arXiv:2303.13444v2 [math.AT] 2 Jan 2024

# 狄拉克几何 II：相干上同调

LARS HESSELHOLT 和 Piotr Pstrągowski

摘要。狄拉克环是 $\mathbb{Z}$ 分次阿贝尔群的对称幺半范畴中的交换代数，其对称同构采用 Koszul 符号。在本文的前篇中，我们发展了狄拉克环的交换代数，并定义了狄拉克概形范畴。本文将该范畴嵌入更大的 $\infty$ 狄拉克堆栈范畴中；该范畴还包含形式狄拉克概形。我们进一步发展狄拉克堆栈的相干上同调。我们将一般理论应用于稳定同伦论，并利用 Quillen 复配边理论和 Milnor 定理（关于对偶 Steenrod 代数），通过点函子刻画与 MU 和 $\mathbb{F}_p$ 对应的狄拉克堆栈。最后，我们在附录中发展了一套初步的可及预层理论。

目录

1. 引言 2 2. 狄拉克叠 12 2.1. 平坦拓扑 12 2.2. 作为叠的狄拉克概形 19 2.3. 几何映射 23 3. 相干上同调 30 3.1. 准凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 30 3.2. 典范 $t$-结构 35 3.3. 准凝聚 $\mathcal{O}_X$-模的下降 36 3.4. 几何叠上的准凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 42 3.5. 仿射映射与向量丛 45 4. 形式叠与形式群 49 4.1. 形式完备化与准凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 49 4.2. 形式超平面 53 4.3. 带基点形式超平面的自同构与下降 60 4.4. 形式群 65 5. 稳定同伦论 69 5.1. 下降谱序列 69

两位作者均获丹麦国家研究基金会通过哥本哈根几何与拓扑中心（DNRF151）提供的支持。Lars Hesselholt 获得了日本学术振兴会科学研究费助成金（项目编号 21K03161）以及高等研究院数学学院的资助；Piotr Pstrągowski 获得了美国国家科学基金会项目 #DMS-1926686 和德国研究联合会项目 #EXC-2047/1 – 390685813 的支持。

5.2. Quillen 定理 775.3. Milnor 定理 79附录 A. 可及预层 83附录 B. 层的有效满射 92参考文献 95

## 1. 引言

无论是什么赋予 anima 活力、为高阶代数注入生机，这种力量都会在谱中的交换代数的同伦群上狄拉克环的结构中留下痕迹。狄拉克几何以狄拉克环为基础构建，就像代数几何以交换环为基础构建一样。在本文的前篇中，我们发展了狄拉克环的交换代数，并定义了狄拉克概形范畴。本文首先将这一范畴嵌入更大的$\infty$狄拉克栈范畴中，该范畴也包含形式狄拉克概形。接下来，我们发展狄拉克栈的相干上同调，这相当于一个函子：它为狄拉克栈 $X$ 赋予一个可呈示的对称幺半稳定 $\infty$范畴 QCoh($X$)，其中的对象是拟凝聚 $\mathcal{O}_X$模；同时还赋予一个对称幺半子范畴 $\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0} \subset \mathrm{QCoh}(X)$，它是某个 $t$结构的连通部分。作为将一般理论应用于稳定同伦论的例子，我们利用 Quillen 复配边理论和 Milnor 定理（关于对偶 Steenrod 代数）通过点函子识别与 MU 和 $\mathbb{F}_p$ 相对应的狄拉克栈。最后，在附录中，我们发展了一个初步理论，研究余可及 $\infty$范畴上的 anima 可及预层。

为了发展狄拉克叠及其相干上同调理论，我们仿照 Lurie 的做法，见 [23]。范畴Aff （仿射狄拉克概形的范畴）是范畴$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ab})$ （狄拉克环的范畴）的对偶。狄拉克环范畴 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ab})$ 和 anima 的 $\infty$-范畴 $\mathcal{S}$ 都是可呈示的，我们将狄拉克预层的 $\infty$-范畴定义为 $\infty$Affine 上 anima 的可及预层的 Aff,

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{A}}(\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ab}), \mathcal{S}).$$

我们在附录 A 中证明，该 $\infty$-范畴具有优良的范畴论性质，并且有多种等价的描述。若 $\kappa$ 是一个小正则基数，则令 $\mathrm{Aff}_\kappa \subset \mathrm{Aff}$ 为由基数为 $< \kappa$的仿射狄拉克概形所张成的全子范畴。由于它本质小，故 anima 在 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\kappa)$ 上的预层$\mathrm{Aff}_\kappa$ 可呈示，并且我们证明

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \simeq \varinjlim_\kappa \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\kappa).$$

由此可知， $\infty$-范畴 $\mathcal{P}$(Aff) 存在所有小余极限和极限，且二者均逐点计算。我们还证明，Yoneda 嵌入限制为一个全忠实函子

$$\mathrm{Aff} \xrightarrow{h} \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$$

并且该函子将目标展示为源的余完备化。

Aff 上的平坦拓扑是这样的 Grothendieck 拓扑：筛 $j\colon U \to h(S)$ 是覆盖筛，当且仅当存在一个有限映射族 $(T_i \to S)_{i\in I}$，使得诱导映射 $T \simeq \coprod_{i\in I} T_i \to S$ 忠实平坦，并且每个 $h(T_i) \to h(S)$ 都经由 $j$ 分解。

**定义 1.1.** 狄拉克叠的 $\infty$-范畴是全子范畴

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}) \subset \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$$

由平坦拓扑的层所张成。

乍看之下，不太清楚是否存在一个“层化”函子，它是将层典范包含到预层中的函子的左伴。尽管如此，这确实成立，这是 Waterhouse 定理的一项推论 [35, 定理 5。1], 这一定理或许没有得到应有的广泛认可。它表明平坦拓扑具有良好的性质。性质不佳的是 $\infty$所有预层所构成的 -范畴（定义在 Aff 上）；一旦我们只考虑可及预层，平坦拓扑据称存在的问题便会消失。在狄拉克的背景下，Waterhouse 定理表述如下，而其证明的关键要素是忠实平坦性的方程判据的狄拉克类比，我们已在 [12,补遗 3。9] 中证明了这一点。

**定理 1.2** (Waterhouse 定理)。 设 $\kappa < \kappa'$ 为小正则基数。在此情形下，沿典范包含的左 *Kan* 延拓

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\kappa) \xrightarrow{i_!} \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_{\kappa'})$$

关于平坦拓扑保持层。

正如我们已经提到的，定理 1.2 的一个重要推论是存在一个左正合的“层化”函子

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \underset{\iota}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}),$$

它是典范包含函子的左伴随。事实上，若将 Aff 替换为本质小的 $\mathrm{Aff}_\kappa$，则 Lurie 已在 [20, 命题 6.2.2。7] 中证明，左正合层化函子存在，而 定理 1.2 和 [17, 标签 02FV] 表明这些左伴随函子可以汇集起来，得到所述的左伴随函子。

现在我们可以由 [20, 定理 6.1.0。6] 推出， $\infty$-范畴的狄拉克叠满足 $\infty$-范畴吉罗公理，但它并非可呈示的。

**定理 1.3** (狄拉克叠的吉劳公理)。 $\infty$-范畴 Shv(Aff) 的狄拉克叠具有以下性质：

(i) 它是完备且余完备的，并且由 *Yoneda* 嵌入 $h$: Aff $\to$ Shv(Aff)的本质像在小余极限下生成；该本质像由 $\omega_1$-紧对象组成，且是余可及的。(ii) Shv(Aff) 中的余极限是万有的。(iii) Shv(Aff)中的余积彼此不相交。(iv) Shv(Aff) 中的每个群胚都是有效的。

狄拉克叠的 $\infty$-范畴足够接近一个 $\infty$-topos，因此保留了 $\infty$-topoi 的重要性质：逆变函子

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$$

将切片 $\infty$-范畴 Shv(Aff) 指派给 $X$ 的函子 $/X$ ，会把狄拉克叠的余极限映射为 $\infty$-范畴的极限。本文中所有下降陈述都源于此结论。

在典型情形下，我们希望证明，对全子范畴而言，平坦下降成立

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{P}_{/X} \subset \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$$

由具有某种性质 $P$ 的映射 $f\colon Y \to X$ 所张成。但这可由基本的下降陈述推出，只要我们证明性质 $P$ 对平坦拓扑满足下降，其含义是：对于每个有效满射$f\colon X' \to X$， $\infty$-范畴的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv(Aff)}^{P}_{/X} & \longrightarrow & \mathrm{Shv(Aff)}^{P}_{/X'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Shv(Aff)}_{/X} & \longrightarrow & \mathrm{Shv(Aff)}_{/X'} \end{array}$$

是笛卡尔的。例如，我们定义一个函子，它将狄拉克栈 $X$ 映射到$\infty$-范畴 $\mathrm{FGroup}(X)$，即 $X$ 上的形式群范畴，并利用这一策略证明它沿有效满射下降。

由 Grothendieck 关于分次模的忠实平坦下降可知，这一点我们已在 [12, 定理 1.5], 中证明： Aff 上的平坦拓扑是子典范的。这里，我们证明更一般地，狄拉克概形范畴（我们在[12, 定义 2.29], 中定义）全忠实地嵌入到狄拉克栈的 $\infty$-范畴中。

**定理 1.4** (概形是栈)。 狄拉克概形是狄拉克栈：
(1) 若 $X$ 是狄拉克概形，则函子 $h(X)\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 将仿射概形 $S$ 映射到 $\mathrm{Map}(S, X)$ ，它是可达的，且是平坦拓扑下的层。(2) 由此得到的函子 $h\colon \mathrm{Sch} \to \mathrm{Shv(Aff)}$ 是全忠实的。

这一结果是按照 Toën–Vezzosi [33]和 Lurie [18] 对狄拉克栈的映射所具有的性质 $f\colon Y \to X$ 几何性的定义提供的出发点。非正式地说，几何映射张成包含以下映射的最小全子范畴

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{geom}}_{/X} \subset \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$$

： $f$在 $Y \to X$ 上局部等价于狄拉克概形之间的映射，且该子范畴对具有平坦面映射的群胚的几何实现封闭的映射 $X$。[1] 然而，下面给出的形式化定义见第 2.3 节，要复杂得多，因为几何性和平坦性的概念必须递归地一同定义。几何性这一性质表现良好：它在复合和基变换下保持；它在目标上局部成立；而且 $\mathrm{Shv(Aff)}^{\mathrm{geom}}_{/X}$ 中的映射自动具有几何性。

现在我们来阐述狄拉克栈的相干上同调理论；我们遵循 Lurie [23, 第 6]章展开这一理论。它由以下数据组成：
(Q1) 一个函子 $\mathrm{QCoh}\colon \mathrm{Shv(Aff)}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg(LPr)}$；它将狄拉克叠的映射$f\colon Y \to X$ 赋予一个对称幺半伴随

$$\mathrm{QCoh}(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(Y)$$

在可呈示的对称幺半稳定 $\infty$-范畴之间。

[1]我们回顾一下，在 $\infty$-范畴论中，群胚的几何实现所起的作用，与 1-范畴论中等价关系的商相同；参见 [20, 第 6.1 节2]。

（Q2）对于每个狄拉克栈 $X$，一个对称幺半伴随

$$\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0} \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(X)$$

使得 $i$ 是某个 $t$-结构的连通部分的全忠实包含，并且对于狄拉克叠之间的每个映射 $f\colon Y \to X$，函子 $f^*$ 是右 $t$-正合的，或者等价地，函子 $f_*$ 是左 $t$-正合的。

首先，为了构造函子 (Q1)，我们从如下函子开始：它将仿射狄拉克概形 $S \simeq \mathrm{Spec}(A)$ 映射到可表示的对称幺半范畴

$$\mathrm{QCoh}(S)^{\heartsuit} \simeq \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Ab})$$

由分次 $A$-模构成的范畴。经过动画化，它提升为一个函子，将 $S$ 映射到可表示的对称幺半 $\infty$-范畴

$$\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \simeq \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Ab})^{\mathrm{an}}$$

由动画化分次 $A$-模构成的范畴；进而，经过稳定化，它提升为一个函子，将 $S$ 映射到可表示的对称幺半 $\infty$-范畴

$$\mathrm{QCoh}(S) \simeq \mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Ab})^{\mathrm{an}})$$

由动画化分次 $A$-模中的谱构成。按照 Grothendieck 的做法，我们证明这个函子是 Aff 上平坦拓扑的一个层；这一事实在同伦论中最早由 Hopkins 观察到并加以利用 [14]。这便给出了 (Q1)：

**定理 1.5** (拟凝聚模的忠实平坦下降)。 函子 $\mathrm{QCoh}\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$ 沿 $h\colon \mathrm{Aff} \to \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$ 的右 *Kan* 延拓存在唯一的分解

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{QCoh}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$$

通过层化函子。

要明确说明 $\mathrm{QCoh}(X)$ 的这个定义，若我们选择一个正则基数 $\kappa$，使得 $X \in \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 是 $X_\kappa \in \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\kappa)$ 的左 Kan 延拓，那么

$$\mathrm{QCoh}(X) \simeq \varprojlim_{\eta\colon S \to X} \mathrm{QCoh}(S),$$

其中极限是以 $((\mathrm{Aff}_\kappa)_{/X})^{\mathrm{op}}$ 为指标的，并在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$ 中计算。[2]

其次，为了构造对称幺半伴随 (Q2)，我们证明对于仿射狄拉克概形 $S$，$\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0}$ 按照 [23, 定义 C.1.42]是格罗滕迪克预稳定的。因此，对称幺半伴随

$$\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \underset{\Omega^\infty}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(S)$$

是一个 $t$-结构的连通部分，并且我们通过右 Kan 延拓得到 (Q2)。更具体地说，如果 $X$ 是一个狄拉克栈，那么 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$ 是连通的，当且仅当对于每个满足 $S$ 为仿射的映射 $\eta\colon S \to X$，$\eta^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(S)$ 都是连通的。如果对于每个满足 $S$ 为仿射的映射 $\eta\colon S \to X$，$\eta^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(S)$ 都是余连通的，那么 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$ 也确实是余连通的，但反过来并不成立。特别地，张量单位 $\mathcal{O}_X$ 属于 $t$-结构的心。

[2] The forgetful functors $\mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr}) \to \mathrm{LPr} \to \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ preserve and reflect limits

一般来说，QCoh($X$) 上的 $t$-结构既非左完备也非右完备，而且余连通部分几乎不可能理解。然而，对于几何狄拉克栈（包括狄拉克概形），情况有所改善：

**定理 1.6**(几何栈与 $t$-结构)。 若 $X$ 是一个几何狄拉克栈，那么 $t$-结构在 拟凝聚层($X$) 上是左完备且右完备的，并且余连通部分在滤过余极限下封闭。此外，若 $\eta\colon S \to X$ 是次浸没且 $S$ 仿射，那么 $\mathcal{F} \in$ 拟凝聚层($X$) 是余连通的，当且仅当 $\eta^*(\mathcal{F}) \in$ 拟凝聚层($S$) 也是如此。

我们将 $\pi_i^\heartsuit(\mathcal{F}) \in$ 拟凝聚层$(X)^\heartsuit$ 记作关于典范 $t$-结构的 $i$ 次同伦 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F} \in$ 拟凝聚层($X$)。我们称 $i$ 为“动画”次数，以区别于狄拉克几何固有的“自旋”次数。若 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克栈之间的映射，则 $\mathcal{O}_Y$-模 $\mathcal{G} \in$ 拟凝聚层($Y$)的“正确”相对相干上同调 $\mathcal{O}_X$-模由下式给出

$$R^i f_*(\mathcal{G}) := \pi_{-i}^\heartsuit(f_*(\mathcal{G})).$$

这个函子通常不能计算为由左 $t$-正合函子 $f_*$诱导的阿贝尔范畴间左正合函子 $f_*^\heartsuit$的导出函子。

我们考虑的另一类特殊狄拉克栈是形式狄拉克概形。若 $\eta\colon S \to X$ 是狄拉克概形的闭浸入，且其定义拟凝聚理想 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ 是有限型的，则我们将 $X$ 沿 $S$ 的形式完备化定义为狄拉克栈中的余极限

$$Y \simeq \varinjlim_m S^{(m)} \xrightarrow{j} X$$

由无穷小加厚 $\eta^{(m)}\colon S^{(m)} \to X$构成。映射 $j$ 并非几何的；但若闭浸入 $\eta\colon S \to X$ 是正则的，即在 $X$上局部由正则序列定义，那么它的行为就如同 $X$中 $S$ 的管状邻域的开仿射浸入，正如 Grothendieck 所设想的那样。

