是偶数，将它们张量积起来便得到 $\mathsf{C}j$ 上的一个体积形式，它不依赖于排列顺序。考察细分可知，$[C]$ 中由此得到的元素与三角剖分无关；也就是说，给定两个这样的模型 C 和 C'，拟同构 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ 会将 $[\mathsf{C}]$ 中的点映到 $[\mathsf{C}']$ 中的点。

2.3.1. *Reidemeister* 扭率平方类。存在一个自然的 K-线同构

$$[\mathsf{C}] \simeq [H^*\mathsf{C}]. \tag{2.4}$$

其详细构造见 §B.4.2。右端的 $H^*\mathsf{C}$ 被视为一个零微分复形。

如果 $H^*\mathsf{C}$ 消失，那么右端有一个显然的优选基，将 (b) 中的特定类通过由此得到的 $[\mathsf{C}] \simeq K$ 映射，便在 $K^\times$ 中得到一个类，即 K 的一个非零元素。这个元素通常称为 Reidemeister 扭率，其定义要求复形具有无环性。然而，它不要求 ρ 上有自对偶结构。如果 ρ 是自对偶的，那么即使复形不一定无环，也可以考虑 $K^\times/2$ 中相应的平方类：

忽略符号上的细节，(2.4) 的右端可因式分解为

$$[H^*\mathsf{C}] \simeq \bigotimes [H^j\mathsf{C}]^{(-1)^j} = \bigotimes_{j \le k} \left([H^j] \otimes [H^{2k+1-j}]^{-1}\right)^{(-1)^j}, \tag{2.5}$$

这里我们将项 H^j 和 H^{2k+1-j} 归为一组，因为它们互为对偶。任意选取 $[H^j]$ 中的一个类，便会在 $[H^{2k+1-j}]$ 中诱导出一个对偶类；将前者乘以 λ，后者便会相应地乘以 λ^{-1}。因此，在 $[H^j]$ 中任意选取一个类，就会得到 $[H^j] \otimes [H^{2k+1-j}]^{-1}$ 中的一个类。虽然这个类并未被唯一确定，但其结果在相差一个平方数的意义下是确定的。因此，将所有类相乘得到的 $[H^*\mathsf{C}]$ 中的元素，在相差平方数的意义下是良定义的。

这里的符号问题相当微妙（例如，需要恰当地定义 (2.5) 中隐含的映射的符号）；详情见 §B.5.2。读者可以忽略这个问题，而不会影响核心思想。概括而言，在附录中，我们将 $\mathsf{H} := H^*\mathsf{C}$ 视为带零微分的复形。因此，它符合三角 $\tau_{>k}\mathsf{H} \to \mathsf{H} \to \tau_{\le k}\mathsf{H}$。

接着，利用庞加莱对偶和行列式的性质来识别 $[\mathrm{H}] \simeq [\tau_{>k}\mathrm{H}]^{\otimes 2}$。在 $[\tau_{>k}\mathrm{H}]$ 中任取一个类，即可得到 $[\mathrm{H}]$ 中的一个类，且该类在平方数意义下是良定义的。（提醒读者注意：在附录 B.5.2 中，向量空间的行列式与其对偶空间的行列式之间的对偶关系采用的符号正规化，与标准正规化不同。）

将这个类在 $[\mathrm{H}]$ 中的像与 (b) 中描述的特定元素进行比较，可在 $K^\times/2$ 中得到一个平方类：

$$RT(M,\rho) \in K^\times/2$$

我们将其称为“Reidemeister 扭率平方类”，或简称“Reidemeister 扭率”。如果 ρ 是无环的，那么除相差一个符号外，这恰好就是上文 $K^\times \to K^\times/2$ 下讨论的 Reidemeister 扭率的像。

定义 $RT(M,\rho)$ 时，我们要求 ρ 上存在自对偶，但并未要求自对偶的奇偶性满足我们的假设，即为 $(-1)^k$，其中 M 是一个维数为 $2k+1$ 的流形。然而，(2.1) 中对奇偶性的限制意味着，由此得到的构造还具有一项重要性质——配边不变性——我们稍后将对此进行重点讨论。

2.3.2. 一个例子。取 $M = S^1$ 和 V，它们是定义在 K 上、具有平方判别式的偶维二次空间。令 ρ 为单值化由下式给出的局部系统

$$\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(V).$$

那么， A 不变向量的维数 h 自动为偶数。Reidemeister 扭率平方类由 A 的旋量范数乘以 $(-1)^{h/2}$ 给出（当 K 的特征为零时此结论成立，而且很可能一般情况下也成立）。关于这一陈述证明的更多细节，见 §B.9。

2.3.3. 环上的 *Reidemeister* 扭率平方类。前面的讨论可以从域推广到环。现在我们允许 ρ 是一个系数取自正规整环 R 的局部系统；这意味着 R 是其分式域 K 的整闭子环。我们还假设 $\frac{1}{2} \in R$。

更具体地说，这意味着 ρ 的纤维是射影 R-模（在正交情形下秩为偶数），并带有一个 $(-1)^k$-对称配对（在正交情形下还带有一个自对偶体积形式）。在这种情况下，我们可以构造一个元素

$$RT(M,\rho) \in H^1(R,\mu_2)$$

以一种与基变换相容的方式 $R \to S$ 对于 S 一个正规整环。

我们再次将这一一般性的细节留给附录（§B.10）。注意，我们关于 R 的假设意味着映射 $H^1(R,\ \mu_2) \to H^1(K,\ \mu_2)$是单射，因此元素 $RT(M,\ \rho)$由 $RT(M,\ \rho\otimes K)$唯一确定。§B.10的内容是，类 $RT(M,\ \rho_K)$实际上属于 $H^1(R,\ \mu_2)$的像。

2.3.4. 半特征数。 让我们回到系数取自域 K 的 ρ 情形。注意，改变 M 的定向会使庞加莱对偶改变一个符号。相应地，参照 §2.3.1 的讨论， $[\mathrm{H}]$ 上体积形式的平方类会根据 $\chi_{1/2}(M,\rho)$ 的奇偶性而改变 ± 1：$= \sum_{j\le k}(-1)^j \dim\ H^j(M,\rho)$。按定义，这个量就是系数取自 ρ 的 M 的半特征数，因此我们得到

$$\mathrm{RT}(M^{\mathrm{op}},\rho) = (-1)^{\chi_{1/2}}\mathrm{RT}(M,\rho), \tag{2.6}$$

其中，左侧的 M^{op} 表示流形 M，但其定向已反转。在三维情形中，模 2 的半特征数为零：

For $\dim(M) = 3$ and ρ symplectic, $\chi_{1/2}(M, \rho) \in 2\mathbf{Z}$.

我们将概述一个直接证明，它与我们稍后对 Reidemeister 扭率的分析有一些共同之处。拓扑学中已有密切相关的结果，例如 Davis–Milgram 的工作 [10]。Sawin 和 Wood 最近给出了另一种证明，并讨论了它与现有文献的关系 [49]。

证明。（概述）半特征数是一个配边不变量，并且（模 2 意义下）可以定义为取值于 ρ 的量，其中 R 是任意一个 2 可逆的环（参见 [52] 或 §A.6；我们得到一个局部常值的 $\mathbf{Z}/2$ 值函数，定义在 R 的谱上）。已知在次数≤ 3，定向配边与同调重合 [60, 8, 定理 IV.13], 更多细节见 2.4。因此，对于每个整环 R，我们得到一个态射

$$H_3(\mathrm{Sp}_{2r}(R), \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/2, \tag{2.7}$$

这在明显的意义下也与环的变换相容。只需证明对于任意特征不为 2 的有限域$\mathbf{F}_q$，(2.7) 都是平凡的。这可由如下观察得出：映射$\mathbf{F}_q \hookrightarrow \mathbf{F}_{q^2}$ 诱导零映射 $H_3(\mathrm{Sp}(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z}/2) \to H_3(\mathrm{Sp}(\mathbf{F}_{q^2}), \mathbf{Z}/2)$。□

2.4. **配边**。

定理 2.2. 设 N 是一个带有（定向）边界 $M = \partial N$ 的定向 $4r$-流形，且 ρ 是 N 上的一个辛局部系统。那么在 $K^\times/2$ 中有如下等式

$$(-1)^{\chi_{1/2}(M,\rho)/2} RT(M, \rho|_M) = 1.$$

这个“定理”若非符号问题，本可称为“引理”。证明见附录 B。下面给出两个例子：

- 对于 N 一个 2-流形情形的相应陈述（但处于“相反奇偶性”）可化简为断言：旋量范数在交换子的乘积 $\prod [a_i, b_i]$ 上是平凡的——参见 §2.3.2 以及 (B.37)。
- 在 $N = M \times [0,1]$ 包围 $M \coprod M_{\text{运算}}$ 的情形下，陈述可由 (2.6) 得出。这个例子说明了为什么定理的陈述中必须出现半特征数。

这种配边不变性使我们能够将 Reidemeister 扭率视为某个适当配边群上的泛函，至少在我们关注的情形下是如此。我们将考察定理 2.2 中 M 为三维流形、N 为四维流形的情形。在这种情形下，无论 (M, ρ) 是否为零配边，半特征数总是偶数（见 §2.3.4）。因此，我们可以用它的一个“归一化”版本替代 RT

$$(M, \rho) \mapsto (-1)^{\chi_{1/2}(M)/2} RT(M, \rho).$$

它现在是一个定向配边不变量。

这里回顾一下：CW复形 X 在维数 d 上（取平凡系数）的定向配边群 $\mathrm{MSO}_d(X)$ 的生成元是对 (M, f)，其中 d 维光滑定向流形 M 与连续映射 $f\colon M \to X$ 组成；其关系为

$$(\partial N, g|_{\partial N}) \sim 0$$

当 $g\colon N\to X$ 是从带边界的光滑 $(d+1)$ 维流形 N 到 $(\partial N,\ g|_{\partial N})$ 的连续映射，且后者取诱导定向时。

令 X 为离散群 $\mathrm{Sp}_{2r}(K)$ 的分类空间。它配备了一个由辛 K-向量空间构成的典范局部系统 U。考虑 $\mathrm{MSO}_3(X)$。$\mathrm{MSO}_3(X)$ 中的一个元素 $(M,\ f)$，其中 $f\colon M\to X$ 如上所述，给出一个定向 3-流形以及其上的辛局部系统 $f^*\mathcal{U}$。由于归一化的 Reidemeister 扭率是一个定向配边不变量，因此该规则

$$(M,f)\mapsto RT(M,f^*\mathcal{U})\in K^\times/2$$

下降为泛函 $\mathrm{MSO}_3(X)\to K^\times/2$。已知在次数 ≤ 3，定向配边与同调一致 [60, 8, 定理 IV.13]。因此，对 r 取极限后，我们得到映射 $H_3(B\mathrm{Sp}(K),\ \mathbf{Z})\to K^\times/2$。将 K 替换为正规整环R，同样可得

$$\mathfrak{R}: H_3(B\mathrm{Sp}(R),\mathbf{Z})/2\to H^1(R,\mu_2).^5$$

任意带有辛局部系统的三维流形的 Reidemeister 扭率平方类，均可通过在 M 的基本类上取值 $\mathfrak{R}$ 得到。接下来需要计算 $\mathfrak{R}$。

2.5. 环上的函子性。 对于 $\mathfrak{R}$，有一个自然的候选对象。如 §1.4 中所述，第二陈类给出（遵循 [53]）一个态射

$$c_{\mathrm{et}}: H_3(\mathrm{BSp}(R),\mathbf{Z}/2)\xrightarrow{c_2} H^1(R,\mu_2).$$

（下文中，我们通常会将其拉回到 $H_3(\mathrm{BSp}(R),\ \mathbf{Z})/2$。）

为证明 $\mathfrak{R}=c_{\mathrm{et}}$，我们依赖于以下事实：$\mathfrak{R}$ 和 c_{et} 都是自然变换。

$\mathfrak{R}$ 在 2 可逆的正规整环范畴上定义了一个自然变换。

给定这类环的一个态射 $f\colon R\to S$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} H_3\left(\mathrm{BSp}_{2r}(R),\mathbf{Z}\right) & \xrightarrow{\mathfrak{R}} & H^1(R,\mu_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_3\left(\mathrm{BSp}_{2r}(S),\mathbf{Z}\right) & \xrightarrow{\mathfrak{R}} & H^1(S,\mu_2). \end{array} \tag{2.8}$$

这可由 Reidemeister 扭率的相应性质推出（见 §B.10）。

c_{et} 也是一个自然变换：若 $f\colon R\to S$ 是一个态射，我们便得到一个诱导映射 $f:\mathrm{Spec}S\to\mathrm{Spec}R$，以及一个作用着 $\mathrm{Sp}(R)$ 的相应平凡丛上的诱导映射。因此，上同调中的拉回 f^* 将 R 的 $\mathrm{Sp}(R)$-等变陈类映到 S对应的陈类：在下图中，左侧的 $c_{\mathrm{et},\ S}$ 与顶部的 $c_{\mathrm{et},\ R}$ 的像在右下方重合。这表明，对于 c_{et} 而非 $\mathfrak{R}$，相应图表具有与 (2.8) 类似的交换性。

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Hom}(H_3(\mathrm{BSp}(R),\mathbf{Z}/2),H^1(R,\mu_2)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes f^*} \\ \mathrm{Hom}(H_3(\mathrm{BSp}(S),\mathbf{Z}/2),H^1(S,\mu_2)) & \xrightarrow{\tilde{\mathrm{f}}^*\otimes\mathrm{id}} & \mathrm{Hom}(H_3(\mathrm{BSp}(R),\mathbf{Z}/2),H^1(S,\mu_2). \end{array}$$

[5]注意，映射 $H_3(B\text{辛群}(R),\ \mathbf{Z})\to H^1(R,\ \mu_2)$ 经由 $H_3(B\text{辛群}(R),\ \mathbf{Z})/2$ 分解，因为 $H^1(R,\ \mu_2)$ 是 2-挠元。

2.6. **策略**。 总而言之，我们因此研究两个协变函子

$$\mathcal{B},\ \mathcal{H}:\ \text{正规整}\mathbf{Z}[1/2]\text{-代数} \longrightarrow \text{挠阿贝尔群。}$$

$$\mathcal{B}(R) = H_3(\mathrm{BSp}(R), \mathbf{Z})/2 \text{ and } \mathcal{H}(R) = H^1(R, \mu_2)$$

（ $\mathcal{B}$ 代表“配边”，以铭记 H_3 在我们语境中的来源）。我们给出了这两个函子之间两个不同的自然变换:

$$\mathfrak{R}, c_{\mathrm{et}} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{H}$$

其中 $\mathfrak{R}$来自 Reidemeister 扭率，而 c_{et} 是（1.4）中的 étale 陈类。我们的目标是证明它们相等

$$\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}. \tag{2.9}$$

基本策略是证明这些自然变换已由有限域决定，然后通过用特征零环“连接”有限域，将等式 $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$ 从一个有限域推广到另一个有限域。如果能够连接足够多的有限域，那么只需知道某一个情形下的等式即可。推广等式的主要难点在于，必须在特征零环的 $\mathcal{B}$ 中构造出足够多的非零类。为此，我们使用代数 K理论的结果。

注意， $\mathcal{B}$ 并非具有$\mathbf{Z}/2$ 系数的同调，而只是能够提升到特征零的部分。或许稍微修改一下前面的讨论，就能将 $\mathfrak{R}$ 推广到模 2 同调，从而简化我们的论证。

2.7. **的计算（有限域情形）**。以下引理中的计算想必都是标准的，列于此处以便参照，并非声称有任何原创性。

引理 2.7.1。设 q 为奇素数幂。包含映射 $\mathrm{Sp}_{2r} \to \mathrm{SL}_{2r}$ 诱导一个同构

$$H_3(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z})/2 \to H_3(\mathrm{SL}_{2r}(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z})/2.$$

两边都是阶为 2 的群，并且 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbf{F}_q)$ 和 $\mathrm{SL}_{2r}(\mathbf{F}_q)$ 的整系数H_2均为零。

证明。这两个群的整系数 H_2 均为零，这是众所周知的，参见例如 [57]。（也可以通过下文所用类型的分析推导出来。）特别地，这意味着在这两种情形下，模 2 的整系数H_3 都与具有$\mathbf{Z}/2$ 系数的 H_3 一致，因此只需证明三次上同调上的模 2 上同调拉回映射是同构。我们依照 Quillen，从经典李群的拓扑学得出这一结论。参见 [19] ，其中给出了性质非常相似的论证，实际上可以用来替代我们这里给出的论证。

Chevalley 群的 $\mathbf{Z}/2$ 系数上同调由 Quillen 计算得出；他特别证明了 $H^3(\ldots, \mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$ 对 Sp 和 SL 的 $\mathbf{F}_q$-点均成立。接下来需要验证它们之间的映射是同构，为此我们再次考察 Quillen 的计算。他使用了谱序列 [44,(2)]:

$$H^3(BG) \otimes H^*(G) \implies H^*(BG(\mathbf{F}_q))$$

对于 $G = \mathrm{Sp}_{2r}$ 或 $G = \mathrm{SL}_{2r}$。

在此证明中，除非另有说明，概形和栈均视为定义在 $\mathbf{F}_q$ 上，且上同调是代数闭包 $\mathbf{F}_q$ 上的 étale 上同调，系数取自 $\mathbf{Z}/2$。谱序列源自 *loc. cit.* $G \to B(G(\overline{\mathbf{F}}_q)) \to BG$ 的纤维化

该纤维化来自 Lang 等源。对于 $G = \mathrm{Sp}$ 和 $G = \mathrm{SL}$，分类空间 BG 在 3 次或更低次数上均无上同调，因此我们得到一个同构

$$H^3(B(G(\mathbf{F}_q)), \mathbf{Z}/2) \simeq \text{kernel of } d : H^3(G, \mathbf{Z}/2) \to H^4(BG, \mathbf{Z}/2).$$

特别地，映射

$$H^3(B(G(\mathbf{F}_q)), \mathbf{Z}/2) \to H^3(G, \mathbf{Z}/2) \tag{2.10}$$

与 Lang 覆叠 $G \to G$ 相关联的映射对于 $G =$ 辛群$_{2r}$ 和 SL_{2r}都必须是同构。由于这些覆叠在辛群 Sp 和 SL 之间相容，即构成一个交换方块，因此可以看出映射 (2.10) 也构成一个交换方块。剩下需要验证映射

$$H^3(\mathrm{Sp}_{2r}, \mathbf{Z}/2) \to H^3(\mathrm{SL}_{2r}, \mathbf{Z}/2)$$

是一个同构。在$\mathbf{C}$ 上，我们可以通过依次对纤维进行考察来证明这一点，$r = 1$此时两者相同；在$\mathbf{F}_q$ 上，通过比较也可得到相同结论（例如，化归到在$\mathbf{Z}$上 proper 且光滑的旗簇）。□

引理 2.7.2. c_{et} 对每个有限域都是一个同构。更准确地说，诱导映射

$$H_3(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z})/2 \to \mathbf{F}_q^\times/2$$

是一个阶为 2 的群之间的同构。

证明。 由引理 2.7.1 可知左侧的大小为 2，因此只需证明该映射非零。

根据 Weibel 的工作 [63, 定理 5.1], ，映射 c_{et}： $K_3(\mathbf{F}_q)/2 \to \mathbf{F}_q^\times/2$ 是一个同构。（实际上，Weibel 在左侧考虑的是模 2 K理论；对于有限域，它与 $K_3/2$ 一致。）现在 c_{et} 经由 $H_3(\mathrm{BSL}(\mathbf{F}_q))$ 分解（这是因为映射 $\mathrm{BSL}(\mathbf{F}_q) \to \mathrm{BGL}(\mathbf{F}_q)$ 在加构造之后诱导出一个泛覆叠映射，因而是一个 π_3-同构）。因此，

$$H_3(\mathrm{SL}(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z})/2 \to \mathbf{F}_q^\times/2$$

是满射[6]，我们可以援引引理 2.7.1 得出结论。 □

因此，对于每个特征不为 2 的有限域 $R = k$， $\mathcal{H}(k)$ 和 $\mathcal{B}(k)$ 都是阶为 2 的群，而 c_{et} 是它们之间的同构。因此，在k 上求值时，我们要么有 $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$，要么有 $\mathfrak{R} = 0$。如果能找到一个 辛局部系统定义在 $k = \mathbf{F}_q$ 上，且其 Reidemeister 扭率为非平方，那么我们便可确定，对于 k，前一种情形成立；下文将其称为“良好”:

定义 2.7.1. 对于有限域 k，记作 $\epsilon_k = 1$；如果 k 在 k上取值时为 $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$，则称其为“良好”。否则，若 $\mathfrak{R} = 0$，记作 $\epsilon_k = 0$。

[6]注意，这里映射 $H_3(\mathrm{SL}(\mathbf{F}_q),\mathbf{Z}) \to \mathbf{F}_q^\times/2$ 也通过 $H_3(\mathrm{SL}(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z})/2$ 进行分解，因为 $\mathbf{F}_q^\times/2$ 是 2-挠元。

2.8. **切博塔廖夫密度定理**。 假设 S 是一个在 $\mathbf{Z}$ 上有限生成的正规整环。那么切博塔廖夫密度定理适用于 S:

固定一个几何基点 $*$，用于 S。对于 S 的每个闭点 x，其剩余域为 k_x，我们得到一个映射，它在共轭意义下良定义

$$\widehat{\mathbf{Z}} \simeq \pi_1(\operatorname{Spec} k_x) \to \pi_1(S, *) \tag{2.11}$$

$\widehat{\ }$ 而对于不同的 x， $1 \in \mathbf{Z}$ 的像（我们可以称之为"附属于 x 的弗罗贝尼乌斯元素"）在右端稠密，因为 x 遍历闭点。

参见 [50,§9], [41, 附录 B]。

2.9. **从一个有限域转移到另一个有限域**。设 S 是一个在 $\mathbf{Z}$ 上有限生成的正规整环。对于给定的类 $\alpha \in H^1(S, \mu_2)$，一个提升是指一个元素$x \in \mathcal{B}(S)$，它在 c_{et}: $c_{\mathrm{et}} x = \alpha$ 下提升 x。存在这种提升的类称为c_{et}-可提升的。我们强调，我们使用"在 c_{et} 下可提升的"这一说法，而不是"在 $\mathfrak{R}$ 下可提升的"。

引理 2.9.1. [传递引理] 设 k_0, k_1 是有限域，且 $\alpha_i \in H^1(k_i, \mu_2)$ 是非零元素。给定一个正规整有限生成环 S，其映射为 $\varphi_i \colon S \to k_i$，以及 $\alpha_S \in H^1(S, \mu_2)$，其中 $(\varphi_i)_* \alpha_S = \alpha_i$，且可由 α_S c_{et} 提升，则有

$$\epsilon_{k_0} = 1 \iff \epsilon_{k_1} = 1.$$

非正式地说，当引理的假设成立时，我们称 k_0, k_1 "连通"，也就是说，k_i 的非平凡平方类是 $H^1(S, \mu_2)$ 中一个可由 c_{et} 提升的类同时约化得到的。引理指出，我们可以在连通的有限域之间传递良好性。思路如下：我们将类 $\alpha_S \in H^1(S, \mu_2)$ 提升为 $\mathrm{BSp}(S)$ 中的一个类 x_S，它必定来自定义在某个三维流形上的 S- 模的辛局部系统 ρ。令 β 为该 ρ 的 Reidemeister 扭率。现在我们想证明，当约化到有限域时，如果 x 在 c_{et} 下的像的约化是一个平方，那么 x 在 $\mathfrak{R}$ 下的像的约化也必定是一个平方。更准确地说，对于任意将 $S \to k$ 映到有限域的¯态射，如果约化 $\bar{\alpha}$ 是一个平方，那么 β 也是一个平方；这¯迫使 β 要么是平凡的，要么等于 α。证明若 $\bar{\alpha}$ 是一个平方，则 β 也是一个平方，其思路是：由于 $\bar{\alpha}$ 是一个平方，根据引理 2.7.2， $\bar{\rho}$ 在配边中也是平凡的，即 $\bar{x_S}$ 在 $\mathcal{B}(k)$ 中是平凡的，因此 $\mathfrak{R}(\bar{x_S}) = \bar{\beta}$ 在 $H^1(k, \mu_2)$ 中是平凡的。

证明。 不失一般性$\epsilon_{k_0} = 1$。

根据假设，存在 $x_S \in \mathcal{B}(S)$使得 $c_{\mathrm{et}} x_S = \alpha_S$。 x_S 在$\mathcal{B}(k_0)$中的像，记作 x_0，满足 $c_{\mathrm{et}} x_0 = \alpha_0$。 此外， $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$ 在 x_0 上，因为 $\epsilon_{k_0} = 1$，所以

$$\mathfrak{R} x_0 = c_{\mathrm{et}} x_0 = \alpha_0. \tag{2.12}$$

对于任意 $\varphi \colon S \to k$，其中 k 有限，我们考虑:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(S, \mu_2) & \xleftarrow[c_{\mathrm{et}}]{} & \mathcal{B}(S) & \xrightarrow{\mathfrak{R}} & H^1(S, \mu_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ H^1(k, \mu_2) & \xleftarrow[c_{\mathrm{et}}]{\sim} & \mathcal{B}(k) & \xrightarrow{\mathfrak{R}} & H^1(k, \mu_2) \end{array}$$

我们利用引理 2.7.2 得知左下方的箭头是一个同构。正如证明开始前不久进一步解释的那样，通过图追踪，2.8 和引理 2.7.2 可得

$$\varphi_*(c_{\mathrm{et}} x_S) = 0 \implies \varphi_*(\mathfrak{R} x_S) = 0. \tag{2.13}$$

$\mathfrak{R}x_S$ 和 $c_{\mathrm{et}}x_S$ 都属于$\mathbf{Z}/2$-向量空间 $H^1(S,\ \mu_2)$，现在我们可以推断，$\mathfrak{R}x_S$ 是 $c_{\mathrm{et}}x_S$ 的一个倍数（可能是零倍数）。否则，我们可以假设$\mathfrak{R}x_S \neq 0$。那么，根据 §2.8 中回顾的切博塔廖夫密度定理，存在某个弗罗贝尼乌斯元素与 $\mathfrak{R}x_S$ 的配对非平凡，而与 $c_{\mathrm{et}}x_S$的配对平凡。由于映射 $\varphi_*\colon H^1(S,\ \mu_2) \to H^1(k,\ \mu_2)$是映射 (2.11) 的对偶，这将给出一个从 S 到某个有限域的同态，使得 $c_{\mathrm{et}}x_S$ 是一个平方，而 $\mathfrak{R}x_S$不是，这与 (2.13) 矛盾。

由于根据 (2.12)，$\mathfrak{R}x_S$ 和 $c_{\mathrm{et}}x_S$ 在 $H^1(k_0,\ \mu_2)$中的像都是非零元素α_0，因此 $\mathfrak{R}x_S$ 和 $c_{\mathrm{et}}x_S$ 本身都非零，从而

$$\mathfrak{R}x_S = c_{\mathrm{et}}x_S \in H^1(S, \mu_2).$$

对这个等式在 k_1中取像 $\varphi_1\colon S \to k_1$；我们得到 $\mathfrak{R}x_1 = c_{\mathrm{et}}x_1$，其中$x_1$ 是 x_S 在 φ_1下的像。根据假设，α_1 非零，因此 $c_{\mathrm{et}}x_1 = \alpha_1$ 非零。这意味着 $\mathfrak{R}x_1$ 非零，进而 $\mathfrak{R}$ 对 k_1非零，这已经意味着 $\epsilon_{k_1} = 1$。□

2.10. 构造大量 c_{et}-可提升类（适用于数域）。我们需要大量的环 S 和 c_{et}-可提升类 $\alpha_S \in H^1(S,\ \mu_2)$，以便应用引理 2.9.1。为此，我们将使用数域整数环及其 K-理论的相关结果。记 $\mathrm{SL}(F) = \varinjlim_n \mathrm{SL}_n(F)$，类似地记 $\mathrm{Sp}(F) = \varinjlim_n \mathrm{Sp}_{2n}(F)$。我们回顾 Merkurjev-Suslin 的工作；该工作表明，对于数域 F，有以下结论

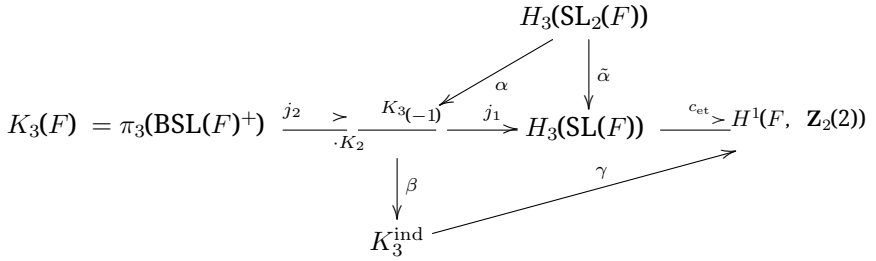
引理 2.10.1. 设 F 是一个数域。étale 陈类的像

$$c_{\mathrm{et}} : H_3\mathrm{Sp}(F) \to H^1(F, \mu_2) = F^\times/2 \tag{2.14}$$

的大小为 $\geq 2^{r_2}$，其中 r_2 是 F的复位数。

在陈述中以及下文中，辛群(F)的同调均取整数系数。关键在于 H_3辛群(F)/2 并非太小；这一点可由 Borel 的计算抽象地推出 [9], ，但我们还需要知道所得的类可由 c_{et}检测到。因此，我们需要使用 Merkurjev–Suslin 和 Hutchinson-Tao 的结果。

证明。 考虑以下图表：



我们按如下方式构造图表：

- 我们首先按照引理 2.7.2 进行推理：同构 $K_3 \simeq \pi_3(\mathrm{BSL}(F)^+)$ 源于 $\mathrm{BSL}(F)^+ \to \mathrm{BGL}(F)^+$ 诱导了一个 π_3-同构这一事实。- 若记 $j\colon K_3(F) \to H_3(\mathrm{SL}(F))$ 为 Hurewicz 映射，那么它是一个满射，其核为 $(-1)\cdot K_2(F)$（见 [58, 推论 5.2]），因此它可分解为 $j_1 \circ j_2$，其中 j_1 是一个同构，因而映射 $\alpha = j_1^{-1} \circ \tilde{\alpha}$ 也存在。

- 复合映射 $c_{\mathrm{et}} \circ j$ 可经由 K_3^{ind} 分解（见 [37, §7]）；这是 K_3 对可分解元素取商所得的商（即 Milnor K 理论），因此我们可以经由底部三角分解。

现在我们使用：

- Levine 和 Merkurjev–Suslin 的工作，该工作将域的不可分解 K_3 与伽罗瓦上同调对应起来。特别地，étale 陈类实际上给出一个满射

$$K_3(F)^{\mathrm{ind}} \twoheadrightarrow H^1(F, \mathbf{Z}_2(2))/2^n,$$

（参见 [37, 命题 11.5]，以及 [63, 定理 5.5]），对每个 n都成立。因此，上文出现的映射 γ 诱导出到 $H^1(F, \mathbf{Z}_2(2))/2$的一个满射。
- Hutchinson-Tao 的结果表明，$\beta \circ \alpha$： $H_3(\mathrm{SL}_2(F)) \to K_3(F)_{\mathrm{ind}}$ 对于无限域 F是满射。参见 [25, 引理 5.1]。

因此，

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha : H_3(\mathrm{SL}_2(F)) \to H^1(F, \mathbf{Z}_2(2))/2$$

是满射。现在，根据定理 6， $H^1(F, \mathbf{Z}_2(2))$ 的无挠商的秩等于 r_2 （我们只需要 $\geq$，这可由欧拉示性数的计算推出），而 $H^1(F, \mathbf{Z}_2(2))/2 \to H^1(F, \mu_2)$ 是单射，因此 $H_3(\mathrm{SL}_2(F)) \to H^1(F, \mu_2)$ 的像的大小为 $\geq 2^{r_2}$。□

2.11. **控制域**。对于 L 这个数域，如果 v 是 L 的一个位，且相应的剩余域 l_v 满足 $\epsilon = 1$，我们就称它为好位。

我们将数域中一组位点 $\mathcal{Q}$ 的密度定义为

$$\frac{\liminf_{X \to \infty} \sum_{q \in \mathcal{Q}, Nq \leq X} \log q}{X}. \tag{2.15}$$

注意，集合 $\mathcal{Q}$ 的密度与相应的次数为一的位点子集的密度相同，也就是说，与 Nq 是素数的那些位点的密度相同（其他位点对分子的贡献至多为 $O(X^{1/2})$）。一般而言，在将这一密度概念从一个域转移到另一个域时需要稍加谨慎。例如，$\mathbf{Q}$ 中模 4 同余于 3 的素数集合的密度为 $1/2$，但其上方 $\mathbf{Q}(i)$ 中的素数集合的密度为零。

以下概念有助于量化我们得到的优良位点集合：

定义 2.11.1. 若一个数域的有限扩张 E/L 连同一个非空共轭不变子集 $S \subset \mathrm{Gal}(E/L)$ 满足以下条件，则称其为控制的：

> (*) 在满足 $\mathrm{Frob}_v \in S$ 的 L 的位点集合 v 中，除去一个密度为零的集合外，所有位点都是优良的。

若对于某个非空子集 S，(E, S) 是控制的，则称 E/L 是控制的。

更明确地说：存在一个由 L 的位点组成的“坏”密度为零的集合 $\mathcal{B}$，使得若 $\mathrm{F}_v \in S$，则 $v \in \mathcal{B}$ 或 v 是优良的。这里以及下文中，我们认为只有当 E/L 在 v 处非分歧时，F_v 才有定义。

引理 2.11.1. 设 L 是一个数域。若 $\alpha \in L^\times/2$ 是一个非平凡平方类，且它是紧致定向三维流形 ρ 上辛局部系统的 Reidemeister 扭率： $\pi_1(M) \to$ 辛群$_{2r}(L)$，即 $\alpha = RT(M, \rho)$，那么 $L(\sqrt{\alpha})/L$ 连同其伽罗瓦群的非平凡元素是控制性的。

证明。定义 ρ 的局部系统的像包含在 L 中某个由 S 的整数构成的环上的辛群 $_{2r}(\mathcal{O})$ 内，因为 $\pi_1(M)$ 是有限生成的。令 $x_{\mathcal{O}} \in H_3(B$辛群$\mathcal{O})$ 为 M 的基本类的推前。则 $\mathfrak{R}x_{\mathcal{O}} \in H^1(\mathcal{O},\ \mu_2)$ 映射到 $\alpha \in L^\times/2$。

现在我们可以在 $\mathcal{O}$的素数位处对 $x_{\mathcal{O}}$ 取模。特别是，对于任何使 $\mathcal{R}x_{\mathcal{O}}$ 非零的素数位， $\mathfrak{R}$ 必定非零；也就是说，在 α 为非平方数的位点中，除有限多个以外，都是良好的。（回想定义 2.7.1 之前的注释。）换言之，这就是该引理的断言。□

¯**引理 2.11.2.** 设在固定的代数闭包 L 中，给定伽罗瓦域E_1, E_2，使得 $(E_i/L, S_i)$ 控制子集 $S_i \subset \mathrm{Gal}(E_i/L)$。（我们也形式上允许 S_i 之一为空；此时，该条件应理解为仅应用于另一个 (E_j, S_j)。）

那么，令 E 为复合域 E_1E_2，则 $(E/L, S)$ 控制集合 S，其中 S 是 S_1 和 S_2 在下列映射下的原像之并

$$\mathrm{Gal}(E/L) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E_1/L) \times \mathrm{Gal}(E_2/L).$$

证明。若位点 v 处的弗罗贝尼乌斯属于 S，这仅意味着弗罗贝尼乌斯$\mathrm{Frob}^{E_i/L}(v)$属于 S_i，对于 $i = 1$ 或 $i = 2$均如此；我们将“坏”集合取为 v在 E_1 和 E_2处坏集合的并集。□

引理 2.11.3。设 E/L是伽罗瓦扩张，且 M 是一个中间扩张：

$$L \subset M \subset E.$$

设 $S_M \subset \mathrm{Gal}(E/M)$ 是一个非空的共轭不变集合，并设 S_L 是 $\mathrm{Gal}(E/L)$ 的对应子集，即包含 $\mathrm{Gal}(E/M) \to \mathrm{Gal}(E/L)$ 的像的最小共轭不变集合。那么，$(E/L,\ S_L)$ 是控制的，当且仅当 $(E/M,\ S_M)$ 是控制的。

证明。我们先回顾一些代数数论的一般知识。给定位点 v_E，v_M，v_L，分别属于E，M，L，且每个位点都在下一个位点之上，其中 v_E/v_L 非分歧，

$$\mathrm{F}(v_E/v_M) = \mathrm{F}(v_E/v_L)^{[v_M:v_L]}. \tag{2.16}$$

确实，左端固定 v_E，并在其剩余域上作用为 $x \mapsto x^{\#v_M}$。这一性质刻画了它，而右端也具有相同的性质。

此外，v_E/v_L 的弗罗贝尼乌斯属于 $\mathrm{Gal}(E/M)$，当且仅当次数 $[v_M : v_L] = 1$。由 (2.16) 可得“若”方向；另一方面，若此弗罗贝尼乌斯属于 $\mathrm{Gal}(E/M)$，则它固定 v_M 处的剩余域，因此 $k(v_M)$ 与 $k(v_L)$ 的基数必定相同。

令 $\mathcal{V}_L$ 为 L 中弗罗贝尼乌斯属于 S_L、且不位于任何 E/L 的分歧点之下的位点集合；类似地，定义 $\mathcal{V}_M$ 为 M 中弗罗贝尼乌斯属于 S_M 的位点集合，并同样排除所有位于 E/L 的分歧点之下的位点。

对于每个 $v \in \mathcal{V}_M$，记 L 中位于 v 之下的位为 v_L。令 $\mathcal{V}_M^{(1)} \subset \mathcal{V}_M$ 为满足次数 $[v : v_L] = 1$ 的子集。那么映射 $v \mapsto v_L$ 定义了一个满射

$$\varphi : \mathcal{V}_M^{(1)} \longrightarrow \mathcal{V}_L \tag{2.17}$$

保持剩余域大小：

要证明 φ 的像包含于 $\mathcal{V}_L$，取 $v \in \mathcal{V}_M^{(1)}$，并取 E 上方的一个位点 w，其位于 v 之上。由 (2.16)，w/v_L 对应的弗罗贝尼乌斯元素实际上属于 $\mathrm{Gal}(E/M)$，并且在其中与 w/v 对应的弗罗贝尼乌斯元素重合，因此我们有 $v_L \in \mathcal{V}_L$。

要证明 φ 是满射，取 $u \in \mathcal{V}_L$，并设 w 是 E 上方的一个位点，位于 u 之上，使得 w/u 对应的弗罗贝尼乌斯元素属于 $S_M \to \mathrm{Gal}(E/L)$ 的像；设 M 下方的位点为 v，其位于 w 之下（因此，我们分别有 $u|v|w$ 作为 L, M, E 的位点）。正如我们在 (2.16) 之后所见，由于 $\mathrm{F}(w/u) \in \mathrm{Gal}(E/M)$，必有 $[v\colon\ u] = 1$，于是 $\mathrm{F}(w/v) = \mathrm{F}(w/u)$，即 $v \in \mathcal{V}_M^{(1)}$ 且 $u = \varphi(v)$。

因此，若 S_L 的控制集合为坏集合 $\mathcal{B}_L \subset \mathcal{V}_L$，则 S_M 的控制集合为坏集合 $\varphi^{-1}\mathcal{B}_L \coprod (\mathcal{V}_M - \mathcal{V}_M^{(1)})$；若 S_M 的控制集合为坏集合 $\mathcal{B}_M \subset \mathcal{V}_M$，则 S_L 的控制集合为坏集合 $\varphi(\mathcal{B}_M)$。由于 $\mathcal{V} - \mathcal{V}_M^{(1)}$ 的密度为零，根据 (2.15) 后的注记，且 φ，φ^{-1} 将密度为零的集合映为密度为零的集合，而 φ 保持剩余域的大小不变，断言得证。□

2.12. **关于可提升类的引理**。设 L 是一个数域。回顾（§2.9），若一个类 $\alpha \in L^\times/2$ 属于映射 $c_{\mathrm{et}}\colon H_3(\mathrm{BSp}(L), \mathbf{Z}) \to L^\times/2$ 的像，则称其为 c_{et}- 可提升的。我们已经在引理 2.14 中看到，对于数域 L，可提升类集合的大小至少为 $2^{r_2(L)}$。我们的下一个目标是利用这一点构造一个较大的优良位点集合。

引理 2.12.1。设 L 是一个数域，α，$\beta \in L^\times/2$ 是线性无关的（非零）类，其中 β 可由 c_{et} 提升，且 $L(\sqrt{\alpha})/L$ 是控制的。那么除有限多个位点外，L 中任何使 β 为非平方数的位点都是好的。

证明。我们将使用 L 的一个整数环，将由 α 得到的一个好位点与 β 为非平方数的位点联系起来。

根据假设，β 与 α 线性无关；同样根据假设，β 经由 c_{et} 提升为 $H_3(\mathrm{Sp}\ L)$ 中的一个类，因此也提升为 $H_3(\mathrm{Sp}\ S)$ 中的一个类，其中 S 是由整数环对有限多个素数取逆得到的，因为该域是这类环的直接极限。也就是说，β 定义了 $H^1(S,\ \mu_2)$ 中一个可由 c_{et} 提升的类。

由切博塔廖夫密度定理和所假设的线性无关性可知，S 中有正密度的位点使 β 为非平方数，而 α 为平方数或非平方数（这取决于定义控制域 $L(\sqrt{\alpha})$ 的伽罗瓦群子集是否包含平凡元素）。除去一个密度为零的集合，根据假设，在这些位点处 $\epsilon = 1$，因为 $L(\sqrt{\alpha})/L$ 是控制的。固定这样一个位点 w_0，并令 k_0 为其剩余域；于是有