**定理 1.7** (形式完备化与粘合)。 设 $X$ 是一个狄拉克概形，且 $\eta\colon S \to X$是一个正则闭浸入。设 $j\colon Y \to X$是 $X$沿 $S$的形式完备化，并设 $i\colon U \simeq X \smallsetminus S \to X$是 $S$的开补的包含。在此情形下，存在一个稳定粘合

$$\mathrm{QCoh}(U) \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{i_* \simeq i_!}}}} \mathrm{QCoh}(X) \underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{j^! \simeq j^*}}}} \mathrm{QCoh}(Y)$$

并且，函子 $j_*$ 是 $t$-正合的。

我们将考虑的形式概形是形式仿射空间，定义如下。若 $S$ 是一个狄拉克概形，且 $\mathcal{E} \in$ QCoh$(S)^\heartsuit$ 是一个有限秩局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模，则与 $\mathcal{E}$ 相关联的仿射空间是仿射映射

$$\mathbb{A}_S(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})) \xrightarrow{p} S,$$

而与 $\mathcal{E}$ 相关联的形式仿射空间是其形式完备化

$$\hat{\mathbb{A}}_S(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})) \xrightarrow{q} S$$

沿着零截面。我们将狄拉克栈的映射 $q\colon Y \to X$ 定义为形式超平面，若它沿着任何来自仿射狄拉克概形的映射 $\eta\colon S \to X$ 的基变换都等价于一个形式仿射空间。此性质在基变换下稳定，

但一般而言，它不能沿有效满射下降，即使 $X$ 是一个狄拉克概形。[3] 然而，如果我们固定一个截面，那么它就可以下降。我们将零截面视为形式仿射空间的基点。

**定义 1.8.** 带基点的狄拉克栈

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \overset{\eta}{\nearrow} & & \overset{q}{\searrow} & \\ X & & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & & X \end{array}$$

若从仿射 Dirac 概形出发，沿任意映射 $\eta\colon S \to X$ 作基变换后等价于带基点的形式仿射空间，则称其为带基点形式超平面。

根据定义，狄拉克栈上的带基点形式超平面的 $\infty$-范畴，是由带基点形式超平面张成的带基点狄拉克栈 $\infty$-范畴的全子范畴

$$\mathrm{Hyp}_*(X) \subset (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_*$$

。我们证明它等价于一个 1-范畴，并且带基点形式超平面这一性质沿狄拉克栈间的有效满射 $f\colon X' \to X$ 下降，即

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hyp}_*(X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hyp}_*(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_* & \xrightarrow{f^*} & (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X'})_* \end{array}$$

是一个 $\infty$-范畴的笛卡尔图表。因此，根据 定理 1.3，带基点形式超平面的 $\infty$-范畴满足沿有效满射的下降：

**定理 1.9** (带基点的形式超平面的平坦下降)。 若 $f\colon X' \to X$ 是狄拉克叠之间的有效满射，则典范映射

$$\mathrm{Hyp}_*(X) \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Hyp}_*(X'^{\times_X [n]}) \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta_{\leq 2}} \mathrm{Hyp}_*(X'^{\times_X [n]})$$

是 $\infty$-范畴之间的等价。

我们回顾一下 [12, 命题 A.1]： 定理 1.9 中的右侧映射是一个等价，这是因为带基点形式超平面的 $\infty$-范畴等价于一个 1-范畴，而且右侧项等价于以下 1-范畴：在 $X'$ 上的带基点形式超平面，沿 $f\colon X' \to X$ 的下降数据。

设 $\mathcal{C}$ 是一个存在有限积的 $\infty$-范畴。按照 Lawvere 的做法，我们令 Lat 表示有限生成自由阿贝尔群范畴，并将$\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 中的阿贝尔群对象所成的 $\infty$-范畴 $\mathrm{Ab}(\mathcal{C})$定义为全子范畴

$$\mathrm{Ab}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}^{\Sigma}(\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$$

该全子范畴由保持有限积的函子构成。

**定义 1.10**。 狄拉克叠 $X$ 上的形式群$\infty$-范畴是 $\infty$-范畴

$$\mathrm{FGroup}(X) \simeq \mathrm{Ab}(\mathrm{Hyp}(X))$$

在 $X$ 上形式超平面 $\infty$-范畴中的阿贝尔群对象。

[3] 反例请参见 [22, 警告 1.1。22]。

该 $\infty$-范畴 $\mathrm{FGroup}(X)$ 等价于一个 1-范畴。若 $\mathcal{G}$ 是定义在 $X$ 上的形式群，则其底层超平面 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ 由零截面$\mathcal{G}(0) \to \mathcal{G}(\mathbb{Z})$指向。因此，根据 定理 1.9，若 $f\colon X' \to X$ 是狄拉克叠之间的有效满射，则典范映射

$$\mathrm{FGroup}(X) \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{FGroup}(X'^{\times_X [n]})$$

是 $\infty$-范畴的一个等价，而目标 $\infty$-范畴等价于由 $f$ 上的下降数据构成的、$X'$ 上形式群的 1-范畴：$X' \to X$。此外，若 $\mathcal{G}$ 是 $X$ 上的形式群，我们将其李代数定义为向量丛

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \simeq V_X(\mathcal{N}_{X/Y}) \in \mathrm{Vect}(X)$$

它与零截面处的余法层相关联。由于 $\mathcal{G}$ 是阿贝尔的，该向量丛上的李括号将为零，因此我们不费心对其进行定义。

最后，我们给出狄拉克几何在代数拓扑中的若干应用，并按照 Liu–Zheng $\infty$ 的一般理论，将其编码为 anima 的 [16] - 范畴上的六函子形式体系；参见 Mann [24, 附录 A。5]。该六函子形式体系的定义，考虑到了 anima 是“离散”对象而非“连续”对象这一事实。因此，我们规定 anima 的每个映射$f\colon T \to S$ 都是局部同构，并且 anima 的映射 $f\colon T \to S$ 是适当的，当且仅当其纤维等价于有限集（包括空集）。根据 [24, 命题 A.5，10],这确定了一个六函子形式体系，它在 $\mathcal{S}$ 上为一个 anima $S$赋予函子 $\infty$-范畴

$$\mathrm{Sp}^S \simeq \mathrm{Fun}(S, \mathrm{Sp})$$

并且将 anima 的映射 $f\colon T \to S$ 对应到伴随函子

$$\mathrm{Sp}^T \underset{f_*}{\overset{f_! \quad f^! \simeq f^* \quad}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sp}^S,$$

其中，$f^! \simeq f^*$是沿 $f$的限制，而 $f_!$和 $f_*$分别是沿 $f$的左 Kan 延拓和右 Kan 延拓。

给定谱中的交换代数 $E$ 和 anima 中的群 $G$，我们应用一般理论来构造一个形式狄拉克概形

$$Y \simeq Y_{E,G} \xrightarrow{\ q\ } S \simeq S_E$$

它定义在 $S \simeq$谱$(R)$上，且带有 $R \simeq \pi_*(E)$；我们将考察 $q$ 为形式超平面的情形。通过改变 $G$，我们将得到形式群；通过改变 $E$，我们将得到定义在几何狄拉克栈上的形式群，并通过展示其点函子来刻画它们。

为此，我们回顾 [19, 定理 5.6.2.10]：每个 anima 中的群$G$ 都是某个带基点的 1-连通 anima 的环路群 $\Omega BG$

$$1 \xrightarrow{\ s\ } BG,$$

并且我们将一般理论应用于唯一映射

$$BG \xrightarrow{\ p\ } 1.$$

$\infty$-范畴 $\mathrm{Sp}^{BG}$ 是带有 $G$作用的谱的 $\infty$-范畴，而 $p_!$ 和 $p_*$ 分别是这样的函子：它们将带有 $G$作用的谱 $Y$映射为其同伦轨道谱$p_!(Y) \simeq Y_{hG}$ 和同伦不动点谱 $p_*(Y) \simeq Y^{hG}$；而 $p^*$ 是将谱 $X$ 映射为带有平凡$G$作用的谱 $Y \simeq p^*(X)$ 的函子。我们只考虑带有平凡 $G$作用的谱。

给定一个谱中的交换代数 $E$，谱

$$p_*p^*(E) \simeq \mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ BG, E)$$

提升为谱中的交换代数，而单位映射

$$E \longrightarrow p_*p^*(E) \longrightarrow p_*s_*s^*p^*(E) \simeq E$$

提升为谱中交换代数之间的映射。因此，若 $R \simeq \pi_*(E)$ 和$A \simeq \pi_*(p_*p^*(E))$ 分别是同伦群的狄拉克环，那么这些映射赋予 $A$ 增广 $R$-代数结构。现在我们定义

$$Y \simeq Y_{E,G} \simeq \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{q} S \simeq S_E \simeq \mathrm{Spec}(R)$$

为沿着由增广

$$S \xrightarrow{\eta} X$$

由增广定义。

首先，我们令 $G$为 $L \in \mathrm{Lat}$ 的庞特里亚金对偶 $L \simeq \mathrm{Hom}(L, U(1))$。若 $E$是复定向的，则形式概形

$$Y \simeq Y_{E,\widehat{L}} \xrightarrow{q} S \simeq S_E$$

是一个形式超平面；随着 $L$ 变化，这定义了与之相关的 Quillen 形式群

$$\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{G}^Q_E} \mathrm{Hyp}(S)$$

。此外，通过考虑 $E$的 Postnikov 过滤，我们得到线丛的一个典范同构

$$\mathbb{A}_S(1) \xrightarrow{\phi^Q_E} \mathrm{Lie}(\mathcal{G}^Q_E)$$

，它从 $S$ 上的自旋 1 仿射直线映至 Quillen 形式群的李代数。现在令 $E$ 遍历表示复配边的谱中的交换代数 MU 的各张量幂。如此，我们得到一个单纯形式群

$$\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{FGroup}$$

，它将 $[n]$ 映至与 $\mathrm{MU}^{\otimes[n]}$相关的 Quillen 形式群。其几何实现是几何狄拉克栈上的一个形式群 $\mathcal{G}^Q$

$$X^Q \simeq \varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} S_{\mathrm{MU}^{\otimes[n]}}$$

配备了其李代数的平凡化 $\phi^Q$。我们证明，Quillen 复配边理论 [31, 定理 2], 蕴含且等价于如下命题：$(\mathcal{G}^Q,\ \phi^Q)$ 是通用的1维自旋1 形式群，并配备了其李代数的平凡化。

**定理 1.11** (Quillen 定理)。 设 $T$ 是一个狄拉克栈。将$f\colon T \to X^Q$映射为对$(f^*\mathcal{G}^Q, f^*\phi^Q)$的函子，是从 $X^Q(T)$到形式群 $\mathcal{G}$ 在 $T$ 上以及同构

$$\mathbb{A}_T(1) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$$

线丛的 $T$ 自旋-1仿射直线上。

我们还证明，若 $T$是一个仿射狄拉克概形，且 $(\mathcal{G}, \phi) \in X^Q(T)$，则平凡化 $\phi$ 提升为形式群 $\mathcal{G}$上的自旋 1 全局坐标。

其次，令 $p$ 为一个奇素数，并令 $G$ 为 $p$-挠子群

$$\widehat{L}[p] \simeq \mathrm{Hom}(L, C_p) \xrightarrow{i} \widehat{L} \simeq \mathrm{Hom}(L, U(1))$$

$L \in \mathrm{Lat}$ 的庞特里亚金对偶的。若 $k \simeq \mathbb{F}_p$，则对谱 $E$中的每个交换 $k$-代数，

$$Y \simeq Y_{E,\widehat{L}[p]} \xrightarrow{q} S \simeq S_E$$

是一个形式超平面；随着 $L$ 变化，这定义了 Milnor 形式群

$$\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{G}_E^M} \mathrm{Hyp}(S)$$

与 $E$相关。典范包含 $i$ 诱导出一个到形式群的映射

$$\mathcal{G}_E^M \longrightarrow \mathcal{G}_E^Q$$

到 Quillen 形式群。它是满射，其核

$$\mathrm{Fil}^1\, \mathcal{G}_E^M \longrightarrow \mathrm{Fil}^0\, \mathcal{G}_E^M \simeq \mathcal{G}_E^M$$

又是 $S$上的一个形式群。这个滤过赋予李代数 $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_E^M)$一个分次，我们称之为“荷”分次。[4] 此外，由 $E$的 Postnikov 过滤，我们得到 $S$上的分次向量丛之间的典范同构，

$$\mathbb{A}_S(e, \gamma) \xrightarrow{\phi_E^M} \mathrm{gr}\, \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_E^M),$$

其中 $e$ 具有自旋 $1/2$ 和荷 1，而 $\gamma$ 具有自旋 1 和荷 0。

令 $E$ 遍历 $k$的张量幂，我们得到一个单纯滤过形式群，它将 $[n] \in \Delta^{\mathrm{op}}$ 映到与 $k^{\otimes[n]}$相关的 Milnor 形式群，其滤过由到 Quillen 形式群的映射定义。其几何实现是几何狄拉克栈上的滤过形式群 $\mathrm{Fil}\, \mathcal{G}^M$

$$X^M \simeq \varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} S_{k^{\otimes[n]}}$$

配备其分次李代数的平凡化 $\phi^M$。我们证明，Milnor 定理 [29] 关于对偶 Steenrod 代数结构的结论，与以下陈述互为推论。

**定理 1.12** (Milnor 定理)。 设 $S \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 满足 $p$ 为奇数，并设 $T$ 是一个$S$-狄拉克栈。对于一个 $S$-狄拉克栈的映射 $f\colon T \to X^M$，赋予其一对 $(f^*\,\mathrm{Fil}\, \mathcal{G}^M, f^*\phi^M)$ 的函子是从 $X^M(T)$ 到由以下对象组成的群胚的一个等价

[4]这个分次编码了 $BC_p$ 上残余的 $U(1) \simeq U(1)/C_p$ 作用。

$(\mathrm{Fil}\ \mathcal{G}, \phi)$：一个滤过形式群 $\mathrm{Fil}\ \mathcal{G}$ 在 $T$ 上，局部同构于一个滤过加法形式群；以及 $T$ 上分次向量丛的一个同构，

$$\mathbb{A}_T(e,\gamma) \xrightarrow{\phi} \mathrm{gr}\,\mathrm{Lie}(\mathcal{G}),$$

其中 $e$ 的自旋为 $1/2$，荷为 1；而 $\gamma$ 的自旋为 1，荷为 0。

由于 $k \simeq \mathbb{F}_p$ 是一个素域，面映射 $d_0$、$d_1$: $S_{k^{\otimes[1]}} \to S_{k^{\otimes[0]}}$ 相等，因此群胚狄拉克概形 $S_{k^{\otimes[-]}}$ 实际上是一个群狄拉克概形 $G^M$，并且

$$X^M \simeq BG^M$$

是其分类狄拉克栈。对偶 Steenrod 代数是与 $G^M$对应的狄拉克$k$-向量空间中的霍普夫代数。

最后，我们用狄拉克几何的术语表述下降方法；这一方法可追溯至 Adams [1], 。给定一个谱中交换代数的映射 $\phi$: $k \to E$，我们可以构造狄拉克栈

$$X \simeq \varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{Spec}(\pi_*(E^{\otimes_k[n]})).$$

如果单纯狄拉克概形中的面映射是平坦的，那么这个狄拉克栈及其相干上同调尤其有用；在这种情况下，我们构造一个函子

$$\mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit}$$

将谱中的一个 $k$-模 $V$映射为拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}(V)$。此函子导出 $V$的 Adams 滤过，相应的谱序列称为 Adams 谱序列或下降谱序列

$$E_{i,j}^2 = H^{-i}(X, \mathcal{F}(V)(j/2)) \Rightarrow \pi_{i+j}(\widehat{V}).$$