- 一个环 S 以及一个 c_{et}可提升类 $\beta \in H^1(S,\ \mu_2)$，其中
- 一个剩余域 k_0，使得 β 是非平方数且 $\epsilon_{k_0} = 1$。

将我们的迁移引理 2.9.1 应用于环 S，并令元素 β 扮演 α_S的角色，可知对于 S 的所有满足 β 为非平方数的剩余域，$\epsilon_k = 1$。□

反复应用这一结果，我们得到：

引理 2.12.2。设 L 是一个数域，$\alpha \in L^\times/2$ 非零且满足 $L(\sqrt{\alpha})$ 是控制的。设 $W \subset L^\times/2$ 是一个由 c_{et}可提升类构成的有限维子空间。我们假设 W 不是 $\langle\alpha\rangle$。

那么，$L(\sqrt{W})$ 的伽罗瓦群为 $G = \mathrm{Hom}(W,\ \mathbf{Z}/2)$，它是 L的控制域，其中S 是 G的非平凡元素。

证明。库默尔理论给出 W 与 G 之间的完美配对，将 $\lambda \in W, g \in G$ 映到 $g(\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda} \in \overline{\{\pm 1\}}$。对于任意使 $\mathrm{Frob}_v \in G$ 非平凡的 v，有一半的 $w \in W$ 满足 $\langle w, \mathrm{Frob}_v\rangle \neq 0$。特别地，存在这样的 w 不等于 α，且必然

非零。（如果 $\dim(W) \geq 2$，这一点显然；如果 $\dim(W) = 1$，则根据假设，其非零元素不是 α。）由于 $\langle w, \mathrm{Frob}_v \rangle \neq 0, w$ 在 v 处不是平方；我们应用前述引理于 α, w，可知该 v 是好的，至多有有限多个可能的 v 例外。□

引理 2.12.3. 设 K 是一个数域，且 $K(\sqrt{\alpha})/K$ 是一个控制域扩张（§2.11）。那么，K 的优良位点集合的密度为 1。

下面说明证明引理 2.12.3 的思路。我们将给定的控制域扩张 $K(\sqrt{\alpha})/K$ 与 §2.10 中已有的大量“ c_{et}-可提升类”结合起来，并利用引理 2.12.2 证明有密度很大的位点是优良的。唯一的问题是，这些 c_{et}-可提升类只有在扩张到某个域之后才大量存在，但我们可以利用引理 2.11.3 再降回去。

证明。（引理的证明。）为证明这一点，我们固定 K 的一个代数闭包 K，并构造

(1) 有理数域 K 的伽罗瓦域扩张序列 $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$，其伽罗瓦群为 $\Delta_k := \mathrm{Gal}(E_k/K)$；(2) 满足以下条件的正实数 $\delta_k \in [0, 1)$

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k - \delta_k^3/16, \tag{2.18}$$

and

(3) conjugacy-invariant $S_k \subset \Delta_k$, of relative measure $\frac{\#S_k}{\#\Delta_k} = (1 - \delta_k)$

使得

$$(E_k/K, S_k) \text{ is controlling.} \tag{2.19}$$

（请回忆，这意味着除去一个密度为零的集合，每个位 v 的弗罗贝尼乌斯都属于 S_k，且是良好的。）利用切博塔廖夫密度定理，以及由 (2.18) 显然可知的事实 $\lim_k \delta_k = 0$，即可证明该定理。作为起始步骤，我们取 $E_1 = K(\sqrt{\alpha})$，其中 S_1 为控制集合（即平凡元或非平凡元），因此 $\delta_1 = 1/2$。

归纳步骤：现在假设已构造出 Δ_k、E_k、δ_k。令

$$h = \text{ 为大于或等于 4 的最小偶整数，使得 } 2^{-h/4} \leq \delta_k/2 \tag{2.20}$$

我们选取一个辅助群 H，以及 K 中的一个 H-扩张 L/K，使得L 是全虚的，且诱导映射 $G_K \to \Delta_k \times H$ 是满射。对于任何偶数 h，这当然是可能的：取一个充分大的素数 r，使得 $r \equiv 1$ 模h 且 $\frac{r-1}{h}$ 为奇数；那么 $(-1) \in (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^\times$ 映到循环商群C_h 中的一个非平凡元素，该循环商群的阶为 h。我们取 L/K 为 $K(\zeta_r)/K$的次数为 h 的子扩张；根据关于 -1的假设，它是全虚的。通过考察分歧可知，当 r 充分大时，$G_K \to \Delta_k \times H$ 是满射：也就是说，r 处的惯性子群在 Δ_k 中是平凡的，但映满到 H。

由于 $G_K \twoheadrightarrow \Delta_k \times H$，这尤其意味着 α 在 L中不是一个平方：若它是平方，那么 $G_K \to H$ 的核中的任意元素都会固定一个平方根 $\sqrt{\alpha} \in L$，因此该核不可能映满到 Δ_k，因为根据 E_1的选取，$\sqrt{\alpha} \notin E_k$属于域 E_k。

因此，$L(\sqrt{\alpha})$是 L的二次扩张，且在 K上是伽罗瓦扩张。根据引理 2.11.2[7] $L(\sqrt{\alpha})/K$ 对于由 $\mathrm{Gal}(L(\sqrt{\alpha})/L)$ 的平凡或非平凡元素组成的集合 S 具有控制作用。将引理 2.11.3 应用于 $K \subset L \subset L(\sqrt{\alpha})$，可知 $L(\sqrt{\alpha})/L$ 再次具有控制作用。

[7]应用时采用以下记号替换：$L \leftarrow K$，$E_1 \leftarrow L$，$E_2 \leftarrow K(\sqrt{\alpha})$，$S_1$ 空集以及 $S_2\mathrm{Gal}(K(\sqrt{\alpha})/K$ 的控制子集

$L^\times/2$ 中可由 c_{et}-提升的元素构成一个子群，且在L的所有自同构作用下保持不变。根据引理 2.10.1，该子空间的维数满足

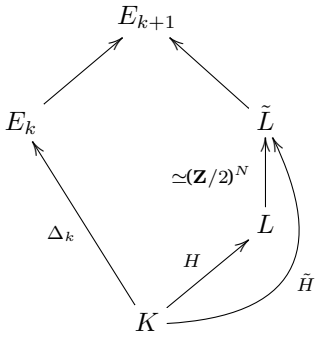
$$\text{dimension } N \geq r_2(L) \geq h/2,$$

其中 r_2 是复位的数量。将引理 2.12.2 应用于 α 和由 c_{et}-可提升元素构成的子空间（其维数为 ≥ 2，因为 $h \geq 4$，故该引理适用），我们得到一个控制扩张 $\tilde{L}/L$，其伽罗瓦群为 $(\mathbf{Z}/2)^N$，以及子集 $S = (\mathbf{Z}/2)^N - \{e\}$；该扩张通过添加此整个子空间的平方根得到。这个 $\tilde{L}$ 是 K的伽罗瓦扩张，它对应于将 $G_K \to H$ 提升到 $G_K \to \tilde{H}$，其$\tilde{H} =$为 $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)$；$\tilde{H} \to H$的核是 $\tilde{L}/L$的伽罗瓦群，同构于 $(\mathbf{Z}/2)^N$。根据引理 2.11.3，$(L/K, S_H)$ 是控制的，其中 S_H是集合 S，视为 H 的一个$\tilde{}$子集。具体而言，S_H 是 H 中位于 $\tilde{H} \to H$ 的核内的所有非平凡元素构成的子集（因此 S_H 的大小为 $2^N - 1$。）

Set

$$E_{k+1} := \text{compositum of } \tilde{L} \text{ and } E_k \text{ inside } \bar{K},$$

因此，Δ_{k+1} 的伽罗瓦群与 G_K 在 $\Delta_k \times H$中的像同构。令 S_{k+1} 为 Δ_{k+1} 的子集，它由 $S_k \subset \Delta_k$ 和$S_H \subset H$的原像之并定义。根据引理 2.11.2，$(E_{k+1}/K,\ S_{k+1})$ 是控制性的。图示如下：



其中 $\#H = h$。

现在只需估计 S_{k+1}的大小。注意，我们事先并不知道$\tilde{}$乘积映射 $\Delta_{k+1} \to \Delta_k \times H$ 是满射，尽管各个投影都是满射，并且 $\Delta_{k+1} \to \Delta_k \times H$ 也是满射。我们验证 (2.18)，从而完成归纳法。完全分裂

$$S_{k+1} = A \coprod B,$$

其中，A 由投影到 $S_k \in \Delta_k$的那些元素构成，而 B 是 S_{k+1}中 A 的补集。B 由所有满足以下条件的元素 $x \in \Delta_{k+1}$ 构成：

(a) x 在 Δ_k 中的像属于 $\Delta_k - S_k$；(b) $x \in H$ 的像是平凡的；以及 (c) $x \in H$ 的像是非平凡的。

由于 Δ_{k+1} 满射到 $\Delta_k \times H$，根据 L的构造，满足 (a) 和 (b) 的 $x \in \Delta_{k+1}$ 所占比例为 $\delta_k h^{-1}$。由于 Δ_{k+1} 满射到 $\tilde{H}$，满足 (c) 的 $x \in \Delta_{k+1}$ 所占比例为 $1 - h^{-1}2^{-N}$。由于一个相对测度为 a 的集合与一个相对

测度为 b 的集合的交集具有相对测度 $\geq a+b-1$,

$$\frac{|B|}{|\Delta_{k+1}|} \geq (\delta_k h^{-1}) + (1 - h^{-1}2^{-N}) - 1 \geq h^{-1}(\delta_k - 2^{-N}).$$

由于

$$1 - \delta_{k+1} = \frac{|S_{k+1}|}{|\Delta_{k+1}|} = \frac{|A|+|B|}{|\Delta_{k+1}|} = 1 - \delta_k + \frac{|B|}{|\Delta_{k+1}|},$$

我们得到 $1 - \delta_{k+1} \geq (1 - \delta_k) + h^{-1}(\delta_k - 2^{-N})$，即,

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k - h^{-1}(\delta_k - 2^{-N}).$$

回顾（2.20）， h 是大于或等于 4 且满足$2^{-h/4} \leq \delta_k/2$的最小偶整数。

于是 $2^{-h/4} \geq \delta_k/2\sqrt{2}$，从而 $h^{-1} \geq 2^{-h/2} \geq \delta_k^2/8$ 和 $\delta_k - 2^{-N} \geq \delta_k - 2^{-h/2} \geq \delta_k/2$，并且我们得到

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k - \delta_k^3/16 \tag{2.21}$$

如所愿。 □

2.13. 有理数域优良位点的密度有理数域 等于 1。 现在我们可以证明，有理数域 **有理数域**的优良素数集合的密度为 1。

事实上，我们在附录 §C 中构造了一个定义在 **有理数域**(i) 上的辛局部系统 ρ，其 Reidemeister 扭率为非平方数。令 α 为 ρ 的 Reidemeister 扭率。我们应用引理 2.11.1，得知 α 是一个非平方型控制类，即 **有理数域** $(i)(\sqrt{\alpha})$/ **有理数域** (i) 与非平凡伽罗瓦元素一起构成控制类。

然后，我们将引理 2.12.3 应用于 $K =$ **有理数域**(i)，其中 α 是 ρ 的 Reidemeister 扭率，从而得知有理数域 **有理数域**(i) 的优良位点集合的密度为 1。因此——由于密度只能检测一次位点——在模 4 的素数 $p \equiv 1$ 中，域 $\mathbf{F}_p$ 的一个密度为 1 的子集是优良的。这意味着 **有理数域**(i)/**有理数域** 是控制类（其中 S 是伽罗瓦群的平凡元素）。现在我们再次将引理 2.12.3 应用于 **有理数域** 和 $\alpha = -1$，从而得到结论。

2.14. $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$ 对于特征零的有限生成正规整环 S。我们现在可以证明所需的结果 (2.9), 即 $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$，对于特征为零的有限生成正规整环 S（也就是说，态射$\mathbf{Z} \to S$ 是单射）。

我们要验证，作为从 $\mathcal{B}(S)$ 到 $H^1(S, \mu_2)$ 的函数，Reidemeister 扭率与 étale 陈类相同。它们的差（在某个固定输入上取值）是一个 $\mathbf{Z}/2$-étale 覆盖，它在所有剩余域 $k(x)$ 良好的闭点 $x \in S$ 上完全分裂。这迫使该双覆盖是平凡的:

对于任意闭点集合 E，我们称

$$\text{density of } E := \lim_{Q\to\infty} Q^{-d} \sum_{q_x \leq Q, x\in E} \log(q_x),$$

其中， d 是 S 的 Krull 维数， q_x 是剩余域 $k(x)$的阶。根据 [50, 定理 9.1]，所有闭点构成的集合的密度为 1。对于满足 $k(x)$为坏的 x 闭点，其集合的密度为零，因为满足$q_x = q$ 的闭点数量由 q^{d-1} 的一个常数倍所界，且

$$\sum_{q\leq Q, \mathbf{F}_q \text{ bad}} \log(q) = o(Q)$$

因为正如 §2.13 中所证明的，有理数域$\mathbf{Q}$ 的优良位点密度为 1。因此，满足 $k(x)$为优良（因而完全分裂）的 x 集合的密度为 1。根据切博塔廖夫密度（[50, 定理 9.11]），这意味着该双覆盖是平凡的。

2.15. $\mathfrak{R} = c_{\mathrm{et}}$ **对所有特征不为 2 的有限域**。请注意，到目前为止，我们实际上还没有证明该结果适用于任何一个特定的有限域，因为论证中有各种"几乎所有"的限定。现在我们可以证明这一点，事实上还能证明所需结果适用于所有特征不为 2 的有限域。这立刻由 §2.14 和下述断言得出：

断言：若 k 是有限域，则 $H_3(\mathrm{Sp}(k))/2$ 中的任意类都能提升为某个 $H_3(\mathrm{Sp}(S^+))$ 中的类，其中的环是正规特征零环，且在$\mathbf{Z}$上有限生成。

为此，取一个类 $\alpha \in H_3(\mathrm{Sp}(k))$，它由某个 $\alpha \in H_3(\mathrm{Sp}_{2r}(k))$ 表示。注意，对于 Q $\mathrm{Sp}_{2r}(k)$ 的 2-西罗子群，$H_3(Q) \otimes \mathbf{Z}_2 \to H_3(\mathrm{Sp}_{2r}k) \otimes \mathbf{Z}_2$ 是满射，因此 α 可提升到 $\alpha_Q \in H_3(Q)$。但随后，包含映射 $e: Q \to \mathrm{Sp}(k)$ 可以借助 W Witt 向量提升到 $\mathrm{Sp}(W)$，因为每一步提升的障碍都是 2-群 Q 的上同调，其系数为 p-挠系数。态射 $Q \to \mathrm{Sp}_{2r}(W)$ 的像包含于 $\mathrm{Sp}_{2r}(S)$ 中，其中 S 是由 Q 的矩阵项的所有矩阵系数生成的（有限生成）子环。令 $S^+ \supset S$ 为 S 的分式域中 S 的整闭包。于是 S^+ 是正规有限生成环。（有限生成 Z-代数在其分式域中的整闭包是该 Z-代数上的有限模，因此是有限生成的，见 [24, 推论 4.65]。）事实上，$S^+ \subset W$，因为$S \subset W$ 且 W 在其分式域中是整闭的。

换言之，同态 $Q \to \mathrm{Sp}(k)$（沿着它将 α 从 α_Q 推前）可提升为同态 $Q \to \mathrm{Sp}(S^+)$。由此可得到 α 在 $H_3(\mathrm{Sp}(S^+))$ 中的一个提升，其中 S^+ 正规整环有限生成，正如所需。

2.16. **论证的结论**。既然我们已经证明所有有限域都是良好的，接下来便仿照 §2.14，将结论推广到 $\mathbf{Z}$ 上有限生成的正规整环。具体而言，若这样的环 S 不支配 $\mathbf{Z}$，则其特征为 p；我们可以类似地利用$\mathbf{F}_p$-簇 $\mathrm{Spec}(S)$ 上的切博塔廖夫密度，并借助所有$\mathbf{F}_{p^n}$ 都是良好的这一事实进行论证。

最后，任意域 K 都是其有限生成正规整子环的直接极限 $\varinjlim S$，相应地，我们有

$$H_3(\mathrm{Sp}K) = \varinjlim H_3(\mathrm{Sp}S)$$

因此，K 的结果可由我们已经证明的结论推出。

3. L-函数：曲线上的辛局部系统

3.1. **设定**。现在令 X 为基数为$q = p^n$ 的有限域 k 上的射影光滑曲线，并令 $X_{\bar{k}} = X \times_k k$ 为其到绝对闭包的基变换。

伽罗瓦表示的系数域取为 ℓ，这是一个特征不等于 2 或 p（k 的特征）的有限域。其他值得关注的情形均可归约到这一情形，参见 §3.10。

我们假设 q 在 ℓ 中有一个平方根，并固定其中一个：$\sqrt{q} \in \ell$。（这一选择无关紧要，见 §3.5）。

Let

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$$

是一个辛型的连续局部系统。下文将讨论如何得到这样的表示。在某些情况下，取一个取值于 $\mathrm{GSp}_{2m}(\ell)$ 的表示会更自然，其尺度特征可还原圆分特征，因为这对应于拓扑概念中的一种局部系统，其辛自对偶取值于定向层。

采用我们目前的观点，只需固定 $\sqrt{q}$即可。

3.2. **L-函数与 ε-因子。** 在允许分歧的稍一般情形下定义 L-函数会更方便。设 K_X 是 X的函数域。对于任意伽罗瓦表示

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{K_X}/K_X) \longrightarrow \mathrm{GL}(V),$$

其中 V是一个有限维 ℓ-向量空间，我们可以通过考察形式幂级数来定义一个 L-函数

$$L(X,\rho,t) := \prod_{x\in X} \det(1 - t^{\deg(x)}\rho(\mathrm{F}_x)|_{V^{I_x}})^{-1} \in \ell[[t]]^\times \tag{3.1}$$

其中，此处及下文中，F 表示几何 Frobenius，而 $\deg(x)$ 是域扩张 $[k(x) : k]$ 的次数。Grothendieck-Lefschetz 不动点公式（见 [12,“Fonctions L mod p^n”, Th. 2.2] ，适用于 ℓ-挠系数环的情形）表明，这个形式幂级数实际上对应于 $\ell(t)$ 的分式域中的一个元素。这就是 ρ的 L-函数。

在处处非分歧的情形下，这个不动点公式给出 $\ell[[t]]^\times$ 中的一个等式

$$L(X,\rho,t) = \prod_{i=0}^{2} \det(1 - t\mathrm{F}|H^i(X_{\bar{k}},\rho))^{(-1)^{i+1}}. \tag{3.2}$$

注 3.1。 若将 ℓ 换成 $\mathbf{C}$，那么传统上会将这个 L-函数视为变量 s 的函数，其定义为 $t = q^{-s}$。因此，这个复 L-函数在点 $s = 1/2$ 处的值，在我们的记号中对应于 $L(\rho, \frac{1}{\sqrt{q}})$。

我们还将使用函数方程；Deligne 在挠系数情形下也讨论过该方程：

$$L(X,\rho,t) = \varepsilon(\rho,t)L(X,\rho,\frac{1}{qt}). \tag{3.3}$$

其中 ε 具有如下形式：αt^m ，对 $\alpha \in \ell^\times$， $m \in \mathbb{Z}$ 且可像 [11,定理 7.11]中那样，分解为关于 X的闭点的乘积。

3.3. **归一化弗罗贝尼乌斯。** 现在回到处处非分歧的情形，其中 ρ 来自 $\pi_1(X)$ 的一个表示。我们假设，将 ρ限制到几何 π_1后，没有不变量或余不变量；也就是说， $X_{\bar{k}}$ 在 ρ 上的 H^0 和 H^2 均消失。[8]

中间上同调 $H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$ 是一个维数为 $2(\dim \rho)(g-1)$ 的 ℓ-向量空间，其中 g 是 X的亏格。它带有一个对称配对 $\langle -,-\rangle$ ，使得几何弗罗贝尼乌斯自同构 F 满足

$$\langle \mathrm{F}x, \mathrm{F}y\rangle = q\langle x, y\rangle.$$

写作 $\bar{\mathrm{F}} = q^{-1/2}\mathrm{F}$。这是一个 H^1的正交变换。

[8]很可能只需稍作修改即可提升这一假设，例如，必须要求 q 在 ℓ 中不等于 1，但我们尚未对此进行详细考察。

注 3.2. 严格来说，配对 $\langle -,-\rangle$ 取值于 Tate 扭转 $\ell\langle -1\rangle$。要得到取值于 ℓ的配对，我们必须平凡化 $\ell\langle 1\rangle \simeq \ell$，例如选择一个单位根 $\bar{}$，它是 ℓ_0次根 $\zeta \in k$ （其中 ℓ_0 为素域的阶）。我们作出这样的选择，并指出这不会影响我们的讨论，因为对二次型重新缩放不会影响我们所考虑的不变量。事实上，特殊正交变换的旋量范数在这种缩放下保持不变，而偶维二次空间的行列式也同样保持不变。然而，对于这一问题更内蕴的处理方法，请参见 §3.4 的讨论。

$\bar{}$F 实际上是一个特殊 正交变换。为证明这一点，比较（3.3）和（3.2），并利用庞加莱对偶。根据我们当前的假设， H^0, H^2 消失，我们得到

$$\varepsilon = (-qt)^{\dim H^1} \prod \det(\mathrm{F}|H^1) = (-\sqrt{q}t)^{\dim H^1} \det(\bar{\mathrm{F}}).$$

由于 $\dim(H^1)$ 为偶数，我们看到 $\varepsilon(\rho, 1/\sqrt{q})$ 计算的是 $\bar{}$F 的行列式。但如 [11], 所示，对 ϵ-因子的分解使我们能够计算 $\varepsilon(\rho, 1/\sqrt{q}) = 1$ （因为$\bar{}$ ρ 处处非分歧且行列式平凡。关于我们更详细使用这一分解的其他计算，见 §5.4）。

因此， $H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$ 是一个正交的 ℓ-向量空间，而归一化 Frobenius $\bar{}\mathrm{F} := \frac{1}{\sqrt{q}}$ F 是一个特殊正交变换。我们关注中心L-值的平方类：

$$L(X, \rho) := \text{ image of } L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}}) \in \ell^\times/2$$

如果中心点处的 L-值消失，则受旋量范数的启发，参见引理 C.2.1，我们定义

$$L^*(X, \rho) = \text{spinor norm}(\bar{\mathrm{F}}) = \frac{1}{h!\langle v_i, v_j\rangle} \frac{d^h}{dt^h} L(X, \rho, t)\big|_{t=1/\sqrt{q}} \in \ell^\times/2, \tag{3.4}$$

其中：

- h 是 L-函数在中心点$t = 1/\sqrt{q}$处的消失阶，或者等价地，是$H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$中弗罗贝尼乌斯对应的广义不动子空间的维数。它自动为偶数。 - v_1、……、v_h 是该广义不动子空间的一组基，而 $\langle -,-\rangle$ 是二次配对在其上的限制。 - 第二个等式由 Zassenhaus 公式 (B.31) 得出；该公式在此适用，因为 $H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$ 是一个判别式为平方的偶维向量空间（见 §3.5）。

3.4. 在GSp与 Sp之间的转换。与取值于 Sp 的局部系统相比，考虑取值于 GSp 的局部系统往往更有用。前者自然出现于算术背景中。使用 GSp 模型，无需选择$\sqrt{q}$，也可避免注 3.2 中提到的种种麻烦。我们现在说明，如何在这两种背景之间转换猜想是一件直接的事：

假设 $\rho^{(\mathrm{g})}: \pi_1(X) \to \mathrm{GSp}(\ell)$ 满足尺度特征 $\pi_1(X) \to \ell^\times$ 由圆分特征 $\omega: \pi_1(X) \to \ell^\times$ 给出。（一种更为典范的理解方式，是考虑赋有取值于定向层的辛形式的局部系统。）此类 $\rho^{(\mathrm{g})}$ 的典范例子，是主极化阿贝尔概形在 X上的 Tate 模（即第一<永居>同调）上的表示。

平方根 $\sqrt{q}$ 的选取定义了平方根 $\omega^{1/2}$，我们可以用 $\omega^{-1/2}$扭曲 $\rho^{(\mathrm{g})}$，从而得到一个取值于 $\mathrm{Sp}(\ell)$ 的特征，记作如下形式：

$$\rho = \rho^{(\mathrm{g})}(-1/2). \tag{3.5}$$

在上同调层面，我们有相应的同构

$$H^1(X_{\bar{k}}, \rho) \simeq H^1(X_{\bar{k}}, \rho^{(\mathrm{g})})(-1/2)$$

这意味着，几何 Frobenius 在 $H^1(X_{\bar{k}}, \rho^{(\mathrm{g})})$ 上的作用对应于归一化 Frobenius $\bar{\mathrm{F}}$ 在 $H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$ 上的作用。对于 L-函数，我们有 $L(X, \rho, t) = L(X, \rho^{(\mathrm{g})}, \sqrt{q}t)$，其中我们考虑到点 x 处的几何 Frobenius 经由 ϖ 映到 $q^{-\deg(x)}$。因此 $L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}}) = L(X, \rho^{(\mathrm{g})}, 1)$，据此我们定义

$$L(X, \rho^{(\mathrm{g})}) := \text{square class of } L(X, \rho^{(\mathrm{g})}, 1).$$

使用 GSp 局部系统可以避免像在辛群情形中那样作出各种选择。然而，我们无法得到更一般的结果：即使将结果表述为关于 GSp 局部系统的陈述，我们仍然需要假设 $\sqrt{q} \in \ell$，尽管定义 L-函数时并不需要它。这也是我们选择聚焦于更“对称”的辛群群表示的原因之一，在这种表示中，定向特征标并未被明确地纳入局部系统。

3.5. **(ρ)作为 ℓ上的二次空间的判别式**。我们上文断言，二次空间 $H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$ 的判别式是一个平方。我们将在下文验证这一点。这也意味着 $L(X, \rho)$ 不依赖于 $\sqrt{q}$ 的选择。

给定 $\rho: \pi_1(X_{\bar{k}}) \to \mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$，我们可以将局部系统提升到特征零，并归结为那里相应的结果。事实上，由于曲线模空间是光滑的，我们可以将 $X_{\bar{k}}$ 提升为一个定义在 Witt 向量 W_k 上的光滑射影曲线 X_W，其中 $\mathcal{k}$；包含映射 $X_{\bar{k}} \to X_W$ 由 [1, Exp. 10, Th 2.1] 在 π_1 上诱导同构。因此，ρ 延拓为 X_W 上的类似局部系统，而沿着 $\pi: X_W \to \mathrm{Spec}\, W$ 的推前 $R^1\pi_*\rho$ 给出一个正交的 ℓ-向量空间，将其视为 Spec$W$ 上的常值 étale 层。特别地，为了计算其判别式，我们可以在一般纤维上计算；也就是说，我们归结为一个类似问题，但现在曲线 X_L 定义在分式域 W 的代数闭包 L 上。现在（按照*loc. cit.*中的论证），这样的曲线实际上定义在子域 L_0 上，该子域是一个超越次数有限的域的代数闭包，其中该域是 **有理数域**，即 $X_L = X_{L_0} \otimes_{L_0} L$，且映射 $X_{L_0} \to X_L$ 在 étale π_1 上诱导同构。这使我们可以归结为 X 定义在 $\mathbf{C}$ 的子域上的情形，此时结论由以下纯拓扑陈述得出：

引理 3.5.1. 给定一个定向紧致拓扑曲面 Σ 和一个辛局部系统

$$\pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Sp}_{2r}(\ell),$$

诱导二次型在 $H^*(\Sigma, \rho)$ 上的判别式是 ℓ 中的一个平方。

这里，$H^* := H^0 \oplus H^1 \oplus H^2$ 上的“诱导二次型”是 H^1 上的标准形式，而在 $(x_0, x_2) \in H^0 \oplus H^2$ 上，它由对 x_0 和 x_2 取庞加莱配对给出。

证明。这很可能可以从针对一般系数表述的迈耶定理 [38] 推导出来；不过，似乎没有简洁明确的参照，因此我们按照本文其他论证的思路概述一个证明。

总上同调 $H^*(\Sigma,\ \rho)$ 上诱导的二次型是 Witt 群中的配边不变量：给定一个定向三维流形 $(N,\ \rho_N)$，边界上同调$H^1(\partial N,\ \rho_N)$ 是偶维的，而 $H^1(N,\ \rho)$ 的像相对于庞加莱配对而言是其中的拉格朗日子空间。于是

$$H^0 \oplus \mathrm{image}(H^1(N)) \subset H^*(\partial N, \rho)$$

是拉格朗日子空间。现在，若一个 $(2g)$ 维二次空间 E 有拉格朗日子空间，则 $(-1)^g \mathrm{disc}(E)$ 是平凡平方类。但 $H^*(\partial N,\ \rho)$ 的维数与欧拉示性数相差 $2(h^0 + h^2)$，因此能被 4 整除。由此，$(N,\ \rho)$ 的判别式是一个平方，换句话说，

$$(\Sigma, \rho) \mapsto \mathrm{disc}\ H^*(\Sigma, \rho)$$

是由定向曲面与辛局部系统组成的配对的配边不变量。正如 §2.4 中 Reidemeister 扭率的情形，这便导出一个映射

$$\mathrm{MSO}_2(\mathrm{BSp}_{2r}(\ell)) \longrightarrow \ell^\times/2.$$

现在 MSO_2 与第二（整数）同调 [60, 8, Thm IV.13] 一致，并且由于 ℓ 是有限的，根据 [57]，这个群消失。

□

3.6. 迹映射。设 A 是一个阶与 p互素的有限阿贝尔群。（稍后我们只考虑 $A = \mathbf{Z}/2$ 的情形。）迹同构 $H^2_{\mathrm{et}}(X_{\bar{k}},\ A)(1) \simeq A$ 诱导出一个同构

$$\mathrm{trace}_X : H^3_{\mathrm{et}}(X, A(1)) \simeq A. \tag{3.6}$$

为此，我们考虑谱序列

$$H^p(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^q(X_{\bar{k}}, A(1))) \implies H^{p+q}(X, A(1)) \tag{3.7}$$

（它可以通过取与常数域扩张相关的相应有限层序列的逆极限得到）。由于 $H^q(X_{\bar{k}})$ 对于 $q > 2$ 消失，因此左侧的 (3.6) 与 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 在 $H^2(X_{\bar{k}},\ A(1))$ 上作用所得的 H^1 同构。根据标准迹，这个最后提及的群可识别为 A，其伽罗瓦结构是平凡的。因此，(3.6) 的左侧可识别为 $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\ A)$，其中作用是平凡的；固定 Gal_k 的弗罗贝尼乌斯生成元后，这个 H^1 可识别为在 A 上平凡作用下的伽罗瓦余不变量。这就得到了 (3.6)。

现在，对于任意廖群 G，一个态射 $\pi_1(X) \to G$ 会在上同调上诱导一个拉回映射

$$H^3(G, A) \to H^3(X, A)$$

对于任意挠素数不整除 q 的系数，其中 A 赋予平凡作用。（例如，对于有限群 G，这是由映射 $X \to BG$诱导的；等价地，它是相关 G-覆盖的 Leray-Serre 谱序列中的边缘态射。）取 $G = \mathrm{Sp}(\ell)$，我们在引言中（见 §1.3）定义了一个特定的类 $c_{\mathrm{et}} \in H^3(G,\ \ell^\times/2)$，即 étale 陈类，并得到

$$\rho^* c_{\mathrm{et}} \in H^3(X, \ell^\times/2).$$

取迹$_X$ 的像，我们得到 $\ell^\times/2$ 中的一个元素，记作 $c_{\mathrm{et}}(X, \rho)$。

3.7. **主定理**。设 (X,ρ) 是一对射影光滑几何不可约曲线 X，定义在有限域 k 上；并设 $\rho\colon \pi_1^{\mathrm{et}}(X,*) \to \mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 是一个系数取自有限域 ℓ的辛局部系统。

我们称 $(X,\ \rho)$ 为可容许，如果

(a1) 表示 ρ 在几何上是满射的，即在 $\pi_1(X)^{\mathrm{geom}}$上是满射。[9](a2) k 的阶 q 与辛群 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$的阶互素，且 (a3) k 的阶 q 在 ℓ的素域中有一个平方根。（注意，这比我们先前的假设 $\sqrt{q}\in\ell$稍强。）

定理 3.1. 设 $(X,\ \rho)$ 可容许。假设 ℓ 的阶与 ±1模 8 同余，且 k 的阶 q 与 1 模 8 同余。那么

$$L(X,\rho) = c_{\mathrm{et}}(X,\rho).$$

我们没有在定理的其他条件中加入“可容许性”，是因为它本身就是证明中一个有用的概念。

合理的预期是：等式要么在没有任何条件时成立，要么应乘以一个简单函数，该函数取决于k 和 ℓ的阶的 2-adic 性质。（在附录 D 中，我们给出了一些数值例子；至少在这些例子中，似乎没有 2-adic 修正因子介入。）本定理的证明将在 §4 中概述，并在本文余下部分详细展开。

3.8. **关于** 广义辛群**局部系统的表述**。 该定理等价于同一断言

$$L(X,\rho^{(\mathrm{g})}) = c_{\mathrm{et}}(X,\rho^{(\mathrm{g})})$$

对于具有圆分尺度特征的 GSp 局部系统，该断言正如 §3.4 中所讨论的。事实上，左边已在该处定义为与 $L(X,\ \rho)$ 相匹配，其中 ρ 和 $\rho^{(\mathrm{g})}$ 按照 (3.5) 相匹配。我们需要对 étale 陈类验证同样的结论。我们可以将 $\rho^{(\mathrm{g})}$ 分解为以下复合：

$$\pi_1(X) \xrightarrow{(\rho,\deg)} \mathrm{Sp}(\ell)\times\widehat{\mathbf{Z}} \to \mathrm{GSp}(\ell), \tag{3.8}$$

其中，后一个映射将 $1\in\mathbf{Z}$ 映到 $\sqrt{q}\cdot\mathrm{Id}\ \in \mathrm{GSp}(\ell)$。

$H^3(\mathrm{GSp}(\ell)\ \ell^\times/2)$中的类拉回为 $H^3(\mathrm{Sp}(\ell)\ \times\ \widehat{}\mathbf{Z})$中的一个类，经 Künneth 识别为 $c_{\mathrm{et}}\otimes 1$ 加上 $H^2(\mathrm{Sp}(\ell)\ \ell^\times/2)\ \otimes(\ell^\times/2)$中的一个类。由于 H^2 由引理 2.7.1 知为零，我们看到，$\rho^{(g)}$ 和 ρ 的 étale 陈类相同。

换言之，我们同时有

$$L(X,\rho^{(\mathrm{g})}) = L(X,\rho) \text{ and } c_{\mathrm{et}}(X,\rho^{(\mathrm{g})}) = c_{\mathrm{et}}(X,\rho). \tag{3.9}$$

3.9. **相容局部系统**。 L具有算术意义的函数源自相容局部系统。本节记录一些关于相容局部系统的 L 函数的事实，这些事实将在主要定理的证明中用到。

假设给定了一个定义在 X 上的局部系统相容系统，即一个数域 E 以及一族表示 $\sigma=\{\sigma_\lambda\colon \pi_1^{\mathrm{et}}(X) \to$ 广义辛群$_{2r}(\mathfrak{o}_{E,\ \lambda})\}$，由 E 中不在 p 上方的位点 λ 索引，且所有弗罗贝尼乌斯幂的迹都属于 E，并且与 λ 无关。

[9]注意，这意味着 $H^0(X_{\bar{k}},\ \rho)=0$ 和 $H^2(X_{\bar{k}},\ \rho)=0$

在这种情况下，每个 L-函数 $L(X, \sigma_\lambda)$ 都“与 λ 无关”，这意味着存在唯一的

$$L(X, \underline{\sigma}, t) \in E(t)$$

其在 $E_\lambda(t)$ 中的像给出 $L(X, \sigma_\lambda, t)$。[10] 若有定义（即没有极点），我们将其在 $t = 1$ 处的值记为 $L(X, \sigma)$。对于 GSp 值系而言，这是“中心”值，参见 §3.4。

引理3.9.1。设 λ 是一个不在 $2p$ 之上的位，且 σ_λ 的几何像在辛群中扎里斯基稠密。那么，$L(X, \sigma)$ 在 λ 处的赋值（若非零）为偶数。 –

证明。根据 (3.4)，$L(X, \sigma)$ 在 $E_\lambda^\times/2$ 中的类，等于弗罗贝尼乌斯在由 $H^1(X_{\bar{k}}, \sigma_\lambda)$ 给出的正交 E_λ-向量空间上作用的旋量范数。其像

$$\Lambda := \text{image}\left(H^1(X_{\bar{k}}, \sigma_\lambda^{\circ}) \to H^1(X_{\bar{k}}, \sigma_\lambda)\right)$$

（其中 σ° 指所假设的整结构）给出了该正交向量空间内一个弗罗贝尼乌斯稳定的幺模格 Λ。“幺模”是指它相对于双线性配对等于自身的对偶；这种幺模性由庞加莱对偶推出，同时需考虑到 σ_λ° 上诱导的辛配对是完美的。

弗罗贝尼乌斯的旋量范数具有偶数赋值，这由保持幺模格的特殊正交变换的一般性质可知，参见例如 [40, 92:5].[11] □

3.10. **对相容局部系统的应用**。现在我们将说明如何将定理 3.1 应用于相容局部系统。本文其他部分不会用到这一点；我们将其列出，以强调作为一项推论，该定理也能控制特征零 L-值。

我们沿用 §3.9 中的设定，但现在还假设，如定理 3.1 的陈述所述，k 的阶模 8 同余于 1，中心 L-值不为零，并且

(a) p在 $E(\sqrt{2})$上的分圆扩张次数大于 $4r^2$。(b) 对狄利克雷密度为一的 λ 集合，σ_λ 的像是扎里斯基稠密的。

在这些情况下，我们有

(*): 将定理 3.1 应用于 σ 的各种约化，唯一地 确定 $L(X, \sigma)$ 在 $E(\sqrt{q})$ 中的平方类，精确到乘以 2_{σ}。

非正式地说，第一个假设 (a) 表明，我们的曲线的特征 p 相对于 r 和 E 很大；通过考察下文的论证，很容易以各种方式加强这一条件，但我们无法完全去掉这类条件，因为它反映了定理所要求的 q 与 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 的阶互素。

还要指出，也可以针对 Sp-表示的相容系统表述相应的结果，不过 GSp-表示的相容系统出现得更为自然一些。

[10]事实上，在我们的假设下，$L(X, \sigma, t)$ 的系数实际上属于 $\mathfrak{o}_E[p^{-1}]$，因为它们对所有不高于 p 的 λ 都是整的。[11]或者，可以直接利用环上存在旋量范数理论这一事实进行论证，如 [5] 所示：这表明弗罗贝尼乌斯的旋量范数属于 $E_\lambda^\times/2$ 内 $H^1(\mathfrak{o}_{E,\lambda}, \mathbf{Z}/2)$ 的像，因此具有偶数赋值。

证明。 对于 (*): 不失一般性 $\sqrt{q} \in E$。 $^{-}$

我们首先指出，根据 Larsen 关于相容 ℓ-进表示的一个定理 [33, 定理 3.17], 存在一个密度为一的位点集合，使得剩余表示 ρ_λ 限制到几何 π_1 上的像为整个 $J_\lambda^{\mathrm{geom}}$。事实上，记 ρ_λ 的像为 I_λ，并记 I_λ 在 $\mathrm{PSp}_{2r}(E_\lambda)$ 中的像为 I_λ。Larsen 证明，对于一个密度为一的位点子集，I_λ 包含 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathfrak{o}_\lambda)$ 的像的一个共轭。对于足够大的 λ，$\mathrm{PSp}_{2r}(\mathfrak{o}_\lambda)$ 中包含的这类共轭只有 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathfrak{o}_\lambda)$ 本身的像，因此我们得到

$$\overline{\mathrm{I}_\lambda} = \overline{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathfrak{o}_\lambda)}.$$

因此，$\mathrm{I}_\lambda \times Z$ 满射到广义辛群 $_{2r}(\mathfrak{o}_\lambda)$，其中 Z 是中心 $\mathbf{G}_m \subset$GSp 的 $\mathfrak{o}_\lambda$-点。记 k_λ 为剩余域。剩余表示的像 J_λ 是广义辛群 $_{2r}(k_\lambda)$ 的一个子群，并且 $J_\lambda \times k_\lambda^\times$ 满射到广义辛群 $_{2r}(k_\lambda)$。几何 π_1 的像 $J_\lambda^{\mathrm{geom}}$ 是辛群 $_{2r}(\mathfrak{o}_\lambda)$ 的一个子群，它被 $J_\lambda \times k_\lambda^\times$ 正规化，而 $J_\lambda \times k_\lambda^\times$ 就是整个广义辛群 $_{2r}(k_\lambda)$。这迫使 $J_\lambda^{\mathrm{geom}}$ 要么是整个辛群 $_{2r}(k_\lambda)$，要么其阶为 ≤ 2。然而，由于 $J_\lambda / J_\lambda^{\mathrm{geom}}$ 是循环群，后一种可能性被排除。因此 $J_\lambda^{\mathrm{geom}} =$ 辛群 $_{2r}(k_\lambda)$。

我们将定理 3.1 应用于 ρ_λ 在 λ 处的约化 ρ_λ，使得 λ 与 q 互素，且 $L(X, \sigma)$ 的赋值为零，并且满足：

(a) 剩余域的阶 $N\lambda$ 模 8 同余于 ± 1。 (b) $N\lambda$ 在 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ 中的阶为 $\geq 2r$（其中 p 是 k 的特征）。 (c) ρ_λ 具有几何满射性。 (d) λ 的次数为一，即 $N\lambda$ 是素数。

定理 3.1 中的域 ℓ 取为 $\ell = \mathfrak{o}/\lambda$，并且我们还隐式地将 ρ_λ 从取值于广义辛群扭曲为取值于辛群，见 §3.4，以便能够应用该定理。应用定理 3.1 的假设均已满足：

- (d) 给出了 ρ_λ 的几何满射性。 - 我们一开始就假设 k 的阶模 8 同余于 1。 - 我们还假设 q 在 E 中有一个平方根，因此 q 在 λ 处的剩余域 ℓ 中也有一个平方根。由于 λ 的次数为一，ℓ 就是它自身的素域。 - (b) 保证辛群 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 的阶与 k 的阶互素，因为该阶的表达式明确为

$$\#\mathrm{Sp}_{2r}(\ell) = \ell^{r^2} \prod_{i=1}^{r} (\ell^{2i} - 1).$$

现在假设在上述满足 (a)、(b)、(c) 和 (d) 的所有位点 λ 处，$L' \in E^\times$ 与 $L(X, \sigma)$ 具有相同的平方类。我们需要证明事实上：

$$L/L' = 1 \text{ or } 2 \text{ inside } E^\times/2. \tag{3.10}$$

设 α 为比值 $\frac{L}{L'}$ 的平方类。若 $\alpha \in E^\times/2$ 既不等于平凡类，也不等于 2，我们断言存在一个正密度集合 $\mathcal{C}$，其中包含有理数域 λ 的位点，使得 (a)、(b)、(c)、(d) 成立且

(e) 对于 λ $(\sqrt{\alpha})/E$，弗罗贝尼乌斯 λ 非平凡。

由此可得矛盾：可以应用定理 3.1 来确定 $\lambda \in \mathcal{C}$处 $L(X, \sigma)$ 的约化。但在这样的 λ 处，α 不是平方，这意味着 L 和 L' 不会约化到同一个平方类，这与我们对 L' 的假设矛盾。

要证明集合 $\mathcal{C}$ 的密度为正，只需证明存在一个正密度的 λ 集合，使得弗罗贝尼乌斯元素满足：(i) 在 $E(\sqrt{2})/E$ 中是平凡的；(ii) 在 $E(\sqrt{\alpha}/E)$ 中是非平凡的；(iii) 在 $\mathrm{Gal}(E(\zeta_p)/E) \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ 中的像的阶大于 $2r$。事实上，这些条件蕴含 (a)、(b) 和 (e)，而再施加条件 (c) 和 (d) 只会排除密度为零的集合。

因此，我们需要证明满足 (i)、(ii)、(iii) 的 λ 所成集合具有正密度。我们使用切博塔廖夫密度定理。令 E_1 为将 $\sqrt{2}$、$\sqrt{\alpha}$ 添入 E 后得到的域；$E_1(\zeta_p)/E$ 的伽罗瓦群满射到 E_1/E 的伽罗瓦群，因此我们可以选取 λ，使得 (i) 和 (ii) 成立。所得 λ 在 $\mathrm{Gal}(E(\zeta_p)/E) \subset (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ 中的弗罗贝尼乌斯共轭类，可以通过 $\mathrm{Gal}(E_1(\zeta_p)/E_1) \to (\mathbf{Z}/p)^*$ 的像中的任意元素任意改变。根据假设，这个群的阶至少为 $2r^2$，因为 $[E_1(\zeta_p) : E_1] \geq \frac{1}{2}[E_1(\zeta_p) : E(\sqrt{2})] \geq \frac{1}{2}[E(\sqrt{2}, \zeta_p) : E(\sqrt{2})]$。这严格大于 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ 中阶为 $\leq 2r$ 的元素总数，因为恰好为 o 阶的元素至多有 $o-1$ 个。论证至此完成。□

4. 定理 3.1 的证明：概述

我们概述定理 3.1 的证明。证明分为两个关键步骤：步骤 A 和步骤 B，详见 §4.2。这里在 §4.3 概述步骤 A 的策略，并在 §5 中详细实施；在 §4.4 概述步骤 B 的策略，并在 §6 中详细实施。

4.1. 记号。我们使用与定理 3.1 的陈述中相同的记号。我们用$\delta(X, \rho) \in \ell^\times/2$ 表示 $c_{\mathrm{et}}(X, \rho)$ 与 $L^*(X, \rho)$ 之差：

$$\delta(X, \rho) := L^*(X, \rho)/c_{\mathrm{et}}(X, \rho) \in \ell^\times/2.$$

因此，我们的目标是证明：当 (X, ρ) 可容许时，$\delta(X, \rho) = 1$。

我们用 ℓ 同时表示伽罗瓦表示的系数域及其基数；用 ℓ_0 表示素域的基数，因此对某个 $s \geq 1$，有 $\ell = \ell_0^s$。ℓ 总是奇数：事实上，在定理的语境中，假设它模 8 ± 1。我们用 **有理数域**$_\ell$ 表示 **有理数域**$_{\ell_0}$ 的非分歧扩张，其剩余域为 ℓ（即 ℓ 的 Witt 向量的分式域）。

和之前一样，我们记

$$q = p^n$$

为 $k = \mathbf{F}_{p^n}$的基数。

我们记 $\ell_0' = (-1)^{(\ell_0-1)/2}\ell_0$。对于（$X, \rho$）可容许的情形，我们有

$$\left(\frac{\ell_0'}{p}\right)^n = \left(\frac{p}{\ell_0}\right)^n = \left(\frac{q}{\ell_0}\right) = 1 \tag{4.1}$$

根据二次互反律，并且由于可容许性意味着 q 是模 ℓ_0 的平方。

对于 M/**有理数域** 的一个有限伽罗瓦扩张，其中 p 非分歧，“ k 在 $\mathrm{Gal}(M/$**有理数域**$)$ 中的弗罗贝尼乌斯”记作

$$\mathrm{F}_k \in \mathrm{Gal}(M/\mathbf{Q}), \tag{4.2}$$

按定义，是 $\mathrm{Gal}(M/$**有理数域**$)$ 中任意形如 $\mathrm{Frobenius}(\varpi/p)^n$ 的元素所对应的共轭类，其中 ϖ 是 M 上方的一个素数。

4.1.1. 广义辛群-可容许局部系统。使用 GSp 局部系统将会很有帮助（见 §3.1）。我们在 (3.8) 中已经看到，若固定 $\sqrt{q} \in \ell$，便可以对 $\overline{\rho} \rightsquigarrow \rho^{(g)}$ 作扭曲，使其成为一个取值于 GSp 的表示，从而使得 $L(X,\ \rho) = c_{\mathrm{et}}(X,\ \rho) \iff L(X,\ \rho^{(\mathrm{g})}) = c_{\mathrm{et}}(X,\ \rho^{(\mathrm{g})})$，见 (3.9)。

一个广义辛群-可容许 (X, ρ)由 X 以及一个表示 $\pi_1(X_k) \to$ 广义辛群$_{2r}(\ell)$组成，并具有圆分尺度特征，满足：

(a1)' 几何像包含辛群$_{2r}(\ell)$，(a2)' q 与#广义辛群$_{2r}(\ell)$互素（等价地，与#辛群$_{2r}(\ell)$互素），

但没有与 (a3) 对应的条件，即不对平方类施加任何条件。显然

$$(X, \rho) \text{ admissible } \implies (X, \rho^{(\mathrm{g})}) \text{ GSp-admissible.}$$

在上下文清楚时，我们将省略上标(g)，并允许符号 ρ表示一个广义辛群 局部系统。

我们将对差值使用类似的记号 $\delta(X, \rho^{(\mathrm{g})})$

$$\delta(X, \rho^{(\mathrm{g})}) := L(X, \rho^{(\mathrm{g})}) / c_{\mathrm{et}}(X, \rho^{(\mathrm{g})}) \in \ell^{\times}/2$$

对于 GSp 可容许局部系统。

4.2. **两个关键步骤**。证明中有两个主要要点。

- （步骤 A，概要见 §4.3，详细内容见 §5）：对于每个固定的 r 和 ℓ，存在一个二次 Dirichlet 特征

$$\chi_{r,\ell} : G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \{\pm 1\}, \tag{4.3}$$

它在 #Sp$_{2r}(\ell)$ 的所有素因子之外非分歧，使得对于任意 GSp-可容许的 (X, ρ)

$$\delta(X, \rho) = \chi_{r,\ell}(k). \tag{4.4}$$

其中，我们将$\chi_{r,\ell}(k)$理解为 $\chi_{r,\ell}(\mathrm{F}_k)$ 在群同构 $\{\pm 1\} \simeq \ell^{\times}/2$下的像，其中 F_k 如 (4.2) 所定义。- （步骤 B，概要见 §4.4，详细内容见 §6 ）：特征 $\chi_{r,\ell}$ 在 2ℓ 之外非分歧。

步骤 A 和步骤 B 合起来推出定理 3.1：它们表明，特征χ 将 p 处的弗罗贝尼乌斯映到 $\left(\frac{Z}{p}\right)$，其中 Z 属于由± 2 和 ℓ_0生成的 **有理数域**$^{\times}/2$ 子群。记 $Z = Z_0$ 或 $Z_0\ell_0'$，其中 $Z_0 \in \langle \pm 2 \rangle$。由 (4.1)，对于任意可容许的 (X, ρ)，我们有等式

$$\delta(X, \rho) \overset{(3.9)}{=} \delta(X, \rho^{(\mathrm{g})}) = \left(\frac{Z_0}{p}\right)^n$$

这是狄利克雷特征 $\left(\frac{Z_0}{\cdot}\right)$ 在 p^n 上的取值。这是一个模 8 的狄利克雷特征，因此它等于 1，因为我们假设 $p^n \equiv 1$ 模 8。

注 4.1。请注意，我们并未尝试优化证明；关于 χ 在 2，∞ 处的分歧，我们还可以得到更多信息，但要完全消除这些限制似乎难得多。主要困难可能出在素数 2 上。

4.3. 步骤 (A) 的论证。详见 §5。

˜令 $G =$ 辛群$_{2r}(\ell)$ 和 $G =$ 广义辛群$_{2r}(\ell)$。令 N 为辛群$_{2r}(\ell)$ 的阶。我们将 $r,\ \ell$ 视为固定，因此 $G,\ N$ 也视为固定。

(a) 在 §5.1 中完成：

我们注意到，可容许对 $(X,\ \rho)$ 会产生模空间$\mathfrak{M}^G$ 的 k-点；类似地，GSp-可容许对 $(X,\ \rho)$ 会产生扭曲模空间 $\mathfrak{M}^{G*}$ 的 k-点。这两个模空间都是定义在 $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$ 上的光滑 Deligne-Mumford 叠；它们本质上是配备非阿贝尔层结构的曲线模空间。

(b) 在 §5.2 中完成：

我们将证明 L 和 c_{et} 源自 (a) 中模空间上的泛上同调类。更具体地说，存在一些类

$$\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}' \in H^1_{\mathrm{et}}(\mathfrak{M}^{G*}, \mathbf{Z}/2)$$

其在 k 处弗罗贝尼乌斯上的取值（其中 Spec $k \to \mathfrak{M}^{G*}$ 参数化某些 GSp-可容许的 (X,ρ)）分别为 $L(X,\rho)$ 和 $c_{\mathrm{et}}(X,\rho)$。（这里我们默认将弗罗贝尼乌斯取值所在的二元群 $H^1_{\mathrm{et}}(k,\mathbf{Z}/2)$ 与 $= k^\times/2$ （$L(X,\rho)$ 和 $c_{\mathrm{et}}(X,\rho)$ 所在的群）视为相同。）

我们将看到

$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}'$ 在一般纤维上，由拓扑定理可知，

而且，只要 $g \gg_{r,\ell} 1$，$\mathfrak{M}^{G*}$ 的这个一般纤维就是不可约的。在拓扑学中，给定一个纤维连通的纤维化，全空间的 H^1 中一个在某个纤维上平凡的类，必定是通过拉回从基底得到的。在我们的代数情形中，这一结论仍然成立（尽管需要证明，见 §5.3），因此 $\mathfrak{Y}$ 与 $\mathfrak{Y}'$ 之差来自 $H^1(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}],\mathbf{Z}/2)$ 中的一个类，也就是说，来自 (4.3) 中的一个二次 Dirichlet 特征 χ。

(c) 在 §5.4 – §5.6 中完成：此时我们几乎已经证明了所需结论，但还有两个不理想的限制：$g \geq g_0(r,\ \ell)$，并且特征 $\chi_{r,\ \ell,\ g}$ 实际上依赖于亏格。也就是说，我们已经证明存在一个特征$\chi_{r,\ \ell,\ g}$，使得对于 $(X,\ q)$ GSp-可容许，

$$\delta(X,\rho) = \chi_{r,\ell,g}(q),\ \ g \geq g_0(r,\ell).$$

为了证明 $\chi_{r,\ \ell,\ g} = \chi_{r,\ \ell,\ g'}$ 并消除 $g \geq g_0$，我们借助分歧覆盖在不同的亏格之间转换。

更确切地说，在 §5.4 中我们证明，δ 在奇数次数分歧覆盖下不变；在 §5.5 中我们证明，可以利用奇数次数分歧覆盖将亏格改为任意指定的大数；在 §5.6 中，我们运用这些思路完成论证。

4.4. 步骤 (B) 的论证。详情见 §6。再次固定 r, ℓ。

固定一个奇素数 $m \neq \ell$。我们将构造一个有理数域 $\mathbf{Q}$ 的伽罗瓦扩张 M^*，它在 m 处非分歧，并且对于任意充分大的、在 M^* 中完全分裂的素数 p

(4.5) there exists GSp-admissible (X,ρ) over $\mathbf{F}_{p^j}$ with j odd and $\delta(X,\rho) = 1$.

这里“充分大”是指相对于 r, ℓ而言，换言之，即 $p \geq p_0(r,\ell)$。

由此，我们现在推导出步骤 (B) 的陈述。由于 $q\ k = \mathbf{F}_{p^j}$的阶是 p 的奇 次幂，我们计算

$$\chi_{r,\ell}(p) = \chi_{r,\ell}(q) = \delta(X,\rho) \overset{(4.5)}{=} 1. \tag{4.6}$$

˜现在令 M^*为 M^*与对应于 χ_r 的二次扩张的复合扩张，ℓ。于是 $\chi_r,\ \ell$ 给出一个特征 $G_{\tilde{M}/\mathbf{Q}} \to \{\pm 1\}$，它在每个弗罗贝尼乌斯元素 $\mathrm{F}p \in G_{\tilde{M}^*/\mathbf{Q}}$ 上都平凡，只要该元素在 $M^*/\mathbf{Q}$ 中平凡。特别地，它实际上经由 $G_{M^*/\mathbf{Q}}$ 分解，因此在 m 处非分歧。选择不同的素数 m，可知 $\chi_r,\ \ell$ 在2ℓ之外非分歧。由此即可完成步骤 (B) 的证明。

我们将通过构造一大类 $(X,\ \rho)$ 来证明 (4.5)，其中基域 k 各不相同，且 $L = c_{\mathrm{et}}$ 均平凡。现在我们概述这一论证。

我们首先（见 §6.1）仔细选取一个辅助全实域 K，使其在 m 处分歧，并带有一个位 λ_0，满足

$$\mathfrak{o}_K/\lambda_0 \simeq \ell.$$

在这两种情形下，迫使 L 和 c_{et} 平凡的机制，都是将它们提升到 $\mathfrak{o}_K$ 的某个合适局部化中。

所需的 X 是特征 p下经适当构造的“希尔伯特模簇”的曲线切片，见 §6.2：

$$\mathcal{S}:\ = \text{一个参数化具有 } K\text{实乘法的阿贝尔簇的模空间概形},$$

其中我们还将在某个辅助整数处添加层结构。

注意，尽管 $\mathcal{S}$ 仅为拟射影簇，但其在适当射影嵌入下的边界余维为 ≥ 2，因此可以选取曲线截面 X使其为射影曲线。还需注意，$\mathcal{S}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上并非几何不可约；这意味着，只有当 p 在某个域 M_0中完全分裂时，我们才能在 $\mathbf{F}p$ 上得到许多截面，其中

$$M_0 := \text{field of definition of a geometric component of } \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}. \tag{4.7}$$

这个 M_0 在 m处非分歧。

特别地，这些曲线 X 将带有一个 $\{\rho_\lambda\}$ 取值于广义辛群的局部系统的相容系统，它们来自阿贝尔簇万有族的同调，而ρ 将是 K在指定的位 λ_0 处的约化ρ_{λ_0}。因此：

(4.8)
$(X,\ \rho) :=$（ $S_{\mathbf{F}_q}$的一维切片，普适相容系统在 λ 处的约化）。

在 §6.4 中，我们实际上会以一种特定方式安排切片，使中心值 $L(X,\ \rho,\ 1)$ 非零；也就是说，它是该相容局部系统所有中心 L-值的公共值。于是，这个中心值定义了一个平方类

$$L(X,\underline{\rho}) \in K^\times/2, \tag{4.9}$$

并且它在每个不位于 $2p$ 之上的 λ 处的赋值都是偶数，因为它可以表示为 $\mathfrak{o}_\lambda$ 上的旋量范数，见引理 6.5.2。模 λ_0 约化后，我们发现 $L(X,\ \rho)$ 是 K 的一个全正平方类在 $\ell^\times/2$ 中的[12] 像，该平方类在 $2p$ 之外非分歧，记作

$$L(X,\rho) \in \mathrm{image}(U_K^{(p+)} \to \ell^\times/2), \tag{4.10}$$

其中，$+$表示“全正”，其依据是曲线 $X/_{\mathbf{F}_q}$ 的（已知）黎曼猜想。

[12]请注意，尽管所得中心值 $L(X,\ \rho)$ 非零，且在 $\underline{\lambda}_0$ 处是整数，但它模 λ_0 后未必非零。尽管如此，我们仍可将其作为平方类约化到 $\ell^\times/2$。

现在——详见 §6.1——域 K 的选取方式将使得：只要 p 在某个辅助域 M_2 中完全分裂，(4.10) 就是平凡的；该域取决于 K 的选取方式，但唯一重要的特征是它在 m 处非分歧。

为了分析 $c_{\mathrm{et}}(X,\ \rho)$，我们将在 §6.3 中采用一种类似于步骤 A 的论证（b）部分的方式。具体而言，我们计算 $\mathcal{S}$ 的复纤维上的 étale 陈类：从通过添加 λ_0-层结构而得到的 S 的 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$-覆盖开始，这给出一个态射 $\mathcal{S}(\mathbf{C}) \to B\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$，进而通过拉回 étale 陈类得到一个类 $H^3(\mathcal{S}(\mathbf{C})\ \ell^\times/2)$。现在，对于在解析拓扑下考察的 $\mathcal{S}_{\mathbf{C}}$，这个由 ℓ-向量空间构成的辛局部系统可提升为由 $\mathfrak{o}_K$-模构成的局部系统。这意味着，c_{et} 在该复纤维上的作用事实上通过 U_K^+ 在 $\ell^\times/2$ 中的像分解（这里的 $+$ 仍表示全正，并源于对 $\mathbf{R}$ 处所作的一点额外分析）。接着，我们运用与步骤 A 中相似的形式论证（§6.3），将这一结果推广到整模型 $\mathcal{S}$ 在辅助域 M_1 中适当完全分裂的素数 p 之上的所有纤维：

(4.11) $\quad c_{\mathrm{et}}(X,\rho) \in \mathrm{image}(U_K^+ \to \ell^\times/2)\text{whenever } p \text{ is } M_1\text{-split and sufficiently large.}$

具体而言，M_1 是关于H^2_{et}上的伽罗瓦作用的分裂域的阿贝尔扩张（$S_{\overline{\mathbf{Q}}},\ \mathbf{Z}/2$）。$M_1$ 在 m处非分歧：M_1 的分歧来自系数的扭率阶、希尔伯特模簇的坏约化，也来自ℓ，因为我们从 S的层级 ℓ 覆盖出发构造 étale 陈类，而该覆盖在 ℓ处有坏约化。

取 $M^* = M_0M_1M_2$，其中 M_0，M_1 和 M_2 分别如（4.7）、（4.11）中所述，以及如（4.10）之后所讨论。上述论证将表明，只要 p 是M^*-完全分裂且充分大，就可以构造出（$X_{/\mathbf{F}_q}$，ρ），使得

(4.12) $$q = p^j,\ \text{for } j \text{ odd},$$

素数 p 的一个奇数次幂，且 c_{et}（X，ρ）$= L$（X，ρ）$= 1$。因此，

$$\delta(X,\rho) = 1 \text{ whenever } p \text{ is } M^*\text{-split and sufficiently large.}$$

由此得到的数对 $(X,\ \rho)$ 是 GSp-可容许的：根据 Lefschetz 型定理，ρ 满足几何满射条件，因为它是通过切割一个满足相同满射条件的希尔伯特模簇构造出来的；而我们可以增大 p，以确保满足 §4.1.1 的 (a2)'。这样便完成了 (4.5) 的证明。

注记 4.2。我们说明一下，上述概要中的两点将如何证明：

- 在 (4.10) 之后，我们对约化映射 $U_K^+ \to \ell^\times/2$ 及其在 p-单位上的类似映射进行了严格控制。这一点将在 §6.1 中通过二次互反律来实现。

  例如，为了确保每个全正单位 ε 模 λ_0 都成为一个平方，只需验证 $K(\sqrt{\varepsilon})$ 模 λ_0 完全分裂；又因为 $K(\sqrt{\varepsilon})/K$ 是一个除 2 之外均非分歧的二次扩张，所以只要要求 λ_0 在某个模数为 2 的射线类群中属于平凡类，便可确保这一点。可以通过构造 K，使得 λ_0 是主理想，且其生成元满足适当的模 2 性质，从而实现这一点。
- 在上述论证中，重要的是选择 X，使得中心值$L(X,\rho,1) \in K$非零。要做到这一点有些微妙。我们将在 §6.4 看到，可以通过计算单值群来实现：$L(X,\rho,1)$ 是某个（归一化的）弗罗贝尼乌斯的 $\det(1-F)$，若能证明以此方式得到的 F 在一个环境正交群中扎里斯基稠密，那么当然可以选取一个 F，使得 $\det(1-F) \neq 0$。

5. 定理 3.1 的证明：步骤 (A)

现在我们将证明 §4.2 中的步骤 (A)，并参见 §4.3 对论证的概述。

令 $G =$ 辛群$_{2r}(\ell)$ 和 $G =$ 广义辛群$_{2r}(\ell)$。令 N 为 G的阶。在本节中，我们固定 r，ℓ，因此也固定 G 和 N。默认情况下，所有概形和叠都定义在$\mathbf{Z}[N^{-1}]$上。

5.1. **Hurwitz 模空间**。关于 Hurwitz 叠的基本参照是专著 [8]。令$G =$ 辛群$_{2r}(\ell)$，并令 N 为 G的阶。

考虑在 $\mathfrak{M}_g$ 上的栈，其在基概形 S 上的纤维是以下群胚：

- 对象由一个亏格为 g 的射影光滑相对曲线 Σ/S 和一个 G-覆盖 Σ 组成，具体包括：– 另一条射影光滑相对曲线 Σ/S，配备一个有限 étale 映射 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 到 S 上，– 一个同态 $\theta\colon G \to$ 到 Aut(f)，使得 G 在 s 的每个几何纤维上简单传递地作用，– 对于 S 的每个几何点 s，Σ_s 都是一条不可约曲线。（特别地，所诱导的不可约曲线之间的有限 étale 覆盖 $f_s\colon \Sigma_s \to \Sigma_s$ 是伽罗瓦覆盖，且 θ 诱导出 G 与 Aut(f_s) 之间的同构。）
- 同构是显然的那些，即 Σ，Σ 之间与 G-作用相容的映射。

这是一个 Deligne-Mumford 叠（见 [8, 6.3.1]），我们将其称为 $\mathfrak{M}_g^G$；遗忘 f 的数据定义了一个到 $\mathfrak{M}_g$ 的映射。这个映射一般不是 étale，因此 $\mathfrak{M}_g^G$ 与 Deligne 和 Mumford 在 [13, 定义 5.6] 中使用的 Teichmüller 层结构的栈并不完全相同。下文将对此进行讨论。

以下例子有助于说明这一情形。

例 5.1. 考虑定义在$\mathbf{C}$上的光滑射影亏格 g 曲线 Σ，将其视为 $\mathfrak{M}_g$ 的一个$\mathbf{C}$-点。栈 $\mathfrak{M}_g^G$ 在 Σ 上的纤维可描述为一个群胚，其对象是满同态 $\pi_1(\Sigma, s) \twoheadrightarrow G$ 的共轭类，而同构来自 G-共轭。注意，这个群胚总是有非平凡的自同构，它们来自 $-1 \in G$。

例 5.2. 固定一个可定向亏格 g 曲面 $\mathfrak{S}$（这里没有固定任何复结构）和一个 G-覆盖 $\pi\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$。令 Γ 为 $\mathfrak{S}$ 的映射类群，并令 $\Gamma_0 \leqslant \Gamma$ 由那些可以提升到 $\mathfrak{S}$ 的映射类组成。令 Γ_0 为 Γ_0 以 G 的中心为核的中心扩张，由那些与 G-作用可交换的、从 Γ_0 到 $\mathfrak{S}$ 的提升组成。那么，若 $\mathcal{T}$是以同痕意义下的 $\mathfrak{S}$ 上复结构为参数的 Teichmüller 空间，则自然映射

$$\mathcal{T}/\widetilde{\Gamma}_0 \to \mathfrak{M}_g^G(\mathbf{C})$$

复解析栈将左边识别为右边的一个分支，该分支对应于映射类群在 Hom($\pi_1(\mathfrak{S})$ G)/G 上的一个轨道。

这也清楚地说明了为什么 $\mathfrak{M}_g^G$不同于 [13, 定义 5.6] 中讨论的 Teichmüller 层结构栈。事实上，Teichmüller 层结构栈的复点是商空间 $\mathcal{T}/\Gamma_0$，而不是 $\mathcal{T}/\Gamma_0$。存在一个自然映射 $\mathcal{T}/\Gamma_0 \to \mathcal{T}/\Gamma_0$，它在底层拓扑空间上是同胚。一般而言，$\mathfrak{M}_g^G$是相应 Teichmüller 层结构栈上的一个 gerbe。

引理 5.1.1. （大亏格不可约性）。存在 $g_0(\ell,\ r)$，使得对于 $g \geq g_0(r,\ \ell)$，$\mathfrak{M}^G$ 的有理数域-纤维是不可约的。

证明。这由邓菲尔德–瑟斯顿的一项结果 [18, 定理 6.25] 得出，因为在当前情形下 $H_2(G,\mathbf{Z})$ 是平凡的：他们证明，当 $H_2(G,\mathbf{Z})$ 平凡时，对于充分大的 g，亏格为 g 的映射类群在共轭类的满射集合 $\pi_1(\mathfrak{S}) \twoheadrightarrow G$，上传递作用，这里采用例 5.2 中的记号。我们指出，定理 6.25 的表述实际上略有不准确，因为映射类群并不作用于其中所述的集合，而是作用于其模掉 Q 后的商集。不过，该论证仍可按原文所述应用。此论证中的关键步骤是利文斯顿的一项结果 [36]。

现在我们推导出由 Deligne 和 Mumford 定义的 Teichmüller 层结构栈的不可约性。该栈是亏格为 g 的曲线模空间的 étale 覆盖。所引用的 [18] 结果蕴含该覆盖的单值化在一个纤维上是传递的（关于这一推论的细节，见 [13] 的引理 5.7 和定理 5.13）。

最后，我们利用这样一个事实：$\mathfrak{M}^G$ 与 Teichmüller 层结构的栈具有相同的底层拓扑空间，这一意义见 [54, Tag04XG]；这是因为 gerbe 会在这些空间之间诱导出同胚 [54,Lemma06R9]。□

现在，我们通过扭曲 $\mathfrak{M}^G$ 来定义栈 $\mathfrak{M}^{G*}$，从而得到一个参数化“带有圆分比例因子的 GSp(ℓ)-局部系统的曲线”的栈。

我们注意到，在 $\mathbf{Z}[N^{-1}]$ 上 étale 局部地，栈 $\mathfrak{M}^{G*}$ 将与 $\mathfrak{M}^G$ 同构。

为构造 $\mathfrak{M}^{G*}$，我们如下修改 $\mathfrak{M}^G$ 的定义：考虑 étale $\tilde{\ }$ $\tilde{f}: \Sigma \to \Sigma$，以及一个映射 $G \to \mathrm{Aut}(f)$，它在 f 的每个几何纤维上简单传递地作用，并带有一个将其关联的 $\ell^\times$-覆盖识别为 $\ell^\times$-圆分覆盖的识别。[13] 我们还修改第三个条件：对于 S 的一个几何点 s，$\tilde{\ }$纤维 Σ_s 应恰有 $\#\ell - 1$ 个不可约分支，即映射到 $\ell^\times$-圆分覆盖的那些纤维。

栈 $\mathfrak{M}^{G*}$ 和 $\mathfrak{M}^G$ 应视为彼此的“形式”。

根据定义，任意可容许的（$X,\ \rho$）都会产生一个 k-点 $\mathfrak{M}_g^G$。任意 GSp-可容许的（$X,\ \rho$）都会产生一个 k-点 $\mathfrak{M}_g^{G*}$。

5.2. 计算陈类和 L-函数平方类的泛上同调类 $\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}'$。

接下来，我们构造一些类

$$\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}' \in H^1(\mathfrak{M}^{G*}, \mathbf{Z}/2)$$

它们具有这样的性质：分别“泛性地”计算 $c_{\mathrm{et}}(X,\ \rho)$和 $L(X,\ \rho)$；也就是说，给定任意 GSp-可容许的（$X,\ \rho$），其关联的 $\mathrm{Spec}(k) \to \mathfrak{M}^{G*}$，这些类 $\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}'$ 在 $H^1(k,\ \mathbf{Z}/2) \simeq k^\times/2$ 中拉回为 c_{et} 和 L。

我们将广泛运用 Artin 叠上的 étale 层理论，该理论由 [34]发展而来。

注意到，$\mathfrak{M}^{G*}$ 按定义就带有一个普适的（光滑适当、亏格为 g 的）相对曲线 $\mathfrak{U}^* \to \mathfrak{M}^{G*}$，即 §5.1 中的“$\Sigma$”，并且还带有这条普适$\tilde{\ }$$\tilde{\ }$曲线的一个 $\tilde{G}$-覆盖，由此得到 $\mathfrak{U}^* \to BG$。（严格来说，我们将其视为拓扑斯之间的映射，其中 BG 是

[13]相应的 $\ell^\times$ 覆盖通过 $\tilde{G} \to \ell^\times$得到，而圆分覆盖是将$\mathbf{Z}[N^{-1}]$的覆盖拉回到 Σ，该覆盖由取值于 $\ell^\times$的圆分特征定义。

˜带有 G作用的集合之拓扑斯。）图示如下：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}^* & \longrightarrow & B\tilde{G} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathfrak{M}^{G*} & & \end{array}$$

这使我们能够从 $H^3(B\tilde{G},\ \ell^\times/2)$ 拉回 étale 陈类，并在 $H^3_{\mathrm{et}}(\mathfrak{U}^*,\ \mathbf{Z}/2)$ 中得到一个类。映射 $\mathfrak{U}^* \to \mathfrak{M}^{G*}$ 是适当光滑的，其纤维为一维，并且存在一个将维数平移 2 的迹映射。相应地，从 $H^3_{\mathrm{et}}(\mathfrak{U}^*,\ \mathbf{Z}/2)$ 推前，我们得到一个类 $\mathfrak{Y} \in H^1_{\mathrm{et}}(\mathfrak{M}^{G*},\ \mathbf{Z}/2)$；根据适当基变换，当专化到与一个 GSp 可容许局部系统相关联的 k-点时，它恢复为 $c_{\mathrm{et}}(X,\ \rho)$。

˜另一方面，我们的万有 G-覆盖给出 $\mathcal{S}$ 上的一个 ℓ-向量˜空间局部系统 $\mathfrak{U}^*$，它源自同态 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2r}(\ell)$。这个局部系统带有一个（广义）辛对偶性，即一个配对 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \to \ell(1)$，其中$\ell(1)$ 是 $\mathfrak{U}^*$ 上常值局部系统 ℓ 的 Tate 扭转。沿着 π 的亏格为 g 的纤维取 $\mathcal{S}$ 的上同调，其结果集中在次数 1 上，因为 $\mathcal{S}$ 沿每个此类纤维的几何单值化是满射的。我们定义

$$\mathcal{O} := R^1\pi_*\mathcal{S},$$

这是定义在 $\mathfrak{M}^{G*}$ 上、由向量空间构成并带有对称配对$\mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \to \ell$的局部系统 $\mathcal{O}$。

自旋范数将任意 ℓ 上向量空间的正交群映到 $\ell^\times/2$，使我们能够从正交局部系统 $\mathcal{O}$ 转到一个 $\ell^\times/2$-托尔索。这个 $\ell^\times/2$-托尔索由一个元素 $\mathfrak{Y}' \in H^1(\mathfrak{M}^{G*},\ \ell^\times/2)$ 分类。从正交局部系统转到一个 $\ell^\times/2$-托尔索与在一点处的特化相容，由此可知，将 $\mathfrak{Y}'$ 特化到与 GSp 可容许局部系统 $(X,\ \rho)$ 相关联的 k-点时，会恢复 $L(X,\ \rho)$。

引理 5.2.1。 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Y}'$ 在 $\mathfrak{M}^{G*}$ 的几何一般纤维上重合。

证明。我们暂且假设 $\mathfrak{M}^{G*}$ 是一个概形，并说明如何将问题归结到这种情形。

要验证 $H^1(\mathfrak{M}^{G*}_{\mathbf{C}})$ 中的两个类相同，只需验证它们在每个来自 $\gamma \in \pi_1(\mathfrak{M}^{G*}_{\mathbf{C}})$ 的类上都相同。（此处及下文中，我们将直接使用 étale 拓扑与解析拓扑之间的标准比较，而不再特别说明；尤其是，我们不区分 $\mathbf{C}$-簇与其复点。）这个γ 可以用一个环路 $S^1 \to \mathfrak{M}^{G*}_{\mathbf{C}}$表示，并且我们有

$$\mathfrak{Y}(\gamma) = \mathrm{trace}_M(\rho^* c_{\mathrm{et}}), \mathfrak{Y}'(\gamma) = \text{spinor norm of } \phi^* \text{ on } H^1(\mathfrak{S}, \rho), \tag{5.1}$$

其中：

- M 是通过将万有黎曼曲面 $\mathfrak{U}^*_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{M}^{G*}_{\mathbf{C}}$ 拉回到 γ 上而定义的三维流形，
- ρ：$\pi_1(M) \to \mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 参数化了 M 上的辛局部系统，该系统由将万有辛局部系统从 $\mathfrak{U}^*_{\mathbf{C}}$ 拉回而得，
- $\mathfrak{S}$ 是 $M \to \gamma$的一个单纤维，
- ϕ 是 $\pi_1(S^1)$ 在上同调 $H^1(\mathfrak{S},\ \rho)$ 上的单值化作用。

事实上，(5.1) 的第一个等式成立，因为要计算 $\mathfrak{Y}$ 在 γ 上的取值，我们需要将 c_{et} 拉回到 $\mathfrak{U}^*$，再推到 $\mathfrak{M}^{G*}$，并与这个S^1的基本类配对；等价地，我们将 c_{et} 拉回到 $\mathfrak{U}^*(\mathbf{C})$ 内 S^1 的原像，并与该三维流形的基本类配对。类似地，(5.1) 的第二个等式直接由定义得出。

因此，根据拓扑定理的推论 (1.5)，(5.1) 中的两个量相等。

处理 $\mathfrak{M}^{G*}$ 是一个栈这一事实的一种方法，是构造一个光滑态射 $\rho\colon \tilde{\mathfrak{M}}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{C}}^{G*}$，其源是一个概形，并且具有这样的性质： ρ^* 在 $H^1_{\mathrm{et}}(-, \mathbf{Z}/2)$ 上是单射。然后可将前面的论证应用于 $\tilde{\mathfrak{M}}$，以证明 $\rho^*\mathfrak{Y}$ 和 $\rho^*\mathfrak{Y}'$ 相等，进而 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Y}'$ 也相等。为构造 $\mathfrak{M}$，我们通过给“上方”的曲线 Σ 添加层结构，将 $\mathfrak{M}$ 表示为概形 Y 被有限群 Δ 作用所得的整体商 $\tilde{}$（在 $\tilde{}$ 中采用 §5.1 的记号）。对于这样的群表示 $\mathfrak{M} = Y/\Delta$，我们可以取 $\mathfrak{M} = (Y \times E)/\Delta$，其中 E 是一个具有自由 Δ 作用且低次数上同调消失的簇，即 Δ 分类空间的一个近似；根据推论 1.4]，这样的 E 存在，甚至当 Δ 是一个代数群时也如此。 ρ^* 的单射性——它是 Leray 谱序列的边缘映射——于是由 $R^j \mathrm{et}\pi_*(\mathrm{Z}/2)$ 在低次数上消失而得出；而后者（根据光滑基变换）又由 $H^j \mathrm{et}(E, \mathrm{Z}/2)$ 在低次数上消失而得出。□

5.3. **$\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Y}'$ 相差一个在 N之外非分歧的 $\mathbf{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$ 的特征**。现在我们将证明：

引理 5.3.1. 设 $g \geq g_0(r, \ell)$如引理 5.1.1 中所述。则 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Y}'$ 相差一个从 $H^1(\mathbf{Z}[1/N], \mathbf{Z}/2)$拉回到 $\mathfrak{M}^{G*}$的特征。

拓扑学中的类似陈述见 §4。拓扑学中的论证基于纤维化的性质；在代数几何中，这类论证只有在光滑适当态射的情形下才能直接照搬，因此我们必须稍作迂回，因为 $\mathfrak{M}^{G*}$ 是光滑的，但并非适当的。如下文所示，若将$\mathbf{Z}[1/N]$ 替换为$\mathbf{Q}$，则拓扑论证仍然适用。接下来只需将$\mathbf{Q}$ 上的一个双覆盖延拓到$\mathbf{Z}[1/N]$，我们将逐位进行此操作。

下文中的上同调始终指以$\mathbf{Z}/2$ 为系数的 *étale* 上同调。

证明。 $H^1(\mathfrak{M}_{\mathbf{Q}}^{G*}) \to H^1(\mathfrak{M}^{G*}$ 有理数域$)$的核恰好由左侧的 $H^1(\mathrm{Spec}$有理数域$)$的像给出。为此，我们使用谱序列 $H^i($有理数域 $H^j(\mathfrak{M}^{G*}$ 有理数域$)) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathfrak{M}_{\mathbf{Q}}^{G*})$以及 $\mathfrak{M}^{G*}$ 有理数域 的不可约性（引理 5.1.1），由此可知 $H^0(\mathfrak{M}^{G*}$ 有理数域 $, \mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$。

这表明 $(\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}')_{\mathfrak{Q}}$ （其中下标 $\mathbf{Q}$ 表示我们限制到 **有理数域**-纤维）属于某个 $\alpha \in H^1($谱 **有理数域**$)$ 的像。我们希望将这个 α 提升到 谱$\mathbf{Z}[N^{-1}]$。只需验证：若 w 是一个不整除 N的 $\mathbf{Z}$ 的素数，那么 α 在谱 **有理数域**$_w$ 上的限制来自整数环 $\mathbf{Z}_w$；或者，将$\mathbf{Z}_w \subset$ **有理数域**$_w$ 替换为包含映射 $W \subset W_{\mathbf{Q}}$，即将 W 剩余域的代数闭包的 Witt 向量环映入其分式域 $W_{\mathbf{Q}}$，也只需验证同一陈述。

我们将构造一个态射 s： 谱$(W) \to \mathfrak{M}^{G*}$，它提升显然的映射 谱$(W) \to$谱$(\mathbf{Z}[1/N])$。由此得到一个图表

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\text{谱}\mathbf{Z}[N^{-1}]) & \xrightarrow{\ \sim\ } & H^1(\text{谱有理数域}) & & \ni \alpha \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(\mathfrak{M}^{G*}) & \twoheadrightarrow & H^1(\mathfrak{M}^{G*}_{\mathbf{Q}}) & & \ni (\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}')_{\mathfrak{Q}} \\ \downarrow{\scriptstyle s^*} & & \downarrow{\scriptstyle s^*_{\mathbf{Q}}} & & \\ H^1(W) & \twoheadrightarrow & H^1(W_{\mathbf{Q}}) & & \end{array}$$

注意，映射 $H^1(\mathfrak{M}^{G*}) \to H^1(\mathfrak{M}^{G*}_{\mathbf{Q}})$ 是单射。只需证明将$\mathbf{Q}$替换为 $\mathbf{Z}[M^{-1}]$时，对任意 M 都成立。核来自 $\mathfrak{M}^{G*}$ 的上同调，其支集位于那些纤维之上、且被 M 整除的素数所对应的闭子集上。由纯性，[34, 4.9.1]该上同调支集于次数 ≥ 2，因此在 H^1 上不存在核。

因此，图表表明，α 在 $H^1(W_{\mathbf{Q}})$ 中的像可提升到 $H^1(W)$，因为 $(\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}')_{\mathfrak{Q}}$ 可提升到 $(\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}')$。

为得到 s，我们需要构造一条光滑射影亏格为 g 的曲线，以及一个定义在某个特征为 w 的有限域上的 ω、几何上满射的 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 局部系统。这也依照 §3.5 中相同的推理给出一个 W-点。这样的 ω-点存在，这是因为 Grothendieck 对曲线基本群的计算、假设 $(w, N) = 1$，以及只要 $g \geq 2$，就存在从拓扑亏格为 g 的曲面群到 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 的非平凡满射。事实上，由 g 个生成元构成的自由群是该曲面群的一个商，而每个 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 都可以由两个元素生成（这一断言可由相应的单群断言推出，见 [56]）。□

5.4. **过渡到奇数次覆盖**。我们将确立猜想不同实例之间一个极其有用的等价关系，其中曲线由奇数次覆盖相关联。对我们而言，重要的是允许该覆盖发生分歧。

> 断言：设 (X, ρ) 是 GSp-可容许的。设 m 是一个与 ℓ互素的奇数，且 ℓ 在 $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ 中的阶为奇数；设其模 m为 $\ell^t \equiv 1$，其中 t 为奇数。取
>
> $$f : \tilde{X} \to X$$
>
> ˜一个伽罗瓦 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$-覆盖，其中 X 是一个几何不可约的光滑 ˜在 k上的适当曲线。那么 $(X, f^*\rho)$ 仍然是 GSp-可容许的，并且
>
> $$\delta(X, \rho) = \delta(\tilde{X}, f^*\rho),$$