它始于 $X$ 的相干上同调，其系数为 $\mathcal{F}(V)$的半整数 Serre 扭曲，并且有条件地收敛到 $V$关于 Adams 滤过的完备化的同伦群。Liu–Wang [15] 给出了这一方法一个特别容易理解的应用，讨论的是拓扑 Hochschild 同调中的底空间变换映射情形

$$k \simeq \mathrm{THH}(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}_W) \xrightarrow{\phi} E \simeq \mathrm{THH}(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}_W[z]),$$

其中下降谱序列集中在 $-1 \le i \le 0$这些线上，因此因次数原因而退化。

术语。我们用 Ab 表示由带有交换同构中的 Koszul 符号的 $\mathbb{Z}$-分次阿贝尔群构成的对称幺半范畴，并将狄拉克环的范畴定义为其中交换代数构成的范畴 CAlg(Ab)。我们采用 Clausen–Jansen[8, 定理 2.19] 的术语，并称小 $\infty$-范畴之间的映射 $f$: $L \to K$ 为 $\varinjlim$-等价，如果对每个图表 $X$: $K \to \mathcal{C}$，所诱导的映射

$$\varinjlim_L f^*(X) \longrightarrow \varinjlim_K X$$

是等价。这些映射在 [20, 第 4 节1]中称为共尾。

致谢。谨向 Maxime Ramzi 致以谢意，感谢他认真审阅了附录 A 的初稿，并提出了几条有益的建议。第二作者还要感谢 Kazuhiro Fujiwara、名古屋大学、Takeshi Saito 和东京大学在他

访问日本期间给予的支持与热情接待，本文的部分内容正是在此期间完成的。最后，感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

## 2. 狄拉克堆栈

我们希望将狄拉克栈定义为在仿射狄拉克概形范畴上的 anima 预层 $X\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$，并且它应具有良好的性质，具体来说，
(1) $X$ 由少量数据确定，且 (2) $X$ 由局部数据确定，

这两个条件都需要谨慎处理。

对于(1)，仿射狄拉克概形范畴Aff 并非小范畴，因此并非每个 Aff 上的 anima 预层都能写成可表预层的小余极限。我们的解与 Clausen–Scholze 所采用的方法类似 [9]，即只考虑那些能表示为可表预层小余极限的预层。我们在附录 A 中证明，这个条件等价于函子 $X$ 是可达的，并且由此得到一套出色的理论。

对于（2），这使我们考虑满足某种格罗滕迪克拓扑下层条件的预层。我们希望使用 fpqc 拓扑；它虽然非常强，但仍是子正则的。一般而言，固定仿射 Dirac 概形的 fpqc 覆盖筛范畴并没有小的共尾子范畴，因此尚不清楚层化函子是否存在。我们拓展了 Waterhouse [35] 的工作，证明我们对（1）的解也能解决（2）：可达预层存在一个层化，而且层化后仍然可达。

**注 2.1**。 我们将证明存在一个全忠实嵌入

$$\mathrm{Sch} \xrightarrow{h'} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$$

将我们在[12, 定义 2.29], 中定义的狄拉克概形范畴嵌入到依照上述原则定义的$\infty$-范畴狄拉克栈中。

**2.1. 平坦拓扑**。 仿射狄拉克概形的Aff 范畴并非小范畴，但它是余可及的，也就是说，其对偶范畴 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ab})$ 是可达的。我们在 命题 A.2 中证明，预层

$$\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{S}$$

当且仅当它是可表预层的小余极限时，它才是可达函子。

**定义 2.2.** 狄拉克预层的 $\infty$-范畴是由

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

可及预层张成的全子范畴。

我们在 定理 A.10 中证明 $\mathcal{P}$(Aff) 是完备且余完备的，并且满足吉罗公理，但不具有可呈示性。我们还证明 Yoneda 嵌入可经由一个全忠实函子分解

$$\mathrm{Aff} \xrightarrow{h} \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$$

并且该函子将 $\mathcal{P}$(Aff) 表示为 Aff 的余完备化。

我们接下来定义 Aff 上的平坦拓扑，并证明它由此产生一个性质良好的子范畴 Shv(Aff) $\subset \mathcal{P}$(Aff)，其对象为可访问平坦层。我们在附录 B中回顾筛与格罗滕迪克拓扑的一般概念。

**定义 2.3**。仿射狄拉克概形 $S$ 上的筛 $j\colon U \to h(S)$ 是平坦拓扑的覆盖筛，当且仅当存在一族有限的仿射狄拉克概形映射 $(f_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$，使得诱导映射

$$T \simeq \coprod_{i\in I} T_i \xrightarrow{f} S$$

是忠实平坦的，并且每个 $h(f_i)\colon h(T_i) \to h(S)$ 都经由 $j$ 分解。

**命题 2.4**。平坦拓扑的覆盖筛构成 Aff 上的有限型格罗滕迪克拓扑。

证明。由于 [23, 命题 A.3.2。1] 的假设均满足：Aff 中的余积是通用的，并且Aff 中的平坦映射在复合下以及沿任意映射进行基变换后均保持稳定。□

**命题 2.5**。预层 $X\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是平坦拓扑下的层，当且仅当它具有以下性质：

(i) 对于Aff中的每个有限对象族 $(S_i)_{i\in I}$，诱导映射

$$X(\coprod_{i\in I} S_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} X(S_i)$$

是 *anima* 的等价。

(ii) 对于每个忠实平坦映射 $f\colon T \to S$（在 Aff 中），诱导映射

$$X(S) \longrightarrow \varprojlim_{\Delta} X(T^{\times_S [-]})$$

是 *anima* 的等价。

证明。这是 [23, 命题 A.3.3.1]。□

**定义 2.6**。狄拉克堆栈的 $\infty$-范畴是由以下全子范畴

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}) \subset \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$$

由平坦拓扑下的层生成。

请注意，对于预层 $X\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 要成为狄拉克栈，必须既可达，又是平坦拓扑下的层。前者成立当且仅当满足命题 A.2 中的等价条件；后者成立当且仅当满足命题 2.5 中的条件。

**注 2.7.** 我们只考虑 Aff 上的平坦拓扑层。不过，也可以考虑 étale 拓扑下的层，其覆盖筛的定义是在定义 2.3中将平坦替换为 étale。由于 Aff中的 étale 映射是平坦的，根据 [12, 定理 1。9], 平坦拓扑比 étale 拓扑更细。

乍看之下，并不清楚包含 $\iota\colon \mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \to \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 是否存在一个左伴随“层化”函子。不过，下面我们将展示，借助 Waterhouse [35, 定理 5.1], 中的论证，这样的函子确实存在。证明过程中，使用狄拉克环而非仿射狄拉克概形会更方便，我们将始终使用以下概念。

**定义 2.8.** Dirac 环映射 $f\colon A \to B$ 的子扩张是如下形式的环图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

以及子狄拉克环的 $i$ 和 $j$ 包含。$f$ 的 $A \to B$ 子扩张构成一个偏序集 SubExt($f$)。

**注 2.9.** $f$ 的偏序集 SubExt( $f$ ) 等价于 Fun($\Delta^1$, CAlg(Ab))$/f$ 中由单态射构成的全子范畴，其中 $A \to B$。

**引理 2.10.** 设 $\kappa$ 是一个不可数基数，设 $f\colon A \to B$ 是狄拉克环之间的忠实平坦映射，并设 $g'\colon C' \to D'$ 是 $f\colon A \to B$ 的一个子扩张，使得 $C'$ 和 $D'$ 都是 $\kappa$-小的。存在一个 $f\colon A \to B$ 的子扩张 $g\colon C \to D$，使得 $g'\colon C' \to D'$ 是 $g\colon C \to D$ 的子扩张，且 $C$ 和 $D$ 都是 $\kappa$-小的，并且 $g\colon C \to D$ 是忠实平坦的。

证明。对于普通环，这一结论已在 [35, 引理 31]中证明。为方便读者，我们重述这一论证，并验证它在狄拉克情形下也基本无需改动即可成立。

我们首先回顾必要的交换代数。根据平坦性的方程判据 [12, 定理 3.8], ，狄拉克环映射 $f\colon A \to B$ 是平坦的，当且仅当对于每个线性方程组

$$\sum_{1\le k\le n} y_k c_{ki} = 0 \qquad (1 \le i \le m), \tag{2.11}$$

其中 $c_{ki}$ 是 $A$的齐次元素，任意由 $B$的齐次元素组成的解 $(y_k)_{1\le k\le n}$，都是一个线性组合

$$y_k = \sum_{1\le j\le p} b_j z_{jk} \qquad (1 \le k \le n),$$

其中 $b_j$ 是 $B$的齐次元素所组成的解 $(z_{jk})_{1\le k\le n}$ （2.11）中的解，由齐次元素组成 $z_{jk}$，其属于 $A$。

根据忠实平坦性的方程判据（我们已在 [12, 补遗 39], 中证明），狄拉克环的平坦映射 $f\colon A \to B$ 是忠实平坦的，当且仅当它是单态射，并且对于由 $(y_k)_{1\le k\le n}$ 的齐次元素组成的每个解（其属于 $B$），对应于线性方程组

$$\sum_{1\le k\le n} y_k c_{ki} = d_i \qquad (1 \le i \le m), \tag{2.12}$$

其中，$c_{ki}$ 和 $d_i$ 是 $A$的齐次元素，存在一个解 $(x_k)_{1\le k\le n}$，由 $A$的齐次元素组成。

现在，为了证明该引理，设 $f\colon A \to B$ 和 $g'\colon C' \to D'$ 如陈述所述。注意到，由 [12, 补遗 3.23],可知，映射$f\colon A \to B$ 必然是一个单态射，因此我们可以假设它是一个子狄拉克环的包含。

我们将递归地定义 $n \ge 0$ 的子扩张 $g_n\colon C_n \to D_n$ of $f\colon A \to B$。我们定义 $g_0 = g'$，并假设已为 $n < r$ 定义了 $g_n$，那么我们按如下方式定义 $g_r$：考虑所有形如 (2.11) 和 (2.12) 的方程组，其中 $c_{ki}$ 和 $d_i$ 是 $C_{r-1}$ 中的齐次元素。由于 $f\colon A \to B$ 是平坦的，每个这类第一种方程组的解 $(y_k)$（由 $B$ 的齐次元素组成）都可写成线性组合 $y_k = \sum b_j z_{jk}$，其中 $b_j$ 和

$B$ 和 $A$ 的齐次元素，分别如此。同样，由于 $f\colon A \to B$ 是忠实平坦的，对于第二种方程组的任意解 $(y_k)$（由 $B$ 的齐次元素组成），都存在一个由 $A$ 的齐次元素组成的同一方程组的解 $(x_k)$。现在，我们将 $D_r \subset B$ 定义为通过将以此方式得到的 $B$ 中所有齐次元素 $b_j$、$z_{jk}$ 和 $x_k$ 添入 $D_{r-1}$ 而得到的子 Dirac 环，并将 $g_r\colon C_r \to D_r$ 定义为 $C_r = A \cap D_r$ 的包含。至此，完成了对 $n \geq 0$ 的子扩张 $g_n\colon C_n \to D_n$ 的定义。

我们断言，它们的并集 $g\colon C \to D$ 就是所需的 $f\colon A \to B$子扩张。事实上，根据构造，它满足上述两个判据，因此是忠实平坦的；又因为 $\kappa$ 是不可数的，所以 Dirac 环 $C$ 和 $D$ 是 $\kappa$-小的。□

**推论 2.13**。设 $f\colon A \to B$ 是 *Dirac* 环的忠实平坦映射，且 $\kappa$ 是不可数正则基数。设 $\mathrm{SubExt}_\kappa(f)$ 是由满足如下条件的子扩张构成的偏序集：$g\colon C \to D$，且 $C$和 $D$都是 $\kappa$-小的；再设 $\mathrm{SubExt}^{\mathrm{ff}}_\kappa(f)$ 是由进一步满足忠实平坦条件的 $g\colon C \to D$ 构成的子偏序集。在这种情况下，包含映射

$$\mathrm{SubExt}^{\mathrm{ff}}_\kappa(f) \longrightarrow \mathrm{SubExt}_\kappa(f)$$

是共尾的。特别地，偏序集 $\mathrm{SubExt}^{\mathrm{ff}}_\kappa(f)$ 是 $\kappa$-滤过的。

证明。第一部分是对 引理 2.10的重述。第二部分由第一部分推出，因为 $\mathrm{SubExt}_\kappa(f)$ 是 $\kappa$-滤过的，因为它是一个具有 $\kappa$-小上界的偏序集。□

**引理 2.14**。设 $f\colon A \to B$ 是狄拉克环之间的忠实平坦映射，$\kappa$ 是一个不可数正则基数，并且 $[n] \in \Delta_+$。映射

$$\mathrm{SubExt}_\kappa(f) \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{Aff}_\kappa)_{/B^{\otimes_A[n]}}$$

从 $f$ 的 $\kappa$-小子扩张构成的偏序集到 $B^{\otimes_A[n]}$ 上的 $\kappa$-小狄拉克环范畴，将 $g\colon C \to D$ 映为诱导映射

$$D^{\otimes_C[n]} \longrightarrow B^{\otimes_A[n]}$$

作为 $\infty$-范畴之间的函子，它是一个 $\varinjlim$-等价。

证明。利用 Joyal 版本的 Quillen 定理 A，[8, 定理 2。19], 我们必须证明，对于任意 $k\colon R \to B^{\otimes_A[n]}$ 满足 $R$ 是一个 $\kappa$-小狄拉克环的情形，切片范畴

$$\mathrm{SubExt}_\kappa(f)_{k/}$$

是弱可缩的。具体而言，该范畴的对象是以下配对

$$(g\colon C \to D, h\colon R \to D^{\otimes_C[n]})$$

$f$ 的一个 $\kappa$-小子扩张：$A \to B$，以及一个映射 $h$，使得复合映射

$$R \to D^{\otimes_C[n]} \to B^{\otimes_A[n]}$$

与 $k$ 一致。映射是与给定的来自 $R$ 的映射相交换的子扩张的包含映射。特别地，所讨论的范畴是一个偏序集。我们将证明它是 $\kappa$-滤过的，这意味着它是弱可缩的。

由于我们考虑的是一个偏序集，只需证明每个子集

$$S = \{(C_i \xrightarrow{g_i} D_i, R \xrightarrow{h_i} D_i^{\otimes_{C_i}[n]}) \mid i \in I\}$$

由一个 $\kappa$-小索引集 $I$ 编号的都有一个上界。首先为子集选择一个上界 $g\colon C \to D$

$$S' = \{C_i \xrightarrow{g_i} D_i \mid i \in I\} \subset \mathrm{SubExt}_\lambda(f),$$

我们可以假设，对于所有 $i \in I$， $C_i = C$ 和 $D_i = D$。

完成这一步后，我们考虑典范比较映射

$$\varinjlim \prod_{i\in I} \mathrm{Map}(R, D^{\otimes_C [n]}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \varinjlim \mathrm{Map}(R, D^{\otimes_C [n]}),$$

其中，余极限以偏序集 $\mathrm{SubExt}_\kappa(f)$ 为指标。由于该偏序集是 $\kappa$-滤过的，且由于 $I$ 是 $\kappa$-小的，所讨论的映射根据 [20, 命题 5.3.3。3] 是一个等价。同样，映射

$$\prod_{i\in I} \varinjlim \mathrm{Map}(R, D^{\otimes_C [n]}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Map}(R, \varinjlim D^{\otimes_C [n]})$$

是一个等价，因为 $R$ 是 $\kappa$-小的，因此是狄拉克环范畴中的 $\kappa$-紧致对象。最后，映射

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Map}(R, \varinjlim D^{\otimes_C [n]}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Map}(R, B^{A[n]})$$

是一个等价，因为 $A \simeq \varinjlim C$ 且 $B \simeq \varinjlim D$，并且相对张量积在所有三个变量中都保持滤过余极限。

考虑这些映射的复合，我们得出结论：存在一个 $\kappa$-小子扩张 $g'\colon C' \to D'$ of $f\colon A \to B$，它包含 $g\colon C \to D$ 作为子扩张，以及一个狄拉克环映射 $h\colon R \to D'^{\otimes_{C'}[n]}$，使得对所有 $i \in I$，映射

$$R \xrightarrow{h_i} D^{\otimes_C [n]} \longrightarrow D'^{\otimes_{C'}[n]}$$

等于映射 $h$。因此，数对 $(g'\colon C' \to D', h\colon R \to D'^{\otimes_{C'}[n]})$ 是子集 $S$ 的所需上界。□

对于每个无限基数 $\kappa$，平坦拓扑在 Aff 上诱导出全子范畴 $\mathrm{Aff}_\kappa \subset \mathrm{Aff}$ 上的一个拓扑。预层 $X\colon \mathrm{Aff}_\kappa^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是该拓扑的层，当且仅当命题 2.5 中的条件 (i)–(ii) 对所有对象 $(S_i)_{i\in I}$ 在 $\mathrm{Aff}_\kappa$ 中的有限族，以及所有忠实平坦映射 $f\colon T \to S$ 在 $\mathrm{Aff}_\kappa$ 中分别成立。

**定理 2.15。** 对于每个不可数正则基数 $\lambda$，左 *Kan* 延拓

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\lambda) \xrightarrow{i_!} \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$$

关于平坦拓扑保持层。

证明。 我们将 Waterhouse 在 [35, 定理 5。1] 中的论证推广到 anima 的层的情形。因此，我们希望证明，若 $X \in \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\lambda)$ 满足命题 2.5的假设 (i)–(ii)，那么 $i_!(X) \in \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$也满足这些假设。

首先，若 $X$ 满足 (i)，那么根据 [20, 引理 5.5.8。14]，它可以写成可表预层的筛余极限。此外，由于 $i_!$ 保持余极限，并将可表预层映为可表预层，我们推得 $i_!(X)$ 也可以写成可表预层的筛余极限，因此根据 [20, 命题 5.5.8。10]，它保持有限积。

其次，假设 $X$ 满足 (ii)，并令 $f\colon A \to B$ 是一个忠实平坦的 Dirac 环映射。我们必须证明诱导的 anima 映射

$$i_!(X)(\mathrm{Spec}(A)) \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta} i_!(X)(\mathrm{Spec}(B^{\otimes_A [n]}))$$

是等价。现在，对于任意 $[n] \in \Delta_+$，左 Kan 延拓由下式给出

$$i_!(X)(\mathrm{Spec}(B^{\otimes_A [n]})) \simeq \varinjlim X(\mathrm{Spec}(R)),$$

其余极限由 $R \to B^{\otimes_A [n]}$ 在 $((\mathrm{Aff}_\lambda)^{\mathrm{op}})_{/B^{\otimes_A [n]}}$ 编索引，而结合推论 2.13 和 引理 2.14 可知，函子

$$\mathrm{SubExt}^{\mathrm{ff}}_\lambda(f) \longrightarrow ((\mathrm{Aff}_\lambda)^{\mathrm{op}})_{/B^{\otimes_A [n]}}$$

将 $f\colon A \to B$ 的子扩张 $g\colon C \to D$ 映射到 $D^{\otimes_C [n]} \to B^{\otimes_A [n]}$，这是一个 lim $\longrightarrow$-等价。因此，我们可以将所讨论的映射认作映射

$$\varinjlim_{C \to D} X(\mathrm{Spec}(C)) \longrightarrow \varprojlim_{[n] \in \Delta} \varinjlim_{C \to D} X(\mathrm{Spec}(D^{\otimes_C [n]}))$$

其中余极限由 $\mathrm{SubExt}^{\mathrm{ff}}_\lambda(f)$ 编索引。由于后者是 $\lambda$-滤过的，且 $\lambda$ 不可数，我们可以将极限与余极限交换，因此只需证明映射

$$\varinjlim_{C \to D} X(\mathrm{Spec}(C)) \longrightarrow \varinjlim_{C \to D} \varprojlim_{[n] \in \Delta} X(\mathrm{Spec}(D^{\otimes_C [n]}))$$

是一个等价。然而，由于 $\mathrm{SubExt}^{\mathrm{ff}}_\lambda(f)$ 中的每个 $g\colon C \to D$ 都是忠实平坦的，且 $X$ 满足 (ii)，该映射是若干等价的余极限，因此自身也是一个等价。这表明 $i_!(X)$ 也满足 (ii)，正如所需。□

**注 2.16.** 令 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\kappa) \subset \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\kappa)$ 为由平坦拓扑下的层所张成的全子范畴。定理 2.15 表明，典范映射

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda) \longrightarrow \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$$

从以论域中的不可数正则基数这一大偏序集为指标的余极限，到 Aff 上可达叠构成的大 $\infty$-范畴 Shv(Aff) 的映射，其中该余极限取自大的 $\infty$-范畴 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)$，是一个等价。

**推论 2.17.** 由平坦拓扑下的层所张成的全子范畴的包含有左伴随层化函子，

$$\mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \underset{\iota}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}),$$

且层化函子 $L$ 保持有限极限。

证明. 给定 $X \in \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$，根据 命题 A.2 我们可将其写作 $X \simeq i_!(X_0)$ 其中某个基数为 $\lambda$ 且 $X_0 \in \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\lambda)$。由于 $\mathrm{Aff}_\lambda$ 是本质小的，包含

$$\iota_\lambda\colon \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda) \to \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\lambda)$$

存在左伴随层化函子 $L_\lambda\colon \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\lambda) \to \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)$，因为其定义域和目标都是可呈示的。现在，我们声称映射

$$X \simeq i_!(X_0) \xrightarrow{i_! \eta} i_! \iota_\lambda L_\lambda(X_0)$$

是一个层化。事实上，根据 定理 2.15，目标是一个层的底层预层，并且对于每个 $Y \in \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$，我们都有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Map}(i_! \iota_\lambda L_\lambda(X_0), \iota(Y)) \simeq \mathrm{Map}(\iota_\lambda L_\lambda(X_0), i^* \iota(Y)) \\
&\simeq \mathrm{Map}(\iota_\lambda L_\lambda(X_0), \iota_\lambda i^*(Y)) \simeq \mathrm{Map}(L_\lambda(X_0), i^*(Y)) \simeq \mathrm{Map}(X_0, \iota_\lambda i^*(Y)) \\
&\simeq \mathrm{Map}(X_0, i^* \iota(Y)) \simeq \mathrm{Map}(i_!(X_0), \iota(Y)) \simeq \mathrm{Map}(X, \iota(Y))
\end{aligned}$$

如所需。因此，我们由 [17, 标签 02FV] 得出，所需的左伴随函子 $L$ 存在。它保有限极限，因为每个 $L_\lambda$ 都如此。□

**注 2.18**。 层化函子 $L\colon \mathcal{P}(\mathrm{Aff}) \to \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 是关于由以下余极限交换映射组成的大集合 $W$ 的局部化：(i) 对于 Aff 中任意有限族 $(S_i)_{i\in I}$ 对象，映射

$$\coprod_{i\in I} h(S_i) \longrightarrow h(\coprod_{i\in I} S_i),$$

其中 $h\colon \mathrm{Aff} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$ 是 Yoneda 嵌入。
(ii) 对于 Aff 中任意忠实平坦映射 $f\colon T \to S$，映射

$$\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} h(T^{\times_S [-]}) \longrightarrow h(S).$$

事实上，这可由 命题 2.5 得出。

现在我们证明，狄拉克栈的 $\infty$-范畴满足以下版本的 $\infty$-范畴吉罗公理。

**定理 2.19**。 $\infty$-范畴 Shv(Aff)具有以下性质：

(i) 它是完备且余完备的，并且由 *Yoneda* 嵌入 $h\colon \mathrm{Aff} \to \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$的本质像在小余极限下生成；该本质像由 $\omega_1$-紧对象组成，且是余可及的。(ii) Shv(Aff) 中的余极限是泛的。(iii) Shv(Aff)中的余积彼此不交。(iv) Shv(Aff) 中的每个群胚都是有效的。

证明。 推论 2.17 表明 Shv(Aff) 是 $\mathcal{P}$(Aff)的左正合局部化，因此完备性、余完备性、Shv(Aff) 由 Yoneda 像在小余极限下生成这一事实，以及性质 (ii)–(iv)，均由 定理 A.10推出。剩下要证明的是，若 $S$ 是一个仿射 Dirac 概形，则 $h(S)$ 是 $\omega_1$- 紧的。现在，对于每个狄拉克栈 $X$，我们有

$$\mathrm{Map}(h(S), X) \simeq X(S),$$

因此，声称 $h(S)$ 是 $\omega_1$-紧致，等价于声称 $\omega_1$-滤过余极限在 Shv(Aff) 中逐点计算。根据 命题 A.9， $\mathcal{P}$(Aff) 中的所有小余极限都逐点计算，因此只需证明 Shv(Aff) $\subset \mathcal{P}$(Aff)在 $\omega_1$-滤过余极限下封闭。但根据 命题 2.5，层条件可用 $\omega_1$-小极限来表达，因此， $\omega_1$-滤过层图表的逐点余极限仍是一个层，因为 anima 的 $\omega_1$-小极限与 $\omega_1$-滤过余极限可交换，见 [20, 命题 5.3.3。3],由于 $\omega_1$ 是一个正则基数。□

**注 2.20**。 用 问题 A.20的语言来说， 定理 2.19 的 (i) 部分可以表述为： Shv(Aff) 是一个 $\omega_1$-宏可呈现 $\infty$-范畴。

接下来，我们从 [20, 定理 6.1.3。9]推导出以下基本下降定理。稍后我们将用它证明 $\infty$狄拉克栈上的狄拉克形式群的 -范畴沿有效满射下降。

**定理 2.21**。 切片 $\infty$-范畴函子

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/-}} \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$$

保留小极限。

证明。假设 $X \simeq \varinjlim_{k\in K} X_k$ 是 Shv(Aff) 中一个小图表的余极限。我们要证明典范映射

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X} \longrightarrow \varprojlim_{k\in K^{\mathrm{op}}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X_k}$$

是一个等价。如注 2.16中所述，我们可以写成

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}) \simeq \varinjlim_{\lambda\in L} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)$$

作为以偏序集 $L$ 为指标的滤过余极限，该偏序集由满足方程中的图表可经由 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda) \subset \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 分解的小不可数正则基数 $\lambda$ 组成。现在，对于每个 $\lambda \in L$，$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)$ 是一个 $\infty$-topos，因此

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)_{/X} \longrightarrow \varprojlim_{k\in K^{\mathrm{op}}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)_{/X_k}$$

根据 [20, 定理 6.1.3。9]是一个等价。因此，诱导的余极限映射也

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X} \simeq \varinjlim_{\lambda\in L} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)_{/X} \longrightarrow \varinjlim_{\lambda\in L} \varprojlim_{k\in K^{\mathrm{op}}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)_{/X_k}$$

是一个等价，因此只需证明典范映射

$$\varinjlim_{\lambda\in L} \varprojlim_{k\in K^{\mathrm{op}}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)_{/X_k} \longrightarrow \varprojlim_{k\in K^{\mathrm{op}}} \varinjlim_{\lambda\in L} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\lambda)_{/X_k}$$

是一个等价。不过，存在一个正则基数 $\kappa$，使得 $K$ 是 $\kappa$-小的，且$L$ 是 $\kappa$-滤过的，因此由 [20, 命题 5.3.3。3]，通过与 [23, 引理 4.5.3。1]的证明相同的论证即可得出。□

**2.2. 狄拉克概形作为叠。** 我们证明，狄拉克概形范畴全忠实地嵌入狄拉克堆栈的 $\infty$-范畴。

**定义 2.22。** 受限 Yoneda 嵌入是 Yoneda 嵌入与沿典范包含的限制的复合

$$\mathrm{Sch} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

Yoneda 嵌入与沿典范包含的限制。

若 $X$ 是一个狄拉克概形，则记 $h(X)$ 为它在受限 Yoneda 嵌入下的像。接下来我们证明 $h(X)$ 是一个狄拉克堆栈。

**引理 2.23。** 若 $X$ 是仿射的，则预层 $h(X)$ 是一个狄拉克堆栈。

证明。预层 $h(X)$ 是可表的，因此是可达的，因为 $\infty$-范畴 Aff 是余可及的。 $h(X)$ 是平坦拓扑下的层这一事实，是忠实平坦下降的另一种表述；我们已在 [12, 补遗 3.23] 中证明了这一点。□

**命题 2.24.** 若 $X$ 是狄拉克概形，则预层 $h(X)$ 在平坦拓扑下是一个层。

证明。 我们必须验证 $h(X)$ 满足 命题 2.5 的条件 (i) 和 (ii)。对于 (i)，无须证明任何内容；对于 (ii)，我们必须证明，若 $h\colon T \to S$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射，则

$$h(X)(S) \longrightarrow \varprojlim_{\Delta} h(X)(T^{\times_S [-]})$$

是 anima 的一个等价。现在，由于预层 $h(X)$取值于 0-截断 anima 的全子范畴 $\mathcal{S}_{\leq 0} \subset \mathcal{S}$，限制

$$\varprojlim_{\Delta} h(X)(T^{\times_S [-]}) \longrightarrow \varprojlim_{\Delta_{\leq 1}} h(X)(T^{\times_S [-]})$$

根据 [12, 命题 A。1]，这是一个等价。因此，只需证明

$$\mathrm{Map}(S, X) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Map}(T, X) \underset{d_1^*}{\overset{d_0^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Map}(T \times_S T, X)$$

是集合的一个极限图表。

我们先验证 $h^*$ 是单射。因此，设 $f_1, f_2 \colon S \to X$ 是狄拉克概形之间的映射，且有 $f_1 h = f_2 h \colon T \to X$。由于 $h$ 根据 [12，命题 3.15]，诱导了一个底层拓扑空间之间的满射映射，我们推得 $f_1$ 和 $f_2$ 具有相同的底层映射 $p \colon |S| \to |X|$（拓扑空间之间）。因此，我们有 $f_i = (p, \phi_i)$，并希望证明层映射 $\phi_1, \phi_2 \colon p^* \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_S$ 相同。逐茎检查即可验证这一点。因此，记 $h = (q, \psi)$，取 $s \in |X|$ 使得 $x = p(x)$，并选择 $t \in |T|$ 使得 $s = q(t)$，这里我们用到了 $q \colon |T| \to |S|$ 是满射。现在，根据假设 $f_1 h = f_2 h$，两个复合映射

$$\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\phi_{i,x}} \mathcal{O}_{S,s} \xrightarrow{\psi_s} \mathcal{O}_{T,t}$$

相同。但后一个映射是局部 Dirac 环之间的平坦局部同态，因此由[12, 命题 3.16]可知，它是单射。这表明$\phi_{1,\ x} = \phi_{2,\ x}$，从而 $f_1 = f_2$，如所求。

接下来，我们证明 $g \colon T \to X$ 连同 $g d_0 = g d_1 \colon T \times_S T \to X$ 可分解为映射 $f \colon S \to X$。根据上文的证明，这种分解必然唯一。我们选取 $X$ 的一个由仿射开子概形组成的覆盖 $(W_i)_{i \in I}$，并考虑 $T$ 的由开子概形 $V_i \simeq T \times_X W_i \to T$组成的覆盖 $(V_i)_{i \in I}$。由于

$$|V_i \times_S T| = |T \times_S V_i| \subset |T \times_S T|,$$

由 [12, 命题 3.24]，我们得出结论：存在 $S$ 的一个由开子概形组成的唯一覆盖 $(U_i)_{i \in I}$，使得对所有 $i \in I$，都有 $V_i \simeq T \times_S U_i \to T$。我们注意到，任何具有所需性质的 $f \colon S \to X$ 必然满足 $f(U_i) \subset W_i$。因此，只需证明对每个 $i \in I$，都存在一个狄拉克概形的映射$f_i \colon U_i \to W_i$，使得复合映射

$$V_i \xrightarrow{h|_{V_i}} U_i \xrightarrow{f_i} W_i \longrightarrow X$$

等于 $g|_{V_i} \colon V_i \to X$。

现在，对于每个 $i \in I$，我们选取一个由仿射开子概形组成的覆盖 $(U_{i,\ j})_{j \in J_i}$ of $U_i$，并注意到 $(V_{i,\ j})_{j \in J_i}$ with $V_{i,\ j} \simeq T \times_S U_{i,\ j} \to T$ 也是$V_i$ 的一个由仿射开子概形组成的覆盖。此外，映射 $h|_{V_{i,\ j}} \colon V_{i,\ j} \to U_{i,\ j}$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射，并且我们有一个映射

$$V_{i,j} \xrightarrow{g|_{V_{i,j}}} W_i$$

具有其沿两个投影的限制

$$V_{i,j} \times_{U_{i,j}} V_{i,j} \rightrightarrows V_{i,j}$$

重合。由于一切都是仿射的，我们由引理 2.23 得出，$g|_{V_{i,j}}$ 存在唯一的分解，经由映射 $f_{i,j}$: $U_{i,j} \to W_i$。由唯一性，映射$f_{i,j}: U_{i,j} \to W_i$粘合起来，给出所需的 $f_i$: $U_i \to W_i$。证明完毕。□