这种通过奇数次覆盖的方法似乎相当灵活，而且很可能是将我们的结果推广到几何满射情形之外的一种有用工具。

˜证明。根据假设，函数域的诱导映射 f^*： $k(X) \to k(X)$ 可扩张为几何函数域的一个 $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$-伽罗瓦覆盖 $k(X) \to k(X)$。相应的绝对伽罗瓦群映射是一个包含映射，其像是一个正规子群˜，且商群为循环$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 群。因此，几何 π_1 在 X中的像——它与该几何伽罗瓦群的像相同——是 $\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)$ 的正规子群，且商群的阶为奇数并且是循环群。根据单性，唯一满足这些条件的子群就是整个群。

˜$\mathrm{Sp}_{2r}(\ell)/\{\pm 1\}$。因此，$(X, f^*\rho)$ 是 GSp-可容许的（可容许性的其他条件涉及 q，而从 X 转到 X时它不会改变）。

Now,

$$c_{\mathrm{et}}(\tilde{X}, f^*\rho) = c_{\mathrm{et}}(X, \rho). \tag{5.2}$$

为此，我们注意到： f^*： $H^3_{\mathrm{et}}(X, \mathbf{Z}/2) \to H^3_{\mathrm{et}}(\tilde{X}, \mathbf{Z}/2)$ 是一个同构，而这又可由代数闭包上相应的陈述推出；后者则可通过 Kummer正合列以及以下事实得到：X 上的奇数次线丛拉回到 X上后仍是奇数次线丛。

为证明关于 L-值的相应断言，我们将利用这样一个事实：对于有限域的奇数次扩张，平方类上的诱导映射被范数分裂，因此是一个同构。因此，不失一般性，我们可以用次数为 t 、阶为ℓ^t的扩张替换 ℓ 。这样做之后， m 整除 $\ell - 1$的阶。由此，我们可以假设 $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ 的所有特征都取值于 $\ell^\times$。

令 Ψ 为 $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \to \ell^\times$ 的非平凡特征在求逆作用下的代表元集合；该作用是自由的。根据 Artin形式主义（它在当前系数取自 ℓ 的 L-函数语境下同样成立），我们得到一个L-函数等式：

$$L(\tilde{X}, f^*\rho) = L(X, \rho) \prod_{\chi \in \Psi} L(X, \rho\chi) L(X, \rho\chi^{-1}),$$

这里要注意，右侧的 L-函数对应的是分歧的 伽罗瓦表示；而我们通过$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 与 X/X的伽罗瓦群之间的˜识别，将字符 $\chi \in \Psi$ of $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 视为 X 的伽罗瓦特征。

按照 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 的作用进行分解，我们得到 $X_{\bar{k}}$ 的上同调中相应标记的分解：

$$H^1(\tilde{X}_{\bar{k}}, f^*\rho) = H^1(X_{\bar{k}}, \rho) \oplus \bigoplus_{\chi \in \Psi} H^1(\tilde{X}_{\bar{k}}, f^*\rho)^\chi \oplus H^1(\tilde{X}_{\bar{k}}, f^*\rho)^{\chi^{-1}}. \tag{5.3}$$

（在第二行中， χ, χ^{-1} 指 χ-等型分量空间）。此外，上述各个直和项（即将 χ, χ^{-1} 一并考虑时）在自然的二次型下两两正交。

˜现在我们计算平方类 $L^*(X, f^*\rho)$，其定义参见 (3.4)。由函数方程可知， $L(X, t, \rho\chi)$ 和 $L(X, t, \rho\chi^{-1})$ 在取值点处的消失阶相同。 $H^1(X_{\bar{k}}, \rho)$ 上正交配对的判别式等于右侧所出现的判别式之积。因此我们得到

$$L^*(\tilde{X}, f^*\rho) = L^*(X, \rho) \prod_{\chi} \frac{L^{(h_\chi)}(X, \rho\chi) L^{(h_\chi)}(X, \rho\chi^{-1})}{\Delta_\chi}$$

其中 Δ_χ 是二次型在广义不动
子空间上的限制，该子空间是弗罗贝尼乌斯在 (5.3) 的 χ-分量上作用所得到的；为简便起见，我们记 $L^{(h)}$ 为泰勒展开的首项，即 $\frac{1}{h!}\partial_t^h$。 —

我们断言

$$L^{(h_\chi)}(X, \rho\chi) \sim (-1)^{h_\chi} L^{(h_\chi)}(X, \rho\chi^{-1}),$$
$$\Delta_\chi \sim (-1)^{h_\chi}$$

其中， $\sim$ 表示在 $\ell^\times/2$内的等式，而 h_χ 是共同的消失阶。对于前一个陈述，我们使用函数方程；该方程也适用于挠系数

（见下文 §5.4.1），并给出

$$L^{(h_\chi)}(X,\rho\chi)=(-1)^{h_\chi}L^{(h_\chi)}(X,\rho\chi^{-1})\epsilon(\rho\chi)$$

其中 $\epsilon(\rho\chi)$ 表示 ϵ 因子的中心值； -1 来自函数方程下 s 或 $t=q^{-s}$ 参数的取逆。在我们目前的情形中，$\epsilon(\rho\chi)$ 是一个平方（见 §5.4.1）。关于后一个陈述，我们注意到， $H^1(X_{\bar{k}},\ \rho)^\chi$ 与逆空间之间的完美配对下降为广义弗罗贝尼乌斯不动子空间上的相应完美配对；因此我们计算的是一个维数为 $2h_\chi$ 的分裂空间的判别式，由此得到 $(-1)^{h_\chi}$。

~我们已证明 $L^*(X,\ f^*\rho)\ =\ L(X,\ \rho)$，将其与 (5.2) 结合即完成证明。□

5.4.1. ε有限域表示的 - 因子。带挠系数的 L函数的 ϵ因子理论由 Deligne [11, §6、§7], 发展而来；特别参见其中关于全局函数方程的定理 7.11。Cesnavicius [62] 是一份近期参照，其中很好地总结了许多所需的性质。

我们将验证，采用上述记号， ϵ因子的中心值 $\epsilon(\rho\chi)$ 是 ℓ中的一个平方。事实上，我们将验证，对于 ρ 辛表示以及 χ 特征，有

$$\varepsilon(\rho\chi)\overset{?}{=}\varepsilon(\chi)^{\dim(\rho)}. \tag{5.4}$$

由于 $\dim(\rho)$ 是偶数，右端是 ℓ中的一个平方。

非常重要的一点是，此处我们证明的不是平方类相等，而是真正的等式。因此，为了验证 (5.4)，我们可以将 ℓ 替换为一个更大的域。于是可以假设 ℓ 包含一个 p 次单位根，并选定一个取值于 ℓ的 X 阿代尔特征 ψ。我们还在 $\mathbb{A}$ 上选取一个测度 μ，使其在模函数域的商空间上赋予质量 1，并将其分解为 $\mu=\prod_x\mu_x$，其中 x 遍历~X的闭点。于是，根据 [11,(7.9.1)]

$$\varepsilon(\rho\otimes\chi)=\prod_x\varepsilon_x(\rho\otimes\chi,\psi,\mu). \tag{5.5}$$

现在，对于 ε_0-因子，我们有（见 [11, (5.5.3)] 和 [62, (3.2.2)]）$\varepsilon_{0,\ x}(\rho\otimes\chi)=\varepsilon_{0,\ x}(\chi)^{\dim\rho}$。 ε_0-因子与 ε-因子相差因子 [11, (7.6.3)] $\det(-\mathrm{F}_x q^{\deg(x)/2})$，它作用于惯性不变量。在 x 处，若 χ 有分歧，则对于 χ 和 $\rho\otimes\chi$，这些惯性不变量都平凡。在非分歧点处，利用 $\det(\rho)\ =1$，我们得到

$$\det(-\rho(\mathrm{F}_x)\chi(\mathrm{F}_x)q^{\deg(x)/2})=\left(-\chi(F_x)q^{\deg(x)/2}\right)^{\dim\rho},$$

这意味着局部因子满足 $\varepsilon_x(\rho\otimes\chi)\ =\varepsilon_x(\chi)^{\dim\rho}$，结合 (5.5) 即可证明 (5.4)。

5.5. **提高亏格**。通过构造合适的分歧循环覆盖并利用 §5.4，我们将证明：

> 断言。 对于 k 上的每个 GSp-可容许 (X,ρ)，都存在一个整数 $g_0'=g_0'(X,\rho)$，使得对于任意 $g\geq g_0'$，都存在一个亏格为 g 的 GSp-可容许 $(X',\rho')/k$，满足
>
> $$\delta(X,\rho)=\delta(X',\rho').$$

g_0' 对 X 和 ρ 的依赖在我们的应用中不会造成任何问题。

证明。 首先，我们可以构造一个（奇）素数列表 $\mathcal{M}$ ，使得：

(a) 每个 $m \in \mathcal{M}$ 都大于 ℓ， q 且 X的 Picard 群的大小。(b) q 和 ℓ 对每个 $m \in \mathcal{M}$都有奇数阶。(c) $\frac{m-1}{2}$ 的最大公因数为1。

集合的构造 $\mathcal{M}$：对于任意不整除 q 和 ℓ 的奇素数 r，我们可以选取一个奇素数 m，使其满足 (a)，且

$$m \equiv 2(r), m \equiv 3(4), m \equiv -\square(p), m \equiv -\square'(\ell_0)$$

其中 $\square$， $\square'$ 是模 q 和 ℓ_0 的任意非零二次剩余，但不等于 -1；注意，这样的二次剩余总是存在的。于是 $2rp\ell_0$ 与$(m-1)$ 2 互素。根据二次互反律，并考虑到$m \equiv 3$ 模 4：

$$1 = \left(\frac{-m}{p}\right)^n = \left(\frac{p^n}{m}\right) = \left(\frac{q}{m}\right).$$

$$1 = \left(\frac{-m}{\ell_0}\right)^s = \left(\frac{\ell_0^s}{m}\right) = \left(\frac{\ell}{m}\right),$$

因此， q 和 ℓ 都是模 m 的平方，因而具有奇数阶，因为 $m \equiv 3$(4)。将此应用于各种 r，我们得到一个满足 (a) 和 (b) 的集合 $\mathcal{M}$，并且 $\frac{m-1}{2}$ 的最大公因数不被 2， p， ℓ_0或任何奇素数 $r \neq p$， ℓ_0整除。至此， $\mathcal{M}$的构造完成。

接下来，令 $M = \prod_{m\in\mathcal{M}} m$ 和 $A = \mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$。我们将构造一个 A-覆盖 X，并对其应用 §5.4 的断言 。通过适当选择，我们将看到其亏格可以取任意大的数。

对于每个 $m \in \mathcal{M}$，令 t'_m 为 q 模 m的阶，使得 $q^{t'_m} \equiv 1(m)$；根据性质 (b)， t'_m 整除 $\frac{m-1}{2}$。令 S_m 为 X的任意非空闭点集合，其中每个闭点的次数都被 t'_m整除。令 $S = \coprod_{m\in\mathcal{M}} S_m$。

根据类域论，在闭点有限集合 S 处有分歧的 X 的广义类群满足如下正合列

$$\frac{\prod_{x\in S} \mathfrak{o}_x^\times}{k^\times} \to \text{class group} \to \mathrm{Pic}(X),$$

其中 $\mathfrak{o}_x$ 是 x处的完备局部环。现在，不存在非平凡同态$k^\times \to A$，因为每个 m 都大于 q。由于 A 的阶也与最后一个群的阶和 q互素，因此我们得到一个同构：

$$\mathrm{Hom}(\text{class group}, A) \simeq \prod_x \mathrm{Hom}(k_x^\times, A),$$

其中 k_x 为局部剩余域。现在，对于 $x \in S_m$， k_x 的阶 $q^{\deg(x)}$ 模 m 同余于 1，因此特别存在非平凡满射 $k_x^\times \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$。在每个 $x \in S_m$ 处任意选取这样的一个满射，构成复合映射 $k_x^\times \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to A$，并对 $x \in S_m$ 取乘积，我们便得到一个从类群到 A 的满射，从而得到一个（分歧的）伽罗瓦 A-覆盖 $X' \to X$。各惯性群的像生成 A，特别是， X' 几何不可约。

X' 的亏格由黎曼–胡尔维茨公式计算。在每个点 $x \in S_m$ 之上，局部分歧类型由$\#_m^A = \frac{M}{m}$ 个长度为 m 的闭链组成：

$$g_{X'} - 1 = M(g_X - 1) + \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{(m-1)}{2} \frac{M}{m} \left(\sum_{x \in S_m} \deg(x) \right).$$

由于 S_m 是次数可被 t'_m 整除的任意点集合，我们可以安排使得$\sum_{x \in S} \deg(x)$ 是 t'_m 的任意（足够大的）倍数。“足够大”只是为了确保确实存在次数适当的有理除子，因此同样取决于 X。此外，t'_m 整除 $\frac{m-1}{2}$，所以我们可以安排使得

$$g_{X'} - 1 = M(g_X - 1) + \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{(m-1)^2}{4} \frac{M}{m} n_m \tag{5.6}$$

对任意充分大的 n_m。

整数 $\frac{(m-1)}{4}^2 \frac{M}{m}$的最大公因数为 1：若 s 是一个整除它们的素数，则要么 s 整除 M，即对于某个 $m \in \mathcal{M}$有 $s = m$，但此时它不整除对应于 $m = s$的项；要么 s 必须整除每个 $\frac{(m-1)}{4}^2$，而集合 $\mathcal{M}$的性质 (c) 排除了这种情况。

容易看出，若 $\{a_1, \dots, a_r\}$ 是没有公因数的整数，而 N_0 任意，则存在 A，使得每个 $a \geq A$ 都可写成 $\sum n_j a_j$，事实上所有 $n_j > N_0$均成立。由此可知，存在 g'（X，ρ）（其对 ρ 的依赖仅通过r，ℓ），使得对于任意 $g \geq g'$（X，ρ），我们都可以在 (5.6) 中选取“充分大”的 n_m，从而$g_{X'} = g$。

最后，我们需要验证

$$\delta(X', \rho') = \delta(X, \rho).$$

这由 §5.4 的断言 得出；注意，根据性质 (b)，ℓ 模每个 $m \in \mathcal{M}$ 的阶都是奇数，因此它模 M的阶也为奇数。

5.6. 论证的结论。 根据 §5.3，存在 $g = g_0(r, \ell)$ 和一个特征$\chi_{r,\ell,g}$: Gal(**有理数域**/**有理数域**) $\to \{\pm 1\}$，使得对每个 $g \geq g_0$，都有以下性质

$$\delta(X, \rho) = \chi_{r,\ell,g}(q) \quad g \geq g_0(r, \ell) \tag{5.7}$$

对有理数域$\mathbf{F}_q$上的每个 GSp-可容许 (X, ρ)。

注意，(5.7) 实际上唯一确定了 χ_{r,ℓ,g_0}。事实上，只需证明，对于每个 $g \geq g_0(r, \ell)$，对于所有充分大的素数 p，都存在亏格为 g的有理数域$\mathbf{F}_p$ 上的 GSp-可容许 (X, ρ)。例如，将 Lang–Weil 估计应用于一个适当的簇，即可得出这一结论；该簇覆盖 $\mathfrak{M}^{G*}$，如引理 5.2.1 中所述。

现在我们利用 §5.4 的结果，消除对 g 的依赖以及对 g 的下界要求：

- $\chi_{r,\ell,g}$ 在范围 $g \geq g_0$ 内与 g 无关。事实上，对于给定的两条曲线 (X_1, ρ_1)，(X_2, ρ_2)，其亏格分别为 g_1，g_2，两者均为 $\geq g_0$，且都定义在 k 上。根据 §5.5，我们可以找到一个亏格为 $g_3 \geq g_1$，g_2 的曲线，以及两条亏格均为 g_3 的曲线 (C'_i, ρ'_i)，使得

$$\chi_{r,\ell,g_1}(k) \overset{(5.7)}{=} \delta(C_1, \rho_1) \overset{\S 5.5}{=} \delta(C'_1, \rho'_1) \overset{(5.7)}{=} \delta(C'_2, \rho'_2) \overset{\S 5.5}{=} \delta(C_2, \rho_2) \overset{(5.7)}{=} \chi_{r,\ell,g_2}(k).$$

- 令 $\chi_{r,\ell}$ 为 $\chi_{r,\ell,g}$ 对所有 $g \geq g_0$ 的常值。那么，如果 (X, ρ) 是任意亏格的广义辛群-可容许对象，则

$$\delta(X, \rho) = \chi_{r,\ell}(k),$$

利用 §5.4“提高亏格”。

至此，§4.2 中步骤 (A) 的证明完成。

6. 定理 3.1 的证明：步骤 (B)

现在我们将证明 §4.2 中的步骤 (B)，并参见 §4.4 对论证思路的概述，这应有助于澄清其结构。回顾一下设定：我们已在步骤 (A) 中证明，对于定理陈述中的任意 r 和 ℓ，存在一个特征$\chi_{r,\ell}\colon G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \{\pm 1\}$，其在 #辛群$_{2r}(\ell)$ 的所有素因子之外非分歧，使得对于任意 GSp-可容许的 (X, ρ)

$$\delta(X, \rho) = \chi_{r,\ell}(k). \tag{6.1}$$

其中，我们将 $\chi_{r,\ell}(k)$ 理解为 $\chi_{r,\ell}(\mathrm{Fr}_k)$ 在群同构$\{\pm 1\} \simeq \ell^\times/2$下的像。本节的目标是证明

$\chi_{r,\ell}$ 在 2ℓ之外非分歧。

在本节中，我们继续将 r 和 ℓ 视为固定；取一个不同于 ℓ的奇素数 m，并将证明$\chi_{r,\ell}$ 在 m之外非分歧。

内容安排如下：

- 在§6.1中，我们构造一个合适的实域 K，它在 m处非分歧。
- 在§6.2中，我们构造一个模空间，其参数为具有 K 实乘法及某种辅助层结构的阿贝尔簇。该层结构的阶与m互素。对我们而言，重要的是，伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ 在此模空间的H^2 上的伽罗瓦表示在 m处非分歧。
- 在§6.3中，我们证明控制c_{et} 的泛类在模空间的一般纤维上消失。这需要对 K作特殊选择。由此我们将推得，若 p 在某个于 m处非分歧的域中完全分裂，则该泛类在 p 处的特殊纤维上也消失。
- 在 §6.4 中，我们构造（在特征 p 下）该模空间的适当曲线切片。
- 最后，在 §6.5 中，我们结合这些要素，完成步骤 (B) 的证明。

6.1. 构造在固定有限域中具有指定单位元像的实域。 在本节中，我们构造一个实域 K，它将用作我们阿贝尔簇模空间的乘法域。

我们使用以下引理。记 U_K为 $H^1(\mathfrak{o}_K[\frac{1}{2}], \mathbf{Z}/2)$，我们可以将其视为 $K^\times/2$ 的子群；类似地，我们将 U_K^+ 定义为它的全正子群，并通过类似的定义得到$U_{(p)\,K}$ 和 $U_K^{(p+)}$，其中在整数环中将 p 取逆。

> **断言：** 设 ℓ 是一个满足 $\ell \equiv \pm 1$ 模 8 的有限域，且 m 是一个不同于 ℓ的奇素数。则存在一个全实域 K，具有以下性质：(i) 次数 $[K : \textbf{有理数域}]$ 至少为 3。(ii) 判别式 D_K 与 m互素。(iii) 存在一个素数 λ_0 满足 $\mathfrak{o}/\lambda_0 \simeq \ell$，且在相关约化映射下，$U_K^+$ 在 $\ell^\times/2$中的像是平凡的。(iv) 存在一个扩张 $M \supset K$，它在 **有理数域** 上是伽罗瓦扩张，并且在 m处非分歧；若 p 在 M中非分歧、与 2ℓ互素且完全分裂，则 $U_K^{(p+)}$ 在 $\ell^\times/2$ 中的像也平凡。

证明。回顾一下，我们用 $\ell = \ell_0^s$ 表示具有 ℓ_0 个素数的情形。令 $n \geq \max(3, s+1)$ 为 K 所需的次数，并构造一个多项式

$$f = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^{n-i} \pm \ell \tag{6.2}$$

其中选取符号 $\pm$，使得 $\pm\ell \equiv (-1)^n$ 模 8，且

(a) f 的根全为实数。(b) f 在**有理数域**$_2$ 中完全分裂，且其根互不相同并且模 8 同余于 1，因此是**有理数域**$_2^*$中的平方数。(c) 存在同构**有理数域**$_{\ell_0}[x]/f(x)$ $\to$ **有理数域** $_\ell \oplus$ **有理数域** $_{\ell_0}^{s_0}$，其中 $s + s_0 = n$ 将 x 映至**有理数域** $_\ell$ 中赋值为 1 的元素，并映至所有其他位点处的单位元。（这里**有理数域**$_\ell$ 是**有理数域** ℓ_0 的次数为 s 的非分歧扩张，即 ℓ的 Witt 向量。）(d) f 的判别式与 m互素。(e) f 不可约。

此类 f 存在性的证明是一个标准的逼近论证，现详述如下。首先注意，将 α_i 映射为多项式$\prod(x-\alpha_i)$的系数这一规则，在 α_i 互不相同时具有非零的雅可比行列式。因此，若记 $x(x-1)\ldots(x-(n-1)) = x^n + \sum_1^n b_i x^{n-i}$，则存在一个开区间 $I_j \ni b_j$，使得当 $a_j \in I_j$时，多项式 $x^n + \sum_1^n a_i x^{n-i}$ 有互不相同的实根。特别地，当 a_n 处于包含 $b_n = 0$ 的某个小区间内时，这些根始终为互不相同的实数；因此，对于所有充分大的 T，若取 $a_n = \pm\ell \cdot T^{-n}$ （与 (6.3) 之后的符号相同），这些根便是互不相同的实数。通过重新缩放论证（$f \leftarrow T^n f(x/T)$），我们得到以下结论：对于每个固定的 ℓ，存在任意大的 T 使得

$$f := x^n + \sum_{1}^{n-1} a_i x^{n-i} \pm \ell \tag{6.3}$$

当 $a_j \in I_j \cdot T^j$ 时，具有实且互不相同的根。对于足够大的 T，这些区间 $I_j \cdot T^j$的长度也足够大，因此可以在其中选取满足任意指定同余条件的 a_i。我们可以通过这种方式强制满足所有条件 (b)–(e)，也就是说，对于适当的 v，它们定义了条件 $(a_1, \ldots\ldots, a_{n-1})$，这些条件在 $\mathbf{Z}_v^{n-1}$ 的非空开子集上成立：

- 对于 (b) 和 (d)，这一点显然。注意，此处要求条件 $\pm\ell \equiv (-1)^n$ 模 8。
- 对于 (c)，我们写作 $E =$ **有理数域**$_\ell \oplus$**有理数域**$_{\ell_0}^{s_0}$，并令 π 为 $\mathfrak{o}_E$ 的一个元素，其中 $\mathfrak{o}_E$ 是 $\mathbf{Z}_{\ell_0}$ 在 E 中的整闭包；该元素的范数为 $\pm(-1)^n\ell$，并且在第一个因子中是一致化子，在其他每个 **有理数域**$_{\ell_0}$ 因子中都是单位元；此外，我们要求这些单位元两两不同。于是

$$f_0 := \text{char. poly. of } \pi \in \mathbf{Z}_{\ell_0}[x]$$

事实上，它具有形式 (6.3)，其中 $a_i \in \mathbf{Z}_\ell$，并且也满足 (c)。根据一个类似于在实数情形中所用的开映射性质，由 π 内部的一个小开邻域所得到的特征多项式集合，在 $\mathbf{Z}_{\ell_0}$ 上的首一多项式中定义了 f_0 的一个小开邻域。再与常数项等于 $\pm(-1)^n\ell$ 的条件取交，便得到一个 $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}_\ell^{n-1}$ 的开集，具有所需性质。

- (e) 可以通过选择一个辅助素数 $\wp$（不同于 2、m、ℓ），并令 f 模 $\wp$ 的约化为不可约多项式，来保证成立。由

$\mathbf{F}_{\wp^n}$ 上范数映射的满射性，我们可以安排存在一个次数为 n、常数项任意指定的不可约多项式；例如，参见 [65, 定理 3.5]，其中给出了这类多项式数量的显式公式。□

至此，我们完成了对多项式 f 存在性的证明，它满足 (6.3) 中的条件 (a)–(e)。现在说明这蕴含断言。取 $K = \mathbf{有理数域}[x]/f$，使得 $K = \mathbf{有理数域}(\alpha)$ 由 α 的一个根生成。令 λ_0 为 K 中位于 ℓ_0 上方、对应于 (c) 中$\mathbf{有理数域}_\ell$ 因子的素理想。于是：

- 断言中的要求 (i) 和 (ii) 显然成立。
- 对于要求 (iii)，注意到 K 是全实的，且 $\alpha \in \mathfrak{o}$ 的范数为 $\pm\ell = \pm\ell_0^s$。根据条件 (c)，α 在 ℓ 上方、次数为 s 的素理想 λ_0 处的赋值也为 1（回忆 $\ell = \ell_0^s$），因此事实上 $(\alpha) = \lambda_0$。此外，$K \otimes \mathbf{有理数域}_2 \simeq \mathbf{有理数域}_2^n$，而 α 在$\mathbf{有理数域}_2$ 中的各种像全都是平方数。换言之，素理想 λ_0 由一个元素 α 生成，该元素在 2 上方的素理想处局部为平方。这意味着，每个在 2 以外非分歧的 K 全实二次扩张在 λ_0 处完全分裂。将这一结论应用于 $\varepsilon \in U_K$ 对应的扩张 $K(\sqrt{\varepsilon})$，可得 $\mathrm{Nm}\, U_K^+ \to \ell^\times/2$ 平凡，这就是要求 (iii)。
- 为验证 (iv)，取 M 为 $K(\sqrt{\alpha})$ 的伽罗瓦闭包。若 p 在 $\overline{M}$ 中完全分裂，则 p 在 K 中完全分裂，且所有位于 p 之上的素数 $\wp_j$ 都在 $K(\sqrt{\alpha})$ 中完全分裂。于是 α 模这些 $\wp_j$ 是一个平方，因此——再一次应用类域论——(α) 在所有允许在任意 $\wp_j$ 以及 2 处分歧的全实二次扩张中完全分裂。现在，对于 $\varepsilon \in U_{(p+)}\, K$，$K(\sqrt{\varepsilon})$ 是这样的一个域，因此 ε 模 λ_0 是一个平方，正如所要求的。

6.2. **希尔伯特模簇**。固定有限域 ℓ，设 (K, λ_0) 是 §6.1 中的全实域和位。我们将固定一个从 λ_0 处的剩余域到 ℓ 的同构。用 D_K 表示 K 的判别式。令 e 为一个辅助整数，它既不被 m 整除，也不被 ℓ 整除：它将用于为层结构编索引。

我们定义

$$\Delta := D_K e \ell$$

为 K 的判别式、整数 e 和固定素数幂 ℓ 的乘积。下文中，我们只考虑定义在满足 Δ 可逆的环上的模空间。

我们将考虑一种“希尔伯特模簇”，即一个概形 $\mathcal{S}$，它定义在 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 上，用于参数化带有 $\mathfrak{o}_K$ 乘法作用及适当附加层结构的 r 维阿贝尔簇：

对于任意窄理想类 $\mathcal{L}$（我们将取其为平凡类，因此在记号中省略），存在一个定义在 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 上的光滑模叠，用于参数化配备 $\mathfrak{o}_K$ 作用以及保持正性的同构 $\mathcal{L} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_K}(A, A^*)$ 的 r 维阿贝尔簇；例如，在情形 $r = 2$ 下，参见 [17, §2]。（作为一般性参照，我们还推荐 [32] 的专著，其中涵盖了我们所用的关于 $\mathcal{S}$ 的大多数陈述，尤其是所有涉及其紧化理论的陈述，不过其讨论的范围要广泛得多。）随后，我们在 e 处添加全层结构；当 e 足够大时，所得模问题由一个定义在 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 上的光滑概形 $\mathcal{S}$ 表示。

我们用 S 表示 $\mathcal{S}$ 在$\mathbf{有理数域}$上的纤维。需要指出的是，由于加入了层结构，S 并非几何连通；其连通分支定义在$\mathbf{有理数域}(\zeta_e)$上。在$\mathbf{C}$上，相应的解析空间可识别为有限个以下商空间的并

$\mathfrak{h}_r^{[K:\mathbf{Q}]}$（其中 $\mathfrak{h}_r$ 为 Siegel 上半空间），该商空间是由秩为 $2r$ 的射影 $\mathfrak{o}_K$-模上辛群的层 e 子群作用得到的。

注意：

(a) **有理数域**-纤维 S 存在一个射影紧化（Baily–Borel 紧化），其边界的余维为 3（因为 $[K:$ **有理数域**$] \geq 3$）。这一余维估计可由 [4, 命题 3.15] 的证明得出。(b) 对于 K 的每个有限处 λ，若其剩余特征 w 不整除 Δ，则 $\mathcal{S}[\frac{1}{w}]$配备了一个由 $\mathfrak{o}_K$, λ-模构成的 étale 局部系统 ρ_λ，它来自阿贝尔簇万有族的 Tate 模（即第一同调）。它在复纤维上的限制来自一个由局部自由 $\mathfrak{o}_K$-模构成的局部系统。这些局部系统均为权重 -1 的纯局部系统。(c) 系统 ρ_λ 构成如下意义下的相容系统：对于 $\mathcal{S}$ 的任意一个 $\mathbf{F}_q$-点，若 q 是与 Δ互素的素数幂，则 ρ_λ 中的弗罗贝尼乌斯迹实际上属于 $K \subset K_\lambda$，因而与 λ无关，参见 [51, 11.10]。(d) $\mathcal{S}$ 在 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 上存在一个相对紧化，其补集是相对正交叉除子。事实上，Lan [32] 的基础性研究已经阐述了 PEL 型 Shimura 簇具有这一性质的算术紧化的一般理论。

(e) 我们有

$$H^1(S_{\mathbf{C}}, \rho_\lambda) = 0 \tag{6.4}$$

只需证明相关 K-局部系统的 H^1 消失；事实上，只需证明通过任意 $\iota : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ 延拓而得到的任意结果复局部系统的 H^1 消失。由于没有可供参照的资料，我们将给出一个直接证明。设 $\Gamma \leqslant \mathrm{Sp}_{2r}(K)$ 为一个算术子群，并设 $V = K^{2g} \otimes_\iota \mathbf{C}$，其中 $\iota \hookrightarrow \mathbf{C}$ 是一个固定的嵌入。$H^1(\Gamma, V)$ 中的一个类由如下形式的 Γ-模短正合列表示：

$$V \to \tilde{V} \to \mathbf{1}. \tag{6.5}$$

超刚性（或同余子群性质）断言，Γ-表示可延拓到环境李群。特别地，这迫使扩张 (6.5) 在环境李群层面完全分裂，因此也作为 Γ-模完全分裂，从而 $H^1(\Gamma, V) = 0$。

6.3. **分裂上同调类**。设 K 为按 §6.1 构造的全实域，其整数环为 $\mathfrak{o}_K$。设 λ_0 为 §6.1 中构造的 K 的位，其剩余域为 ℓ（如前所述，我们固定剩余域与 ℓ 的识别；事实上，识别的选择几乎不会造成影响）。设 S 为与按 §6.2 构造的 K 相关的希尔伯特模簇，并配备其在 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 上的整模型 $\mathcal{S}$。

阿贝尔簇的普遍族导出一个带有K_{λ_0} 系数的 λ_0-adic 表示 ρ_{λ_0}，其约化 ρ_{λ_0}是一个带有 ℓ 系数的广义辛局部系统。这个 ρ_{λ_0} 导出

$$\alpha \in H^3_{\text{ét}}(\mathcal{S}, \ell^\times/2) \tag{6.6}$$

这是通过拉回 $B\mathrm{GSp}(\ell)$中的 étale 陈类得到的。

我们将用 $\alpha_{\mathbf{C}}$ 表示限制到复纤维，用 α_k 表示限制到有限域 k 上的纤维，用 $\alpha_{\mathbf{R}}$ 表示限制到实纤维，例如 α_k

属于 $H^3_{\text{et}}(\mathcal{S}_k, \mathbf{Z}/2)$。我们强调，因此这些都是相关概形在 绝对 étale 上同调中的类，其底域为 $\mathbf{C}$ k 或 $\mathbf{R}$。

引理 6.3.1. 设 α 如 (6.6) 中所述。则类 α 在一般纤维 $S_{\mathbf{C}}$ 上的限制 $\alpha_{\mathbf{C}}$ 是平凡的。

证明。只需在解析拓扑学中验证这一点（即验证在相应的复解析簇 $S_{\mathbf{C}}$ 上的平凡性）。将 α 拉回到 $S^{\text{et}}_{\mathbf{C}}$，再经由 $S_{\mathbf{C}} \to S^{\text{et}}_{\mathbf{C}}$（一个位点映射）拉回，所得即为由显然的态射 $S_{\mathbf{C}} \to B(\text{辛群}_{2r}\ell)$ 导出的类；该态射沿映射 $\mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_K/\lambda_0 = \ell$提升为 $S_{\mathbf{C}} \to B\text{辛群}_{2r}(\mathfrak{o}_K)$。

各种 étale 陈类构成一个交换图表（见 §2.5）

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\mathrm{BSp}_{2r}(\ell), \mathbf{Z}/2) & \longleftarrow & H_3(\mathrm{BSp}_{2r}(\mathfrak{o}_K[\tfrac{1}{2}]), \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & H_3(\mathrm{BSp}_{2r}(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell^\times/2 & \longleftarrow & U_K & \longrightarrow & \mathbf{R}^\times/2. \end{array}$$

由于右侧的竖直箭头由 (1.10) 后的论证可知为零，中间的态射便经由 $H_3(B\text{辛群}_{2r}(\mathfrak{o}_K), \mathbf{Z}/2) \to U_K^+$ 分解，因此，针对 $B\text{辛群}_{2r}(\ell)$ 的 c_{et} 拉回到$B\text{辛群}_{2r}(\mathfrak{o}_K)$，事实上经由 $H^3(B\text{辛群}_{2r}(\mathfrak{o}_K)\ U_K^+)$ 分解。相应地，$\alpha_{\mathbf{C}}$属于 $H^3(S_{\mathbf{C}}, U_K^+)$ 的像。但根据 §6.1 (iii)，映射 $U_K^+ \to \ell^\times/2$ 是平凡的，由此证明得证。□

引理 6.3.2。同样，设 α 如 (6.6) 中所述。则存在一个有限伽罗瓦扩张 M，其上除 2Δ 外均非分歧，特别是在 m 处非分歧，并具有如下性质：

$$\mathrm{F}_k \in G_{M/\mathbf{Q}} \text{ trivial } \implies \alpha_k \text{ trivial.} \tag{6.7}$$

证明。对于此处的论证，不妨设 2 整除 Δ。为简化记号，我们记作 $\mathbf{Z}' := \mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$。在下文的论证中，$H^i$ 始终表示 étale 上同调。

令 $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathrm{Spec}\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 为结构态射，并令 $\mathcal{F} = R\pi_*(\mathbf{Z}/2)$；它是 $\mathbf{Z}[\Delta^{-1}]$ 上的 étale 层复形，其上同调局部常值且可构造（下文简称 lcc）。我们不知道有何现成文献可参照来证明其局部常值性，因此在此略述论证。令 $q : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 为到所假定紧化中的包含映射，并考虑相应的谱序列 $E_2^{ij} := R\pi^i_* Rq^j_* \mathbf{Z}/2 \implies H^{i+j}\mathcal{F}$。根据附录“Théorèmes de finitude...” [12,] 中的计算——特别是其中的公式 (1.3.3.2)——每个层 $Rq^*_j\mathbf{Z}/2$ 都是若干除子交集上的常值层的直和；这些交集各自都是 $\mathbf{Z}[\Delta^{-1}]$上的光滑适当概形，因此由 [12, Arcata, §V] 中的定理 3.1，它们到 $\mathbf{Z}[\Delta^{-1}]$ 的推前是 lcc 的。因此，E_2^{ij} 中出现的每个层都局部常值且可构造；又因为 lcc 层的核、余核和扩张仍为 lcc（参照 [54, 18.43]），故得所求结果。

令 M' 为 $H^2(S\text{-}\textbf{有理数域}, \mathbf{Z}/2)$ 上 $G_{\mathbf{Q}}$ 的分裂域，即与 $G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Aut}\ H^2(S\text{-}\textbf{有理数域}, \mathbf{Z}/2)$ 的核相关联的域。然后令 M 为 M' 的最大指数为 2 的阿贝尔扩张，且在 2Δ 之外非分歧。

这个域 M'因而 M也在 2Δ之外非分歧。事实上，$H^2(S\text{-}\textbf{有理数域}, \mathbf{Z}/2)$ 是局部恒定可构层 $\mathcal{F}$ 在由 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}] \to$ **有理数域** 确定的几何点处的纤维。为此，只需注意到先前的参照 [12, “Théorèmes de finitude...”] 表明态射 q 是上同调适当的，这意味着 Rq_* 的构造与基变换交换。由于 $\pi_!$ 也具有相同性质，因此 $\mathcal{F}$ 在

$\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ 处的茎与 π 的相应几何纤维的上同调重合。这表明，Gal(M'/**有理数域**) 在 $H^2(S_{\bar{Q}},\ \mathbf{Z}/2)$ 上的定义表示实际上在 2Δ 之外非分歧，正如所需。

现在， $\mathcal{S}$ 的 étale 上同调以$\mathbf{Z}/2$ 系数计算，可由 $\mathcal{F}$的超上同调求得。下文中，我们用花体系数表示此超上同调：

$$\mathcal{H}^i\mathcal{F} = i\text{th hypercohomology of } \mathcal{F} \text{ on } \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\tfrac{1}{\Delta}].$$

存在一个谱序列

$$H^{3-i}(\mathbf{Z}', H^i\mathcal{F}) \implies \mathcal{H}^3(\mathcal{F}).$$

特别地， α 导出 $\mathcal{H}^3(\mathcal{F})$中的一个类，并且通过截断 τ： $\mathcal{F} \to \tau_{\geq 2}\mathcal{F}$ 也得到一个类 $\bar{\alpha} \in \mathcal{H}^3(\mathbf{Z}', \tau_{\geq 2}\mathcal{F})$。正合三角 $H^2\mathcal{F}[-2] \to \tau_{\geq 2}\mathcal{F} \to \tau_{\geq 3}\mathcal{F}$ 给出一个正合列

$$0 \to H^1(\mathbf{Z}', H^2\mathcal{F}) \xrightarrow{j} \mathcal{H}^3(\mathbf{Z}', \tau_{\geq 2}\mathcal{F}) \to H^0(\mathbf{Z}', H^3\mathcal{F}),$$

这与一个类似的序列相容，只需将其中的 $\mathbf{Z}'$ 替换为 k。我们用到了 $\mathcal{H}^2(\mathbf{Z}', \tau_{\geq 3}\mathcal{F}) = 0$ 以及 $\mathcal{H}^3(\mathbf{Z}', \tau_{\geq 3}\mathcal{F}) = H^0(\mathbf{Z}', H^3\mathcal{F})$ 这一事实。

由假设，中间的类 $\bar{\alpha}$ 在右侧为平凡元，因为右侧的对象嵌入 $H^3\mathcal{F}$ 在 Spec(**C**) 上的纤维。因此， $\bar{\alpha}$ 是某个$\beta \in H^1(\mathbf{Z}', H^2\mathcal{F})$ 的像。此外，对于有限域 k

$$\beta_k = 0 \implies \bar{\alpha}_k = 0 \implies \alpha_k = 0; \tag{6.8}$$

对于最后一个推论，注意到由于 k的上同调维数为 1，映射 $\mathcal{H}^3(k, \mathcal{F}) \to \mathcal{H}^3(k, \tau_{\geq 2}\mathcal{F})$ 是一个同构。

记作 $A = H^2\mathcal{F}$。它是 $\mathbf{Z}[\frac{1}{\Delta}]$上一个指数为 2 的有限阿贝尔群的局部恒定可构层。已知 [39, II, 命题 2.9]， $H^1(\mathbf{Z}', A)$ 与伽罗瓦群 $\Gamma := \operatorname{Gal}(\mathbf{Q}^{(\Delta)}/\mathbf{Q})$ 的群上同调一致，其中该群对应于 $\mathbf{Q}^{(\Delta)}$ （有理数域 $\mathbf{Q}$ 的最大 Δ-非分歧扩张）。我们断言，(对应于一个 Γ- 上同调类的) β 在 $\mathbf{Q}^{(\Delta)}/M$ 的伽罗瓦群中变为平凡元。事实上，依照 M' 的选取，$\operatorname{Gal}(\mathbf{Q}^{(\Delta)}/M')$ 对 A 的作用是平凡的，因此将其限制到这个群后， β 就成为一个同态 $\operatorname{Gal}(\mathbf{Q}^{(\Delta)}/M') \to A$；根据 M 的定义，它在 $\operatorname{Gal}(\mathbf{Q}^{(\Delta)}/M)$ 上是平凡的。于是 β 属于沿 $\Gamma \to G_{M/\mathbf{Q}}$ 拉回的像，也就是说， β 是某个 $\beta' \in H^1(G_{M/\mathbf{Q}}, A)$ 的拉回。

现在，从 $H^1(\mathbf{Z}', A)$ 到 $H^1(k, A)$ 的限制映射，相当于沿着 $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \to \operatorname{Gal}($**有理数域** $^{(\Delta)}$/**有理数域**) 的群上同调限制映射（这些映射只在共轭意义下确定）；特别地， β_k 是通过沿着以下映射拉回 $\beta' \in G_{M/\mathbf{Q}}$ 得到的

$$\operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \to G_{M/\mathbf{Q}}$$