**引理 2.25.** 设 $X$ 是一个狄拉克概形，并设 $\mathfrak{B}$ 是其底空间 $|X|$ 上拓扑的一个基，使得若 $U, V \in \mathfrak{B}$，则 $U \cap V \in \mathfrak{B}$。如果对所有 $U \in \mathfrak{B}$，$h(U)$ 都是可达的，那么 $h(X)$ 也是可达的。

证明. 由 命题 2.24 可知，$h(X) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{Aff}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 是平坦拓扑下的一个层，我们希望证明它属于全子范畴

$$\varinjlim_{\kappa} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_\kappa) \simeq \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}).$$

由于包含 $i_\kappa$: $\mathbf{Aff}_\kappa \to \mathbf{Aff}$ 将 $\mathbf{Aff}$ 表示为各个 $\mathbf{Aff}_\kappa$ 的余极限，只需证明存在一个 $\lambda$，使得对所有 $\kappa \geq \lambda$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}_\lambda & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_\kappa \\ & {\scriptstyle i_\lambda^* h(X)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle i_\kappa^* h(X)} & \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

将 $i_\kappa^* h(X)$ 表示为 $i_\lambda^* h(X)$ 的左 Kan 延拓。现在，每个 $h(U)$ 都是可达的，且 $\mathfrak{B}$ 是小的，因此我们可以找到一个 $\lambda$，使得对所有 $\kappa \geq \lambda$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}_\lambda & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_\kappa \\ & {\scriptstyle i_\lambda^* h(U)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle i_\kappa^* h(U)} & \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

展示 $i_\kappa^* h(U)$ 是 $i_\lambda^* h(U)$的左 Kan 延拓。根据定理 2.15，左 Kan 延拓保层，因此只需证明映射

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} i_\lambda^* h(U) \longrightarrow i_\lambda^* h(X)$$

在 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff}_\lambda)$ 中是一个等价。

为证明这一点，记 $h_\lambda \simeq i_\lambda^* h$。由于在 $S$ 上局部地，每个从仿射狄拉克概形出发的映射$\eta$: $S \to X$ 都经由某个 $U \in \mathfrak{B}$分解，因此映射

$$\coprod_{U \in \mathfrak{B}} h_\lambda(U) \longrightarrow h_\lambda(X)$$

在 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff}_\lambda)$ 中是一个有效满射。因此，只需证明基变换

$$(\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} h_\lambda(U)) \times_{h_\lambda(X)} h_\lambda(U_0) \longrightarrow h_\lambda(U_0)$$

沿着由任意 $U_0 \in \mathfrak{B}$到 $X$ 的开浸入所诱导的映射对所讨论映射进行基变换后，所得映射是一个等价。由于 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff}_\lambda)$ 中的余极限具有普遍性，且 Yoneda 嵌入保极限，典范映射

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} h_\lambda(U \times_X U_0) \longrightarrow (\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} h_\lambda(U)) \times_{h_\lambda(X)} h_\lambda(U_0)$$

在 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff}_\lambda)$ 中是一个等价。因此，我们希望证明余极限之间的映射

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} h_\lambda(U \times_X U_0) \longrightarrow \varinjlim_{U \in \mathfrak{B}_{U_0}} h_\lambda(U) \simeq h_\lambda(U_0)$$

由函子 $- \times_X U_0$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_{/U_0}$ 诱导的等价成立，这是基 $\mathfrak{B}$ 在我们的假设下对有限交封闭的结果。事实上，我们断言

这个函子是 lim⟶-等价。事实上，根据 [20, 定理 4.1.3。1], 只需证明

$$\mathfrak{B} \times_{\mathfrak{B}_{/U_0}} (\mathfrak{B}_{/U_0})_{V/}$$

对于每个 $V \in \mathfrak{B}_{/U_0}$，它都是弱可缩的。不过，我们可以将此范畴与偏序集 $\mathfrak{B}_{V/}$ 等同起来，其中 $V$ 是一个极小元，因此其分类无穷群胚是可缩的，正如所需。□

**命题 2.26**。 若 $X$ 是一个狄拉克概形，则预层 $h(X)$ 是可达的。

证明。 由 引理 2.23 可知，该结论对仿射狄拉克概形成立；现在我们使用 引理 2.25 ，将其推广到一般的狄拉克概形。

首先，若 $X$ 存在一个开浸入 $j\colon X \to S$ 到一个仿射狄拉克概形中，则取 $\mathfrak{B}$ 为由满足以下性质的开子概形构成的偏序集：$U \subset X$ $j(U) = S_f \subset S$ 是一个特征开子概形。这个 $\mathfrak{B}$ 是 $|X|$上拓扑的一个基，在有限交下稳定，并且对每个 $h(U)$ 都是可达的，因为 $U \in \mathfrak{B}$ $S_f$ 是仿射的。因此，由 $h(X)$ 可知，引理 2.25 保证其可达。

最后，若 $X$ 是任意一个狄拉克概形，则我们取 $\mathfrak{B}$ 为开子概形 $U \subset X$ 所组成的偏序集，满足 $U$ 可开浸入到某个仿射 Dirac 概形中。同样，这 $\mathfrak{B}$ 是 $|X|$上拓扑的一个基，它在有限交下稳定；根据上面讨论的情形， $h(U)$ 对所有$U \in \mathfrak{B}$都可达。因此 引理 2.25 表明 $h(X)$ 是可达的。 □

**定理 2.27**。 受限 *Yoneda* 嵌入定义了一个全忠实函子

$$\mathrm{Sch} \xrightarrow{h} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$$

从狄拉克概形范畴到狄拉克堆栈的 $\infty$-范畴。

证明。 由 命题 2.24 和 命题 2.26 可知，定义 2.22 中的受限 Yoneda 嵌入 取值于 Shv(Aff) $\subset$ Fun(Aff$^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}$)中。因此我们得到所需的函子，并须证明它是全忠实的。设 $X$ 和$Y$ 是狄拉克概形，并希望证明典范映射

$$\mathrm{Map}(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(h(Y), h(X))$$

是 anima 的等价。（事实上，此映射的定义域和目标都是 0-截断anima。）若 $Y$ 是仿射的，则由约田引理可得。

一般而言，若 $\mathfrak{B}$ 是底空间 $|Y|$ 上拓扑的一个基，并且在有限交下稳定，则狄拉克概形的典范映射

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} U \longrightarrow Y$$

由 [12, 定理 2。32],可知是等价，而狄拉克栈的典范映射

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{B}} h(U) \longrightarrow h(Y)$$

根据 引理 2.25 的证明可知是等价。因此，我们可以像在 命题 2.26 的证明中那样，从仿射狄拉克概形推广到一般的狄拉克概形。□

小图表 $X\colon K \to$ Sch 可能不存在余极限，即使存在，该余极限通常也没有意义。真正有意义的是复合图表 $h(X)\colon K \to$ Shv(Aff) 的余极限，而它总是存在。不过，我们将证明，如果 $K$ 是静态的，那么这两个余极限确实相同。

**补遗 2.28**。 函子 $h\colon \mathrm{Sch} \to \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 保留余积。

证明。所讨论的函子保持有限余积，因此只需证明，对于一族小的狄拉克概形 $(X_k)_{k\in K}$，典范映射

$$\varinjlim_{I\subset K} h(\coprod_{k\in I} X_k) \longrightarrow h(\varinjlim_{I\subset K} \coprod_{k\in I} X_k) \simeq h(\coprod_{k\in K} X_k),$$

其中余极限取遍有限子集的滤过范畴 $I \subset K$，是一个等价。我们断言，左侧的余极限是逐点计算的。事实上，这一断言等价于逐点余极限给出的预层满足层条件。但 Aff 上的平坦拓扑是有限型的，且所讨论的图表取值于 $\mathcal{S}_{\leq 0}$值预层，因此根据 [12, 命题 A。1], 层条件相当于要求 $\mathcal{S}$ 中的某些有限图表是极限图表。因此，该断言由 anima 的有限极限与滤过余极限可交换这一事实得出。最后，给定 $T \in$Aff, 典范映射

$$\varinjlim_{I\subset K} \mathrm{Map}(T, \coprod_{k\in I} X_k) \longrightarrow \mathrm{Map}(T, \coprod_{k\in K} X_k)$$

是一个等价，因为 $T$ 是拟紧的。 □

**2.3. 几何映射**。 所有狄拉克堆栈构成的 $\infty$-范畴相当庞大，而在实践中，人们往往更关注几何狄拉克栈这一较小的子范畴。通俗地说，它是狄拉克概形全子范畴在对平坦群胚取商的运算下的闭包。不过，精确定义要更为微妙，遵循 Lurie [18, 第 26] 章以及 Töen–Vezzosi [33]的做法。几何狄拉克栈在形式上与 Artin 栈相似，主要区别在于：

(1) 我们考虑 anima 的层，而非群胚的层。
(2) 我们考虑仿射狄拉克概形上的层，而非仿射概形上的层。
(3) 我们允许对平坦群胚取商，而不只允许对光滑群胚取商。

更一般地，我们定义狄拉克栈之间几何映射的相对概念。我们遵循 Lurie [18, 第 26], 章的做法，他在那里建立了导出代数几何中的类似理论。该定义是递归的。

**定义 2.29.** 设 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克堆栈之间的映射。

(1) 若对于每个来自狄拉克概形的映射 $\eta\colon S \to X$， $f$ 沿着 $\eta$ 的基变换 $f_S\colon Y_S \to S$ 都等价于一个狄拉克概形之间的映射，则映射 $f\colon Y \to X$ 称为 0-几何的。(2) 若对于每个来自狄拉克概形的映射 $\eta\colon S \to X$， $f$ 沿着 $\eta$ 的基变换 $f_S\colon Y_S \to S$ 都是有效满射，且等价于一个狄拉克概形之间的平坦映射，则映射 $f\colon Y \to X$ 称为 0-下沉的。

**注 2.30** (仿射源已足够)。 在定义 2.29中，只需考虑映射 $\eta\colon S \to X$，其中 $S$ 的源是仿射狄拉克概形。然而，即使 $S$ 是仿射的，基变换 $f_S\colon Y_S \to S$ 的源通常也不是仿射狄拉克概形。

**注 2.31** (有效满射)。 由 命题 B.6 可知，狄拉克叠的映射 $p\colon Y \to X$ 是有效满射，当且仅当对于每个来自仿射狄拉克概形的映射 $\eta\colon S \to X$，都存在如下图表

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

其中 $q$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射。因此，$p\colon Y \to X$ 是有效满射，当且仅当在源上的平坦拓扑下局部地，每个来自仿射狄拉克概形的映射$\eta\colon S \to X$都可以分解经过 $f$。

**注 2.32**（狄拉克概形的浸没映射）。设 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克概形之间的映射。映射 $f$ 自动是 0-几何的，因为狄拉克概形嵌入狄拉克栈的过程保留纤维积，而 注 2.31 表明 $f$ 是 0-次浸没的，当且仅当它是一个 fpqc-覆盖，即 $f$ 是平坦的，并且对每个仿射开集 $U \subset X$，都存在一个拟紧开集 $V \subset f^{-1}(U)$ 使得 $f|_V\colon V \to U$ 是满射。这是狄拉克概形中与 fpqc-覆盖对应的定义，参见 [**32**, 标签 022B]。

**定义 2.33**。设 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克栈之间的映射，且 $n \geq 1$ 是一个整数。(1) 若对每个沿着从某个狄拉克概形出发的映射 $\eta\colon S \to X$ 的基变换 $f_S\colon Y_S \to S$，都存在一个来自狄拉克概形的 $(n-1)$-次浸没映射$p\colon T \to Y_S$，则映射 $f\colon Y \to X$ 称为 $n$-几何的。(2) 若对每个沿着从某个狄拉克概形出发的映射 $\eta\colon S \to X$ 的基变换 $f_S\colon Y_S \to S$，都存在一个来自狄拉克概形的 $(n-1)$-次浸没映射$p\colon T \to Y_S$，使得复合映射

$$T \xrightarrow{p} Y_S \xrightarrow{f_S} S$$

是 0-下沉的。

映射 $f\colon Y \to X$ 若对某个 $n \geq 0$ 是 $n$-几何的，则称其为几何的；若对某个 $n \geq 0$ 是 $n$-次浸没的，则称其为次浸没的。

**注 2.34**（基变换下的稳定性）。在定义 2.33中，只需考虑映射 $\eta\colon S \to X$，其中 $S$ 是一个仿射狄拉克概形。具有$n$-几何性和 $n$-次浸没性的性质，在沿任意映射进行基变换后均得以保留。

**警告 2.35**（$n$ 的取值无关紧要）。与定义 2.33可能给人的印象相反，重要的是狄拉克堆栈之间的映射具有几何性或次浸没性，而该映射具体是对哪个 $n$ 而言 $n$-几何的或 $n$-次浸没的则无关紧要。不过，定义的递归性质有助于进行归纳证明。

**引理 2.36**。设 $f\colon Y \to X$ 是一个狄拉克堆栈之间的映射，并设 $n \geq 0$ 是一个整数。若 $f$ 是 $n$-几何的，则 $f$ 也是（$n+1$）-几何的。若 $f$ 是 $n$-次浸没的，则 $f$也是（$n+1$）-次浸没的。

证明。我们对 $n \geq 0$ 使用归纳法。若 $f$ 是 0-几何的，那么根据定义，沿任意来自狄拉克概形的映射 $\eta\colon S \to X$ 对 $f$ 作基变换所得的 $f_S\colon Y_S \to S$ 等价于一个狄拉克概形之间的映射。由于恒等映射 $\mathrm{id}\colon Y_S \to Y_S$是一个来自狄拉克概形的 0-下沉映射，因此我们得出 $f$ 是 1-几何的。

因此，令 $n \geq 1$，并归纳假设该命题已对 $k < n$ 得证。若 $f$ 是 $n$-几何的，则对于任意基变换 $f_S\colon Y_S \to S$，它是沿着来自狄拉克概形 $S$ 的映射 $\eta\colon S \to X$ 对 $f$ 作出的，那么存在一个来自狄拉克概形的 $(n-1)$- 次浸没映射 $p\colon T \to Y_S$。由归纳假设，映射 $p$ 也是$n$-次浸没的，这表明 $f$ 是 $(n+1)$-几何的。同样的论证表明，若 $f$ 是 $n$-次浸没的，则它是 $(n+1)$-次浸没的。□

**命题 2.37.** 若狄拉克堆栈的映射 $f\colon Y \to X$ 对某个 $n \geq 0$ 是 $n$-次浸没的，则它是一个有效满射。

证明。由于 Shv(Aff) 由 Yoneda 嵌入的像在小余极限下生成，并且成为有效满射的性质是底空间上的局部性质，我们可以假设 $X$ 是仿射的。我们对 $n \geq 0$ 进行归纳，$n = 0$ 的情形是平凡的，因为根据定义，0-下沉映射是有效满射。因此，令 $n \geq 1$，并归纳地假设该命题对 $k < n$ 成立。由于 $f\colon Y \to X$ 是 $n$-次浸没且 $X$ 是仿射的，存在一个分解

$$T \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{f} X$$

由 $p$ 一个 $(n-1)$-次浸没映射构成，其定义域是一个狄拉克概形，并且 $fp$ 是 0-下沉的。现在，根据归纳假设，$p$ 和 $fp$ 都是有效满射，因此由 [20, 推论 6.2.3。12] 可知，$f$ 也是有效满射。□

**命题 2.38.** 设 $g\colon Z \to Y$ 和 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克堆栈之间的映射，并设 $n \geq 0$。如果 $f$ 和 $g$ 均为 $n$-几何的，或均为 $n$-下沉的，那么 $fg$ 也如此。

证明。我们对 $n \geq 0$ 进行归纳。情形 $n = 0$ 的几何部分由定义直接得出，而下沉部分则由以下事实得出：狄拉克概形之间的有效满射和平坦映射在复合下封闭。因此，令 $n \geq 1$，并假设根据归纳假设，这些结论对 $k < n$ 已经成立。为证明归纳步骤，我们考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
V & \xrightarrow{q} & Z_U & \xrightarrow{p'} & Z_S & \xrightarrow{\eta''} & Z \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_U} & & \downarrow{\scriptstyle g_S} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
 & & U & \xrightarrow{p} & Y_S & \xrightarrow{\eta'} & Y \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle f_S} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
 & & & & S & \xrightarrow{\eta} & X
\end{array}$$

其中 $S$ 是一个狄拉克概形，且各方块均为笛卡尔方块。首先假设 $f$ 和 $g$ 是 $n$-几何的。我们先从一个狄拉克概形取一个 $(n-1)$-次浸没映射 $p\colon U \to Y_S$。由于 $g$ 是 $n$-几何的，$g_U$ 也如此，因此我们可以从一个狄拉克概形取一个 $(n-1)$-次浸没映射 $q\colon V \to Z_U$。根据归纳假设，$(n-1)$-次浸没映射 $p'$ 和 $q$ 的复合是 $(n-1)$-次浸没的。这表明 $fg$ 是 $n$-几何的。如果 $f$ 和 $g$ 是 $n$-次浸没的，那么我们可以选取映射 $p$ 和 $q$，使得 $f_S p$ 和 $g_U q$ 都是 0-下沉的。但此时也有

$$(fg)_S(p'q) \simeq f_S g_S p' q \simeq (f_S p)(g_U q)$$

是 0-下沉的，因此我们得出 $fg$ 是 $n$-次浸没的。□

**引理 2.39。** 如果 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克叠之间的有效满射，那么对于任意来自狄拉克概形的映射 $\eta\colon V \to X$，都存在一个图表

$$\begin{array}{ccc}
W & \longrightarrow & Y \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
V & \xrightarrow{\eta} & X
\end{array}$$

具有 $p\colon W \to V$ 一个从狄拉克概形 $W$ 出发的 0-浸没。

证明。 设 $(S_i)_{i\in I}$ 是一个满足 $S_i \subset V$ 仿射开集且 $\bigcup_{i\in I} |S_i| = |V|$ 的族。由 注 2.32 和 补遗 2.28 可知，诱导映射

$$S \simeq \coprod_{i\in I} S_i \xrightarrow{g} V$$

是 0-浸没的。将 注 2.31 分别应用于每个 $S_i$，我们得到 0-浸没映射 $q_i\colon\ T_i \to S_i$，其中 $T_i$ 是仿射的，并且复合映射可分解

$$T_i \xrightarrow{q_i} S_i \longrightarrow S \xrightarrow{g} V \xrightarrow{\eta} X$$

经由 $f\colon\ Y \to X$。因此，我们得到了所需的图表，其中包含 $W \simeq \coprod_{i\in I} T_i$。 □

**命题 2.40**。 设 $g\colon\ Z \to Y$ 和 $f\colon\ Y \to X$ 是狄拉克叠之间的态射，且 $n \geq 0$。

(a) 设 $g$ 是 $n$-次浸没的。若 $fg$ 是$(n+1)$-几何的，则 $f$ 也是。(b) 设 $f$ 是$(n+2)$-几何的。若 $fg$ 是$(n+1)$-几何的，则 $g$ 也是。

证明。对于 (a) 部分，我们考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{q} & Z_S & \xrightarrow{\eta''} & Z \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_S} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & Y_S & \xrightarrow{\eta'} & Y \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_S} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & S & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

与 $S$ 一个狄拉克概形，且各方块均为笛卡尔图表。由于 $fg$ 是$(n+1)$-几何的，我们可以找到一个 $n$-次浸没映射 $q$，其定义在一个狄拉克概形上。又由于 $g$ 是 $n$-次浸没的，其基变换 $g_S$ 以及由命题 2.38 得到的复合映射 $g_S q$ 命题 2.38也是如此。因此，$g_S q$ 就是所需的 $n$-次浸没映射，映至 $Y_S$。

对于 (b) 部分，我们考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{q} & Z_S & \xrightarrow{\eta''} & Z \\ & \searrow^{k} & & & \downarrow{\scriptstyle g_S} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & U & \xrightarrow{p} & Y_S & \xrightarrow{\eta'} & Y \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f_S} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & & & S & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

其中 $S$ 是一个狄拉克概形，且各方块均为笛卡尔图表。映射 $p$ 和 $q$ 分别是一个来自狄拉克概形 $U$ 的 $(n+1)$-次浸没映射，以及一个来自狄拉克概形 $V$ 的 $n$-次浸没映射；根据假设，$f$ 和 $fg$ 分别是 $(n+2)$-几何的和 $(n+1)$-几何的，因此这些映射存在。现在，命题 2.37 表明 $p$ 是一个有效满射，因此由引理 2.39，我们可以找到一个狄拉克概形之间的 0-下沉映射 $h\colon\ W \to V$，以及 $g_S q h$ 通过 $p$的所示分解。

由于 $h$ 是 0-下沉的，根据引理 2.36，它也是 $n$-下沉的；又由于 $q$ 也是 $n$-下沉的，由命题 2.38 可知，$qh$ 是 $n$-下沉的。类似地，由于 $k$ 是 0-几何的，根据引理 2.36，它也是 $(n+1)$-几何的；又由于 $p$ 也是 $(n+1)$-几何的，再次应用命题 2.38 可知，$pk$ 是 $(n+1)$-几何的。因此，(a) 部分表明 $g_S$ 是 $(n+1)$-几何的，正如所需。□

**命题 2.41.** 设 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克栈之间的一个映射，并设 $f'\colon Y' \to X'$ 是 $f$ 沿有效满射 $p\colon X' \to X$ 的基变换。
(a) 若 $f'$ 是带有 $n \geq 1$ 的 $n$-几何的，则 $f$ 也是如此。
(b) 若 $f'$ 是带有 $n \geq 1$ 的 $n$-次浸没，则 $f$ 也是如此。

证明。设 $\eta\colon S \to X$ 是一个狄拉克概形，并设 $f_S\colon Y_S \to S$ 是 $f$ 沿 $\eta$的基变换。我们希望找到一个从某个狄拉克概形出发的 $(n-1)$-浸没映射 $U \to Y_S$。利用 引理 2.39，我们可以找到左侧的方块

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & X' & \xleftarrow{f'} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ S & \xrightarrow{\eta} & X & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

其中 $q$ 是狄拉克概形之间的一个 0-下沉映射。由于 $f'$ 是 $n$-几何的，我们可以找到一个从某个狄拉克概形出发的 $(n-1)$-浸没映射 $r\colon U \to Y'_T$。但于是

$$U \xrightarrow{r} Y'_T \simeq Y_T \xrightarrow{q_Y} Y_S$$

是 $(n-1)$-浸没的。事实上，映射 $q_Y$ 是 0-浸没映射 $q$的基变换，因此是 0-浸没的，所以由 引理 2.36 可知它也是 $(n-1)$-浸没的；最后，由 命题 2.38可知，复合映射是 $(n-1)$-浸没的。至此便完成了 (a) 的证明，(b) 的证明类似。 □

**警告 2.42。** 命题 2.41 对 $n = 0$并不成立，因为狄拉克概形这一性质对于平坦拓扑并非局部性质。事实上，存在一个代数空间 $f\colon Y \to X$ 它在概形 $X$ 上，并且有一个 étale满射$p\colon Y' \to Y$使得 $Y'$ 是概形，但 $Y$不是；参见 [34, §4.4。2]。

**引理 2.43。** 若狄拉克概形之间的映射 $f\colon T \to S$ 对于某个$n \geq 0$是 $n$-次浸没的，则它是 0-次浸没的。

证明。我们对 $n \geq 0$ 使用归纳法，$n = 0$ 的情形显然成立。因此，令 $n \geq 1$，并假设命题对 $k < n$ 已成立。由于 $f\colon T \to S$ 是 $n$-次浸没的，按定义，存在一个概形 $V$ 和一个 $(n-1)$-次浸没映射 $p\colon V \to T$，使得复合映射

$$V \xrightarrow{p} T \xrightarrow{f} S$$

是 0-下沉。根据归纳假设，映射 $p$ 是 0-下沉；又因为 $fp$和 $p$都是平坦的，我们可推得 $f$ 也平坦。类似地，因为 $fp$和 $p$ 都是有效满射，所以 $f$也是。因此，$f$ 是一个 0-次浸没。
□

**命题 2.44。** 设 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克叠的一个 $n$-几何映射。若对于某个 $m \geq 0$，$f$ 是$m$-次浸没的，则 $f$ 是 $n$-次浸没的。

证明。根据 引理 2.36 以及向下归纳法，只需证明：若 $f$ 是 $n$-几何的，且 $(n+1)$-次浸没，则它是 $n$-次浸没。由于这两个性质在对狄拉克概形作基变换后都能检验，因此不妨设 $X$ 是一个狄拉克概形。若 $n = 0$，则无需证明，因此我们设 $n \geq 1$。由于 $f$ 是 $n$-几何的，且 $X$ 是一个狄拉克概形，所以存在一个来自狄拉克概形的 $(n-1)$-次浸没映射 $p\colon U \to Y$。我们断言复合映射

$$U \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{f} X$$

是狄拉克概形之间的 0-下沉映射，因此 $f$ 也是 $n$-次浸没。

为证明这一断言，我们考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{r} & V_U & \xrightarrow{p'} & V \\ & & \downarrow{\scriptstyle q_U} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ & & U & \xrightarrow{p} & Y \xrightarrow{f} X \end{array}$$

其中 $q$ 是从一个狄拉克概形出发的 $n$-次浸没映射，且该方块是笛卡尔的。映射 $q$ 存在，因为 $f$ 是 $(n+1)$-次浸没的。基变换 $q_U$ 也为 $n$-次浸没，因此我们可以找到一个从狄拉克概形出发的 $(n-1)$-次浸没映射 $r$，使得 $q_U r$ 是 0-下沉的。复合映射 $(fp)$ $(q_U r)$ 是狄拉克概形之间的一个 $n$-次浸没映射，因此根据引理 2.43，它是 0-下沉的。因此，$(fp)$ $(q_U r)$ 和 $q_U r$ 都是狄拉克概形之间的平坦映射，所以 $fp$ 是平坦的；而 $(fp)$ $(q_U r)$ 和 $q_U r$ 都是有效满射，因此 $fp$ 是有效满射。这就证明了该断言。□

现在，我们已经确立了狄拉克概形映射具有几何性和次浸没性的概念，并证明这两种性质在复合与基变换下都稳定，且对于平坦拓扑在底空间上局部成立，因此接下来我们将聚焦于几何狄拉克栈的绝对概念。

**定义 2.45**。 狄拉克栈 $X$ 是 $n$-几何的，当且仅当唯一映射

$$X \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

是 $n$-几何的。若存在某个 $n \geq 0$，使其为 $n$-几何的，则称其为几何的。

**注 2.46**。 按照我们的定义，狄拉克栈是 0-几何的，当且仅当它由一个狄拉克概形表示。也可以采用不同的选择，但正如我们在 警告 2.35 中所解释的，重要的是具有几何性，而不是对于某个特定的 $n$ 具有 $n \geq 0$-几何性。

我们记录几何狄拉克栈的一些基本稳定性性质。

**命题 2.47**。 设 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克栈之间的一个映射，并设 $n \geq 0$。
(a) 假设 $f$ 是 $n$-几何的。若 $X$ 是 $n$-几何的，则 $Y$也如此。(b) 假设 $f$ 是 $n$-次浸没的。若 $Y$是$(n+1)$-几何的，则 $X$也如此。(c) 假设 $X$ 是$(n+2)$-几何的。若 $Y$是$(n+1)$-几何的，则 $f$也如此。
特别地，几何狄拉克栈之间的所有映射都是几何的。

证明。 这是命题 2.38 和命题 2.40。 □

**命题 2.48**。 由几何栈张成的全子范畴Shv(Aff)$^{\mathrm{geom}}$ ⊂Shv(Aff) 在有限极限下封闭。更准确地说，终狄拉克栈是0-几何的；给定一个狄拉克栈的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

具有 $X'$、 $X$，并且是 $Y$ $n$-几何的； $Y'$ 也具有 $n$-几何性。

证明。只需证明关于纤维积的断言。若 $n=0$，则 $X$，$X'$，且 $Y$都是狄拉克概形，因此 $Y'$也是。若 $n\geq 1$，则由 命题 2.47 (c)，映射 $f$ 是 $n$<style id='31}-几何的，因此 $f'$也是。于是，命题 2.47 (a) 蕴含 $Y'$ 如所述是 $n$<style id='44}-几何的。□

**定理 2.49**。由几何狄拉克栈张成的全子范畴 Shv(Aff)$^{\mathrm{geom}}\subset$ Shv(Aff) 具有以下性质：

(1) 它包含仿射狄拉克概形的所有小余积。(2) 它在具有次沉浸面映射的群胚余极限下封闭。
此外，它是满足这些性质的最小子范畴。

证明。我们先证明 Shv(Aff)$^{\mathrm{geom}}$ 满足 (1) 和 (2)。对于 (1)，由 补遗 2.28 可知，仿射狄拉克概形的小余积是狄拉克概形，因而是几何狄拉克栈。对于 (2)，设 $S\colon \Delta^{\mathrm{op}}\to$ Shv(Aff) 是一个余极限为 $X$的群胚。根据 定理 2.19， $S$ 是有效的，即该方块

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{d_1} & S_0 \\ \downarrow{\scriptstyle d_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S_0 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

是笛卡尔的。在这种情况下，我们要证明，若 $d_0$ 是几何狄拉克栈之间的浸没映射，则 $X$ 是几何的。若我们选取一个 $n\geq 0$，使得 $S_0$ 和 $S_1$ 都是 $n$-几何的，则命题 2.47 (c) 表明 $d_0$ 是 $n$- 几何的，因此命题 2.44 表明 $d_0$ 是 $n$- 次浸没的。由于（水平的） $f$ 是一个有效满射，根据命题 2.41 以及 $d_0$ 是 $n$-次浸没的这一事实，我们得出（垂直的） $f$ 是 $n$-次浸没的。但此时命题 2.47 (b) 表明 $X$ 是 $(n+1)$-几何的，正如所需。

最后，我们令 $\mathcal{C}\subset$ Shv(Aff)$^{\mathrm{geom}}$ 为满足条件 (1) 和 (2) 的一个全子范畴，并对 $n\geq 0$进行归纳，证明 $\mathcal{C}$ 包含所有 $n$-几何狄拉克栈。对于$n=0$，我们必须证明 $\mathcal{C}$ 包含每个狄拉克概形 $X$。首先假设$X\simeq\coprod_{i\in I}X_i$ 是狄拉克概形的一个余积，其中每个狄拉克概形都可以嵌入为某个仿射 Dirac 概形的开子概形。我们可以将每个 $X_i\subset S_i$ 写成一族$(T_{i,\ j})_{j\in J_i}$ 特征开子概形$T_{i\text{的并}j}\subset S_i$，因此，由补遗 2.28 可知典范映射

$$V_0\simeq\coprod_{i\in I}\coprod_{j\in J_i}T_{i,j}\xrightarrow{p}X$$

是 0-下沉的。现在，由于 $p$ 是一个有效满射，其 Čech 神经

$$\Delta_+^{\mathrm{op}}\xrightarrow{V}\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$$

是一个余极限图，并且由于 Shv(Aff) 中的余积是不交的，我们有

$$V_k\simeq V_0^{\times_X[k]}\simeq\coprod_{i\in I}\coprod_{j_0,\dots,j_k\in J_i}T_{i,j_0}\times_{S_i}\cdots\times_{S_i}T_{i,j_k}$$

对 $k\geq 0$。但每个加项都是仿射 Dirac 概形，因为仿射 Dirac 概形的特征开子概形对有限交封闭，因此由性质 (1) 和 (2) 可得 $X$ 包含于 $\mathcal{C}$。