这些映射来自弗罗贝尼乌斯和复共轭。在 (6.7) 的情形下，前一个映射经由平凡子群分解，因此 $\beta_k = 0$，由此根据 (6.8)， $\alpha_k = 0$。□

注 6.1. 由类似的推理，如果已知 $\alpha_{\mathbf{R}}$ 是平凡的，那么存在一个 **有理数域** 的有限伽罗瓦扩张 M，它在 2Δ 之外非分歧，并具有以下性质：

$$\mathrm{F}_k \in G_{M/\mathbf{Q}} \text{ trivial or complex conjugation} \implies \alpha_k \text{ trivial.} \tag{6.9}$$

我们不会用到 (6.9)，但仍将其记录下来，因为它或许有助于完善主要结果。

6.4. 切片定理。令 S 为 §6.2 中与全实域 K相关联的希尔伯特模簇；令 $\mathfrak{o}_K$ 为其整数环。本节的目标是在特征 p下构造 S 的合适切片，如 (4.8) 中所用。在开始之前，先作两点一般性观察：

- 只需对“足够大”的 p 构造这些切片，因此坏约化的更精细问题与我们无关。
- 虽然 S 只是拟射影的，但其边界的余维很高，因此将它切成曲线时，我们（一般而言）会得到一条射影曲线。

簇 S 定义在**有理数域**上，但并非几何连通；它的各个几何分支定义在域上

$$M_0 = \mathbf{Q}(\zeta_e), \tag{6.10}$$

几何分支的定义域。下文中关于 M_0 我们只会用到以下性质：它是有理数域$\mathbf{Q}$ 的一个伽罗瓦扩张，并且在 m 处非分歧。令一个几何不可约分支

$$S^\circ \subset S \times_{\mathbf{Q}} M_0.$$

于是，我们可以将 $S^\circ \subset \mathbf{P}^m_{M_0}$ 视为一个拟射影簇，它具有如下性质：$\overline{S^\circ} - S^\circ$ 的余维为 ≥ 3，其中 S° 表示其在环境射影空间$\mathbf{P}^m_{M_0}$中的闭包。对于 K 的任意一个位 λ，令

$$\rho_\lambda : \pi_1(S^\circ) \to \mathrm{GSp}(\mathfrak{o}_{K,\lambda}) \tag{6.11}$$

是与万有阿贝尔簇的 Tate 模相关联的 étale 局部系统。只要 λ 不整除 e，其几何像（即几何基本群的像）就等于 $\mathrm{Sp}(\mathfrak{o}_{K,\lambda})$。我们将这一陈述简称为“几何满单值性”。若 λ 整除 e，则几何像为第 e 层子群，因此仍然是扎里斯基稠密的；我们将其简称为“几何扎里斯基稠密单值性”。由 (6.4) 还可得 $H^1(S^\circ_{\mathbf{C}}, \rho_\lambda) = 0$，其中 $S^\circ_{\mathbf{C}}$ 是相对于任意嵌入 $M_0 \hookrightarrow \mathbf{C}$ 定义的。

我们的目标是为 $\mathcal{S}_{\mathbf{F}_{p^j}}$ 构造适当的曲线切片，使其对应于 (4.5) 中的适当奇数次扩张$\mathbf{F}_{p^j}$ / $\mathbf{F}_p$。我们首先将问题归约到 S° 为光滑射影曲面的情形。为此，我们假设 $\dim S^\circ \geq 3$，并通过反复取截面来逐步降低维数。

在下面的段落中，我们将在 M_0 上进行操作，以逐步切取一个曲面。到达曲面后，我们再回到一个整模型（可能会损失一些良约化素数，但这无关紧要）。在由所有超平面 H构成的格拉斯曼簇中，$\mathbf{P}^m_{M_0}$ 存在一个扎里斯基稠密开集，使得交集 $S^\circ \cap H$ 与 S° 光滑、约化、几何不可约，且边界的余维为 ≥ 3。前三点由贝尔蒂尼定理 [27], 得出；最后一点则利用了这样一个事实：与 S° 或 $S^\circ - S^\circ$ 相交且交集维数大于预期维数的切片所构成的集合是扎里斯基闭集；同时还利用了这样一个事实（§6.2 (b)）： S 的边界的余维至少为 3。

我们可以选取一个具有这些性质的 M_0-有理超平面 H。那么，相对于用于转到解析空间的任意嵌入 $M_0 \hookrightarrow \mathbf{C}$，诱导映射

$$\pi_1((H \cap S^\circ)_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(S^\circ_{\mathbf{C}})$$

根据适当形式的 Lefschetz 超平面定理，这是一个同构，见 [20]（参见 [20, 第二章第一章定理 1.1] 中的第一个“此外”，该定理表明包含映射

在 π_i 上诱导出同构，其中 $i \leq \hat{}n$；整数 $\hat{}n$ 在第 196 页以更清晰且符合我们目的的形式出现）。由于 H^1 与 π_1 的第一上同调一致，因此带有 ρ_λ 系数的 H^1 上的诱导映射也是同构：

$$H^1((S^\circ \cap H)_{\mathbf{C}}, \iota^*\rho_\lambda) \xleftarrow{\sim} H^1(S^\circ_{\mathbf{C}}, \rho_\lambda),$$

其中，ι 是包含映射 $(S^\circ \cap H)_{\mathbf{C}} \hookrightarrow S^\circ_{\mathbf{C}}$。

因此，迭代地执行这一过程，并用一个适当的交 $S^\circ \cap H$ 替换 S° 后，我们可以假设 S° 是定义在 M_0 上的光滑射影曲面，而 $\{\rho_\lambda\}$ 是 S° 上的一个辛 λ-进局部系统相容系统，满足 (6.11) 之后列出的相同性质。

接下来，我们为 S° 在 M_0内的 S-整数的某个适当环 $\mathfrak{o}_{M_0}[1/S]$ 上固定一个整模型 $\mathcal{S}^\circ$。如有必要，通过进一步求逆一些素数（我们只会在“较大”特征下构造切片，因此可以自由地求逆任意多个素数），我们还可以确保：

- 带有 $\mathfrak{o}_K$-乘法的主极化阿贝尔簇的典范族可延拓到 $\mathcal{S}^\circ$上。特别是，各个 ρ_λ 都可延拓为纯权为 -1 的局部系统，至少在删去与 λ具有相同特征的纤维之后如此。
- $\mathcal{S}^\circ$ 是光滑射影的。
- 每个纤维 $\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_p}$ 的第一上同调（系数取自 ρ_λ）均消失。这由适当光滑态射的直像的局部常值性以及$\mathbf{C}$上的陈述可得。
- 每个纤维 $\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_p}$ 配备 ρ_λ 的限制（其中 $\lambda \nmid p$）后，单值化扎里斯基稠密；事实上，若 λ 不整除 e，则具有几何满单值性。这由族中基本群的标准性质可得（见 [1,X]）。

因此，对于充分大的、在 M_0中完全分裂的 p，在选取 M_0 上方的一个位 p之后，通过基变换可得：

- $\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_p}$ 在$\mathbf{F}_p$上的一个光滑射影曲面，将其视为嵌入在某个固定的射影空间中

$$\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_p} \subset \mathbf{P}^m_{\mathbf{F}_p}. \tag{6.12}$$

- ρ_λ 一个 λ-进表示的相容系统，定义在 $\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_p}$上，取值于广义辛群且权为 -1纯，其中 λ 遍历所有不整除 p的素数。
- ρ_λ 的几何单值群在辛群中扎里斯基稠密；事实上，若 λ 不整除 e，则该群是满射的。
- 对每个 λ，第一上同调都消失：

$$H^1(\mathcal{S}_{\overline{\mathbf{F}_p}}, \rho_\lambda) = 0. \tag{6.13}$$

固定一个整数 $D \geq 1$，并令

$$\mathcal{H}_D \subset \mathcal{H}_D^{\mathrm{big}}$$

分别表示由次数为 D 的超曲面在 (6.12) 的射影空间中截取 $\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_p}$ 所得的光滑截面族，以及由次数为 D 的超曲面截取所有此类（不一定光滑）截面所构成的射影空间族。对于 $h \in \mathcal{H}_D$，我们用 X_h 表示相应的曲线截面。这个 $\mathcal{H}_D$ 配备了一个局部系统 W，用以参数化这些截面的第一上同调：对于 $\mathcal{H}_D$ 的一个几何点 h，W 的纤维

is

$$\text{fiber of W at } h = H^1(X_h, \rho_\lambda)(-1).$$

形式上，这是通过拉回-推前构造定义的一个可构造层；根据有关光滑适当推前的标准事实，例如 [12, V，定理 3.1]，它实际上是一个局部系统。配对 $\rho_\lambda \otimes \rho_\lambda \to K_\lambda(1)$ 在 W 上诱导出一个正交自配对。作为光滑簇上的纯局部系统，W 的几何单值群的约化连通分支是约化的。（根据 [15, 定理 3.4.1(iii)]，W 是半单的，即一个半单 π_1-表示，由此可得上述结论。）

引理 6.4.1。沿用上述记号。存在 D_0 和 $p_0 = p_0(D)$，使得对于 $D \geq D_0$ 和 $p \geq p_0(D)$，[14] 在 $\mathbf{F}_p$-代数簇 $\mathcal{H}_D$ 上的正交局部系统 W 具有几何满单值性，也就是说，它包含特殊正交群的一个扎里斯基稠密子群。

对于这样的 p 和 D，存在一个整数 j 和 $h \in \mathcal{H}_D(\mathbf{F}_{q=p^j})$，其对应的切片 $X = X_h$ 是定义在$\mathbf{F}_q$ 上的一条光滑真态几何不可约曲线，满足

(i) 中心值 $L(X, \rho_\lambda, 1) \neq 0$，且 (ii) (X, ρ_λ) 的几何单值群与 $(\mathcal{S}^\circ, \rho_\lambda)$ 的几何单值群一致。(iii) j 是奇数。

这类结果由来已久；在 $\rho = 1$ 的情形中，我们的论证归功于 Katz，参见例如 [28]。我们需要满足条件 (6.13)，即第一上同调消失，否则就会得到不变循环。这取代了 Katz 对消失循环的考察。

在引理 6.4.1 的证明中，我们将使用“矩方法”，并计算 $H^1(X, \rho_\lambda)$ 上 Frobenius迹的第 $(2N)$ 阶矩。根据 Guralnick-Tiep 的一个出色定理 [22], , 如果对任意 $N \geq 4$，该矩都与正交群对应的矩相等，那么单值化的扎里斯基闭包就包含 SO。具体而言，同上的定理 1.4 指出，对于特征零向量空间上的约化代数子群 $\Gamma \subset \mathrm{O}(W)$，其中 W为正交群，等式

$$\dim(W^{\otimes 2N})^\Gamma = \dim(W^{\otimes 2N})^{\mathrm{SO}(W)} \left(= C_N := \frac{(2N)!}{N! \cdot 2^N} \right) \text{ for } N = 4 \tag{6.14}$$

推出 $\Gamma \supset \mathrm{SO}(W)$。

证明。（引理 6.4.1 的证明）。

注意，(ii) 由 Grothendieck 的模 p 勒夫谢茨定理 [21,Cor 3.5, Exp. XII] 推出。应用切博塔廖夫密度即可由 W 的几何满单值性推出 (i)。推导细节如下：记 W 为局部系统 W 的一个几何纤维。完整（即算术）基本群 π_1 在 $\mathrm{O}(W)$ 中的像包含于特殊正交群。要证明这一点，只需验证每个弗罗贝尼乌斯的像行列式为 1；而弗罗贝尼乌斯在任意 $H^1(X_h, \rho_h)$ 上作用的行列式，根据注 3.2 后的讨论，等于 1。由此以及几何满单值性可知，映射

$$\pi_1(\mathcal{H}_D) \to \mathrm{SO}(W) \times \mathbf{Z}/2$$

[14]不过请注意，p 不能任意选取：它必须在 M_0中完全分裂，见（6.10）。

具有 Zariski 稠密像，其中到 $\mathbf{Z}/2$ 的映射来自常数域扩张$\mathbb{F}_{p^2}$，而 π_1 表示完整（算术）基本群。最后，由于 W 是偶维的，满足 $\det(1-F)=0$ 的 $F\in \mathrm{SO}(W)$ 构成一个真 Zariski 闭子集 $\mathcal{B}$。根据切博塔廖夫定理，我们可以找到一个闭点 $\mathcal{H}_D$，其弗罗贝尼乌斯像属于集合 $(\mathrm{SO}(W)-\mathcal{B})\times\{1+2\mathbf{Z}\}$；第二个坐标说明剩余域为 $\mathbf{F}_{p^j}$，且 j 为奇数，而第一个坐标则给出 L-函数不为零。

因此，尚需证明 W 具有几何满单值性。

将范围限制到纤维 $\mathbf{F}_p$ 后，我们可以将 ρ_λ 扭曲 $-1/2$，使其成为权重纯为零的对象。这样会使正规化更加清晰。经过此扭曲，$H^1(X_h,\rho_\lambda)$ 就成为局部系统 W_h 的扭曲 $\mathsf{W}_h(-1/2)$。

令 q 为 p 的一个幂。令

$$f:\mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)\to\overline{\mathbf{Q}}$$

是与 ρ_λ 相关联的迹函数。注意，f 取决于 q，因为我们通过取 q-弗罗贝尼乌斯的迹来定义它，但在记号中省略了这种依赖关系。注意，对于任意阿基米德值 $|\cdot|$，$|f|\le \dim(\rho)$。此外，由于 $\check{}\rho\simeq\rho$，根据纯性，f取实值。又由 $H^1(\mathcal{S}^\circ{}_{\overline{\mathbf{F}_p}},\ \rho_\lambda)=0$ 以及对偶性可知，唯一非零的紧支撑上同调 $H^j_c(\mathcal{S}^\circ{}_{\overline{\mathbf{F}_p}},\ \rho_\lambda)$ 位于次数 $j=2$，而 Deligne 权重定理[16] 给出

$$\left|\sum_{x\in\mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)} f(x)\right|\le Cq. \tag{6.15}$$

其中 C 可以取为该 H^2_c 维数的任意上界。

令 $\mathfrak{f}$ 为 $\mathsf{W}(-1/2)$ 的迹函数，即 $\mathfrak{f}:\ \mathcal{H}(\mathbf{F}q)\ \to$ **有理数域** 由下式给出

$$\mathfrak{f}(h)=\ \text{trace of geometric Frobenius on } H^1(X_{h,\overline{\mathbf{F}_q}},\rho_\lambda),\ \ (h\in\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)).$$

再次应用 Grothendieck-Lefschetz 公式，我们还得到

$$\mathfrak{f}(h)=\sum_{x\in X_h(\mathbf{F}_q)} f(x),\ \ (h\in\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)), \tag{6.16}$$

因为 $(X_h,\ \rho_h)$ 的几何满单值性，H^0 和 H^2 对 Grothendieck-勒夫谢茨公式的贡献为零。

由应用于 $\mathcal{H}$ 的不动点公式，对于 $N\ge 1$，我们有，

$$\underbrace{\frac{1}{\#\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)}\sum_h \mathfrak{f}(h)^{2N}}_{\langle\mathfrak{f}(h)^{2N}\rangle,\ \text{for short}}=\frac{1}{\#\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)}\left(\text{Frobenius trace on } H^*_c(\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}_q}},\mathsf{W}\left(-\tfrac12\right)^{\otimes 2N})\right)$$

$$=\frac{q^N}{\#\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)}\left(\text{Frobenius trace on } H^*_c(\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}_q}},\mathsf{W}^{\otimes 2N})\right). \tag{6.17}$$

其中，上同调取自代数闭包；右侧我们隐含地表示对上同调群取交错和。

根据韦伊猜想，[16], 在相对误差为 $O(q^{-1/2})$ 的项以内，最后写出的迹来自最高次紧支撑上同调。根据庞加莱对偶，这与

$$q^{\dim\mathcal{H}}\mathrm{trace}\left(\mathrm{F}|H^0(\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}_q}},\mathsf{W}^{\otimes 2N})^*\right),$$

换句话说， $q^{\dim \mathcal{H}}$ 乘以弗罗贝尼乌斯在几何单值群作用于 $\mathrm{W}^{\otimes 2N}$ 任意纤维所得余不变量上的迹。现在，取 $q = p^j$，F^j 在该几何单值群上作用的迹，是 F 的特征值的 j 次幂之和，且这些特征值的绝对值均为 1。这意味着，其上极限将给出空间的维数。也就是说，对于每个 $N \geq 1$，我们有：

$$\limsup_{q\to\infty} \langle q^{-N} \sum_h \mathfrak{f}(h)^{2N} \rangle = \dim(\text{geom. monodromy invariants on } H^1(X_{h,\overline{\mathbf{F}_q}}, \rho_h)^{\otimes 2N})$$

其中， q 趋于无穷大，且取 p的幂。

为使下面的论证具体明确，我们取：

- $N = 4$。
- 令 D 为满足下述条件的最小整数

$$E := \dim \Gamma(\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_q}, \mathcal{O}(D)) \geq 6N. \tag{6.18}$$

- $q \to \infty$表示沿着 p的越来越大的幂取值。
- 诸如 $o_q(1)$ $O(q^{-1/2})$ 这样的记号，表示当 $q \to \infty$ 时的渐近行为，并允许隐含常数依赖于 $\mathcal{S}^\circ$。

我们将证明在这种情况下 $\limsup_{q\to\infty} \langle q^{-N} \sum_h \mathfrak{f}(h)^{2N} \rangle \leq C_N$ （ C_N 的含义见 (6.14)）。利用 (6.16)，可知我们必须验证

$$\frac{1}{\#\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)} \sum_h \left(\sum_{x \in X_h(\mathbf{F}_q)} f(x) \right)^{2N} \leq C_N q^N (1 + o_q(1)). \tag{6.19}$$

内层求和为正。为了估计左侧，我们可以不妨扩大外层求和。具体而言，我们将 $\mathcal{H}$ 替换为由超平面截面组成的完整射影族 $\mathcal{H}_{\mathrm{big}}$ （这些截面不一定光滑）。注意，$\mathcal{H}$ 是$\mathcal{H}_{\mathrm{big}}$ 中定义在 $\mathbf{F}_q$ 上的一个非空开子集，因此

$$\frac{\#\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)}{\#\mathcal{H}_{\mathrm{big}}(\mathbf{F}_q)} = 1 + O(q^{-1}). \tag{6.20}$$

根据初等估计即可得出。因此，只需证明将 $\mathcal{H}$的作用替换为 $\mathcal{H}_{\mathrm{big}}$后，估计 (6.19) 仍成立。当然， $\mathcal{H}_{\mathrm{big}}$ 中的截面包括复杂的可约截面，但此时我们将进行分析。我们必须估计

$$\frac{1}{\#\mathcal{H}_{\mathrm{big}}(\mathbf{F}_q)} \sum_h \left(\sum_{x_i \in X_h(\mathbf{F}_q)} \prod_{i=1}^{2N} f(x_i) \right) \tag{6.21}$$

其中 f 是与 ρ 相关联的迹函数。现在，可先固定 x_i ，再计算包含每种选取结果的 h 的数量，从而求得 (6.21)。为此，我们使用：

引理 6.4.2。 （经过给定点的超平面截面的数量，参见 [42, 引理 2.1]。）对于两两不同的 $x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)$，当 D 足够大时，在所有 x_i 处取值为零的条件定义了 $\Gamma(\mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_q}, \mathcal{O}(D))$ 中一个余维为 r 的子空间；只需满足 x_i 包含于一个维数为 $\Gamma(\mathcal{S}^\circ, \mathcal{O}(D))$ 的 $\mathbf{F}_q$-超平面的补集中 $\geq r + 1$。特别地，将 E 写成 (6.18) 中的形式，这类截面的比例为 $\frac{q^{E-r}-1}{q^E-1} = q^{-r}(1 + O(q^{r-E}))$。

要在我们的情形中应用这一陈述， r 将是集合 x_1、.....、 x_{2N}中不同点的数量。特别是， $r \leq 2N = 8$并且对于所有充分大的 p，任意 r 个点都

包含在一个 $\mathbf{F}_q$-有理超平面的补集中。由于 $E \geq 6N$ 和 $\delta \leq 2N$，我们得到：

$$(6.21) = \sum_{x_i \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)} q^{-\delta} F(x_1, \ldots, x_{2N})(1 + O(q^{-4N}))$$

with

$$\delta = \delta(x_i) = \text{ the number of distinct elements of the set } \{x_i\}.$$

以及 $F(x_1, \ldots\ldots, x_{2N}) = \prod_1^{2N} f(x_i)$；再次注意，$|F(x)|$ 的上界为 $(\dim \rho)^{2N}$。上述求和中出现的 x_i 的数量为 $O(q^{4N})$，因此误差项至多贡献 $O(1)$。因此，只需验证

$$\sum_{x_i \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)} q^{-\delta} F(x_1, \ldots, x_{2N}) \stackrel{?}{=} C_N q^N (1 + o(1)). \tag{6.22}$$

考虑 $\{1, \ldots, 2N\}$ 的分拆 $\mathscr{P}$。各部分的基数构成一个多重集 $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_\delta\}$，其中 $a_1 + \cdots + a_\delta = 2N$。定义

将 $h_{\mathscr{P}}$ 定义为 $(x_1, \ldots\ldots, x_{2N}) \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}q)^{2N}$ 的示性函数，其中 $i \mapsto x_i$ 在 $\mathscr{P}$ 的每个纤维上均为常数，且不同部分取不同值，

- $g_{\mathscr{P}}$ 为 $(x_1, \ldots\ldots, x_{2N}) \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}q)^{2N}$ 的示性函数，其中 $i \mapsto x_i$ 在 $\mathscr{P}$ 的每个纤维上均为常数

- $h_{\mathbf{a}} = \sum h_{\mathscr{P}}$，对类型为 $\mathbf{a}$ 的分拆求和，
- $g_{\mathbf{a}} = \sum g_{\mathscr{P}}$，对类型为 $\mathbf{a}$ 的分拆求和。

例 6.1。取 $\mathbf{a}$ 为分拆 (n)，取 $\mathbf{b}$ 为分拆 (a, b)。则 $h_{\mathbf{a}}$ 是 $(x, x, x, \ldots\ldots, x)$ 的示性函数，而 $h_{\mathbf{b}}$ 是一般形式为 $(x, y, x, x, y, \ldots\ldots)$ 的元组的示性函数，其中有 a 个 x 和 b 个 y，且 $x \neq y$。此外，我们还有 $g_{\mathbf{a}} = h_{\mathbf{a}}$ 和 $g_{\mathbf{b}} = h_{\mathbf{b}} + \binom{2N}{a} h_{\mathbf{a}}$。对此求逆可得 $h_{\mathbf{b}} = g_{\mathbf{b}} - \binom{2N}{a} g_{\mathbf{a}}$。下面将推广这一推理。

注意，$g_{\mathscr{P}} = \sum_{\mathscr{P} \geq \mathscr{Q}} h_{\mathscr{Q}}$ 其中求和遍及所有被 $\mathscr{P}$ 细化的分拆 $\mathscr{Q}$，由莫比乌斯反演

$$h_{\mathscr{P}} = \sum_{\mathscr{P} \geq \mathscr{Q}} \mu(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) g_{\mathscr{Q}}. \tag{6.23}$$

注意，这里 $\mathscr{Q}$ 的部分数少于 $\mathscr{P}$。现在对所有类型为 $\mathbf{b}$ 的部分 $\mathscr{P}$，将 (6.23) 求和，得到

$$h_{\mathbf{b}} = \sum_{\mathscr{Q}} \left(\sum_{\mathscr{P} \text{type} \mathbf{b}} \mu(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) \right) g_{\mathscr{Q}}.$$

括号内的和在对称群的作用下是不变量，因此仅是 $\mathbf{b}$ 和 $\mathscr{Q}$ 的类型的函数。这意味着我们得到

$$h_{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b} \geq \mathbf{a}} n_{ba} g_{\mathbf{a}}. \tag{6.24}$$

在这个等式中，$\mathbf{b} \geq \mathbf{a}$ 表示存在类型为 $\mathbf{b}$ 的分拆，它们细化类型为 $\mathbf{a}$ 的分拆。于是 $\mathbf{a}$ 的部分数少于 $\mathbf{b}$：$\delta(\mathbf{a}) < \delta(\mathbf{b})$。

现在回到（6.22），将其改写为

$$q^{-\delta} \sum_{\mathbf{a}} \sum_{x_i} h_{\mathbf{a}}(x_1, \ldots, x_{2N}) F(x_1, \ldots, x_{2N}) \stackrel{?}{=} C_N q^N (1 + o(1)). \tag{6.25}$$

利用（6.24），我们将其改写成类似的求和式 $g_{\mathbf{a}}$。于是有

$$\sum_{x_i} g_{\mathbf{a}} F = (\text{number of partitions of type } \mathbf{a}) \cdot \prod_i \Big(\sum_{x \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)} f(x)^{a_i} \Big) \tag{6.26}$$

现在 $\sum f = O(q)$，如 (6.15) 中所述。此外，对于任意 t, $\sum f^t = O(q^2)$，利用界 $|f| \leq \text{const.}$ 取一个部分 $\mathbf{a}$，其中 $a_i = 1$ 的重数等于 s（也就是说，类型为 $\mathbf{a}$ 的分拆恰有 s 个单元素项）。我们得到

$$q^{-\delta(\mathbf{a})} \sum g_{\mathbf{a}} F = O\left(q^{-\delta} \cdot q^s \cdot q^{2(\delta - s)} \right) = O(q^{\delta - s}) = O(q^{N - s/2})$$

其中 q^s 是所有满足 $a_i = 1$的项的贡献；剩余 i 的数量为 $\delta - s$，而 $\sum a_i = 2N$意味着 $2(\delta - s) \leq 2N - s$。特别地，对 (6.22) 中大小为 $O(q^N)$ 的项有贡献的 $\mathbf{a}$ 仅有以下情形：$s = 0$，并且此时还有 $\mathbf{a} = (2, 2, \dots, 2)$。这类分拆的数量恰为常数 C_N，因此我们得到

$$q^{-N} \sum g_{(2,2,\dots,2)} F = C_N q^{-N} \left(\sum_{x \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}_q)} f(x)^2 \right)^N$$

最后，$\sum_{x \in \mathcal{S}^\circ(\mathbf{F}q)} f(x)^2 = q^2(1 + O(q^{-1/2}))$，利用了如下事实：$\mathcal{S}^\circ$ 在 ρ_λ 上的几何单值群的不变部分的维数等于 1（且弗罗贝尼乌斯在这个一维线上平凡作用）。由此完成了(6.25)的证明，也就完成了 (6.19) 的证明。□

6.5. **论证的结论**。我们已固定 r，ℓ 以及一个不整除2ℓ的奇素数 m。我们证明$\chi_{r,\ell}$ 在 m处非分歧。其他记号同 §6.2。

我们应用引理 6.4.1，并构造一条光滑射影曲线 $\iota\colon X \to \mathcal{S}^\circ_{\mathbf{F}_{p^j}}$，对于任意充分大的 M_0-完全分裂 p，其中 M_0 如(6.10)所示，使得 j 为奇数，且满足以下所有条件：

- X 配备了一个相容系统 $\rho = (\rho_\lambda)_\lambda$，其中 λ 遍历 K 中不在 p 之上的位点，且每个 ρ_λ 都取值于 $\mathrm{GSp}_{2r}(K_\lambda)$（这些系统是通过拉回 ι^* 自相应的局部系统得到的，后者定义在 $\mathcal{S}^\circ$上）。
- 根据特征为 p [21, 的勒夫谢茨定理 XII，限制到几何 π_1后，每个 ρ_λ的像在 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathfrak{o}_{K,\lambda})$ 中扎里斯基稠密。此外，ρ_{λ_0} 实际上是几何满射。
- 中心 L值满足 $L(X, \rho, 1) \neq 0$。
- 记 $\rho := \iota^* \rho_{\lambda_0}$ 为相容系统在 λ_0处的约化。对于充分大的 p，数对 (X, ρ) 是 GSp-可容许的，定义见 §4.1.1。

引理 6.5.1。存在一个 M_1 的伽罗瓦扩张，其扩张于 **有理数域**，在 m之外非分歧，使得

$$c_{\mathrm{et}}(X, \rho) \text{ is trivial if } p \text{ is split in } M_1 \tag{6.27}$$

证明。这立即由引理 6.3.2 得出，因为 $c_{\mathrm{et}}(X, \rho)$ 是通过将 $\alpha_{\mathbf{F}_q}$ 拉回到 X 并积分得到的；我们取 M_1 为其中称作 M 的域。□

引理 6.5.2。存在一个 **有理数域** 的伽罗瓦扩张 M_2，在 m 处非分歧，使得

$$L(X, \rho) \text{ is trivial if } p \text{ is split in } M_2 \text{ and sufficiently large.} \tag{6.28}$$

证明。根据假设，$L(X, \rho, 1)$ 是 K 中的非零元素。按照惯例，我们用$L(X, \rho) \in K^\times/2$ 表示它的平方类。我们断言，事实上

$$L(X, \rho) \in U_K^{(p+)}, \tag{6.29}$$

这意味着 $L(X,\rho,1)$ 在 λ 处的赋值为偶数，且该处不在 $2p$ 之上，并且 $L(X,\rho,1)$ 是全正的。

总正性源于 $L(X,\ \rho,\ 1)\neq 0$ 以及黎曼猜想：若固定一个嵌入 $K\hookrightarrow\mathbb{R}$，则 L-函数 $L(X,\ \rho,\ t)$ 在 $t\in\mathbb{R}$较小时（在通常的 L-函数术语中对应于“ s较大”）为正，且在区域 $|t|<1$内没有零点，因此在 $t=1$处也为正。

所有不整除 $2p$ 的 λ 处赋值的偶性由引理3.9.1推出；关于 Frobenius 迹的“ λ独立性”假设由 Shimura 的工作保证 [51, 11。10], 而相容系统具有整像这一假设在此处成立，这是通过考察整 Tate 模得出的。

根据我们对域 K 的选择，特别是利用 §6.1 (iv)，考虑到 $L(X,\rho)$ 是 $L(X,\rho)\in K^{\times}/2$ 的约化，(6.28) 可由 (6.29) 推出。我们取 M_2 为其中记作 M 的对象。□

结合引理 6.5.2 和引理 6.5.1，我们构造出了一个伽罗瓦域扩张

$$M=M_0M_1M_2$$

在 **有理数域** 上，该扩张在 m 处非分歧；并且只要 p 是 $M_0M_1M_2$-完全分裂且充分大，就存在一个 $\mathbf{F}_{p^j}$ 上的 GSp-可容许对 (X,ρ)，其中 j 为奇数，且 $\delta(X,\rho)=1$。这蕴含 $\chi_{r,\ell}$ 在 2ℓ 之外非分歧，这一点已在 (4.5) 之后说明。至此，步骤 (B) 的证明完成。

附录 A. 庞加莱复形

A.1. 复形。 设 R 是一个环。我们将考虑由射影 R-模构成、微分使次数增加的链复形。除非明确说明，否则复形均假定为有界的。我们总结这类复形的若干基本约定和性质，尤其是“对称”复形这一概念——它刻画具有庞加莱对偶的流形的链复形。这里的内容并无原创之处；我们基本遵循 A. Ranicki 的思路 [45]。我们尽可能明确地说明了符号约定。

我们常用 C 表示复形，而不是常规字体 C，只是为了帮助区分我们讨论的是向量空间还是复形。记号 $\mathsf{C}^{\vee}$ 表示复形的对偶，而 C^{*} 表示向量空间的对偶。

A.2. 一些代数背景。 我们总结一些符号约定，并说明这些约定为何合理。

(a) 我们定义两个复形 $\mathsf{C}_1\otimes\mathsf{C}_2$ 的张量积，并对齐次元素采用通常的符号规则，$d(x_n\otimes y_m)=dx_n\otimes y_m+(-1)^n x_n\otimes dy_m$。(b) 交换映射 $\mathsf{C}_1\otimes\mathsf{C}_2\mapsto\mathsf{C}_2\otimes\mathsf{C}_1$ 将 $x_n\otimes y_m$ 送到 $(-1)^{nm}y_m\otimes x_n$，是一个复形同构。（用更专业的说法，(a) 和 (b) 定义了复形范畴上的对称幺半结构。）(c) 定义复形 $R[k]$ 为在次数 $-k$ 上取 R、且微分为零的复形。我们有$R[k]\otimes R[l]\simeq R[k+\ell]$；我们总是取这个识别，使其将 $(1_{-k},\ 1_{-\ell})$ 映到 $1_{-k-\ell}$，不过需要注意，这与对称幺半结构不相容。

(d) 我们将移位定义为复形 $\mathsf{C}[1]$，其第 q 项为 C^{q+1}，微分取相反数。这是复形范畴上的一个函子，以显而易见的方式平移态射；通常将它识别为复形 $\mathsf{C}[1] := R[1] \otimes \mathsf{C}$（而不是 $\mathsf{C} \otimes R[1]$）会很有用。其他移位 $\mathsf{C}[k]$ 通过迭代定义。显然存在一个识别

$$\mathsf{C}[a][b] \simeq \mathsf{C}[a+b] \tag{A.1}$$

该映射在每一项 C^{q+a+b} 上都是恒等映射。我们将其视为给出了复形范畴上两个函子之间的自然同构。

(e) 定义对偶复形 $\mathsf{C}^\vee$：令 $\mathsf{C}^\vee_{-q} = \mathsf{C}^*_q$，其微分 $\mathsf{C}^\vee_q \to \mathsf{C}^\vee_{q+1}$ 定义为

$$(-1)^{q+1} d^*_{-1-q} : C^*_{-q} \to C^*_{-q-1} \tag{A.2}$$

要求典范配对 $\mathsf{C}^\vee \otimes \mathsf{C} \to R$ 是闭的，便必然得到此定义。

于是，态射 $f : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 诱导出 $f^\vee : \mathsf{D}^\vee \to \mathsf{C}^\vee$，其中我们只需逐项取 f 的伴随；$\langle f^\vee(x)\ y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$。

若采用将双对偶与原空间作通常识别的方式，则 $\mathsf{C}^{\vee\vee}$ 可识别为微分取负后的 C。以此为参照，通过应用对称幺半结构得到的识别 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\vee\vee}$（即由对称性从定义配对 $\mathsf{C} \otimes \mathsf{C}^\vee \to R$ 得到的配对，因此在次数为 n 时施加符号 $(-1)^n$）便是通过乘以 $(-1)^{\deg}$ 得到的。

(f) 存在一个自然同构

$$(\mathsf{C}[1])^\vee \simeq \mathsf{C}^\vee[-1] \tag{A.3}$$

因为根据我们的定义，两边都由同一个复形表示，该复形在次数 q 上的项为 C^*_{1-q}。左边的微分 $d_q : C^*_{1-q} \to C^*_{-q}$ 由 $(-1)^q d^*_{-q}$ 给出，右边则由 $(-1)^{q+1} d^*_{-q}$ 给出。相应地，在次数 q 上乘以次数 $(-1)^q$ 的映射定义了所需的函子自然变换。（我们也可以再次从幺半结构推导出 (A.3)，但考虑到将 $R[k] \otimes R[\ell]$ 与 $R[k+\ell]$ 进行识别时，不同方式可能引起混淆，我们更愿意直接写出公式。）

(g) 如常，复形的态射 $\mathsf{C} \xrightarrow{f} \mathsf{D}$ 的锥是复形 $\mathsf{D} \oplus \mathsf{C}[1]$，其微分是在标准微分上加以 f 后得到的，即 $(d_q,\ c_{q+1}) \mapsto (\partial d_q + f(c_{q+1})\ -\partial c_{q+1})$，或用矩阵形式表示为

$$D_q \oplus C_{q+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \partial_q & 0 \\ f_q & -\partial_{q+1} \end{bmatrix}} D_{q+1} \oplus C_{q+2}. \tag{A.4}$$

其中，按照约定，我们将 $D_q \oplus C_{q+1}$ 中的元素视为行向量，并在右侧施加矩阵。存在一个短正合列 $\mathsf{D} \to \mathrm{cone}(f) \to \mathsf{C}[1]$。（我们还注意到，存在一个同构 $\mathrm{cone}(f) \simeq \mathrm{cone}(-f)$，它在 D 上诱导 -1，并在 C 上诱导恒等映射 $[1]$。）

（f）给定 $f:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$，存在一个识别 $\mathrm{cone}(f)^\vee\simeq\mathrm{cone}(f^\vee)[-1]$，与以下短正合列相容：

(A.5)
$$\begin{array}{ccccc}\mathsf{C}[1]^\vee & \longrightarrow & \mathrm{cone}(f)^\vee & \longrightarrow & \mathsf{D}^\vee \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow= \\ \mathsf{C}^\vee[-1] & \longrightarrow & \mathrm{cone}(f^\vee)[-1] & \longrightarrow & \mathsf{D}^\vee\end{array}$$

其中，左侧的映射是上述映射的负映射。

– 对于锥$(f)^\vee$，结合 (A.2) 和 (A.4) 可得第 q 个微分以及

$$(-1)^{q+1}\begin{bmatrix}\partial^*_{-q-1} & f^*_q\\ 0 & -\partial^*_{-q}\end{bmatrix}: D^*_{-q}\oplus C^*_{1-q}\to D^*_{-q-1}\oplus C^*_{-q}$$

– 对于锥$(f^\vee)$，我们得到第 q 个微分

$$\begin{bmatrix}(-1)^{q+1}\partial^*_{-q-1} & 0\\ f^*_q & (-1)^{q+1}\partial^*_{-q-2}\end{bmatrix}: C^*_{-q}\oplus D^*_{-q-1}\to C^*_{-q-1}\oplus D^*_{-q-2}$$

– For $\mathrm{cone}(f^\vee)[-1]$ we get for the qth differential

$$\begin{bmatrix}(-1)^{q+1}\partial^*_{-q} & 0\\ -f^*_q & (-1)^{q+1}\partial^*_{-q-1}\end{bmatrix}: C^*_{1-q}\oplus D^*_{-q}\to C^*_{-q}\oplus D^*_{-q-1}$$

因此，在 D 上为恒等映射，并且如上所述，在 C 因子的次数 q 上为 $(-1)^q$ 的映射，会交织这两个微分：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ (-1)^{q+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{q+1}\partial^*_{-q} & 0\\ -f^*_q & (-1)^{q+1}\partial^*_{-q-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^{q+1}\partial^*_{-q-1} & (-1)^{q+1}f^*_q\\ 0 & (-1)^q\partial^*_{-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ (-1)^q & 0\end{bmatrix}$$

both sides being equal to $\begin{bmatrix}-f^*_q & (-1)^{q+1}\partial^*_{-q-1}\\ \partial^*_{-q} & 0\end{bmatrix}$.

A.3. **庞加莱复形**。我们希望得到一种代数概念，用以描述紧致光滑定向流形上的复形 C^p，或者更一般地，描述带有符号 $\pm$ 的自对偶局部系统之 p-形式（此处 $+$ 表示对称，$-$ 表示斜对称）。

注意，这个复形带有一个配对 $\omega_p\otimes\omega_q\mapsto\int_M\omega_p\wedge\omega_q$。此配对满足 $\langle\omega_p,\omega_q\rangle=(-1)^{pq}\langle\omega_q,\omega_p\rangle$；如果它被带有符号 $\pm$ 的自对偶局部系统扭曲，则等式中还会多出一个 $\pm$。我们将其抽象如下：

设 $\epsilon\in\{\pm1\}$。我们将维数为 n 的 ϵ-对称[15] 复形定义为由有限个局部自由 R-模组成的复形 (C,d)，并配备一个 ϵ-对称态射

$$T:\mathsf{C}\otimes\mathsf{C}\longrightarrow R[-n],$$

其中，ϵ-对称是相对于上文所述的对称幺半结构而言的；详情见下文。在这种情况下，我们得到一个复形态射 $f:\mathsf{C}\to\mathsf{C}^\vee[-n]$，其定义为 $\langle f(x),y\rangle=T(x\otimes y)$，其中 $\langle-,-\rangle$ 是由在左侧对典范配对取张量积并与 $R[-n]$组合而得的态射 $\mathsf{C}^\vee[-n]\otimes\mathsf{C}\to R[-n]$。

我们称其为

- 如果它还具有以下附加性质，则称为“ϵ-对称庞加莱复形（维数为 n）”：f 是一个拟同构。

[15]有时我们将 1-对称简称为“对称”，将 -1-对称称为“斜对称”。

- 如果 f 实际上是复形的同构，则称为“严格 ϵ-对称庞加莱复形（维数为 n）”。[16]

具体而言，$T = \sum T_{p,\ q}$ 其中 $T_{p,\ q}$：$\mathsf{C}_p \otimes \mathsf{C}_q \to R$ 在 $p+q=n$时有定义，并且

$$T_{p,q} = \epsilon(-1)^{pq} T_{q,p} \text{ and } dx_{p-1} \otimes x_q + (-1)^{p-1} x_{p-1} \otimes dx_q \overset{T}{\mapsto} 0. \tag{A.6}$$

并且 f：$C_p \to C_q^*$ 由以下规则定义：$p+q=n$

$$\langle f(x_p), x_q \rangle = T_{p,q}(x_p \otimes x_q) \tag{A.7}$$

而 f 是链映射这一点，可通过验证 $f(dx_{p-1}) = (-1)^p d^* f(x_{p-1})$。注意，$f: C_p \to C_q^*$ 与 f：$C_q \to C_p^*$ 的伴随相差 $\epsilon(-1)^{pq}$。

注 A.1. 为了改变维数 n，将复形移位通常会很方便。这里应注意，移位会改变 ϵ的符号：存在一个同构

$$\mathsf{C}[1] \otimes \mathsf{C}[1] \simeq R[1] \otimes \mathsf{C} \otimes R[1] \otimes \mathsf{C} \simeq R[2] \otimes \mathsf{C} \otimes \mathsf{C}$$

其中，显式映射包含一个由交换 $R[1]$ 与 C 产生的符号。因此，T：$\mathsf{C} \otimes \mathsf{C} \to R[-n]$ 诱导出 $T[-2]$：$\mathsf{C}[1] \otimes \mathsf{C}[1] \to R[2-n]$，它给出一个维数为 $n-2$ 的复形，但现在是 $(-\epsilon)$- 对称的；这一点可由对称幺半范畴的公理以及 $R[1] \otimes R[1]$ 上的交换映射为取负这一事实看出。

A.4. 由流形得到的庞加莱复形。 设 M 是一个 n 维流形，且 ρ 是定义在 M 上、取值于 R-模的自对偶 ϵ-对称局部系统。固定一个胞腔分解 $\mathcal{T}$，我们得到链复形 $C^*(M,\ \rho)_{\mathcal{T}}$，用于计算 M 的上同调。庞加莱对偶给出一个态射

$$C^*(M,\rho)_{\mathcal{T}} \otimes C^*(M,\rho)_{\mathcal{T}'} \to R \tag{A.8}$$

其中 $\mathcal{T}'$ 是一个对偶胞腔结构。现在存在一个同伦等价

$$f : C^*(M,\rho)_{\mathcal{T}} \to C^*(M,\rho)_{\mathcal{T}'}$$

它将 (A.8) 转移为 $C^*(M,\ \rho)_{\mathcal{T}}$ 上的一个配对 $\langle -,- \rangle$。这个配对不是对称的，但它与其转置同伦（更精确的结果见 [47, 46]）。将其替换为$\frac{1}{2}(\langle x,y\rangle \pm \langle y,x\rangle)$，我们便在 $C^*(M,\ \rho)_{\mathcal{T}}$ 上得到一个 ϵ-对称的 n 维复形结构。

举例来说，考虑 $M = S^1$ 的情形。取一个带有非退化对称双线性配对的向量空间 V，以及 $A \in \mathrm{SO}(V)$。那么复形

$$\mathsf{C} : V \overset{1-A}{\to} V$$

是 S^1 上相应局部系统的上链复形，置于 0 次和 1 次。接着，按照上述讨论，庞加莱对偶由取值于 $\frac{1}{2}\langle (1+A)-,\ -\rangle$ 的对称配对在 $\mathsf{C}_0 \otimes \mathsf{C}_1$ 上，以及取值于 $\frac{1}{2}\langle (1+A^{-1})-,\ -\rangle$ 的对称配对在 $\mathsf{C}_1 \otimes \mathsf{C}_0$ 上实现。

[16]我们不要求 C 的支集位于次数 $[0,n]$ 上，即使是在上同调意义上也是如此，因此这是一个相当宽松的概念。

A.5. **边界**。 如上所述，取带有 n 维 ϵ-对称结构的 C，但不施加庞加莱条件，即不要求 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^\vee[-n]$ 是拟同构。我们可以构造 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}^\vee[-n]$ 的映射锥 D。于是，D 带有一个维数为 $n-1$ 的严格 ϵ-对称庞加莱复形结构（动机见下文）。

此外，这个结构嵌入到一个由复形的短正合列构成的交换图中，其中顶行是锥的定义序列：

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{C}^\vee[-n] & \xrightarrow{\alpha} & \mathsf{D} & \xrightarrow{\beta} & \mathsf{C}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f_D} & & \downarrow{\scriptstyle \tau[1]} \\ \mathsf{C}^\vee[-n] & \xrightarrow{(-1)^{1-n}\beta^\vee} & \mathsf{D}^\vee[1-n] & \xrightarrow{(-1)^{1-n}\alpha^\vee} & \mathsf{C}^{\vee\vee}[1] \end{array} \tag{A.9}$$

这由 (A.5) 得出，除了关于 D 上的配对是对称的断言。通过直接计算即可得到这一点——事实上，相对于 D 的通常表达式，该配对不依赖于态射 f。在图表中，顶行就是由 D 上的锥结构产生的序列。底行则是对顶行应用对偶得到的。我们使用了 $(\mathsf{C}^\vee[-n])^\vee[1-n] \overset{\text{(A.3)}}{\simeq} \mathsf{C}^{\vee\vee}[n][1-n] \overset{\text{(A.1)}}{\simeq} \mathsf{C}^{\vee\vee}[1]$。这里，$\tau\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\vee\vee}$ 是 §A.2 中由对称幺半结构产生的。

C 与 D 的抽象关系，模型化了带边光滑流形的链复形 $C_c^*(M)$ 与其边界的上链复形 $C^*(\partial M)$ 之间的关系。事实上，设 C 是一个由自由 R-模构成的有限复形，表示 $C_c^*(M,\ R)$；庞加莱对偶映射给出一个配对 $\mathsf{C} \otimes \mathsf{C} \to R[-n]$，而相应映射 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^\vee[-n]$ 的锥可识别为 $C^*(\partial M)$。

A.6. **半特征数与判别式**。以下评述将在正文中用到，涉及自对偶复形的其他不变量，尤其是如何将它们推广到环上的复形，而非域上的复形。

A.6.1. 域上的半特征数 K。设 C 是域 K 上的一维对称庞加莱复形。我们将半特征数 $\chi_{1/2}$ 定义为（见（1.13））交错和

$$\chi_{1/2}(\mathsf{C}) := \sum_{j \le 0} (-1)^j \dim H^j(\mathsf{C}). \tag{A.10}$$

我们通常只关心这个量模 2 的值，此时符号实际上并不重要。此外，对于一个 $(2n+1)$ 维的 $(-1)^n$-对称庞加莱复形，我们可以通过移位应用相同的定义。

断言： 如果进一步假设上述的 C 是一个严格的 庞加莱复形（也就是说，定义对偶的映射是同构，而不只是拟同构），那么事实上有

$$\chi_{1/2} \equiv \sum_{j \le 0} \dim \mathsf{C}_j, \tag{A.11}$$

其中 $\equiv$ 表示两边具有相同的奇偶性。

证明。 要验证 (A.11)，注意到配对 $C_0 \times C_1 \to K$ 和 $C_1 \times C_0 \to K$ 互为转置。于是下图交换，参见 (A.7) 后的等式

(A.12)
$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{d} & C_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1^* & \xrightarrow{-d^*} & C_0^* \end{array}$$

也就是说，若利用对称结构来识别 $C_1 \simeq C_0^*$，则微分$d\colon C_0 \to C_1 \simeq C_0^*$ 现在是斜对称的，即对于 $x,\ y \in C_0$，$\langle dx, y\rangle$ 是斜对称的。此配对下降为定义在 d的余核上的完美斜对称配对。因此，该余核的维数为偶数，这立即推出 (A.11)。 □

A.6.2. 环上的半特征 R。 以下结果实质上出自 Sorger 的论文 [52]，例如参见定理 0.1。

> 半特征的恒定性： 设 R 为一个环（按照惯例，该环是交换含幺的，且包含$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$）。若 C 是定义在R 上的 1-对称庞加莱复形，则其约化 $C \otimes_R k(\mathfrak{p})$的半特征数模 2 后在 Spec R上局部恒定。这里， $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个素理想，而 $k(\mathfrak{p})$是剩余域。

这一陈述由 (A.11) 以及以下关于复形严格化的评注推出（我们已在一个简单情形中见过此评注），该评注同样取自 Sorger 的论文 [52, 引理 2.1 及其后续推论]。

> 复形严格化：给定如上环 R 上的一个 ϵ-对称庞加莱复形 $f\colon C \to C^\vee$，在 R 上扎里斯基局部地存在一个严格的 ϵ-对称庞加莱复形 $g\colon D \to D^\vee$，以及一个拟同构 $h\colon C \to D$，使得所得图表在 R-模的导出范畴中交换。

证明。只需证明该断言对 R 局部环成立，其极大理想为 $\mathfrak{p}$。（随后将此结论应用于原环的任意局部化；所得复形 D 和拟同构 h 可提升到一个包含 $\mathfrak{p}$的扎里斯基开集上。）

将 C 替换为一个极小自由分解 F，即存在拟同构 $h\colon F \to \bar{C}$，且微分 d 模 $\mathfrak{p}$ 约化后为零。于是我们可以用$g\colon F \to F^\vee$表示 f。由于 $f = \pm f^\vee$ 在导出范畴中与 $\pm g^\vee$同伦，因此也与 $(g \pm g^\vee)/2$同伦。我们将 g 替换为 $(g \pm g^\vee)/2$；现在，根据 $f \sim f^\vee$ 或 $f \sim -f^\vee$，有 $g = \pm g^\vee$。与 f的情形不同，这里是等式，而不只是同伦。将 g 模 $\mathfrak{p}$ 约化得到的 $\bar{g}$ 在上同调上诱导同构，因此在约化后的 $\bar{C} \to \bar{C}^\vee$ 上也诱导同构，因为约化后的微分 $\bar{d}$ 为零；因此由中山引理可知 g 是同构。□

A.7. **严格庞加莱复形的分解**。设 $R = k$ 是一个域。记录一条关于将严格庞加莱复形分解为简单部分的结果会很有帮助；该结果大致揭示了所有有趣的现象都发生在中间维度：

> 分解1-对称复形：设 $R = k$ 是一个域。考虑一个严格 1-对称复形，即一个配备对称

同构 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}^\vee[-1]$，那么我们可以将 C 分解为以下和

$$\mathsf{Q} \oplus \mathsf{Q}^\vee[-1] \bigoplus \mathsf{R}$$

与有理数域拟同构于 $\tau_{\leq 0}\mathsf{C}$)，且 R 是一个支撑于次数 0 和 1 的严格 1-对称无环复形；此分解与自对偶相容。

证明。如 (A.12) 所示，微分 $d\colon C_0 \to C_1 \simeq C_0^*$ 是斜对称的。d 的核 $Z_0 \subset C_0$ 与 d 的像 $B_1 \subset C_1$ 互为正交补。我们选取 Z_0 的一个补集 $E_0 \subset C_0$ 和 B_1 的一个补集 $E_1 \subset C_1$，使得 E_0 与 E_1 本身正交。这是可能的：选取 C_0 的一组基 $e_1, \ldots, e_r$，使得 $Z_0 = \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$；于是 $B_1 = \langle e_{j+1}^*, \ldots, e_r^* \rangle$，并取 $E_0 = \langle e_{j+1}, \ldots, e_r \rangle$ 和 $E_1 = \langle e_1^*, \ldots, e_j^* \rangle$。

注意，配对 $E_0 \times B_1 \to K$ 和 $Z_0 \times E_1 \to K$ 都是完美的，并且$d\colon E_0 \to B_1$ 是一个同构。我们将 C 分解为以下各项之和

$$\begin{array}{lccccc}
\deg & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\mathsf{R}: 0 & 0 & E_0 \xrightarrow{d} B_1 \longrightarrow 0 & & 0 & \\
\mathsf{Q}: (\cdots) \longrightarrow C_{-1} \longrightarrow Z_0 \longrightarrow 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow (\cdots) & & &
\end{array}$$

上述三个水平复形之和同构地映射到 C。剩下的只是验证它与对偶相容：

$$\langle e_0 + z_0, e_1 + b_1 \rangle = \langle e_0, b_1 \rangle + \langle z_0, e_1 \rangle$$

因为 $\langle e_0, e_1 \rangle = 0$ 和 $\langle z_0, b_1 \rangle = 0$。 □

附录 B. Reidemeister 扭率平方类与配边

本节将更仔细地定义与流形及自对偶局部系统相关联的 Reidemeister 扭率平方类，正如第 2.3 节所概述的那样。随后我们验证其配边不变性：

断言： （正文中的定理 2.2）设 N 是一个定向的 $4k$-流形，其（定向）$4k-1$ 维边界为 $M = \partial N$，且 ρ 是 N 上取值于域 K 的一个辛局部系统。记 $RT(M,\ \rho_M)$ 为 Reidemeister 扭率平方类（§2.3.1 中作了概述，并在下文 §B.7 中对符号问题作了仔细处理后给出定义）。那么在 $K^\times/2$ 中有等式

$$RT(M, \rho|_M) = (-1)^{\chi_{1/2}(M)/2},$$

其中 $\chi_{1/2}$ 是 M 关于 ρ 系数的半特征数，如式 (1.13) 所示。[17]

若忽略符号问题，论证很简单：根据短正合列的相容性， M 的 Reidemeister 扭率是 N 的扭率与“相对于其边界”的 N 扭率之比。根据庞加莱对偶，这两者互为逆元，因此结果是一个平方。

符号问题并非无关紧要，而我们未能在文献中找到对我们所需内容的恰当论述。我们处理这些符号问题的方式并非原创，只是尝试将其表述得自成一体。读者可以试着阐明其中的符号，从而确信这套形式体系并非全无内容。

我们固定一个域 k。复形始终指有界的 k 向量空间复形。关于复形的其他记号已在 §A 中讨论。§B 的内容如下：

- §B.1 – §B.4 用于回顾复形上行列式函子的基本性质。
- 在 §B.5 中，我们讨论 ϵ 对称复形中的拉格朗日子空间这一概念（参见 §A.3），并为这样的拉格朗日子空间赋予该复形的行列式线中的一个特定平方类。
- 在 §B.6 中，我们在一种抽象情形下比较由若干不同拉格朗日子空间产生的体积形式；该情形模拟一个流形以另一个流形为边界的情况。
- 在 §B.7 中，我们给出 (M, ρ) 的 Reidemeister 扭率的形式化定义；在 §B.8 中，我们给出配边不变性的证明。在 §B.9 中，我们举例说明如何用旋量范数计算 S^1 上正交局部系统的 Reidemeister 扭率。
- 在 §B.10 中，我们说明如何将 Reidemeister 扭率的定义推广到系数取值于环的局部系统情形。

B.1. 分次线。 由分次 k-线。构成的范畴是一个对称幺半范畴，其对象是 k-线 L 与奇偶性 $n \in \mathbb{Z}/2$ 组成的有序对。张量积定义为 $(L, n) \otimes (L', n') = (L \otimes L', n + n')$，交换性同构将 $\lambda \otimes \lambda'$ 映为 $(-1)^{nn'} \lambda' \otimes \lambda$。

回想一下，给定一个集合 S 以及一个由 S 为指标集的分次线族 L_s，就有一个无歧义的张量积 $\bigotimes_S L_s$，其指标集为集合 S。实际上，这个张量积线中的一个元素由以下选择确定：一个“定向”，即 S 上的一个全序 $s_1 < s_2 < \dots s_n$（模去偶置换），以及一组元素 $\lambda_i \in L_{s_i}$；我们可以将此元素记为 $\lambda_{s_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{s_n}$。随后对这些元素施加通常的关系，其中包括交换定向时出现的一个符号。从这个角度看，只有当我们通过排列 S 在页面上“呈现”空间 $\bigotimes_S L_s$ 时，才会出现符号；符号并非内在的。

对于这样的分次线，其逆元 $(L, n)^{-1}$ 按定义为 $(L^\vee, -n)$，并配备如下识别 $(L, n) \otimes (L^\vee, -n) \simeq (k, 0)$，其通过 $v, v^* \mapsto \langle v, v^* \rangle$ 给出。在这种情况下，对于$\lambda \in L$，我们将具有 $\lambda \otimes \lambda^{-1} \mapsto 1$ 的元素记为 $\lambda^{-1} \in L^{-1}$。存在一个同构

$$(L \otimes M)^{-1} \simeq M^{-1} \otimes L^{-1}, (x \otimes y)^{-1} \mapsto y^{-1} \otimes x^{-1}. \tag{B.1}$$

识别 $L^{-1} \otimes L \simeq L \otimes L^{-1} \simeq k$ 定义了函子之间的同构

$$(L^{-1})^{-1} \simeq L \tag{B.2}$$

[17]在该断言的情形下，这一点甚至有更简单的理由，因为 M 是一个边界。

其中 $(\lambda^{-1})^{-1} \mapsto (-1)^n\lambda$ 其中 n 是 L 的次数。下文中我们将直接使用 (B.2)，不再作明确说明。

我们注意到，(B.2) 并非唯一合理的选择；我们隐含地将右逆与左逆视为相同，也可以不使用对称结构来实现这一点，只需要求从 $L\otimes L^{-1}\otimes L$ 到 L 的两个映射相同。我们的约定遵循 [30]。这一约定似乎对我们的论证影响不大；重要的只是始终采用一致的约定。

B.1.1. 分次线中的平方类。 分次线 L 中的一个平方类 是 L 的非零元素模等价关系 $\ell_1 \sim \ell_2$ 所得商集中的一个元素，其中 $\ell_1 = \lambda^2\ell_2$ 对某个 $\lambda \in k^\times$ 成立。

若 L 是一条分次线，则 $L \otimes L = L^{\otimes 2}$ 中有一个特征平方类：平方 $L^{\otimes 2}$ 具有偶宇称。给定一个元素 $l \in L$，便得到 $L \otimes L$ 的相应元素 $l^{(1)}\otimes l^{(2)}$（这里 $l^{(i)}$ 表示作为第 i 个因子中元素的 l）。该元素的平方类不依赖于 l 的选择。（请注意，此处需要谨慎。应将构造中出现的 $L \otimes L$ 的两个因子视为彼此可区分：因为这个“特征”平方类未必在 S_2 对 $L\otimes L$ 的取负作用下保持不变。因此，使用这一构造时，我们将尽量写作 $L\otimes L$，而非 $L^{\otimes 2}$。）

此外，若 M 是分次线，则存在一个双射

$$\text{square classes in } M^{-1} \simeq \text{square classes in } M \tag{B.3}$$

它将 $m \in M$ 所表示的平方类与对偶元素 $m^{-1} \in M^{-1}$ 所表示的平方类对应起来。

对于张量积 $L = L_1 \otimes L_2$，比较 $L^{\otimes 2}$ 中的首选平方类与 $L_1^{\otimes 2}$中的平方类和 $L_2^{\otimes 2}$ 中的平方类的乘积时，必须谨慎：映射

$$[L]^{\otimes 2} = L_1 \otimes L_2 \otimes L_1 \otimes L_2 \xrightarrow{\text{swap}(2,3)} L_1 \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes L_2, \tag{B.4}$$

将 $(\ell_1 \otimes \ell_2)^2$ 映至 $(-1)^{d_1d_2}\ell_1^2 \otimes \ell_2^2$。

B.2. 行列式函子的期望性质。下文中，“复形”指有限维 k向量空间的有界复形。我们将经常考虑复形的短正合列，并将“短正合列”和“多个短正合列”都简称为“短正合列”。

在其论文 [30], 中，Knudsen 和 Mumford 将行列式函子定义为

$$\det : (\text{复形，拟同构}) \to \text{分次线},$$

配备：

（i）使其与短正合列相容的自然变换；当短正合列中的一项为零时，这些自然变换的正规化；以及它们与短正合列的短正合列（即 3×3 平方）的相容性。（ii）正规化：det 在置于零次的向量空间上与通常的行列式一致（见下文），且（i）中的自然变换与向量空间的通常自然变换一致（见下文）。

他们证明，这样的函子连同相关数据，在唯一指定的自然变换意义下是唯一的。

关于精确表述的一些说明：

- Knudsen–Mumford 在 (ii) 中将“相符”表述为一个等式，但我们将其理解为函子之间给定的自然同构。- Knudsen–Mumford 将分次线定义为具有整数分次，而不是$\mathbf{Z}/2$ 分次。Knudsen 和 Mumford 关于行列式函子唯一性的定理可以立即推广到$\mathbf{Z}/2$ 情形，因为分次只通过其奇偶性起作用（无论如何，链复形的行列式的分次等于其欧拉示性数）。

我们固定选取这样一个行列式函子 det。为简便起见，我们记作

$$[\mathsf{C}] := \det(\mathsf{C}).$$

我们将 [C] 中的元素称为 C 上的“体积形式”（这并非标准用法，因为向量空间上的体积形式实际上是对偶的行列式中的元素）。

若 C 无环，则拟同构 $0 \to \mathsf{C}$ 选定了 [C] 中的一个元素，我们称之为无环体积形式。无环复形之间的任意态射都会保持无环体积形式。

需要注意的是，我们可以将其识别为

$$[\mathsf{A} \oplus \mathsf{B}] \simeq [\mathsf{A}][\mathsf{B}], \tag{B.5}$$

但这隐含地涉及一种排序，即，我们从 A $\to$A $\oplus$ B $\to$ B 和 B $\to$ A $\oplus$ B $\to$ A 得到不同的识别。不过，若 A 或 B 的欧拉示性数为偶数，这些识别便一致。

B.3. **平移与对偶**。 回顾一下，复形范畴配备了一个反变对偶函子C $\mapsto$ C$^\vee$ 和一个协变平移函子 C $\mapsto$ C[1], ，如 §A 所述。现在回顾一下，存在自然同构

$$\theta : \det(\mathsf{C}[1]) \simeq \det(\mathsf{C})^{-1}, \ \mathfrak{d} : \det(\mathsf{C}^\vee) \simeq \det(\mathsf{C})^{-1}$$

其中右侧的 $(\ldots)^{-1}$ 是上文所述的分次线范畴上的逆元。我们用 θ_n : det(C[n]) $\to$ det(C)$^{(-1)^n}$ 表示第一个态射对所有移位的延拓（也就是说，要定义 θ_n 在移位上的取值，对于 $n \geq 1$ ，我们反复应用 θ，必要时使用 (B.2)；对于 $n \leq 1$ ，则取逆元。）

第一个同构 θ 由 Knudsen-Mumford（第 35 页）构造得出，它源自正合列

$$\mathsf{C} \to \mathrm{cone}(1_C) \to \mathsf{C}[1], \tag{B.6}$$

利用中间项的无环性。正如 [30], 所指出的，在正合列 $A \to B \to C$ 中进行这一构造，表明 θ 以显然的方式与正合列相容。

对于第二个同构 $\mathfrak{d}$ ，我们考虑函子 C $\mapsto$ det(C$^\vee$)$^{-1}$ ，并为其赋予刻画行列式的那些数据。这将给出一个自然同构[C] $\simeq$ [C$^\vee$]$^{-1}$ ，而且它还保留了行列式函子的全部数据。

首先，det(C$^\vee$) 对拟同构具有函子性：拟同构 A $\to$ B 诱导出 B$^\vee$ $\to$ A$^\vee$，因此 det(B$^\vee$) $\to$ det(A$^\vee$)，对此我们先取逆，再应用线上的对偶。其次，给定一个复形的短正合列 $A \to B \to C$ 对偶序列$C^\vee \to B^\vee \to A^\vee$ 仍然是短正合列，相应地我们得到 $[B^\vee] \simeq [C^\vee][A^\vee]$ 以及（取逆后） $[B^\vee]^{-1} \simeq [A^\vee]^{-1}[C^\vee]^{-1}$。这就给出了行列式函子的基本数据。

接下来需要证明，它与向量空间上的通常行列式一致。为了将函子 $\det(C^\vee)^{-1}$ 与通常的行列式对应起来，我们使用自然变换（定义在向量空间范畴上的函子之间）

$$\mathcal{A}:\det(V)\simeq(\det V^*)^{-1},\ \ v_1\wedge\cdots\wedge v_n\mapsto(v_n^*\wedge\cdots\wedge v_1^*)^{-1}. \tag{B.7}$$

其中 v_i^* 是 v_i 的对偶基。换言之， $\mathcal{A}$ 是通常的识别经 $(-1)^{n(n-1)/2}$ 修正后的结果。现在我们验证识别 (B.7) 与短正合列相容（符号的选取正是为了保证这种相容性）。取零次向量空间的短正合列 $A\to V\to B$，并将其也视为各自仅支撑于零次的复形的短正合列。我们必须验证图表的交换性

$$\begin{array}{ccc}[V] & \xrightarrow{\ \sim\ } & [A][B]\\ \downarrow{\scriptstyle\mathcal{A}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{A}}\\ [V^\vee]^{-1} & \xrightarrow{\ \sim\ } & [A^\vee]^{-1}[B^\vee]^{-1}\end{array}$$

顶部的水平箭头是 [30], 中指定的标准识别：固定 A 的一组基 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_m$，以及 B 的一组基 $b_1,\ \ldots\ldots,\ b_m$，将其提升到 $b_i\in V$，并将 $[a_1\ldots a_nb_1\ldots b_m]$ 送至 $[a_1\ldots a_n][b_1\ldots b_m]$。（这里以及本节后文中，为了缩短记号，我们省略符号 $\wedge$。）现在，经由 $\mathcal{A}$ 得到的像（即顺时针复合）为 $[a_n^*\ldots a_1^*]^{-1}[b_m^*\ldots b_1^*]^{-1}$。另一方面，逆时针复合将

$$[a_1\ldots a_n\widetilde{b_1}\ldots\widetilde{b_m}]\mapsto[\widetilde{b_m}^*\ldots\widetilde{b_1}^*a_n^*\ldots a_1^*]^{-1}\mapsto([b_m^*\ldots b_1^*][a_n^*\ldots a_1^*])^{-1}\overset{\S B.1}{=}[a_n^*\ldots a_1^*]^{-1}[b_m^*\ldots b_1^*]^{-1},$$

从而完成交换性的证明。

B.3.1. 行列式上的对偶与移位彼此相容。 我们要证明移位映射与对偶映射在以下意义下相容：该图表

$$\begin{array}{ccccc}[\mathsf{C}[1]] & & \xrightarrow{\ \theta\ } & & [\mathsf{C}]^{-1}\\ \downarrow{\scriptstyle\mathfrak{d}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\mathfrak{d}}\\ [(\mathsf{C}[1])^\vee]^{-1} & \xrightarrow{\text{(A.3)}} & \mathsf{C}^\vee[-1]^{-1} & \xrightarrow{\ \theta\ } & [(\mathsf{C}^\vee)]\end{array} \tag{B.8}$$

交换。

下文中，为描述复形 $\mathbf{X}$，我们将描述其“第 q 个微分”，即微分 $\mathbf{X}_q\to\mathbf{X}_{q+1}$。取一个复形 C，其第 q 个微分为 d_q。

- $\mathsf{C}[1]$的第 q 个微分为 $-d_{q+1}$：$C_{q+1}\to C_{q+2}$。
- $\mathsf{C}[1]^\vee$ 的第 q 个微分为 $(-1)^qd_{-q}^*$：$C_{1-q}^*\to C_{-q}^*$。
- $\mathsf{C}^\vee$ 有第 q 阶微分 $(-1)^{q+1}d_{-q-1}^*$：$C_{-q}^*\to C_{-q-1}^*$。
- $\mathsf{C}^\vee[-1]$ 有第 q 阶微分 $(-1)^{q+1}d_{-q}^*$：$C_{1-q}^*\to C_{-q}^*$。

接下来，注意存在一个复形映射 g，使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc}\mathsf{C}[1]^\vee & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_{\mathsf{C}})^\vee & \longrightarrow & \mathsf{C}^\vee\\ \downarrow{\scriptstyle\text{(A.3)}} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}_{\mathsf{C}^\vee}}\\ \mathsf{C}^\vee[-1] & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_{\mathsf{C}^\vee[-1]}) & \longrightarrow & \mathsf{C}^\vee.\end{array}$$

为了解释这一点，我们利用 (A.4) 和 (A.2) 写出所涉及的各个复形的第 q 个微分（并回顾一下，复形中的元素视为行向量，矩阵从右侧作用于它们）：

-
$$\text{cone(id)} : \begin{bmatrix} d_q & 0 \\ \mathrm{id} & -d_{q+1} \end{bmatrix} : (C_q \oplus C_{q+1} \to C_{q+1} \oplus C_{q+2}).$$
-
$$\text{cone(id)}^\vee : \begin{bmatrix} (-1)^{q+1} d^*_{-1-q} & (-1)^{q+1}\mathrm{id} \\ 0 & (-1)^q d^*_{-q} \end{bmatrix} : C^*_{-q} \oplus C^*_{1-q} \to C^*_{-1-q} \oplus C^*_{-q}.$$
-
$$\mathrm{cone}(\mathrm{id}_{\mathsf{C}^\vee[-1]}) : \begin{bmatrix} (-1)^{q+1} d^*_{-q} & 0 \\ \mathrm{id} & (-1)^{q+1} d^*_{-1-q} \end{bmatrix}, C^*_{1-q} \oplus C^*_{-q} \to C^*_{-q} \oplus C^*_{-1-q}$$

我们通过以下方式定义 g（参照上述群表示）：

$$g_q := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^q & 0 \end{bmatrix} : C^*_{-q} \oplus C^*_{1-q} \to C^*_{1-q} \oplus C^*_{-q}$$

其中，$\mathbf{1}$ 实际上表示恒等映射。然后我们注意到 $d_q g_q = g_{q+1} d_q$（回忆一下，矩阵从右侧作用）

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{q+1} d^*_{-q} & 0 \\ \mathrm{id} & (-1)^{q+1} d^*_{-1-q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{q+1} d^*_{-1-q} & (-1)^{q+1}\mathrm{id} \\ 0 & (-1)^q d^*_{-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{q+1} & 0 \end{bmatrix}$$

因为两边都给出矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathrm{id} & (-1)^{q+1} d^*_{-q-1} \\ -d^*_{-q} & 0 \end{bmatrix}$$

这个图表的存在表明下图交换

(B.9)
$$\begin{array}{ccc} [\mathsf{C}[1]^\vee]^{-1} & \xrightarrow{\theta^\vee} & [\mathsf{C}^\vee] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ [\mathsf{C}^\vee[-1]]^{-1} & \xrightarrow{\theta} & [\mathsf{C}^\vee] \end{array}$$

映射 $\theta^\vee$ 来自短正合列 $\mathsf{C}[1]^\vee \to$ 锥$(\mathrm{id}_{\mathsf{C}})^\vee \to \mathsf{C}^\vee$，以及相应的同构

(B.10)
$$[\mathsf{C}[1]^\vee] \otimes [\mathsf{C}^\vee] \simeq [\mathrm{cone}(\mathrm{id}_{\mathsf{C}})^\vee],$$

以及右侧的无环点。现在，上面的同构 (B.10) 按定义正是由短正合列 $\mathsf{C} \to$ 锥$(\mathrm{id}_{\mathsf{C}}) \to \mathsf{C}[1]$ 以及 $\mathsf{X} \mapsto [\mathsf{X}^\vee]$ 上的行列式函子结构所诱导的同构。特别地，上图中的映射 $\theta^\vee$ 与和 $\mathsf{C}^\vee$上的行列式函子结构相关联的“移位”同构一致。

接下来，$\mathfrak{d}$是行列式函子的一个同构，因此它与移位同构 θ 和 $\theta^\vee$相交织：

(B.11)
$$\begin{array}{ccc} [\mathsf{C}[1]] & \xrightarrow{\theta} & [\mathsf{C}]^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathsf{C}[1]^\vee]^{-1} & \xrightarrow{\theta^\vee} & [\mathsf{C}^\vee] \end{array}$$

现在，我们结合 (B.11) 和 (B.9)，得出下图如预期般交换。

(B.12)
$$\begin{array}{ccccc} [\mathsf{C}[1]] & & \xrightarrow{\qquad\qquad\theta\qquad\qquad} & & [\mathsf{C}]^{-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{d}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{d}} \\ [(\mathsf{C}[1])^\vee]^{-1} & \xrightarrow{(A.3)} & \mathsf{C}^\vee[-1]]^{-1} & \xrightarrow{\theta} & [(\mathsf{C}^\vee)] \end{array}$$

B.4. **行列式的一些性质**。 我们汇总一些将要用到的行列式函子性质：

- 在 §B.4.1 中，我们将形式化一个直观原则：如果我们只考虑各项维数均为偶数的复形，那么“一切都会按显而易见的方式运作”。- 在 §B.4.2 中，我们说明如何将一个复形的行列式与其上同调的行列式（将上同调视为带零微分的复形）识别起来。- 在 §B.4.3 中，我们检验与取锥相关的一些相容性。

B.4.1. 强偶复形。 如果一个复形在每个次数上都是偶维的，我们就称它为强偶复形。对强偶复形进行许多运算时，所有符号都会消失。特别是，强偶复形的行列式处于偶次数，相应的交换映射也没有符号。例如，我们已经在 (B.5) 中看到，有两种识别 $[\mathsf{A}\oplus\mathsf{B}]\simeq[\mathsf{A}][\mathsf{B}]$，具体取决于我们将左侧视为经由 B 对 A 的扩张，还是反过来；但如果其中一个是强偶复形，这两种识别就会重合。

我们将这一原理形式化如下：

断言：当限制到子范畴

强偶复形及其间的复形同构时

（因此不再考虑拟同构），存在一个自然等价

(B.13)
$$[\mathsf{C}]\simeq\bigotimes_j[\mathsf{C}_j]^{(-1)^j}$$

相对于该等价：

- 对于强偶复形的短正合列 $\mathsf{A}\to\mathsf{B}\to\mathsf{C}$，行列式函子 $[\mathsf{B}]\simeq[\mathsf{A}][\mathsf{C}]$ 的同构，参照 (B.13)，由该向量空间短正合列所导出的同构 $[\mathsf{B}_n]=[\mathsf{A}_n][\mathsf{C}_n]$ 逐项取张量积给出。（我们将此性质称为“与短正合列相容”。）- 上一小节中的平移与对偶自然变换 $\theta,\mathfrak{d}$，与“显然函子”的逐项张量积相对应（见下文）。

在（B.13）中以及下文的讨论中，我们将直接使用这样一个事实：强偶复形的行列式具有偶宇称，因此张量积时“无需担心顺序”。

我们分几个步骤证明这一断言。下面所有相容性陈述都将通过对复形长度作归纳法来证明；归根结底，它们都化约为一维复形的情形。

1. 首先，我们来构造识别 (B.13)。为此，我们只需使用连续暴截断

$$\sigma_{\geq r}\mathsf{C} \to \sigma_{\geq r-1}\mathsf{C} \to \mathsf{C}_r[-r] \tag{B.14}$$

并利用短正合列性质得到 $[\sigma_{\geq r-1}\mathsf{C}] \simeq [\sigma_{\geq r}\mathsf{C}][\mathsf{C}_r[-r]]$，再迭代地得到 $[\mathsf{C}] \simeq \bigotimes[\mathsf{C}_j[-j]]$，其中张量积左侧从 j 的最大值开始。利用同构 θ 将$[\mathsf{C}_j[-j]]$ 识别为 $[\mathsf{C}_j]^{(-1)^j}$，即可得到 (B.13)。这一推理并不要求复形是强偶的。

2. 接下来，我们检验刚构造的识别是否与短正合列相容。A,B 和 C 的截断序列 (B.14) 相容，因此只需检验 A,B 和 C 都处于同一次数时的断言。根据构造，映射 θ 与短正合列相容，因此我们可以归约到维数为 0 的向量空间；此时该断言是行列式正规化的一部分。

3. 与短正合列的相容性意味着，（B.13）的同构——如上所述借助 $\geq$ 截断构造——与借助$\leq$ 截断构造的映射相同。事实上，按照上述推理，这两个版本都与短正合列相容，因此只需考虑复形仅支撑于单一次数的情形；在这种情况下（对两个版本而言），同构都是通过移位以相同方式定义的。

4. 接下来，我们验证该识别与 θ相容，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} [\mathsf{C}[1]] & \longrightarrow & [\mathsf{C}]^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigotimes[\mathsf{C}_{k+1}]^{(-1)^k} & \longrightarrow & \bigotimes_k \left([\mathsf{C}_{k+1}]^{(-1)^{k+1}}\right)^{-1} \end{array}$$

其中，底部箭头来自逐项映射的张量积，这些映射由 $[V] \simeq ([V]^{-1})^{-1}$ 或恒等映射导出；对于 V向量空间，具体取决于奇偶性。

如§B.3所述，θ 来自复形的短正合列 $\mathsf{C} \to$ 锥$(1_C) \to \mathsf{C}[1]$。现在，我们可以对（B.14）的每一项进行这一构造，从而得到一个 3×3平方。在这个 3×3 平方中，有一行锥，它们全都是无环的，记作 $\mathsf{A} \to \mathsf{A}' \to \mathsf{A}''$。在此背景下，同构 $[\mathsf{A}'] \simeq [\mathsf{A}][\mathsf{A}'']$ 保留了各个无环点，这一点可通过与 $0 \to 0 \to 0$比较看出。因此，（B.3）三个项对应的各个 θ 映射彼此相容。于是，只需验证该断言对完全集中于次数 r的复形成立；这一点已隐含在（B.13）的定义中，参见（B.14）之后的讨论。

5. 最后，我们检验与对偶同构 $\mathfrak{d}$ 的相容性。我们断言，它仍由函子 $\mathcal{A}$ 的逐项张量积给出：$[C_i] \to [C_i^\vee]^{-1}$即 (B.7) 中作用于向量空间的函子。

我们再次采用归纳法；不过，现在的归纳假设是，对偶 $[\mathsf{C}] \simeq [\mathsf{C}^\vee]^{-1}$ 与分别利用 $\leq$ 截断为 C 构造的以及利用 $\geq$ 截断为 $\mathsf{C}^\vee$ 构造的识别 (B.13) 相容。（对复形 (B.14) 的截断取对偶时，我们会得到一个类似的序列，但此时涉及的是 $\leq$ 截断；为处理这一点，我们使用上面的第 3 点。）然而，正如我们在上面的第 3 点所见，(B.13) 的这两个版本是一致的。这

使我们可以归约到某个次数上的向量空间情形。这由平移与对偶的相容性推出，详见 §B.3.1 中的 (B.8)。

B.4.2. 复形及其上同调的行列式。 存在一个函子在复形与拟同构范畴上的自然同构：

$$[C] \simeq [H^*C]$$

其中右端的 H^*C 被视为一个带零微分的复形。

由于域上的每个复形都是这两种情形的和，这个同构由其在两个极端情形下的行为确定：

- C 带零微分，此时映射由同构 $\mathsf{C} \to \mathsf{H}$ 诱导。
- C 无环，此时映射由拟同构 $\mathsf{C} \to 0$ 诱导。

一般地，为了构造这个同构，令 $\mathsf{B} \subset \mathsf{Z} \subset \mathsf{C}$ 为边界与闭链的子复形（即微分的像与核）。微分在 B 和 Z 上为零。令 $\mathsf{H} = \mathsf{Z}/\mathsf{B}$，微分为零。存在如下复形的正合列

$$\mathsf{B} \to \mathsf{Z} \to \mathsf{H}, \quad \mathsf{Z} \to \mathsf{C} \to \mathsf{B}[1]$$

由此得到 $[\mathsf{Z}] \simeq [\mathsf{B}][\mathsf{H}], [\mathsf{C}] \simeq [\mathsf{Z}][\mathsf{B}(\mathbf{1})] \simeq [\mathsf{Z}][\mathsf{B}]^{-1}$，进而得到所需的同构。

此外，

(B.15) 同构 $[\mathsf{C}] \simeq [\mathsf{H}]$与移动和对偶相容，

其含义显而易见，例如存在自然同构 $H^*(\mathsf{C}[1]) \simeq H^*(\mathsf{C})[1]$，于是该图表交换。若 C 的微分为零或 C 无环，这种相容性显而易见；而由于任意复形都是这类复形的直和，故一般情形也成立。

如果 $C_1 \to C_2 \to C_3$ 是复形的完全分裂短正合列，那么由此得到的序列$B_i \to Z_i \to H_i$ 和 $Z_i \to C_i \to B_i[1]$是相容的，即构成短正合列图表，据此可以验证图表

(B.16)
$$\begin{array}{ccc} [C_2] & \longrightarrow & [C_1][C_3] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [H_2] & \longrightarrow & [H_1][H_3] \end{array}$$

交换。

B.4.3. 复形与锥。 给定复形的一个单射 $\mathsf{A} \overset{\alpha}{\rightarrowtail} \mathsf{B}$，记 $\mathsf{C} = \mathrm{Cone}(\alpha)$。存在一个同构 $[\mathsf{A}][\mathsf{C}] \simeq [\mathsf{B}]$，它来自锥 C 与 B/A 的拟同构，以及相应的 $[\mathsf{A}][\mathsf{B}/\mathsf{A}] \simeq [\mathsf{B}]$。我们断言，这与由短正合列 s.e.s 得到的同构相同

(B.17)
$$\mathsf{B} \to \mathsf{C} \to \mathsf{A}[1],$$

也就是说，通过 $[C] \simeq [\mathsf{B}][\mathsf{A}[1]]$以及 $\theta\colon [\mathsf{A}(\mathbf{1})] \simeq [\mathsf{A}]^{-1}$。

首先可以对 α 恒等态射的情形进行验证。在这种情形下，断言已隐含在 θ的定义中。

一般情形可归结为这一情形，因为从[A $\xrightarrow{1}$ A] 到 [A $\xrightarrow{\alpha}$ B], 的两个项复形之间的态射，即交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \xrightarrow{1} & \mathsf{A} \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathsf{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathsf{B} \end{array}$$

由此得到一个由复形的短正合列组成的方阵：

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{A} & \longrightarrow & \mathsf{C}_1 & \xrightarrow{+1} & \mathsf{A}[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{B} & \longrightarrow & \mathsf{C}_\alpha & \longrightarrow & \mathsf{A}[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{B/A} & \xrightarrow{+1} & \mathsf{B/A} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

B.5. 复形中的拉格朗日子空间及其行列式。 我们在 §A 中定义了维数为 n 的 ϵ-对称庞加莱复形这一概念，以抽象刻画定向 n流形的奇异复形所具有的性质。我们将考察这一概念如何与行列式相互作用。特别地，给定一个带有拉格朗日子空间（定义如下）的此类复形，我们将定义其行列式中的一个特定平方类。

B.5.1. 向量空间中的拉格朗日子空间及体积形式。 在讨论复形之前，我们先从向量空间开始。设 W 是一个配备了 ϵ-对称完美配对的向量空间，且 $L \subset W$ 是一个拉格朗日子空间。正合列 $L \to W \to L^*$ 诱导出 $[W] \simeq [L][L^*] \simeq K$，其中我们使用 (B.7) 将 $[L^*] \simeq [L]^{-1}$ 识别为.....（我们再次提醒读者，这并非标准的识别方式，但这并不太重要。）于是：

> - 当 W 是辛的时，所得的 $[W]$ 中的类与 L 的选择无关。- 当 W 是正交的时，所得的 $[W]$ 中的类仅取决于 L 所属的拉格朗日格拉斯曼流形的连通分支。