接下来，若 $X$ 是一般的狄拉克概形，则我们选取一族仿射开子概形 $(S_i)_{i\in I}$，使得 $\bigcup_{i\in I}|S_i| = |X|$。在这种情况下，典范映射

$$V_0 \simeq \coprod_{i\in I} U_i \xrightarrow{p} X$$

是一个有效满射，并且其 Čech 神经 $V\colon \Delta_+^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Shv(Aff)}$ 具有如下性质：对于所有 $k \geq 0$，狄拉克概形 $V_k$ 都是仿射 Dirac 概形的开子概形的余积。因此，根据上一段的证明，每个 $V_k$ 都包含于 $\mathcal{C}$ 中，故 $X$ 也如此。这就证明了情形 $n = 0$。

最后，我们令 $n \geq 1$，并假设归纳地，$\mathcal{C}$ 包含所有 $(n-1)$-几何狄拉克栈。给定一个 $n$-几何狄拉克栈 $X$，我们选取一个来自狄拉克概形的 $(n-1)$-次沉浸映射 $p\colon V_0 \to X$，并考虑它的 Čech 神经

$$\Delta_+^{\mathrm{op}} \xrightarrow{V} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}).$$

由于 $p$ 是 $(n-1)$-次沉浸的，且 $V|_{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 是一个有效群胚，我们得出 $V|_{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 中的所有面映射都是 $(n-1)$-次沉浸的。因此，根据命题 2.38，每个迭代面映射 $V_k \to V_0$ 也都是如此。但 $V_0$ 是 $(n-1)$-几何的，因为它是一个狄拉克概形，所以命题 2.47 表明，对于所有 $k \geq 0$，$V_k$ 都是 $(n-1)$-几何的。根据归纳假设，$V|_{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中一个带有次沉浸面映射的群胚，因此由性质（2）可得，$X$ 包含于 $\mathcal{C}$，如所需。□

**注 2.50**（平坦映射）。狄拉克概形的平坦映射这一概念可推广为狄拉克栈的平坦映射，定义如下。若在任意形如以下的图表中，狄拉克栈映射 $f\colon Y \to X$ 都满足

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

其中 $S$和 $T$是狄拉克概形，且 $p\colon\ S \to X$和 $(g,\ h)\colon\ T \to Y_S$是次浸没，则狄拉克概形映射 $g\colon\ T \to S$ 是平坦映射。可以证明，狄拉克栈映射是次浸没的，当且仅当它是平坦的有效满射。特别地，如果一个狄拉克栈的平坦映射存在截面，那么它就是次浸没的。因此，在 定理 2.49中，性质（2）等价于：

（2’）在具有平坦面映射的群胚余极限下封闭。

因此，该定理表明，由几何狄拉克栈构成的全子范畴，恰好是由狄拉克概形构成的全子范畴在具有平坦面映射的群胚余极限下的闭包。

## 3. 相干上同调

在本节中，我们构造一个函子，它将狄拉克栈 $X$ 映射到我们在引言中概述的拟凝聚$\mathcal{O}_X$-模所构成的可呈对称幺半稳定 $\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}(X)$。

**3.1. 准相干 $\mathcal{O}_X$-模。** 我们首先定义一个函子，它将仿射 Dirac 概形 $S$ 映射为其可呈示对称幺半稳定 $\infty$-范畴，其中的对象为准相干 $\mathcal{O}_S$-模。该定义用到了动画化，我们首先按照 [20, 第 5.5 节8]和 [6]回顾相关内容。

设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈示的 1-范畴。若对象 $P \in \mathcal{C}$ 所对应的映射 $\mathrm{Map}(P, -)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ 保持小滤过余极限，则称其为紧致 1-射影对象；我们将由紧致 1-射影对象张成的全子范畴的包含记作 $\pi_0\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{C}$。现在，若 $\mathcal{C}$ 由 $\pi_0\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{C}$在小滤过余极限下生成，则其动画化定义为初始映射

$$\mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \xrightarrow{h} \mathcal{C}^{\mathrm{an}}$$

到一个容许小滤过余极限的 $\infty$-范畴。因此，任何映射 $f_0\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{D}$ 到一个$\infty$-范畴 $\mathcal{D}$，只要该范畴容许小滤过余极限，就有唯一的分解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}^{\mathrm{an}} \\ & {\scriptstyle f_0}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

使得 $f$ 保持筛余极限。$\infty$-范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}$ 是可呈示的，并且映射 $h\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{an}}$ 保持有限余积。此外，如果 $\mathcal{D}$ 也容许所有小余极限，且 $f_0$ 保持有限余积，那么 $f$ 保持所有小余极限。特别地，包含映射 $\pi_0\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{C}$ 唯一分解为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}^{\mathrm{an}} \\ & {\scriptstyle \pi_0}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

并且由 $\pi$ 诱导的映射 $\bar{\pi}\colon \tau_{\leq 0}(\mathcal{C}^{\mathrm{an}}) \to \mathcal{C}$ 是一个等价，因此，$\pi$ 的右伴随可识别为包含映射 $s\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{an}}$，即由 0-截断对象张成的全子范畴的包含。

**引理 3.1**。若 $R$ 是一个狄拉克环，则阿贝尔范畴 模$_R$(阿贝尔群) 的动画化 模$_R$(阿贝尔群)$^{\mathrm{an}}$ 存在，且是一个完备的格罗滕迪克预稳定 $\infty$-范畴。

证明。阿贝尔范畴 $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})$中的紧致 1-射影对象是有限生成的射影分次 $R$-模，因此 $\mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \subset \mathcal{C}$在筛余极限下生成 $\mathcal{C}$。因此，动画化 $i\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{C}$ 存在，并且根据 [20, 命题 5.5.8，15], 与 Yoneda 嵌入 $h\colon \mathcal{C}^{\mathrm{cp}} \to \mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}})$ 一致，后者嵌入由保持有限积的函子 $(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$张成的全子范畴 $\mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}})$。此外，由于 $\mathcal{C}^{\mathrm{cp}}$ 是加性的，$\mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}})$ 根据 [23, 命题 C.1.5.7 和注 C.1.5.9] 是完备 Grothendieck 预稳定范畴。□

**定义 3.2**。如果 $S \simeq$Spec($R$) 是一个仿射 Dirac 堆栈，那么

$$\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \simeq \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{an}}$$

是分次 $R$-模阿贝尔范畴的动画化，并且

$$\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \xrightarrow{i} \mathrm{QCoh}(S) \simeq \mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{an}})$$

是它的稳定化。

**警告 3.3.** 虽然包含映射 $i$: 拟凝聚层($S$)$_{\geq 0} \to$ 拟凝聚层($S$) 对仿射 Dirac 概形而言是一种稳定化，但对于一般的狄拉克栈，这一结论并不成立。

为使读者确信，以动画化方式给出的定义十分自然，我们记录两个等价的定义。对于下面的 (3)，我们回顾 [12, §2.1] 中的结果：分次阿贝尔群范畴与分次谱上 Beilinson $t$-结构的心（作为对称幺半范畴）等价，因此任意狄拉克环都确定分次谱中的一个交换代数。

**命题 3.4.** 若 $S = \mathrm{Spec}(R)$ 是一个仿射 *Dirac* 概形，则以下$\infty$-范畴自然等价：

(1) $\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}(X) \simeq \mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{an}})$。(2) *Grothendieck* 阿贝尔范畴（由分次阿贝尔群中的$R$-模组成）的导出 $\infty$-范畴 $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab}))$。(3) $R$-模所在的 $\infty$-范畴 $\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z},\mathrm{Sp}))$，其中的谱是 $\mathbb{Z}$-分次谱。

证明。 $\infty$-范畴 (1)–(3) 都是可呈示且稳定的，并且配备右完备的 $t$-结构。因此，只需比较连通部分；根据动画化的泛性质，只需验证 (2) 和 (3) 在筛余极限下由紧投射对象所张成的子范畴生成，而这些子范畴都与 $\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{cp}}$ 相同。对于 (2)，这就是 [19, 命题 1.3.3.14],；对于 (3)，Beilinson $t$-结构的心由以下内容给出

$$\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z},\mathrm{Sp}))^{\heartsuit} \simeq \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z},\mathrm{Sp})^{\heartsuit}) \simeq \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab}),$$

而连通部分 $\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Fun}(\mathbb{Z},\mathrm{Sp})_{\geq 0}$ 是由心中紧投射对象所张成的子范畴在筛余极限下生成的；该子范畴恰为 $\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{cp}}$。□

$\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})$ 上的对称幺半结构限制到由紧致 1-射影对象张成的全子范畴上，并由此在 $\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0}$ 和 $\mathrm{QCoh}(S)$ 上，以及在 Yoneda 嵌入 $h$ 和典范包含 $i$ 上，诱导出对称幺半结构。

**引理 3.5**。 若 $S = \mathrm{Spec}(R)$ 是仿射 *Dirac* 概形，则函子

$$\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{cp}} \xrightarrow{h} \mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \xrightarrow{i} \mathrm{QCoh}(S)$$

可唯一地提升为对称幺半函子，使得中间项和右侧项上的张量积在每个变量中都保持余极限。

证明。由 [19, 命题 4.8.1.10 和 2.2.1.9] 得证。 □

分次阿贝尔群中紧致 1-射影 $R$-模所构成的对称幺半范畴关于 $R$ 是协变函子性的，其作用通过标量扩张实现；由 [19, 命题 4.8.1.10] 可知，这由此导出一个函子

$$\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})^{\Delta^1}$$

它将 $S$ 赋予对称幺半函子

$$\mathrm{QCoh}(S)^{\otimes}_{\geq 0} \xrightarrow{i^{\otimes}} \mathrm{QCoh}(S)^{\otimes}$$

由 引理 3.5给出。由于我们未能在文献中找到对这一论证的详细阐述，故借此机会在此详述。

**构造 3.6**。令 $\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{\Sigma}, \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{L} \subset \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 分别为由（可能是大的） $\infty$-范畴及其间保持相应余极限的函子所张成的子范畴；这些范畴分别具有有限余积和小余极限。我们回顾 [19, 推论 4.8.1。4] 指出，典范包含

$$\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{L} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{\Sigma}$$

提升为一个松对称幺半函子，使得诱导映射

$$\mathrm{CAlg}(\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{L}) \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{\Sigma})$$

是对称幺半 $\infty$-范畴的 $\infty$-范畴的典范包含：这些范畴的底层 $\infty$-范畴存在小余极限，且其张量积在每个变量上都保留小余极限；该包含映入对称幺半$\infty$-范畴的 $\infty$-范畴，而这些范畴的底层 $\infty$-范畴存在有限余积，且其张量积在每个变量上都保留有限余积。在这种情况下，由[19, 命题 4.8.1.10] 可知，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}(\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{L}) & \longrightarrow & \mathrm{CAlg}(\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{\Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{L} & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty^{\Sigma} \end{array}$$

是左伴随可延拓的。若 $\mathcal{C}$ 是小的，则底部水平映射的左伴随将 $\mathcal{C}$ 映到小 anima 的有限积保持预层所构成的 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C})$；根据 [20, 定理 5.5.1.1]，该范畴是可呈示的。因此，顶部水平映射的左伴随限制为一个映射

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty^{\Sigma}) \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$$

它从小对称幺半 $\infty$-范畴构成的 $\infty$-范畴出发，这些范畴的底层$\infty$-范畴具有有限余积，且其张量积在每个变量上都保持有限余积；目标是由可呈示对称幺半$\infty$-范畴构成的 $\infty$-范畴。由此可知，复合

$$\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty^{\Sigma}) \longrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$$

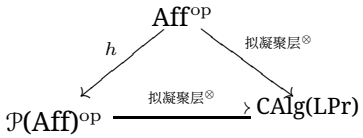
将 $S \simeq \mathrm{Spec}(R)$ 映到 $\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{cp}, \otimes}$ 的函子与受限左伴随复合后，得到一个将 $S$ 映到 $\mathrm{QCoh}(S)^{\otimes}_{\geq 0}$的函子。最后，映射

$$\mathrm{QCoh}(S)^{\otimes}_{\geq 0} \xrightarrow{i^{\otimes}} \mathrm{QCoh}(S)^{\otimes}$$

由与 $\mathrm{Sp} \in \mathrm{LPr}$ 的张量积给出，因为 $\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0}$ 是可呈示的，因此也是函子性的。

我们回顾一下注 A.4 中的结论：狄拉克预层的 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathrm{Aff})$ 是仿射狄拉克概形的 $\infty$-范畴Aff 的自由余完备化。因此，下面的定义是有意义的。

**定义 3.7**。 唯一的小极限保持扩张




由 构造 3.6 所给出的函子称为：它将狄拉克预层 $X$ 映到其可呈示对称幺半 $\infty$-范畴，其中包含拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模。

若 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克预层之间的映射，则记作

$$\mathrm{QCoh}(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(Y)$$

由 定义 3.7给出的伴随函子。我们称 $f^*$ 和 $f_*$ 分别为逆像和直接像。事实上，定义 3.7 使 $f^*$ 成为对称幺半函子，因此，根据 [19, 推论 7.3.2。7], 它也使 $f_*$ 成为松对称幺半函子。

**警告 3.8**。 我们常常滥用记号，对可呈示对称幺半 $\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}(X)^{\otimes}$ 及其底层的可呈示 $\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}(X)$，均简记为 $\mathrm{QCoh}(X)$。

设 $X$ 是一个狄拉克预层，令 $p\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 为唯一映射。由于逆像 $p^*$ 是对称幺半的，特别可得

$$\mathcal{O}_X \simeq p^*(\mathbb{Z})$$

是拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(X)$ 的张量单位。更一般地，其自旋-$s$ 塞尔扭转定义为

$$\mathcal{O}_X(s) \simeq p^*(\mathbb{Z}(s))$$

是拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(X)$ 中的张量可逆对象。

**定义 3.9.** 设 $X$ 是一个狄拉克预层，令 $p\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 为唯一映射，并设 $s$ 为半整数。拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 的自旋-$s$ 塞尔扭转是拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模

$$\mathcal{F}(s) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(s).$$

**注 3.10.** 对于狄拉克预层 $X$，我们可以更具体地描述 拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(X)$。根据 命题 A.2，任意预层 $X \in \mathcal{P}(\mathrm{Aff})$ 都可以写成由复合映射给出的图表的余极限

$$(\mathrm{Aff}_\kappa)_{/X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\kappa)_{/X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{Aff}_\kappa) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{Aff}),$$

对于某个小基数 $\kappa$。因此，根据定义，我们可以将拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(X)$ 识别为由复合映射给出的图表的极限

$$((\mathrm{Aff}_\kappa)_{/X})^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\mathrm{Aff}_\kappa)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{QCoh}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr}).$$

**注 3.11.** 设 $f\colon Y \to X$ 是一个狄拉克预层的映射，使得诱导的狄拉克叠映射 $L(f)\colon L(Y) \to L(X)$ 是一个等价。我们将在下文的定理 3.24 中证明，该 $f^*$: 拟凝聚层$(X) \to$拟凝聚层$(Y)$ 是一个等价。

**3.2. 典范的 $t$-结构。** 我们在 引理 3.1 中证明了，若 $S$ $\simeq$谱$(R)$ 是一个仿射狄拉克概形，则 $\infty$-范畴

$$\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \simeq \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab})^{\mathrm{an}}$$

是完备的 Grothendieck 预稳定范畴。因此，根据 [**23**, 命题 C.1.2。9],其稳定化拟凝聚层$(S)$ 具有典范的 $t$- 结构，且既左完备又右完备。此外，其连通部分是全忠实函子的本质像

$$\mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \xrightarrow{i} \mathrm{QCoh}(S),$$

其余连通部分在滤过余极限下稳定。

**注 3.12。** 在从 拟凝聚层$(S)$ $\simeq \mathcal{D}$(模$_R(\mathrm{Ab})$) 到命题 3.4所给出的等价下，典范的 $t$-结构对应于导出 $t$-范畴上的 $\infty$-结构，其中 $\mathcal{F}$ 当且仅当 $\pi_i(\mathcal{F})$ $\in$模$_R(\mathrm{Ab})$ 对所有 $i < 0$都为零。