B.5.2. 对称复形与拉格朗日子空间。现在假设 n 是奇数，C 是次数为 n 的严格 ϵ-对称复形，而 L 是一个拉格朗日子空间，即一个配备了单射态射 $\iota : \mathsf{L} \to \mathsf{C}$ 的复形，并且该态射具有以下性质：其诱导映射

$$\mathsf{L} \longrightarrow \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{L}^\vee[-n] \tag{B.18}$$

是复形的短正合列。(B.18) 中的第二个映射是复合映射 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^\vee[-n] \to \mathsf{L}^\vee[-n]$。（这些概念不是同伦不变的。虽然不难以同伦不变的方式表述这些概念，但这里并不需要这样做。）

在这种情况下，(B.18) 诱导出一个自然同构

$$[\mathsf{C}] \simeq [\mathsf{L}][\mathsf{L}^\vee[-n]] \xrightarrow{1\otimes\rho} [\mathsf{L}] \otimes [\mathsf{L}], \tag{B.19}$$

其中 ρ 是复合映射 $[\mathsf{L}^\vee[-n]] \xrightarrow{\sim} [\mathsf{L}^\vee]^{-1} \to ([\mathsf{L}]^{-1})^{-1} \xrightarrow{\sim} [\mathsf{L}]$。由 §B.1.1 可得 [C] 中的一个特征平方类（取决于 L）。若要将其明确写出，我们将

记为

$$\nu_{\mathsf{L}} \in [\mathsf{C}]$$

需要说明的是，这仅在相差基域 k 中一个平方数因子的意义下有定义。

B.5.3. 由拉格朗日子空间确定的 $[\mathsf{C}]$ 特征平方类的性质。下文中，请回顾我们关于和的行列式的注记（B.5）；对于强偶复形，无需担心次序问题。

> 断言：（ν_{L} 可逐项计算）假设 L 按照（B.4.1）的意义是强偶的；那么 C 也是如此。于是 $\nu_{\mathsf{L}} \in [\mathsf{C}]$ 与（利用识别（ B.3 ））以下各元素的乘积一致：这些元素按照 §B.5.1 中的方法定义，起始于拉格朗日子空间
>
> $$\mathsf{L}_j \oplus \mathsf{L}_{n-j} \subset \mathsf{C}_j \oplus \mathsf{C}_{n-j}$$
>
> 并利用以下事实：$[\mathsf{C}_j][\mathsf{C}_{n-j}]$ 中的一个平方类会诱导出 $[\mathsf{C}_j][\mathsf{C}_{n-j}]^{-1}$中的一个平方类。

为此，注意到拉格朗日子空间性质给出短正合列 $\mathsf{L}_j \to \mathsf{C}_j \to \mathsf{L}^*_{n-j}$，以及将 j 和 $n-j$ 对调后得到的类似正合列。因此 $[\mathsf{C}_j] \simeq [\mathsf{L}_j][\mathsf{L}^*_{n-j}]$，再根据 §B.4.1 的讨论，我们看到识别 $[\mathsf{C}] = [\mathsf{L}]^{\otimes 2}$ 是通过将上述识别张量积在一起得到的：

$$[\mathsf{C}] \simeq \bigotimes [\mathsf{C}_j]^{(-1)^j} \simeq \bigotimes [\mathsf{L}_j]^{(-1)^j} [\mathsf{L}_{n-j}]^{(-1)^{n-j}} \simeq [\mathsf{L}]^2.$$

第一个和最后一个箭头来自(B.4.1)，中间的箭头用到了 $[\mathsf{L}^*_{n-j}] \simeq [\mathsf{L}_{n-j}]^{-1}$，以及 n 为奇数这一事实。现在，将第 j 项和第 $n-j$ 项归在一起，中间的箭头也可以看作是在 $j < n/2$ 上将以下识别张量积在一起得到的

$$[\mathsf{C}_j]^{(-1)^j} [\mathsf{C}_{n-j}]^{(-1)^{n-j}} \simeq [\mathsf{L}_j]^{(-1)^j} [\mathsf{L}_{n-j}]^{(-1)^{n-j}} \cdot [\mathsf{L}_{n-j}]^{(-1)^{n-j}} [\mathsf{L}_j]^{(-1)^j}$$

假设 j 为偶数，另一种情形的证明类似。则上面的等式可写为

$$[\mathsf{C}_j][\mathsf{C}_{n-j}]^{-1} \simeq [\mathsf{L}_j][\mathsf{L}_{n-j}]^{-1} [\mathsf{L}_{n-j}]^{-1} [\mathsf{L}_j]$$

与 $\mathsf{C}^{\otimes 2}_{n-j} \simeq ([\mathsf{L}_{n-j}][\mathsf{L}_j]^{-1})^{\otimes 2}$ 作张量积后，我们得到 $[\mathsf{C}_j][\mathsf{C}_{n-j}] \simeq K$。这正是 $[\mathsf{C}_j][\mathsf{C}_{n-j}]$ 的平凡化，它源自其与 $[\mathsf{L}_j][\mathsf{L}_{n-j}]^{-1}[\mathsf{L}_{n-j}][\mathsf{L}_j]^{-1}$ 的同构；等价地说，它源自拉格朗日子空间 $\mathsf{L}_j \oplus \mathsf{L}^{n-j}$，由 §B.5.1 的步骤得到。

> 断言：（ν_{L} 与直和的关系。）给定如上的 $(\mathsf{C}_i \supset \mathsf{L}_i)$，并仍假设 L_i 为强偶，则同构
>
> $$[\mathsf{C}_1 \oplus \mathsf{C}_2] \simeq [\mathsf{C}_1][\mathsf{C}_2]$$
>
> 将左侧的平方类映射为右侧平方类的乘积。

我们指出，如果 L_i 不是强偶的，那么这一陈述就不能按原样成立；而是会多出一个符号 $(-1)^{d_1 d_2}$，其中 d_i 是 L_i 的欧拉示性数。

证明。 利用 (B.4)，并考虑如下交换图（其中我们将 $\mathsf{L}^\vee[-n]$ 简记为 $\mathsf{L}^?$）：

$$\begin{array}{ccccc}
[\mathsf{C}] & & \longrightarrow & & [\mathsf{C}_1][\mathsf{C}_2] \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
[\mathsf{L}][\mathsf{L}^?] & \longrightarrow & [\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_2][\mathsf{L}_1^?][\mathsf{L}_2^?] & \xrightarrow{\mathrm{swap}_{23}} & [\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_1^?][\mathsf{L}_2][\mathsf{L}_2^?] \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\rho} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes 1\otimes\rho\otimes\rho} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\rho\otimes 1\otimes\rho} \\
[\mathsf{L}][\mathsf{L}] & \longrightarrow & [\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_2][\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_2] & \xrightarrow{\mathrm{swap}_{23}} & [\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_2][\mathsf{L}_2]
\end{array} .$$

我们用到了这样一个事实：在 (B.19) 后使用的映射 ρ 与短正合列相容，其含义是，同构 $[\mathsf{L}] = [\mathsf{L}_1][\mathsf{L}_2]$ 在 ρ 下与同构 $[\mathsf{L}^?] = [\mathsf{L}_2^?][\mathsf{L}_1^?] \simeq [\mathsf{L}_1^?][\mathsf{L}_2^?]$ 相匹配（这是由对偶和移位的相应性质推出的）。根据 (B.4)，左右两侧的平方类相差 $(-1)^{d_1 d_2}$；特别地，在强偶情形下它们相同。

B.6. **比较边界行列式中的不同平方类**。现在假设：

- C 是一个维数为 $n = 2k$ 且 k 为偶数的强偶斜对称复形，因此 n 可被 4 整除；- D 是 f 的相应的锥：$\mathsf{C} \to \mathsf{C}^\vee[-n]$，因此 D 是一个奇数维的严格斜对称庞加莱复形（见 §A.5）。

回想一下，这种情形抽象地概括了一个带边的 n-流形的链复形与其 $n-1$-维边界的链复形之间的关系，其中两个链复形都取系数于一个辛局部系统。另请注意，$\sum_j \dim(\mathsf{D}j) \equiv 0$ 模 4。事实上，这个总维数是 C 的总维数的两倍；由于我们假设 C 强偶，因此它是偶数。通过以略有不同的方式应用 §B.5.2 中的过程，可以得到 $[\mathsf{D}]$ 中体积形式的若干平方类：

(a) 由拉格朗日子空间 C 得到的平方类（根据 (A.9)，C 是拉格朗日子空间）。(b) 由拉格朗日子空间 $\sigma_{\geq k}\mathsf{D}$ 得到的平方类，即粗截断 D（也就是截去中间次数以上的部分）。(c) 由 $[\mathsf{D}] \overset{\text{(B.4.2)}}{\simeq} [H^*\mathsf{D}]$ 得到的平方类，以及由 $\sigma_{\geq k}H^*\mathsf{D}$ 在 $H^*\mathsf{D}$ 中的拉格朗日子空间得到的平方类（也就是将上同调视为带零微分的复形，并截去中间次数以上的部分）。

断言： 在上述情形下，以下 D 上的体积形式相同：

$$\text{(B.20)} \qquad \text{(a)} = \text{(b)} = (-1)^r\text{(c)} \in [\mathsf{D}]; \qquad r = \frac{\chi(\mathsf{C}) + \chi_{1/2}(\mathsf{D})}{2}.$$

其中，此处的 (a) 表示由 (a) 的拉格朗日子空间导出的体积形式，依此类推；而 $\chi_{1/2}$ 是 D 的欧拉半特征，即“取到一半”的欧拉示性数，定义见 (1.13)。

证明。 （针对 (B.20)）。为了说明 (a) 和 (b) 相同，我们根据 §B.4.1 的讨论，在各个向量空间 $\mathsf{D}_j \oplus \mathsf{D}^{n-1-j}$ 中进行计算，并在那里使用 §B.5.1。D 上的配对在 $\mathsf{D}_j \oplus \mathsf{D}^{n-1-j}$ 上诱导出一个完美斜对称配对，因为 $j(n-1-j)$ 必然为偶数，因此根据 §B.5.1，任意两个拉格朗日子空间都会诱导出相同的体积形式。

为了说明 (b) 和 (c) 相差符号 $(-1)^d$，我们注意到（见 §A.7），可以将复形 D 分解为若干强偶斜对称复形之和，并使这种分解与配对相容，

- D_1：一个二项复形 $[d:\ V\to V^*]$ 位于次数 $k-1$ 和 k，并带有 d 一个斜对称同构（因此 V 是偶维的，设 $\dim(V)=2r$）。
- D_2：有理数域 $\oplus \mathsf{Q}^\vee[1-n]$，其中 Q 支持在次数 $\geq k$ 上。

注意，由于 V 的维数是偶数，复形 Q 也强偶。因此，对于 D_1 和 D_2，(b) 中的拉格朗日子空间都是强偶的。D_1 的 (c) 中出现的拉格朗日子空间是平凡的（因此是强偶的），但 D_2 的情况未必如此。（不过，D_2 的行列式处于偶次数。）现在我们证明，只需分别对 D_1 和 D_2 检验所需断言：

根据 §B.5.3 的断言，参照 $[\mathsf{D}]\simeq[\mathsf{D}_1][\mathsf{D}_2]$，我们有 $(\mathrm{b})_{\mathsf{D}}=(\mathrm{b})_{\mathsf{D}_1}(\mathrm{b})_{\mathsf{D}_2}$。此外，采用相同的记号 $(\mathrm{c})_{\mathsf{D}}=(\mathrm{c})_{\mathsf{D}_1}(\mathrm{c})_{\mathsf{D}_2}$：同构 $[\mathsf{D}]\simeq[H^*\mathsf{D}]$ 与分裂短正合列（因而也与直和）相容，见 §B.4.2；并且 $\mathsf{H}^*\mathsf{D}_2$ 消失，因此在 $[H^*\mathsf{D}]=[H^*\mathsf{D}_1][H^*\mathsf{D}_2]$ 下，(c) 的体积形式显然一致。

现在我们比较 D_1 的 (b) 与 (c)，以及 D_2 的 (b) 与 (c)，并证明

$$(\mathrm{b})_{\mathsf{D}_1}=(\mathrm{c})_{\mathsf{D}_1},(\mathrm{b})_{\mathsf{D}_2}=(\mathrm{c})_{\mathsf{D}_2}(-1)^r.$$

- 对于 D_1：我们只需注意到，有理数域 Q 的上同调 H 也是有理数域 $\mathsf{Q}\oplus\mathsf{Q}^\vee[1-n]$ 的上同调的“上半部分”截断，结论由图表的交换性得出

$$\begin{array}{ccccc}
[\mathsf{Q}\oplus\mathsf{Q}^\vee[1-n]] & \longrightarrow & [\mathsf{Q}][\mathsf{Q}^\vee[1-n]] & \xrightarrow{1\otimes\rho} & [\mathsf{Q}]\otimes[\mathsf{Q}] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
[\mathsf{H}\oplus\mathsf{H}^\vee[1-n]] & \longrightarrow & [\mathsf{H}][\mathsf{H}^\vee[1-n]] & \xrightarrow{1\otimes\rho} & [\mathsf{H}]\otimes[\mathsf{H}]
\end{array}$$

根据（B.16）后的讨论，左边的平方交换；根据（B.15），右边的平方交换。因此，与 D_1 上的拉格朗日子空间 (b) 和 (c) 相关联的体积形式一致。

- 对于 D_2，，即复形 $[d:\ V\to V^*]$，其次数为 $[k-1,k]$：选取一组基 $e_1,\dots,e_{2r}$，用于 V，并令 $f_i=de_i$，其中 $r=$（维数 V）$/2$。

与拉格朗日子空间 (c) 相关联的体积形式是 D_2，上的“无环”体积形式，即由拟同构 $0\to\mathsf{D}_2$，诱导的体积形式，给出为

$$(e_1\wedge\cdots\wedge e_{2r})(f_1\wedge\cdots\wedge f_{2r})^{-1}\in[V][V^*]^{-1}\overset{\S B.4.1}{=}[\mathsf{D}_2], \tag{B.21}$$

当 k 为偶数时；k 为奇数时有类似的表达式。

为了比较 $(\mathrm{b})_{\mathsf{D}_2}$ 和 $(\mathrm{c})_{\mathsf{D}_2}$，我们必须计算（B.21）中类在 $[V][V^*]^{-1}$ 下的像

$$[V][V^*]^{-1}\simeq[V]\otimes[V]$$

由 (B.7) 的同构 $\mathcal{A}$：$[V^*]\simeq[V]^{-1}$ 诱导。我们利用了 §B.4.1 与对偶和平移的相容性。为此，将 $f_i=a_{ij}e_j^*$ 用对偶基表示，从而 $f_1\wedge\cdots\wedge f_{2r}=\det(A)(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_{2r}^*)$；由于在 $[V]^{-1}\overset{\mathcal{A}}{=}[V^*]$ 下，$[e_1^*\wedge\cdots\wedge e_{2r}^*]^{-1}$ 与 $(e_{2r}\wedge\cdots\wedge e_1)$ 相对应，因此 (B.21) 在 $[V]^{\otimes 2}$ 中的像为

$$(\det A)^{-1}(e_1\wedge\cdots\wedge e_{2r})(e_{2r}\wedge\cdots\wedge e_1)\equiv(\det A)^{-1}(-1)^{(2r)(2r-1)/2}(e_1\wedge\dots e_{2r})^{\otimes 2}.$$

最后，我们注意到，由于 A 是斜对称的，其行列式是一个平方，并且上面的符号就是 $(-1)^r$。因此，在 D_2, 的情形下，与拉格朗日子空间 (b) 和 (c) 相关联的平方类相差 $(-1)^r$。

至此，除符号的表达式外，(B.20) 的证明已经完成。接下来要证明 $r = \text{维数}_2{}^V$ 等于 (B.20) 之后给出的公式。为此，我们分别直接计算 Q 的欧拉示性数以及通过其上同调计算欧拉示性数，并比较结果。记$d^j = \dim \mathsf{D}^j$ 和 $h^j = \dim H^j\mathsf{D}$，则得到

$$\cdots + d^0 - d^1 + \cdots \pm (d^{k-1} - 2r) = h^0 - h^1 + \cdots \pm h^{k-1} \tag{B.22}$$

由于 C 是强偶的，所有 d^i 都是偶数，并且模 4 有

$$\sum_{i\leq k-1} (-1)^i d^i = \sum_{i\leq k-1} (-1)^i (c^i + c^{n-1-i}) \equiv \sum_i (-1)^i c^i \text{ modulo } 4,$$

因此

$$r = \frac{\chi(\mathsf{C}) + \chi_{1/2}(\mathsf{D})}{2} \text{ modulo } 2. \tag{B.23}$$

□

B.7. **Reidemeister 扭率平方类的定义**。终于可以将前面的讨论应用于 Reidemeister 扭率了。

取一个 X 流形（可能带边界）和一个 ρ 维局部系统，并赋予其一个奇偶性为 $(-1)^{k+1}$ 的对称或斜对称配对 $\rho \simeq \rho^\vee$。

在 k 为偶数的情形下，因此 ρ 是辛的，考虑由辛形式楔积得到的顶次体积形式。具体而言，选取一个归一化的辛基 e_i, f_i，使得$\langle e_i, f_i\rangle = 1$ 对于纤维 ρ_{x_0}，类

$$e_1 \wedge f_1 \wedge e_2 \wedge f_2 \wedge \ldots e_d \wedge f_d \in \wedge^{2d}\rho_{x_0}$$

给出了这个体积形式。相对于将对偶空间的行列式与行列式的对偶相识别的“标准”识别，此类映为其逆元

$$\det(\rho_{x_0}) \simeq (\det \rho_{x_0}^\vee)^{-1}, \ v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2d} \mapsto (v_1^* \wedge \cdots \wedge v_{2d}^*)^{-1}. \tag{B.24}$$

。这并非我们所采用的识别；它与我们的 (B.7) 相差一个因子$(-1)^{2d(2d-1)/2} = (-1)^d$。

在 k 为奇数的情形下，因此 ρ 是正交的，我们假设 ρ 配备了一个相对于 (B.24) 自对偶的体积形式。

固定 X 的一个与其边界相容的光滑三角剖分，便得到一个上链复形 $\mathsf{C}_X := C^*(X, \rho)$。由于行列式函子关于拟同构的函子性，行列式 $[\mathsf{C}_X]$ 在唯一同构意义下与三角剖分的选取无关。下文将隐式地用到这一独立性。

由 ρ 上的体积形式、由三角剖分给出的指定基，以及强偶复形的同构 (B.13)，可得到一个特定的类 $e_X \in [\mathsf{C}_X]$。由于 ρ 的维数为偶数，基的排序并不重要。类似地，我们在相对上同调复形 $C^*(X、\partial X、\rho)$ 的行列式中定义一个类 $e_{X,\ \partial X}$。

假设 X 是无边界的 $2k-1$ 维流形，且局部系统的奇偶性 ρ 为 $(-1)^{k+1}$。我们将 X 的 ***Reidemeister*** 扭率平方类定义为

$$RT(M, \rho) \in K^\times/2$$

在 K 中，由刚定义的类 $e_X \in [\mathsf{C}_X]$ 与 $[\mathsf{C}_X]$ 中的平方类之比得到的平方类；后者源自 §B.4.2 中的同构 $[\mathsf{C}_X] \simeq [H^*(X,\ \rho)]$，以及 H^*X 中由 $\sigma_{\geq k}H^*$ 给出的拉格朗日子空间（即 §B.5.2 中的构造 (c)）。

B.7.1. 的行为与对偶的关系。以下关于与三角剖分相关联的体积形式 e_X 在对偶下如何变化的观察，将用于配边不变性的证明：

我们沿用上文的记号；特别地，设 $\mathsf{C}_{X,\partial X}$ 为 X 相对于其边界的上链复形，系数取自 ρ。庞加莱对偶给出一个同构

$$\mathsf{PD} : \mathsf{C}_X \to \mathsf{C}^\vee_{X,\partial X}[-\dim X], \tag{B.25}$$

其中两边均视为 k-向量空间的导出范畴中的对象。在此理解下，记 $n =$ 维数 X，庞加莱对偶诱导出

$$\mathsf{PD} : [\mathsf{C}_X] \to [\mathsf{C}^\vee_{X,\partial X}[-n]] \xrightarrow{\theta} [\mathsf{C}^\vee_{X,\partial X}]^{(-1)^n} \xrightarrow{\mathfrak{d}} [\mathsf{C}_{X,\partial X}]^{(-1)^{n+1}}, \tag{B.26}$$

参照此式，我们有

$$e_X \overset{(B.26)}{\mapsto} e_{X,\partial X}^{(-1)^{n+1}}(-1)^\chi, \tag{B.27}$$

其中

$$\chi = d \cdot \chi(X)$$

是 X 在局部系统 ρ系数下的欧拉示性数的一半。根据 §B.4.1，可以逐次数计算这一数值，利用对偶三角剖分来实现对偶；符号 $d\chi(X)$的由来见 (B.24) 之后的说明。

B.8. **Reidemeister 扭率的配边不变性**。现在我们已准备好证明配边不变性，如定理 2.2 中所述，或如本节开头再次所述：

假设 (M,ρ) 是 (N,ρ) 的边界，其中 N 是 $2k$ 维的，且 k 为偶数。M 是 $2k-1$维的，且 ρ 是一个辛局部系统。(M,ρ) 的 Reidemeister 扭率平方类按 (B.7) 中的方式定义，我们将证明

$$\mathrm{RT}(M,\rho) = (-1)^{\chi_{1/2}(M,\rho)/2}.$$

我们预计，在相反奇偶性的情形下，即 k 为奇数且 ρ 为正交时，用同样的证明也能得到这一结果。

存在一个复形的短正合列

$$0 \to C^*_{\mathcal{T}}(N,\partial N) \xrightarrow{f} C^*_{\mathcal{T}}(N) \to C^*_{\mathcal{T}}(M) \to 0$$

对于相对于其边界 $\partial N = M$ 的一个适当三角剖分 $\mathcal{T}$of N，并且我们有 $e_N = e_{N,\partial N}e_M$参照诱导同构 $[C^*(N)] = [C^*(N,\partial N)][C^*(M)]$。根据 §B.4.3，诱导的拟同构

$$\heartsuit : \mathrm{cone}(f) \to C^*_{\mathcal{T}}(M) \text{ sends } e_f \mapsto e_M, \tag{B.28}$$

其中，在左侧，e_f 通过要求 $e_N \otimes e_N^{-1}{}_{,\partial N} \mapsto e_f$ 参照序列来确定

$$C^*_{\mathcal{T}}(N) \to \mathrm{cone}_f \to C^*_{\mathcal{T}}(N,\partial N)[1].$$

现在 $\heartsuit$ 保留对偶结构：由 $\heartsuit$诱导的上同调同构将锥f 上的对偶（定义见 §A.5）映为 $H^*(M,\ \rho)$的庞加莱对偶，见[46, 定理 6.2]。

为了计算 $(M,\ \rho)$的 Reidemeister 扭率平方类（定义见 §B.7），我们将e_M 与由“取上半部分上同调”定义的拉格朗日子空间所定义的体积形式进行比较。根据 (B.28)，所得结果与将 e_f 和锥f的上同调中以相同方式定义的拉格朗日子空间进行比较所得结果一致，记作：

$$e_f = \text{Reidemeister torsion} \cdot \nu_{\text{Lagrangian given by upper half of cohomology of } \mathrm{cone}(f)}.$$

根据 (B.20)，在左边，可以用锥f内的拉格朗日子空间$C^*_{\mathcal{T}}(N)$替换这个拉格朗日子空间，代价是符号 $\chi_{(N,\ \rho)}+\chi_{1/2}(M,\ \rho)$ 2，~~其中欧拉示性数~~包含局部系统。另一方面，根据 (B.27)，e_f实际上与由这个拉格朗日子空间 $C^*_{\mathcal{T}}(N)$导出的体积形式$\nu_{C^*_{\mathcal{T}}(N)}$ 相差一个奇偶性因子 χ^N_2。因此我们得到

$$RT(M,\rho) = (-1)^{\chi_{1/2}(M)/2}. \tag{B.29}$$

至此，我们完成了正文中定理 2.2 的证明。

B.9. **例：圆上的 Reidemeister 扭率给出旋量范数**。我们回到 §2.3.2 中的例子，其中 $M = S^1$ 和 ρ 是与下列对象相关联的局部系统

$$\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(V),$$

其中 V 是 K 上的一个具有平方判别式的偶维二次空间。我们可以证明§2.3.2中的断言，即：

$$\mathrm{RT}(S^1,\rho) = (-1)^{h/2}\text{spinor norm}(A), \tag{B.30}$$

其中 h 是 A-不动向量的（偶）维数。

B.9.1. 一些正交线性代数。 我们首先回顾正交线性代数的一些一般事实。

注意，广义 1-特征空间 V^+、广义 -1 特征空间、1-特征空间 V^1 以及 -1 特征空间的维数都是偶数。事实上，扩张至代数闭包后，对于 λ，λ^{-1}，广义 λ-特征空间的维数相同；由于行列式等于 1，广义 (-1)-特征空间的维数因此为偶数；而 $\dim(V^+)$ 与 $\dim(V^1)$ 的奇偶性相同，因为正交矩阵的偶维 Jordan 块实际上必须以偶数重数出现。

现在，将其分解为

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus W$$

广义 $+1$ 特征空间、广义 -1 特征空间以及其余部分。于是我们在 $K^\times/2$ 中有以下等式：

$$\text{spinor norm}(A) = \det(1-A)|_W \cdot \mathrm{discriminant}(V^+) \tag{B.31}$$

为了证明 (B.31)，我们使用 Zassenhaus 公式 [66]。它指出，旋量范数等于 $(1+A)/2$ 在 $W+V^+$ 上的行列式与V^-上该形式的判别式之积。现在，维数 $\dim(W+V^+)$ 是偶数，因此这等于 $\det(1+A|W\oplus V^+)\mathrm{disc}(V^-)$。将此应用于 $-A$，得到

$$\mathrm{disc}(V)\mathrm{spinor}(A) = \det(1-A|W\oplus V^-)\mathrm{disc}(V^+).$$

这就证明了 (B.31)，因为 V 的判别式是一个平方，且 V^- 的维数是偶数。

接下来，限制到 V^+ 上后，A 变为幺幂的。此外，我们可以将 V^+ 分解为若干个以下形式的副本之和，且该分解与 A 相容：

(a) $E_1 \oplus E_2$ 与 E_1 的正交直和，其中 E_2 为奇维 Jordan 块。(b) $E \oplus E^*$ 与 E 的直和，其中包含一个偶维 Jordan 块；正交配对在 E 和 E^* 上为平凡配对，并在它们之间诱导出对偶配对。

这源于应用 Jacobson-Morozov 定理 [26], ，我们正是在这里用到了 K 具有特征零这一事实（很可能通过更仔细的考量可以去掉这一假设）。更确切地说，Jacobson-Morozov 定理允许我们将 V^+ 分解为若干 $E \otimes M$型空间之和，其中 E 是大小为 m 的 Jordan 块，而 M 则根据 m的奇偶性为辛空间或二次空间。随后，我们根据 m 的奇偶性，将 M 分解为二维或一维部分，从而得到上述分解。

B.9.2. 证明 (B.30)。像之前一样，将 V 分解为 W 和 V^+，即可归结为情形 $V = V^+$。我们必须验证 V^+ 的判别式与 Reidemeister 扭率乘以 $(-1)^{h/2}$相一致。事实上，我们可以假设属于上述提到的两种情形 (a) 或 (b) 之一，其中 $h = 2$，因此必须证明判别式作为平方类等于 Reidemeister 扭率的相反数。

计算上同调的链复形 C 为

$$\mathsf{C} : V \overset{1-A}{\to} V,$$

§A.4 中给出了一个诱导上同调对偶的显式配对（当然，这需要选择定向，但这不会影响最终结果）。C 及其上同调都是强偶的。

上同调在次数 0 和次数 1 分别由 V^1 和 V_1 给出（上标 1 表示不变量，下标 1 表示余不变量）。在我们目前的情形下

$$\dim V^1 = \dim V_1 = 2.$$

为 V^1 和 V_1 配备对偶体积形式 $\nu, \nu^\vee$（就我们目前的目的而言，V^1 与 V_1 的行列式之间的对偶采用 (B.24) 中由 $\det\langle x_i, y_j\rangle$ 定义的“标准”对偶）。

展开 §B.7 中的定义，Reidemeister 扭率是在以下映射下由 $-\nu \otimes (\nu^\vee)^{-1}$ 的像产生的，其中 (-1) 源自奇异对偶归一化 (B.7)：

$$\det(V^1)\det(V_1)^{-1} = [H^*\mathsf{C}] \overset{\S B.4.2}{=} [\mathsf{C}] = [V][V]^{-1} \simeq K, \tag{B.32}$$

其中两侧的同构来自 §B.4.1。我们必须明确写出 §B.4.2 中的中心映射。

记作 $N = 1 - A$。我们可以写成

$$V = \langle e_1, Ne_1, \dots, N^{m_1}e_1, e_2, Ne_2, \dots, N^{m_2}e_2\rangle,$$

其中 m_i 在情形 (a) 中为偶数，$m_1 = m_2$ 在情形 (b) 中为奇数，且 $N^{m_i+1}e_i = 0$。如 (B.4.2) 中所述，同构

$$[V][V]^{-1} \simeq [V^1][V_1]^{-1} \tag{B.33}$$

出现在 (B.32) 中的量可通过将 $W \overset{N}{\to} W$ 完全分裂为零微分复形 $\langle N^{m_1}e_1, N^{m_2}e_2\rangle \to \langle e_1, e_2\rangle$ 与无环复形之和来计算

$$\langle e_1, \dots, N^{m_1-1}e_1, e_2, \dots, N^{m_2-1}e_2\rangle \overset{N}{\to} \langle e_1, \dots, N^{m_1-1}e_1, e_2, \dots, N^{m_2-1}e_2\rangle.$$

简记 $m_i = 2k_i$，我们得到 (B.33) 映射

$$\begin{aligned}(\text{B.34}) \quad &\left[(N^{m_1}e_1 \wedge N^{m_2}e_2) \wedge (e_1 \wedge \dots N^{m_1-1}e_1) \wedge (e_2 \wedge \dots N^{m_2-1}e_1)\right] \\ &\qquad [(e_1 \wedge e_2) \wedge (Ne_1 \wedge \dots N^{m_1}e_1) \wedge (Ne_2 \wedge \dots N^{m_2}e_2)]^{-1} \mapsto \\ &\qquad\qquad [(N^{m_1}e_1 \wedge N^{m_2}e_2)] \wedge \left[(e_1 \wedge e_2)^{-1}\right],\end{aligned}$$

这里使用括号 $[\dots]$ 并非数学记号，而只是为了便于与 (B.33) 比较。由于 m_1, m_2 具有相同的奇偶性，(B.34) 左侧出现的两个体积元相同。因此，Reidemeister 扭率就是矩阵$\langle N^{m_i}e_i, e_j\rangle$的行列式取负（再次源于奇异对偶归一化），即：

$$(\text{B.35}) \qquad \begin{bmatrix} \langle N^{m_1}e_1, e_1\rangle & 0 \\ 0 & \langle N^{m_2}e_2, e_2\rangle \end{bmatrix} \text{ or } \det \begin{bmatrix} 0 & \langle N^{m_1}e_1, e_2\rangle \\ \langle N^{m_2}e_2, e_1\rangle & 0 \end{bmatrix}$$

分别对应于情形 (a) 或情形 (b)。回想一下，相应地，m_i 要么都为偶数，要么都为奇数。

在情形 (b) 中，我们注意到 (B.35) 中的第二个行列式等于 $-(-1)^m\langle N^m e_1, e_2\rangle^2$，这是一个平方；分裂二次空间 $E \oplus E^*$ 的判别式也是平方，因为 E 是偶维的。这就证明了情形 (b) 中的断言。

剩下需要考虑情形 (a)，也就是证明 (B.35) 中的第一个行列式是二次空间 V 的判别式。取 $M = -\log(A)$，使得 $A = e^{-M}$ 且 $N = M(1 + MQ(M))$，其中 Q 是某个多项式，因此 N 和 M 的最大非零次幂相同。于是，为了计算上述行列式，我们可以用 M 替换 N。现在 $\langle Mx, y\rangle + \langle x, My\rangle = 0$，因此对于 $e,\ f \in V$，我们有

$$(\text{B.36}) \qquad \langle M^m e, f\rangle = -\langle M^{m-1}e, Me\rangle = \dots = \pm\langle e, M^m f\rangle.$$

回想一下，我们处于情形 (a)，令 $v_1 = \langle N^{m_1}e_1, e_1\rangle$，并类似地定义 v_2。(B.35) 中出现的行列式等于 $v_1 v_2$。

由 (B.36)，我们有

$$\langle M^a e_1, M^b e_1\rangle = \begin{cases} 0, & a + b > m_1 \\ (-1)^b v_1, & a + b = m_1 \end{cases}.$$

二次型在 $\langle Ne_1\rangle$ 上的矩阵因此如下所示，其行列式与 $\langle N^{m_1}e_1, e_1\rangle = v_1$ 相差一个平方数：

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & -v & ? \\ v & ? & ? \end{bmatrix} = v^3, \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & -v & ? \\ 0 & 0 & v & ? & ? \\ 0 & -v & ? & ? & ? \\ v & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} = v^5, \text{etc.}$$

因此，二次空间 E_1 的判别式等于 v_1；同理，二次空间 E_2 的判别式等于 v_2，证毕。□

最后，我们讨论配边不变性对1维流形的 Reidemeister 扭率意味着什么。实际上，我们只证明了 $4k - 1$ 流形上的辛局部系统情形的配边不变性，但同样的证明很可能也适用于 $4k - 2$维流形上的正交局部系统。现在取一个定向曲面，其上配备偶数维特殊正交局部系统，并且只有一个边界分支。

绕此唯一边界分支的单值化于是具有如下形式

$$A = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \in \mathrm{SO}$$

对于合适的 $a_i,\ b_i \in \mathrm{SO}$。配边不变性断言，此时 (B.30) 左侧出现的量应为平凡元，即，

$$\text{spinor norm}([a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]) \text{ is trivial}, \tag{B.37}$$

这是成立的，因为旋量范数是同态，且在交换子上为零。

B.10. 环上系数的 Reidemeister 扭率平方类。完成配边不变性的证明后，我们回来处理一个尚未解决的代数问题：如何为环上的模局部系统（而非域上的局部系统）构造 Reidemeister 扭率。我们只建立与本文相关的情形。

设 R 是一个正规整环，含单位元，且 2 可逆；设 M 如 §B.7 中所述，但现在令 ρ 为一个秩为 $2d$、系数取自 R 的自对偶局部系统，也就是说，它是一个由射影 R-模构成并配有自对偶结构的局部系统。为能够使用先前的证明，我们将讨论范围限制在 k 为偶数且 ρ 为斜对称的情形；不过，另一种情形应当完全相同。

那么——将 K 记作 R 的分式域——通过对系数张量积 K，我们先前的讨论仍然定义了 $RT(M,\ \rho) \in K^\times/2$。

断言： $RT(M,\ \rho)$ 属于单射的像

$$H^1(R, \mu_2) \to H^1(K, \mu_2) = K^\times/2 \tag{B.38}$$

回想一下， $H^1(R,\ \mu_2)$ 分类了 R 的 étale 双覆盖，并且嵌入序列 $(R^*)/2 \to H^1(R,\ \mu_2) \to \mathrm{Pic}(R)[2]$. 具体而言， $H^1(R,\ \mu_2)$ 的一个元素可通过给出一个局部自由的 R-模 $\mathfrak{a}$ 及一个同构 $\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{a} \simeq R$来表示。相应的双覆盖由 $R \oplus \mathfrak{a}$的谱给出，并赋予其由$\mathfrak{a}^{\otimes 2} \simeq R$导出的环结构。

证明。（断言的证明）。

要验证 $H^1(K,\ \mu_2)$ 中给定的类可提升到 $H^1(R,\ \mu_2)$，只需在 R上局部构造原像。事实上，由$\lambda \in K^\times$ 定义的平方类唯一可能的原像，是 R 在 $K(\sqrt{\lambda})$ 中的正规化（它可能是也可能不是 étale）。我们必须证明它在 R上是 étale；显然，这可以局部完成。

根据引理 A.6.2，我们可以在对 R 进行局部化后，将链复形 $C^*(X,\ \rho)$ 替换为一个拟同构的复形

$$\mathsf{C}_k \to \dots \xrightarrow{d_2} \mathsf{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathsf{C}_1^\vee \xrightarrow{d_2^\vee} \mathsf{C}_2^\vee \cdots \to \mathsf{C}_k^\vee \tag{B.39}$$

其中 d_1 是斜对称的，且庞加莱对偶对应于显然的对偶。于是 $\mathfrak{a} := \bigotimes_1^k (\det \mathsf{C}_i)^{(-1)^i}$ 带有一个同构

$$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \simeq \det \mathsf{C} \simeq R$$

其中，第二个映射来自 $\det \mathsf{C}$ 中的特定类。特别地，复形 (B.39) 给出 $H^1(R,\ \mu_2)$ 中的一个类。将所得的 $H^1(R,\ \mu_2)$ 中的类映射到 $H^1(K,\ \mu_2) = K^\times/2$ 后，并不能得到先前定义的 $RT(M.\rho) \in K^\times/2$，但两者相差一个仅取决于复形维数数据的符号。这可由比较 (B.20) 中的“(b)”和“(c)”得出。□

断言 指出，我们可以将 Reidemeister 扭率平方类视为 $RT(M,\ \rho) \in H^1(R,\ \mu_2)$。这是函子性的；也就是说，若 $f\colon\ R \to S$ 是正规整环之间的同态，则相应的类 $RT(M,\ \rho \otimes_R S)$ 正是 $RT(M,\ \rho)$ 在 $H^1(R,\ \mu_2) \to H^1(S,\ \mu_2)$ 下的像。

为说明这种函子性，我们作如下论证：设 L 是 S 的分式域。由 $H^1(S, \mu_2)$ 到 $\to H^1(L, \mu_2)$ 的单射性，只需验证 $RT(M, \rho_L)$ 与 $RT(M, \rho)$ 在 $H^1(L, \mu_2)$ 中的像相同。由于 S 是整的，$R \to S$ 的核是一个素理想 $\mathfrak{p}$。如上所述，我们固定一个拟同构 C $\simeq C^*(X, \rho) \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$，其中 C 是 (B.39) 中所述的 $R_{\mathfrak{p}}$-模复形，并令 $\mathfrak{a}$ 如上。然后经由 $R \to L$ 作基变换后，我们得到 C $\otimes_{R_{\mathfrak{p}}} L \simeq C^*(X, \rho_L)$，它仍与显然的对偶相容。用 (B.38) 后所述的语言，$RT(X, \rho_L)$ 于是由 $(\mathfrak{a} \otimes L, \mathfrak{a}^2 \otimes L \simeq L)$ 表示，而后者是 $RT(X, \rho)$ 经由 $R \to R_{\mathfrak{p}} \to L$ 的像。

附录 C. 三维流形圆周纤维化的显式计算

定理 2.1 的证明需要一个三维流形上的自对偶局部系统示例 $\rho : \pi_1(M) \to$ 辛群 $_{2r}(\ell)$，使其 Reidemeister 扭率不是平方。我们将在 $\ell =$ 有理数域(i)和 $r = 1$的情形下给出这样一个示例。ρ 将取为值在二元四面体群 $G := A_4$中的，而我们的流形 M 将以亏格二曲面为纤维作圆周纤维化。

C.1. 三维流形 M。我们考虑一个可定向三维流形，它以一个（定向的、闭的）亏格 2 曲面 S为纤维作圆周纤维化。这样的 M 可以构造为 $S \times$ 实数域的商，其中整数群按$(s, n) \mapsto (t(s)\ n + 1)$给出的作用，$t\colon\ S \to S$ 是一个保定向的微分同胚。除微分同胚外，所得流形 M 仅取决于 t 在 S的映射类群中的类，我们可以通过以下单射（Dehn-Nielsen-Baer）对其作显式描述：

$$\mathrm{MCG}(S) \hookrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(S)).$$

因此，我们需要对 $\pi_1(S)$ 作出显式描述。令 a_1、b_1、a_2、b_2 为 S 上生成基本群 $\pi_1(S)$ 的标准简单闭曲线，因此我们有标准群表示

$$\pi_1(S, \star) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 \rangle.$$

我们将把 t 构造为德恩扭转 T_i $(1 \leq i \leq 5)$ 的组合：

$$T_1 : b_1 \longmapsto b_1 {a_1}^{-1}, T_2 : a_1 \longmapsto a_1 b_1,$$
$$T_3 : b_1 \longmapsto {a_1}^{-1} {a_2}^{-1} b_1, b_2 \longmapsto {a_2}^{-1} {a_1}^{-1} b_2,$$
$$T_4 : b_2 \longmapsto b_2 {a_2}^{-1}, T_5 : a_2 \longmapsto a_2 b_2$$

上文只写出了每个 T 对 $\{a_i, b_i\}$ 中其不固定的元素所产生的作用。例如，T_1 固定 a_1、a_2、b_2。每个 T_i 都给出 π_1 的一个自同构。我们也将它视为其在外自同构群 Out 中的像，以及与之关联的映射类，并同样将二者记作 T_i。

现在我们固定一个元素 $t \in$ Aut(π_1)，它属于由 T_i生成的群。我们将这个群与其在 MCG(S) 中的像自然地视为相同。我们选择一个映射的代表元

类，即一个固定所选基点 $\star$ 并在 π_1 上诱导指定元素t 的微分同胚；我们也用 t 表示这个微分同胚。与上文一样， t 的选择产生一个以 S为纤维、圆周纤维化的定向三维流形。

C.2. **辛局部系统** ρ。 设我们有一个辛局部系统ρ： $\pi_1(S,\star) \to$ 辛群$_{2r}(\ell)$，定义在 S 上，并且有 $M \in$ 辛群$_{2r}(\ell)$，使得

$$\rho(t(g)) = M\rho(g)M^{-1},\ \ g \in \pi_1(S). \tag{C.1}$$

这便将 ρ 扩张为 M 上的一个局部系统。我们按如下方式计算该局部系统的 Reidemeister 扭率：

引理 C.2.1. 假设 $H^0(S,\rho)$ 消失（因此 H^2 也消失），且 ℓ 的特征为零。诱导映射 T: $H^1(S,\rho) \to H^1(S,\rho)$ 的行列式为 e
并且我们在 $\ell^\times/2$中有一个等式

$$(-1)^{h/2}RT(M,\rho) = \text{spinor norm}(T)$$

其中 h 是 T 在 $H^1(S,\rho)$上的不动子空间的（偶）维数，或者等价地，是相关映射环面的 H^1 维数。

作为一个推论，我们得到公式

$$(-1)^{h/2}RT(M,\rho) = \det{}'(1-T)\cdot\delta \in \ell^\times/2, \tag{C.2}$$

其中 $\det'$ 表示将行列式限制在广义 1 特征子空间的正交补上，而 δ 是二次型在 $H^1(S,\rho)^{T=1}$上的限制的行列式。为了从引理推出 (C.2)，我们使用 Zassenhaus 公式 (B.31)，并回顾 3.5.1 中 $H^1(S,\rho)$具有平方判别式。

证明。 *</style}*思路是证明 $(,\rho) = RT(S^1,\rho_T)$，其中 ρ_T是与 T相关的局部系统，从而归约到 B.9 中讨论的情形，其中 $V = H^1(S,\rho)$。

由 t 诱导的映射 $C^*(S,\ \rho) \to C^*(S,\ \rho)$ 保持“Reidemeister”体积形式，因为它将 S 的一个三角剖分映至 S 的另一个三角剖分，这意味着它在 $H^1(S,\ \rho)$ 上的行列式为一。

参照自然映射 $M \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$，令 X 和 Y 分别为 $[0,1/2]$和 $[1/2,1]$ 的原像（将它们与其在 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 中的像等同）。那么， $M = X\coprod_Z Y$ 可分解为两个具有公共边界 $X,\ Y = S\times[0,1]$ 的流形，其中 S_t 是 $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 的原像。

Z 的上链复形构成一个三角

$$C^*(M) \to C^*(X)\oplus C^*(Y) \to C^*(Z). \tag{C.3}$$

这里及下文中，所有上链复形的系数均取自 ρ，并且还将其视为 K-向量空间导出范畴中的完美对象。若我们为 $X,\ Y,\ Z$ 和 M 选取相容的三角剖分，则可验证相应的 Reidemeister 点与诱导的行列式同构相容

$$[C^*(M)][C^*(Z)] \simeq [C^*(X)][C^*(Y)].$$

事实上，我们可以为所有空间选取相容的基，因此我们处于这样一种复形情形：其中所有对象的维数都是偶数（§B.4.1）。

参见（C.3）。我们首先注意到， S_0 和 $S_{1/2}$ 到 X 的包含映射诱导出拟同构

$$C^*(S_0) \leftarrow C^*(X) \rightarrow C^*(S_{1/2}) \tag{C.4}$$

由于这两个包含映射同伦，复合拟同构显然就是由识别 $S \times \{0\} \simeq S \times \{1/2\}$ 得到的那个，也就是说，它在第一个因子上是恒等映射。对于 Y，也有类似的说明。

接下来，复合映射 $C^*(X) \oplus C^*(Y) \rightarrow C^*(S_0) \oplus C^*(S_{1/2})$，其中第一个因子限制在 0 纤维上，第二个因子限制在 $1/2$ 纤维上，在平方数意义下保持 Reidemeister 体积形式（因为 X映射和 Y映射都将该形式乘以同一个未知因子）。因此，若考虑这个方形，其中竖直箭头为拟同构，

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) \oplus C^*(Y) & \longrightarrow & C^*(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_0, \mathrm{res}_{1/2}} & & \downarrow \\ C^*(S_0) \oplus C^*(S_{1/2}) & \xrightarrow{\tau} & C^*(S_0) \oplus C^*(S_{1/2}) \end{array}$$

那么，若通过 (C.4) 将 $C^*(S_{1/2})$与 $C^*(S_0)$识别，映射 τ 由$\tau = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$给出。竖直映射在平方数意义下保持 Reidemeister 体积形式。将此图表与 (C.3) 比较，我们发现，M 的链复形（如上所述，将其视为导出范畴中的完美对象）构成一个三角

$$C^*(M) \rightarrow C^*(S)^{\oplus 2} \xrightarrow{\tau} C^*(S)^{\oplus 2},$$

并且该序列与 Reidemeister 体积形式相容。我们必须比较：

- the element of $[C^*(M)] \simeq [H^*(M, \rho)]$ arising from the identification of $[C^*(M)]$ with the line $[C^*(S)^{\oplus 2}][C^*(S)^{\oplus 2}]^{-1} = k$ from the above sequence, and
- the self-dual form in $[H^*(M, \rho)]$, obtained as described in (c) of §B.6.

记 $V = H^1(S, \rho)$。那么 $C^*(S)$ 与 $V[-1]$ 拟同构。因此，我们有三角

$$C^*(M) \rightarrow V[-1]^{\oplus 2} \xrightarrow{\tau} V[-1]^{\oplus 2}.$$

对角副本 $V[-1]$ 取商后，我们归结为同一个问题，不过现在要考虑 $C^*(M)$ 如何嵌入三角 $C^*(M) \rightarrow V[-1] \xrightarrow{1-T} V[-1]$。这正是例 §2.3.2 中的情形，详见 B.9。□

C.3. **单值化作用的计算**。现在我们说明如何计算式 (C.2) 中出现的行列式。沿用 §C.2 中的记号，我们有 ρ： $\pi_1(S) \rightarrow$辛群$_{2r}(\ell)$。记 $V = \ell^{2r}$ 为环境辛向量空间，并将其视为 $2r \times 1$ 列向量。对于 $v \in V$，我们记作 gv，而不记作 $\rho(g)v$。

- 一个 1-余循环 ϕ： $\pi_1(S) \rightarrow V$只需给出向量 $\phi(a_1)$、 $\phi(a_2)$、$\phi(b_1)$ 和 $\phi(b_2)$，即可唯一确定；将其通过余循环关系 $\phi(gh) = g\phi(h) + \phi(g)$ 延拓后，它们满足 $\phi([a_1, b_1][a_2, b_2]) = 0$。展开后，这等价于

$$\begin{aligned} \phi(a_1) + a_1\phi(b_1) - a_1b_1a_1^{-1}\phi(a_1) - a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\phi(b_1) \\ + a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\phi(a_2) + b_2a_2b_2^{-1}\phi(b_2) - b_2\phi(a_2) - \phi(b_2) = 0. \end{aligned} \tag{C.5}$$

- 余边界是满足 $\psi(g) = gv - v$ 的元素 ψ，其中存在某个向量 v。

映射类群中的元素 t 诱导映射 $T: H^1(S, \rho) \to H^1(S, \rho)$，在余循环上由以下方式实现：

$$T(\phi) = M^{-1} \circ \phi \circ t,$$

其中 M 如 (C.1) 所示。该公式在余循环空间上诱导出一个映射，并下降到上同调，因为它将余边界 $\phi_v: g \mapsto gv - v$ 映射为 $M^{-1}(t(g)v - v) = g(M^{-1}v) - M^{-1}v$。

现在我们给出一个 $\det(1 - T)$ 的公式，它对显式计算很有用。若 $\rho(b_1)$ 没有平凡特征值，则 $\det(I - \rho(a_1 b_1 a_1^{-1})) \neq 0$，且由 (C.5)，$\phi(a_1)$ 可由 $\phi(b_1)$ $\phi(a_2)$ 和 $\phi(b_2)$ 唯一确定，因此我们得到一个同构

$$H^1(S, \rho) \simeq \operatorname{coker}\left(V \xrightarrow{\iota} V^{\oplus 3}\right), \iota : v \mapsto b_1 v - v, a_2 v - v, b_2 v - v, \tag{C.6}$$

由此得到

$$\phi \mapsto (\phi(b_1), \phi(a_2), \phi(b_2)). \tag{C.7}$$

于是我们有一个图表

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\iota} & V^{\oplus 3} & \xrightarrow{\text{(C.6)}} & H^1(S, \rho) \\ \downarrow{\scriptstyle M^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{T}:\phi \mapsto M^{-1}\circ\phi\circ T} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ V & \xrightarrow{\iota} & V^{\oplus 3} & \xrightarrow{\text{(C.6)}} & H^1(S, \rho) \end{array} \tag{C.8}$$

在我们的情形中，若 $\dim(V) = 2$，中间空间 V^3 有一个 6 维基 $\phi_1, \ldots\ldots, \phi_6$，与 b_1, a_2, b_2对偶，例如，ϕ_1 将 b_1 映射到 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 a_2，并将 b_2 映射到 0。特别地，在 $T: H^1(M, \rho) \to H^1(M, \rho)$ 没有平凡特征值的情形下，

$$\det(1 - T) = \frac{\det(1 - \tilde{T}|V^{\oplus 3})}{\det(1 - M^{-1}|V)}. \tag{C.9}$$

˜其中 T 是 (C.8) 中间的垂直映射。这个 (C.9) 对显式计算很有用。

˜**C.4. 具体例子**。取 G 为二元四面体群 A_4。它是单位四元数群 $\{z = (a, b, c, d) \text{ 的子群}, = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} | z\bar{z} = 1\}$ 描述如下

$$\tilde{A_4} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)}{2}\}.$$

我们将单位四元数，以及 G，视为 $SL_2(\mathbb{Q}(i))$ 的子群，其识别方式为 $a + bi + cj + dk \to \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$。

C.4.1. 一个具有非平方数 *Reidemeister* 扭率的例子 $\sim i$。我们计算由该表示给出的局部系统的扭率

$$S: a_1 \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, b_1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b_2 \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 - i & -1 - i \\ 1 - i & -1 + i \end{pmatrix}$$

以及映射类 $t = T_4^2 T_2 T_3 T_1$。应用扭曲 t 后，我们得到

$$S: ta_1 \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, tb_1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, ta_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, tb_2 \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 + i & -1 + i \\ 1 + i & -1 - i \end{pmatrix}$$

以及满足 $S(t(g)) = MS(g)M^{-1}$ 的矩阵由 $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 给出。注意，$\det(I - S(a_1 b_1 a_1^{-1})) = 4$。现在我们在基 ϕ_i、$(1 \le i \le 6)$下计算 (C.8) 的诱导映射 $\tilde{T}$：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+i & \frac{1}{2} & \frac{-2-3i}{2} & 0 & 1+i \\ -1+i & 0 & \frac{2-3i}{2} & \frac{1}{2} & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & \frac{-1-i}{4} & \frac{5+3i}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1-i}{2} & 0 & \frac{-5+3i}{4} & \frac{-1+i}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们计算 $\det(1 - \tilde{T}) = 4$和 $\det(1 - M^{-1}) = 2$。因此，由 (C.9) 可得 $RT(M,\ \rho) = 2 = i \in$ **有理数域**$(i)^\times/2$，因为 $2 = (1-i)^2 \cdot i$。

C.4.2. 一个 *Reidemeister* 扭率为平方的例子 ~ 1。考虑由以下表示给出的局部系统

$$S(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, S(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, S(a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S(b_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

以及映射类 $t = T_5^2 T_4 T_5^2$。应用扭曲 t后，我们得到

$$S(ta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, S(tb_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, S(ta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S(tb_2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

以及满足 $S(t(g)) = MS(g)M^{-1}$ 的矩阵由 $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 给出。注意，$\det(I - S(a_1 b_1 a_1^{-1})) = 2$。现在我们在基 ϕ_i 下计算诱导映射 $\tilde{T}$：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

现在，$\det(1-\tilde{T}) = 8$且 $\det(1-M^{-1}) = 2$。因此，由 (C.9) 得到 $RT(M,\ \rho) = 4$，它现在在**有理数域**$(i)^\times/2$中表示平凡类。

附录 D. 涉及超椭圆曲线的数值例子

本节将说明如何计算一些数值例子，以展示适用于一类与超椭圆曲线相关的四元数 L-函数的主定理。我们将其纳入本文，因为：

- 它表明，我们定理中出现的全局上同调不变量可以进行数值计算，而且
- 这为该陈述在不满足定理条件时仍成立提供了证据。

D.1. **关于 Q_8 的背景。** 通常所说的 8 阶四元数群为 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，其中 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ 且彼此反交换。该群可纳入一个正合列

$$\langle j \rangle \to Q_8 \to \mathbf{Z}/2$$

(注意，这样的序列有三条，分别对应于将 i 替换为 $\pm j$ 或 $\pm k$；我们始终使用上面那条。)

Q_8 有一个标准表示 $\rho\colon Q_8 \to \mathrm{SL}_2$(**有理数域**($i$))，由"泡利矩阵"给出。

$$i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, j \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, k \mapsto ij.$$

特别地，将其限制到 $\langle j \rangle$时，所得表示就是 $\langle j \rangle \simeq \mathbf{Z}/4$的两个 4 阶特征之和。我们注意到，该表示具有实特征，即 $\rho \simeq \rho$。

我们将用到一些关于 Q_8 上同调的事实。第一上同调 $H^1(Q_8, \mathbf{Z}/2)$ 的维数为 2；固定生成元 x，y，它们分别对应核为 $\langle j \rangle$ 和 $\langle i \rangle$ 的同态。此外，x^2，$y^2 \neq 0$，因为这两个同态都无法提升为到 $\mathbf{Z}/4$ 的同态；但事实上 $x^2+xy+y^2 = 0$ 且 $x^2y+y^2x = 0$（因此 $x^3 = y^3 = 0$ 也成立）。此外，$H^3(Q_8, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 的秩为一，生成元为 $x^2y = y^2x$。

从 $H^3(\mathrm{SL}_2 \mathbf{Q}(i), \mathbf{Q}(i)^\times/2)$ 拉回的 Soule 陈类到 $H^3(Q_8, \mathbf{Q}(i)^\times/2)$ 后，是 $H^3(Q_8)$ 中唯一的非平凡模 2 类，其取值属于由 i 生成的 2-挠元子群（将其视为 $\mathbf{Q}(i)^\times/2$ 的元素）。为验证这一点，我们取 $\mathfrak{o} = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, i]$ 并考察

$$\begin{array}{ccccc} H_3(Q_8, \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & H_3(\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}), \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z}/2) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathfrak{o}^\times/2 & \longrightarrow & \mathbf{F}_q^\times/2. \end{array}$$

其中竖直箭头由 étale 陈类诱导；我们利用了作为主理想整环的 $\mathfrak{o}$ 满足 $H^1(\mathfrak{o}, \mathbf{Z}/2) \simeq \mathfrak{o}^\times/2$。任取一个从 $\mathfrak{o}$ 到 $\mathbf{F}_q$ 的满射。复合映射 $H_3(Q_8) \to \mathbf{F}_q^\times/2$ 非平凡，当且仅当 i 是 $\mathbf{F}_q$ 中的非平方数，也就是说，当且仅当 $q \equiv 5$ 模 8：在这种情形下，整除 $q(q^2-1)$ 的 2 的最大幂为 8，这意味着 Q_8 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_q)$ 的一个 2-西罗子群，因此该包含映射在 H_3 上诱导满射。这就证明了我们的断言。

D.2. **从群到 Q_8 的同态。**给定一个满射 $\alpha\colon G \twoheadrightarrow Q_8$，其中 G 是某个群，我们考虑以下数据：

- $\langle j \rangle$ 的原像，它是一个指数为 2 的子群 $H \leqslant G$。
- 诱导的态射 $\chi\colon H \to \langle j \rangle \simeq \mathbf{Z}/4$,

这里以及下文中，我们将 $\langle j \rangle$ 与$\mathbf{Z}/4$ 之间的识别标准化，使其将 j映至 $1 + 4\mathbf{Z}$。

此外，这些数据具有如下性质：

i. For any (equivalently: one) $g \in G - H$, we have $\chi(ghg^{-1}) = \chi(g)^{-1}$, and
ii. For any (equivalently: one) $g \in G - H$ we have $\chi(g^2) = 2 + 4\mathbf{Z}$.

反过来，给定一个指数为 2 的 ($H \subset G$)，以及满足上述条件的同态 $\chi\colon H \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$，它可由一个同态 $G \to Q_8$ 导出。事实上，固定 $g \in G - H$，我们看到，G 对 χ 的核取模后是一个群，其群表示为 $\langle g, j\colon g^2 =$

$j^2, gjg^{-1} = j^{-1}\rangle$。条件 (i) 和 (ii) 合在一起表明， G 的特征相等

$$\chi \circ \mathrm{Ver} = \begin{cases} 0, & g \in H, \\ 2 + 4\mathbf{Z}, & g \notin H \end{cases},$$

其中 Ver： $G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$ 是转移。Tt 由 H 上的 $h \mapsto h \cdot \sigma(h)$ 给出，其中 σ是由 $G - H$ 中的一个元素共轭而得，并将任意 $g \in G - H$ 映到 g^2的类。

D.3. **曲线的 étale 覆盖**。设 X 是有限域 k 上的一条射影光滑曲线。我们将上述讨论应用于 $G = \pi_1(X)$，可知 X 的一个伽罗瓦群为 Q_8 的有限 étale 覆盖由给出一个二次 étale 扩张 $\tilde{X}/X$ （其具有非平凡的伽罗瓦对合 σ）以及一个类来确定

$$\alpha : \mathrm{Pic}\ \tilde{X} \longrightarrow \mathbf{Z}/4$$

使得 α 被 σ 取负，并且

$$\alpha|_{\mathrm{Pic}\ X} = \text{ the character } \mathrm{Pic}X \to \mathbf{Z}/2 \text{ associated to } \tilde{X}/X. \tag{D.1}$$

˜这里请回忆，从 X 到 X 的同调转移变为 Pic 上的拉回映射；我们在写出 (D.1) 时隐含地以此作为参照。

在这种情况下，我们可以将 $H^3(Q_8)$ 的一个生成类拉回到 $\tilde{X}$，并对其“积分”（即使用迹映射），从而得到 $\mathbf{Z}/2$ 中的一个元素，见 (3.6)。我们希望能够用 $\tilde{X}$， α 来计算这个˜元素。

D.4. **如何计算 $H^3(Q_8)$ 中一个类在 X上的积分**。我们继续沿用 §D.3 的设定。

将 §D.1 中的类 x, y拉回后，我们得到相应的类 $x, y \in H^1(X,\mathbf{Z}/2)$，并希望计算配对 $\int x^2 \cup y$。对我们而言， $H^1(X)$ 表示 k-概形 X的绝对 étale 上同调。

考虑正合列 $\mathbf{Z}/2 \to \mu_4 \to \mathbf{Z}/2$ 和 $\mathbf{Z}/2 \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2$。我们将它们视为 X上的 étale 层短正合列。令 β' 和 β 为相应的连接映射 $H^j(X,\mathbf{Z}/2) \to H^{j+1}(X, \mathbf{Z}/2)$。特别地， β是 Bockstein，且$\beta(x) = x^2$。

引理 D.4.1。

$$\int x^2 \cup y = \int \beta'(x) \cup y. \tag{D.2}$$

证明。 注意，在 $H^*(X, \mathbf{Z}/2)$ 上

$$\beta'(x) - \beta(x) = x \cup (-1) \tag{D.3}$$

其中 $-1 \in H^1(X, \mathbf{Z}/2)$ 是通过对 -1 开平方根所定义的类，即在结构映射 $X \to \mathrm{Spec}\ k$ 下对 $-1 \in k^\times/2 \simeq H^1(k, \mathbf{Z}/2)$ 的拉回。事实上，定义 β 和 β' 的那些正合列的扩张类之和，由这些正合列的 Baer 和表示，也就是说，该正合列

$$\mathbf{Z}/2 \to \frac{\{x \in \mu_4, y \in \mathbf{Z}/4 : x \equiv y(2)\}}{\mathbf{Z}/2} \to \mathbf{Z}/2.$$

这表示 $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$ 中的一个类，先验而言 是阿贝尔群层的扩张，但实际上来自层范畴中的一个$\mathbf{Z}/2$-向量空间扩张。具体来说，固定 μ_4的一个局部生成元 ε，则中间群有 4 个元素，由 $(\epsilon, 1)$ 和 $(0, 2) = (2\epsilon,0)$ 生成。在相关局部系统上的 π_1 作用

用矩阵形式表示为 $\begin{pmatrix} 1 & \chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 χ：$\pi_1 \to \mathbf{Z}/2$ 是对 -1 的平方根的作用。

至此，(D.3) 的证明完成。

因此，为了证明 (D.2) 成立，我们必须验证 $\int xy \cup (-1) = 0$。现在，在 $H^*(Q_8, \mathbf{Z}/2)$ 中，我们有 $xy = (x+y)^2$。设 $z = x + y$；那么我们必须证明 $\int z^2 \cup (-1)$ 消失。注意

$$\beta'(z \cup -1) = \beta(z \cup -1) + z \cup (-1) \cup (-1) = \beta(z) \cup (-1) + z \cup \beta(-1) = z^2 \cup (-1)$$

这里我们分别用到了：$\beta' - \beta$ 是与 -1 的杯积；$(-1) \cup (-1) = 0$，因为这可以在有限域的 étale 上同调中计算；Bockstein β 是导子；以及 $\beta(-1) = 0$（同样在有限域中计算）。

但是，$\beta'(z^2 \cup -1) \in H^3(X, \mathbf{Z}/2)$ 的像在 $H^3(X, \mathbf{Z}/2) \to H^3(X, \mu_4)$ 下消失，因此其迹必为零，从而完成证明。□

现在考虑由 étale 层的短正合列构成的图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & \mu_4 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x \mapsto x^2} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

这表明 β'：$H^1(\mathbf{Z}/2) \to H^2(\mathbf{Z}/2)$可通过连接映射 $H^1(\mathbb{G}_m)/2 \to H^2(\mathbf{Z}/2)$分解。因此，$\beta'(x)$ 给出了与 x 相关联的线丛 $\mathcal{L}_x \in \mathrm{Pic}(X)[2]$ 在 $\mathrm{Pic}(X)/2 \simeq H^2(X, \mathbf{Z}/2)$ 中的像。具体而言，

$$\mathcal{L}_x = \mathcal{O}(\frac{1}{2}\mathrm{div}\ f),$$

若与 x 相关联的 étale 扩张是通过添加亚纯函数 f 的平方根得到的。由于对偶配对 $H^2(X, \mathbf{Z}/2) \times H^1(X, \mathbf{Z}/2) \to \mathbf{Z}/2$在 $H^2(X, \mathbf{Z}/2) \simeq \mathrm{Pic}(X)/2$下对应于类域论的 Artin 配对，我们得到如下结论

> **(*) 事实**：生成元在 X 上的积分可通过如下方式求得：将 $y \in H^1(X, \mathbf{Z}/2)$（类域论将其视为同态 $\mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}/2$）作用于与 x相关联的 2-扭线丛 $\mathcal{L}_x$。

这种描述（并非显而易见地）关于 x，y 是对称的，因为 $x^2 y = xy^2$ 位于 Q_8的上同调之内。

˜D.5. **在中心点处计算 L-函数**。设 X，X，α 如§D.3所述。相应的 Q_8 扩张给出 ρ：$\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$，并且我们有

$$L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}}) = L(\tilde{X}, \alpha, \frac{1}{\sqrt{q}})$$

由于 Artin形式主义：ρ 由 α诱导而来。这里我们将 α 视为一个特征 α：$\mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{C}^\times$，通过嵌入 $m + 4\mathbf{Z} \mapsto i^m$ 将 $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ 嵌入 $\mathbf{C}^\times$。右侧的 L-函数可通过其狄利克雷级数计算：

$$L(\tilde{X}, \alpha, \frac{1}{\sqrt{q}}) = \sum_{D \geq 0} \alpha(D) q^{-\deg D/2}.$$

˜右侧的求和遍历曲线 X上的有效 k-有理除子 D。该级数并不收敛；但是，只要 α 在 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 上的限制是平凡的，它就会按一种显然的求和顺序收敛，即按次数求和：记

$$L_k = \sum_{\deg(D)=k} \alpha(D) \overset{(i)}{=} \sum_{\mathcal{L}\in \mathrm{Pic}^k} \frac{h^0(\mathcal{L})-1}{q-1}\alpha(\mathcal{L}) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{q-1}\sum_{\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}^k} h^0(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L}).$$

其中，在步骤 (i) 中，我们对线丛求和，并注意到每个线丛都会产生一个大小为 $\frac{h^0-1}{q-1}$ 的因子线性空间——我们用 $h^0(\mathcal{L})$ 表示截面的数量，即 $q^{\dim \Gamma(\mathcal{L})}$ ——而在步骤 (ii) 中，我们注意到 α 在 Pic^0 上的非平凡性意味着 $\sum_{L\in\mathrm{Pic}^k} \alpha(L)$ 消失。现在我们有

$$\sum_{\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}^k} \alpha(\mathcal{K}-\mathcal{L}) = \alpha(\mathcal{K}) \sum_{\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}^k} \alpha(\mathcal{L})$$

因为 $-\alpha = \sigma^*\alpha$ 使我们可以无妨地对 α 取逆。特别地，黎曼-罗赫定理蕴含 $q^{-k/2}L_k$ 在反转 $k \leftrightarrow (2g-2)-k$ 下具有对称性，符号为 $\alpha(\mathcal{K})$，其中 $\mathcal{K}$ 是典范丛。因此我们有

$$L(X,\rho,\frac{1}{\sqrt{q}}) = \sum_{k=0}^{2g-2} q^{-k/2}L_k,$$

并且正如刚才所讨论的，我们可以利用对称性将求和范围限制为 $0 \le k \le g-1$。

D.6. **超椭圆曲线**。在我们的例子中，我们从一条亏格 2 超椭圆曲线开始，它是下列曲线的非奇异模型

$$X : y^2 = xQ(x)$$

其中 $Q \in k[x]$ 是一个没有重根且满足 $Q(0) \neq 0$ 的四次多项式。这条曲线在 ∞ 处有一个点，并且有一个由亏格 3 曲线给出的 étale 二重覆盖

$$\tilde{X} : w^2 = Q(t^2)$$

借助映射 π：$(w,\ t) \mapsto (x=t^2,\ y=wt)$：$\pi$ 唯一可能的分歧点位于 $t=0$ 或 ∞ 处的点，即 π 上方对应于 $(0,\ 0) \in X$ 或 $\infty \in X$ 的点；但在这两种情形下，π 的纤维中都有两个点，因此没有分歧。

˜注意，X/X 的对合由 σ 给出：$(w,\ t) \mapsto (-w,\ -t)$，而超椭圆对合提升为 X 的超椭圆对合 $(w,\ t) \mapsto (-w,\ t)$。

为在 MAGMA 中实现这一点，我们利用以下事实：若 $f(x,z)$ 是一个无重根的二元 $2k$ 次形式，则方程

$$y^2 = f(x,z)$$

在 加权射影空间中，其中 y 的权重为 k，而 x,z 的权重为 1，它定义了曲线 $y^2 = f(x,1)$ 的射影光滑模型。以下是一些与实现相关的设置补充说明。

- 我们要求 $Q(0)$ 在 k 中是非平方的。这样一来，$(0,0) \in X$ 在 $\tilde{X}$ 中便是非分裂的。令 $D_0 := (0,\sqrt{Q(0)}) + (0,\overline{-\sqrt{Q(0)}})$ 表示其到 $\tilde{X}$ 的拉回。
- 对于 α：$\mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}/4$，我们始终假设它在 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 上是满射，因此可以通过验证 $\sigma^*\alpha = -\alpha$ *and* $\alpha(D_0) = 2+4\mathbf{Z}$，来确保满足上述关于 α 的条件 (D.1)。

注意，对于任意其他点 $P \in X(k)$，我们有一个线性等价关系 $P + P \sim D_0$；当 $P \mapsto P$ 是超椭圆对合时，因此我们得到

$$\alpha(P) + \alpha(\bar{P}) = 2 + 4\mathbf{Z}. \tag{D.4}$$

一般而言，一个可容许的 α 会产生若干其他对象：我们可以将 α取负（这不会改变 Q_8 域，只会改变自同构群与Q_8的识别）；我们可以用次数同态 $D \mapsto 2\deg(D)$进行扭曲（相当于通过中心扭曲到 Q_8 的同态），并通过超椭圆对合拉回（相当于在 Q_8 扩张上进行相同操作）。

- 曲线X 是由曲线 X 通过向其亚纯函数域添加 $\sqrt{x}$ 得到的。特别地，相应的 2- 扭子因子类为 $(0)–(\infty)$。根据 §D.4 的讨论，配对

$$\langle [\tilde{X}], \text{generator of } H^3(Q_8, \mathbf{Z}/2) \rangle \tag{D.5}$$

由 $0 - \infty$ 在特征 $\mathbf{y}$ 下的像给出：$\mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}/2$，它对应于元素 $y \in H^1(Q_8,\mathbf{Z}/2)$。这个 $\mathbf{y}$ 类给出了包含在 X/X 的伽罗瓦闭包中的另外两个二次覆盖 Y/X 中的任意一个（由于其为四元数扩张，其中包含唯一的双二次扩张 $X(\sqrt{x}, \sqrt{f})$）。因此，(D.5) 为零，当且仅当 $(0) – (\infty)$ 属于刻画该双二次扩张的同态 $\mathrm{Pic}(X) \to (\mathbf{Z}/2)^2$ 的核。根据类域论，这个核就是沿 $\pi : X \to X$ 的范数，即映射 $\alpha^2 : \mathrm{Pic}(\tilde{X}) \to 2\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ 的核；换言之，(D.5) 为零，当且仅当

$$(0) - (\infty) \in \pi_* \left[\ker(\alpha^2) \right].$$

- 在我们的情形中，中心 L-值简单地由 $L(X, \rho, \frac{1}{\sqrt{q}}) = 2 + q^{-1}L_2$, 给出，或者等价地

$$qL(\frac{1}{2}, \rho) = \left(2q + \sum_{\deg(D)=2} \alpha(L) \right). \tag{D.6}$$

我们来解释原因。首先，$\mathcal{K}$ 具有 $D + \sigma(D)$的形式，因此 α 在其上是平凡的，所以 §D.5 的讨论将所需的 L值表示为 $2 + \frac{2L_1}{\sqrt{q}} + q^{-1}L_2$。但事实上 $L_1 = 0$：利用 σ 对次数为一的因子的作用以及 $-\alpha = \sigma^* \tilde{\alpha}$，可知 L_1 是实数；利用超椭圆对合对 X 的次数为一的因子的作用以及 (D.4)，可推出 $L_1 \in i\mathbf{R}$。

D.7. 示例与结论。 在我们计算的所有示例中，$qL(\frac{1}{2})$ 是否为平方这一问题（按 (D.6) 计算）与配对(D.5)的消失相吻合，也就是说，在我们测试的所有情形中，猜想都成立。非消失的例子颇为少见——通常单条曲线就能提供许多例子，但这类曲线很难找到。在我们检验的每一种特征下，都找到了一些例子。例如，以下每条超椭圆曲线都允许一个四元数局部系统，其 L-值不是平方，且对应的上同调不变量非零。

$$2x^8 + 2x^6z^2 - 4x^4z^4 - 3x^2z^6 - 3z^8 + y^2 = 0 \text{ over } \mathbf{F}_5.$$
$$x^8 + 4x^6z^2 + 2x^4z^4 + 3x^2z^6 + 5z^8 + y^2 = 0 \text{ over } \mathbf{F}_{11}.$$
$$5x^8 + 2x^6z^2 - 6x^4z^4 - 7x^2z^6 + 7z^8 + y^2 = 0 \text{ over } \mathbf{F}_{13}.$$
$$5x^8 + 15x^6z^2 + 15x^4z^4 + 2x^2z^6 + 12z^8 + y^2 = 0 \text{ over } \mathbf{F}_{17}$$

参考文献

[1] étale 覆盖与基本群。数学讲义，第 224 卷。Springer 出版社，柏林—纽约，1971。布瓦马里代数几何研讨班 1960–1961（SGA 1），由亚历山大·格罗滕迪克主持编纂。另收录 M. Raynaud 的两篇报告。 [2] Amina Abdurrahman. 辛 L 函数的平方根与 Reidemeister 扭率。普林斯顿大学博士论文，2022。[3] M. F. Atiyah. 纤维丛的符号。载于《整体分析》（K. Kodaira 纪念文集），第 73–84 页。东京大学出版社，东京，1969。 [4] W. L. Baily, Jr. 与 A. Borel. 有界对称域算术商的紧化。《数学年刊》（第 2 辑），84：442–528，1966。 [5] Hyman Bass. 交换环上的克利福德代数与旋量范数。《美国数学杂志》，96 206，1974 156：–。[6] Werner Bauer. 关于特征 $p > 0$下函数域上阿贝尔簇的 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想。《数学发明》，108(2)：263–287，1992。[7] David Ben-Zvi、Yiannis Sakellaridis 与 Akshay Venkatesh. 相对朗兰兹纲领中的对偶。预印本。 [8] José Bertin 与 Matthieu Romagny. Hurwitz 层。《法国数学会回忆录》（新辑），(125-126)：219，2011。 [9] Armand Borel. 算术群的稳定实上同调。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），7：235–272（1975），1974。[10] James F. Davis 与 R. James Milgram. 半特征、配边与自由群作用。《美国数学会汇刊》，312(1)：55–83，1989。[11] P. Deligne. L函数的函数方程常数。载于《单变量模函数 II》（安特卫普大学国际暑期学校会议录，安特卫普，1972），第 501–597 页。数学讲义，第 349 卷，1973。[12] P. Deligne. étale 上同调，《数学讲义》第 569 卷。Springer 出版社，柏林，1977。布瓦马里代数几何研讨班 SGA $4\frac{1}{2}$。 [13] P. Deligne 与 D. Mumford. 给定亏格的曲线空间的不可约性。《高等科学研究所数学出版物》，(36)：75–109，1969。[14] Pierre Deligne. 正交表示的 Artin L 函数的函数方程的局部常数。《数学发明》，35：299–316，1976。 [15] Pierre Deligne. 魏尔猜想。II。《高等科学研究所数学出版物》，(52)：137–252，1980。[16] Pierre Deligne. 魏尔猜想。II。《高等科学研究所数学出版物》，(52)：137–252，1980。[17] Pierre Deligne 与 Georgios Pappas. 判别式的整除特征下 Hilbert 模空间的奇点。《组合数学》，90(1)：59–79，1994。[18]Nathan M. Dunfield 与 William P. Thurston. 随机三维流形的有限覆盖。《数学发明》，166(3)：457–521，2006。[19] Eric M. Friedlander. 有限域上经典群的同调稳定性。载于《代数 K-理论》（会议录，西北大学，埃文斯顿，伊利诺伊州，1976 年 551，1976 290 302），第 – 页。数学讲义，第 . 卷。[20] Mark Goresky 与 Robert MacPherson. 分层莫尔斯理论，第 14 卷，数学及其边界领域成果（第 3 辑）*[*数学及相关领域成果（第 3 辑）*]*。Springer 出版社，柏林，1988。[21] 亚历山大·格罗滕迪克. 凝聚层的局部上同调与局部及整体 Lefschetz 定理（SGA 2），《数学文献》（巴黎）第 4 卷 *[*数学文献（巴黎）*]*。法国数学会，巴黎，2005。布瓦马里代数几何研讨班，1962 年，另收录 Michèle Raynaud 的一篇报告。 [附有 Michèle Raynaud 的一篇报告], 附 Yves Laszlo 的序言并由其编辑，1968 年法文原版的修订重印本。 [22] Robert M. Guralnick 与 Pham Huu Tiep. 小张量幂的分解与 Larsen 猜想。《表示论》，9：138–208，2005。[23] Friedrich Hirzebruch. 关于 Steenrod 约化幂、惯性指数与 Todd 属。《美国国家科学院院刊》，39：951–956，1953。[24] Craig Huneke 与 Irena Swanson. 理想、环与模的整闭包，《伦敦数学会数学讲义丛书》第 336 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2006。 [25] Kevin Hutchinson 与 Liqun Tao. 域的特殊线性群的三阶同调。《纯粹与应用代数杂志》，213(9)：1665–1680，2009。[26] Nathan Jacobson. 线性变换的完全可约李代数。《美国数学会会刊》，2：105–113，1951。

[27] Jean-Pierre Jouanolou。《贝尔蒂尼定理及其应用》，数学进展第 42 卷。Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1983 年。[28] Nicholas M. Katz。 L函数与单值化：关于 Weil II 的四场讲座。《数学进展》，160(1):81–132，2001 年。[29] Minhyong Kim。算术 Chern-Simons 理论 I。载于《伽罗瓦覆盖、Grothendieck-Teichmüller 理论与儿童画》，Springer 数学与统计学会议论文集第 330 卷，第 155–180 页。Springer，查姆， [2020] ©2020。[30] Finn Faye Knudsen 和 David Mumford。稳定曲线模空间的射影性。I.“det”和“除子”的预备知识。《斯堪的纳维亚数学杂志》，39(1):19–55，1976 年。[31] Stephen S. Kudla。对偶约化对的元辛覆盖的分裂。《以色列数学杂志》，87 401，1994 1 3 361(-): – 。[32] Kai-Wen Lan。PEL 型志村簇的算术紧化，伦敦数学学会专著系列第 36 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2013 年。[33] M. Larsen。相容系统的伽罗瓦作用的极大性。《杜克数学杂志》，80(3):601–630，1995 年。[34] Yves Laszlo 和 Martin Olsson。Artin 叠上层的六种运算。II. 阿代尔系数。《高等科学研究所数学出版物》，(107):169–210，2008 年。[35] Ronnie Lee 和 R. H. Szczarba。群 $K_3(Z)$是一个 48 阶循环群。《数学年刊》(2)，104(1):31–60，1976 年。[36] Charles Livingston。稳定曲面对称性。《密歇根数学杂志》，32(2):249–255，1985 年。[37] A. S. Merkurjev 和 A. A. Suslin。域上的群

$$K_3 \qquad 54\ 3\ \ 522\ \ 545,\ 。$$

1990

《苏联科学院消息·数学辑》，( ): – 。[38] Werner Meyer。局部系数系统和纤维丛的符号。《波恩数学论文》，(53):viii+59，1972 年。[39] J. S. Milne。算术对偶定理。BookSurge, LLC，查尔斯顿，南卡罗来纳州，第二版，2006 年。[40] O. T. O’Meara。二次型导论。数学科学基础丛书，第 117 卷。Springer 出版社，纽约-海德堡，1971 年。第二次印刷，已订正。[41] Richard Pink。Drinfeld 模的 Mumford-Tate 猜想。《数学科学研究所出版物》，33(3):393–425，1997 年。[42] Bjorn Poonen。有限域上的贝尔蒂尼定理。《数学年刊》(2)，160(3):1099–1127，2004 年。[43] Bjorn Poonen 和 Michael Stoll。极化阿贝尔簇上的 Cassels-Tate 配对。《数学年刊》(2)，150(3):1109–1149，1999 年。[44] Daniel Quillen。群上同调。载于《国际数学家大会会议录》（尼斯，1970 年），第 2 卷，第 47–51 页。Gauthier-Villars，巴黎，1971 年。[45] A. A. Ranicki。代数 L理论与拓扑流形，剑桥数学丛书第 102 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1992 年。[46] Andrew Ranicki。手术的代数理论。I. 基础。《伦敦数学会会刊》(3)，40(1):87–192，1980 年。[47] Andrew Ranicki。手术的代数理论。II. 拓扑学应用。《伦敦数学会会刊》(3)，40(2):193–283，1980 年。[48] John Rognes。带基点空间的二素数代数 K理论。《拓扑学》，41(5):873–926，2002 年。[49] Will Sawin 和 Melanie Wood。三维流形群的有限商。arXiv 预印本。[50] Jean-Pierre Serre。关于 $N_X(p)$的讲座，Chapman & Hall/CRC 数学研究札记第 11 卷。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2012 年。[51] Goro Shimura。代数数域与辛不连续群。《数学年刊》(2)，86:503–592，1967 年。[52] Christoph Sorger。Cohen-Macaulay 概形上层 ω-二次型的欧拉-庞加莱半特征。《法国数学会通报》，122(2):225–233，1994 年。[53] C. Soulé。数域整数环的 K 理论与 étale 上同调。《数学发明》，55(3):251–295，1979 年 10 月。[54] Stacks 项目作者。Stacks 项目。https://stacks.math.columbia.edu，2022 年。[55] Michael R. Stein，编。代数 K理论，《数学讲义》第 551 卷。Springer 出版社，柏林-纽约，1976 年。[56] Robert Steinberg。单群的生成元。《加拿大数学杂志》，14:277–283，1962 年。[57] Robert Steinberg。代数群的生成元、关系与覆盖。II。《代数杂志》，71 543，1981 2 527( ): – 。[58] A. A. Suslin。域的 K_3 与 Bloch 群。第 183 卷，第 180–199、229 页。1990 年。译文见《斯捷克洛夫数学研究所论文集》1991 年第 4 期，第 217–239 页，伽罗瓦理论、环、代数群及其应用（俄文）。[59] John Tate。 K_2 与伽罗瓦上同调之间的关系。《数学发明》，36:257–274，1976 年。

[60] Réné Thom。可微流形的一些整体性质。《瑞士数学评论》，28:17–86，1954 年。[61] Burt Totaro。分类空间的肖环。载于代数 K理论（西雅图，华盛顿州，*1997* 年），《纯粹数学研讨会论文集》第 67 卷，第 249–281 页。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1999 年。[62] Kęstutis ˇ Cesnaviˇcius。取值于正规整环的局部因子。《国际数论杂志》，12(1):249–272，2016 年。[63] Charles Weibel。素数 2 处的 étale 陈类。载于代数 K理论与代数拓扑（路易斯湖，艾伯塔省，*1991* 年），《北约高级科学研究所系列 C：数学与物理科学》第 407 卷，第 249–286 页。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1993 年。[64] 安德烈·韦伊。关于某些酉算子群。《数学学报》，111:143–211，1964 年。[65] Joseph L. Yucas。具有指定迹／指定常数项的有限域上的不可约多项式。《有限域及其应用》，12(2):211–221，2006 年。[66] Hans Zassenhaus。关于旋量范数。《数学档案》，13:434–451，1962 年。