**命题 3.13。** 设 $X \in \mathcal{P}$(Aff) 是一个狄拉克预层。
*(1) QCoh$(X)$* 上存在唯一的 $t$-结构，使得 $\mathcal{F} \in$*QCoh$(X)_{\geq 0}$* 当且仅当对于每个映射 $\eta$: $S \to X$，若 $S$ 是仿射的，则 $\eta^*(\mathcal{F})$ $\in$ *QCoh$(S)_{\geq 0}$* 。 *(2)* 若 $\mathcal{G} \in$ *QCoh$(X)$* 且对于每个映射 $\eta$: $S \to X$，若 $S$ 是仿射的，则 $\eta^*(\mathcal{G})$ $\in$ *QCoh$(S)_{\leq 0}$*，那么 $\mathcal{G} \in$*QCoh$(X)_{\leq 0}$*。 *(3)* 对于每个半整数 $s$， $\mathcal{O}_X(s)$ $\in$ *QCoh$(X)^{\heartsuit}$*。

证明。为证明 (1)，我们利用 命题 A.2 将 $X$ 写成由小图表 $S$组成的余极限：$K \to \mathcal{P}$(Aff) 其中各项都是仿射 Dirac 堆栈。因此，

$$\mathrm{QCoh}(X) \simeq \varprojlim_K \mathrm{QCoh}(S),$$

我们希望证明

$$\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0} \simeq \varprojlim_K \mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0}$$

是某个 $t$-结构的连通部分。但 拟凝聚层$(X)_{\geq 0}$ 和 拟凝聚层$(X)$ 都是可呈示的，因此根据 [**19**, 命题 1.4.4。11]只需证明

$$\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0} \subset \mathrm{QCoh}(X)$$

对小余极限和扩张封闭，这一点显然成立。由此证明了 (1)。

为证明 (2)，给定陈述中的 $\mathcal{G}$ $\in$拟凝聚层$(X)$，我们必须证明，对于每个 $\mathcal{F} \in$ 拟凝聚层$(X)_{\geq 0}$，映射 anima Map$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 都是 0-截断的。我们再次将 $X$ $\simeq \varinjlim_K S$写成由小图表 $S$: $K \to$Aff 中的仿射 Dirac 堆栈组成的余极限，并且对于 $k \in K$，令 $\eta_k$: $S_k \to X$为典范映射。这将所讨论的映射 anima 展示为一个极限

$$\mathrm{Map}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \varprojlim_{k \in K} \mathrm{Map}(\eta_k^*(\mathcal{F}), \eta_k^*(\mathcal{G}))$$

由 anima 构成，根据假设，其中每个 anima 都是 0-截断的。但极限也因此是 0-截断的，因为包含 $\mathcal{S}_{\leq 0} \to \mathcal{S}$ 保持极限。这就证明了 (2)。

最后，我们注意到 (3) 成立，因为对于每个映射 $\eta$: $S \to X$ （其中 $S$ 仿射）， $\eta^*(\mathcal{O}_X(s))$ $\simeq \mathcal{O}_S(s)$ $\in$ 拟凝聚层$(S)^{\heartsuit}$。□

**注 3.14.** 命题 命题 3.13中 (2) 的反向蕴含 $\eta^*$: 拟凝聚层$(X)$ $\to$ 拟凝聚层$(S)$ 一般而言未必保持余连通性，即使 $S$ 和 $X$ 都是仿射的。

我们回顾一下：具有$t$-结构的稳定 $\infty$-范畴之间的正合函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若满足 $F(\mathcal{C}_{\geq 0}) \subset \mathcal{D}_{\geq 0}$，则称为右 $t$-正合；若满足 $F(\mathcal{C}_{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_{\leq 0}$，则称为左 $t$-正合。若它既是左 $t$-正合又是右 $t$-正合，则称为 $t$-正合。

**补充说明 3.15**。 若 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克叠之间的映射，则标量扩张函子和标量限制函子

$$\mathrm{QCoh}(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(Y)$$

分别是右 $t$-正合和左 $t$-正合的。

证明。由于 $f^*$ 和 $f_*$ 伴随，前者是右$t$-正合这一陈述等价于后者是左 $t$-正合这一陈述。为证明 $f^*$是右 $t$-正合的，令 $\mathcal{F} \in$ 拟凝聚层$(X)_{\geq 0}$，并希望证明 $f^*(\mathcal{F}) \in$ 拟凝聚层$(Y)_{\geq 0}$。但若 $\eta\colon S \to Y$是来自某个仿射狄拉克概形的映射，则 $f \circ \eta\colon S \to X$也如此，因此

$$\eta^*(f^*(\mathcal{F})) \simeq (f \circ \eta)^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0},$$

因为 $\mathcal{F} \in$拟凝聚层$(X)_{\geq 0}$。 □

**注 3.16**（与导出 $\infty$-范畴的比较）。 若 $X$ 是任意狄拉克预层，则存在一个典范正合函子

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit) \longrightarrow \mathrm{QCoh}(X)$$

来自有界导出 $\infty$范畴，其中对象属于拟凝聚层阿贝尔范畴$\mathcal{O}_X$的模。在这一一般性下，函子和有界导出 $\infty$范畴的构造见 [4, 推论7。59]然而，它未必是全忠实的，即使对于拟紧拟分离概形也是如此，正如 Verdier 在 [36, 专题 II，附录 I] 中的反例所示。事实上，一般而言， $\infty$范畴 $\mathcal{D}^b(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)$ 甚至可能不是局部小的，这与可呈示 $\infty$范畴$\mathrm{QCoh}(X)$不同。

**注 3.17**。 若 $S \simeq$ 谱$(R)$ 是仿射的，那么 $t$QCoh$(S) \simeq \mathcal{D}(\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ab}))$ 上的典范[19, 命题 1.3.521]所给的结构与滤过余极限相容。我们将证明，更一般地，若 $X$ 按照定义 2.45的意义是几何的，则此结论成立。特别地，对于几何的 $X$， $\infty$范畴 $\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0}$ 按照 [23, 定义 C.1.42]的意义是 Grothendieck 预稳定的。

**3.3. 拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模的下降**。 我们接下来证明，拟凝聚层 的 定义 3.7 中的函子 $L\colon \mathcal{P}$(Aff) $\to$ Shv(Aff)可经由层化函子分解，并从以下引理开始。

**引理 3.18**。 给定一个仿射狄拉克概形的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{g'} & T \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

其中 $f$ 或 $g$ 或二者都是平坦的，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(T') & \xleftarrow{g'^*} & \mathrm{QCoh}(T) \\ \uparrow{\scriptstyle f'^*} & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{QCoh}(S') & \xleftarrow{g^*} & \mathrm{QCoh}(S) \end{array}$$

在以下意义下是右伴随可交换的：典范映射

$$f^*g_* \longrightarrow g'_*g'^*f^*g_* \simeq g'_*f'^*g^*g_* \longrightarrow g'_*f'^*$$

是一个等价。

证明。记 $S \simeq \mathrm{Spec}(A)$、$S' \simeq \mathrm{Spec}(A')$、$T \simeq \mathrm{Spec}(B)$ 和 $T' \simeq \mathrm{Spec}(B')$。右伴随 $g_*$ 和 $g'_*$ 存在；由于我们只考虑仿射狄拉克概形，它们由标量限制给出，因此保小余极限。所以，只需证明，对于可呈示稳定 $\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}(S')$ 的生成元 $A'$，映射 $f^*g_*(A') \to g'_*f'^*(A')$ 是一个等价。但这个映射由典范投影给出

$$A' \otimes^L_A B \longrightarrow A' \otimes_A B \simeq B',$$

根据 $f$ 或 $g$ 或两者都平坦这一假设，它是一个等价。 □

**注 3.19**。 如果我们通过将狄拉克环替换为动画化狄拉克环来构造动画化狄拉克几何，那么 引理 3.18 的类似结论无需任何平坦性假设即可成立。

下面对相对仿射情形的推广将在后文用到。这里，给定一个狄拉克叠的态射 $f\colon Y \to X$，若对于任意来自仿射概形的映射 $\eta\colon S \to X$，拉回 $Y \times_X S$ 是仿射概形，且诱导的态射 $Y \times_X S \to S$ 是平坦的，则称其为平坦仿射映射。

**命题 3.20.** 若 $f\colon Y \to X$ 是狄拉克叠之间的平坦仿射映射，则有以下结论：

(1) 函子 $f_*\colon$ 拟凝聚层$(Y) \to$ 拟凝聚层$(X)$ 是 $t$-正合的，并且存在右伴随。(2) 若 $g\colon X' \to X$ 是任意一个狄拉克叠之间的映射，并且 $f'\colon Y' \to X'$ 是 $f$ 沿 $g$ 的基变换，则

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{QCoh}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g'^*} \\ \mathrm{QCoh}(X') & \xrightarrow{f'^*} & \mathrm{QCoh}(Y') \end{array}$$

在如下意义下是右伴随可交换的：基变换映射

$$g^*f_* \longrightarrow f'_*f'^*g^*f_* \simeq f'_*g'^*f^*f_* \longrightarrow f'_*g'^*$$

是一个等价。

证明。我们先证明 (1)。由于 $f\colon Y \to X$ 是仿射的，存在一个伴随

$$\mathrm{Aff}_{/Y} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{Aff}_{/X}$$

其中，$u$ 由与 $f$ 复合给出，$v$ 由沿 $f$的基变换给出。伴随的余单位$p$ 诱导出一个函子之间的自然变换

$$\mathrm{QCoh}(S) \xrightarrow{p^*} \mathrm{QCoh}(S \times_X Y)$$

从 $(\mathbf{Aff}/X)^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{Cat}_\infty$，该函子由沿典范投影 $p\colon S \times_X Y \to S$ 的标量扩张给出，并且我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{(S,S\to X)} \mathrm{QCoh}(S) & \xrightarrow{f^*} & \varprojlim_{(T,T\to Y)} \mathrm{QCoh}(T) \\ & {\scriptstyle p^*}\searrow \quad \swarrow & \\ & \varprojlim_{(S,S\to X)} \mathrm{QCoh}(S \times_X Y) & \end{array}$$

分别由 $u^{\mathrm{op}}$ 和 $v^{\mathrm{op}}$诱导的极限映射，分别对应顶部的水平映射和右侧的斜映射。此外，后一个映射是等价。事实上，这可由[20, 例 221], 得出，因为 $v$ 有一个左伴随，因此是一个 极限⟶-等价。于是，为了证明 $f_*$ 有一个右伴随，我们可以转而证明 $p^*$ 有一个右伴随 $p_*$，而它本身还有一个进一步的右伴随。

我们可以将 $p^*$ 视为 $\mathbf{LPr}$ 中的一个映射，因此显然它有一个右伴随 $p_*$。为了理解 $p_*$，我们使用 [19, 命题 4.7.4.19]。其中假设 (*) 要求，对于 $\mathbf{Aff}/X$ 中的每个映射 $h\colon T \to S$，方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(S) & \xrightarrow{(p_S)^*} & \mathrm{QCoh}(S \times_X Y) \\ \downarrow{\scriptstyle h^*} & & \downarrow{\scriptstyle h'^*} \\ \mathrm{QCoh}(T) & \xrightarrow{(p_T)^*} & \mathrm{QCoh}(T \times_X Y) \end{array}$$

是右伴随可交换的，这由 引理 3.18得出，因为 $f\colon Y \to X$ 是平坦仿射的。因此我们得出 $p_*$ 是由一个自然变换诱导的极限映射

$$\mathrm{QCoh}(S \times_X Y) \xrightarrow{(p_S)_*} \mathrm{QCoh}(S)$$

$\widehat{\ }$从 $(\mathbf{Aff}/X)^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{Cat}_\infty$ 的函子。

现在，对于每个 $(S,\ S \to X)$，我们可以将 $(p_S)_*$ 视为沿着一个狄拉克环映射的标量限制，因此它是右 $t$-正合的。这意味着由此诱导的极限映射 $p_*$ 是右 $t$-正合的，由此可见 $f_*$ 是右 $t$-正合的。但根据 补充说明 3.15， $f_*$ 也左 $t$-正合，因此我们得出结论： $f_*$ 是 $t$-正合的。

类似地，对于每个 $(S, S \to X)$，函子 $(p_S)_*$ 有一个由标量余扩张给出的右伴随。因此，我们可以将 $(p_S)_*$ 视为从 $(\mathbf{Aff}/X)^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{LPr}$ 的函子之间的自然变换，并且由于遗忘函子

$$\mathbf{LPr} \longrightarrow \widehat{\mathbf{Cat}}_\infty$$

保持极限不变，因此我们得出 $p_*$ 具有一个右伴随。[5] 所以 $f_*$ 具有一个右伴随，从而完成了(1)的证明。

[5] $p_*$ 的右伴随通常不是由自然变换诱导的极限映射。

接下来还需证明(2)。首先，如果 $X'$ 是仿射的，那么按照上述(1)的证明中的记号，我们可以等价地证明该图表

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{(S,S\to X)} \mathrm{QCoh}(S) & \xrightarrow{p^*} & \varprojlim_{(S,S\to X)} \mathrm{QCoh}(S\times_X Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_g} \\ \mathrm{QCoh}(X') & \xrightarrow{(p_{X'})^*} & \mathrm{QCoh}(X'\times_X Y) \end{array}$$

是右伴随可交换的。但这可由 [19, 命题 4.7.4i9],推出，因为对每个$\eta$： $S\to X$ 以及 $h$: $T\to S$，若 $S$ 且 $T$ 仿射，则图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(S) & \xrightarrow{(p_S)^*} & \mathrm{QCoh}(S\times_X Y) \\ \downarrow{\scriptstyle h^*} & & \downarrow{\scriptstyle h'^*} \\ \mathrm{QCoh}(T) & \xrightarrow{(p_T)^*} & \mathrm{QCoh}(T\times_X Y) \end{array}$$

由 引理 3.18可知是右伴随可交换的。

一般而言，我们利用这样一个事实：$\mathsf{QCoh}(X')$ 中的映射是等价，当且仅当对每个满足 $X''$ 仿射的映射 $h$: $X''\to X'$，其逆像 $h^*$: $\mathsf{QCoh}(X')\to\mathsf{QCoh}(X'')$ 所对应的映射都是等价。因此我们考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{QCoh}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g'^*} \\ \mathrm{QCoh}(X') & \xrightarrow{f'^*} & \mathrm{QCoh}(Y') \\ \downarrow{\scriptstyle h^*} & & \downarrow{\scriptstyle h'^*} \\ \mathrm{QCoh}(X'') & \xrightarrow{f''^*} & \mathrm{QCoh}(Y'') \end{array}$$

其中 $f'$是 $f$沿 $g$的基变换， $f''$是 $f'$沿 $h$的基变换。由于$X''$ 是仿射的，根据已证明的结果，外侧方块和底部方块都是右伴随可交换的。因此，在典范映射图表中

$$\begin{array}{ccc} h^*g^*f_* & \longrightarrow & h^*f'_*g'^* \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & f''_*h'^*g'^*, & \end{array}$$

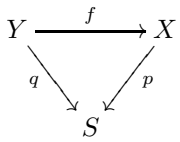
两个斜向映射都是等价，因此顶部的水平映射也如此。因此，我们得出结论，典范映射

$$f^*g_* \longrightarrow f'_*g'^*$$

是一个等价，这正是我们想要证明的。 □

**注 3.21**。 理解 命题 3.20 第二部分的一个有用方式是：如果 $f$ 是平坦仿射的，那么 $f_*$ 可以在目标上局部计算。

**注 3.22**。 命题 3.20 的一个推论是，在以下情形中，可以通过“相对单射”分解来计算相干上同调




对于 $f$ 仿射平坦且为有效满射的映射，并且 $Y$ 为仿射，并且 $S \simeq$ 谱$(\mathbb{Z})$。直接像 $q_*$ 是 $t$-正合的，因为 $q$ 是狄拉克概形之间的映射，并且 $f_*$ 是 $t$-正合的，这是由 命题 3.20得出的。因此，给定一个分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{G}^1 \longrightarrow \cdots$$

在阿贝尔范畴 拟凝聚层$(X)^\heartsuit$ 中，使得各项 $\mathcal{G}^n$ 属于 $f_*$: 拟凝聚层$(Y)^\heartsuit \to$ 拟凝聚层$(X)^\heartsuit$的本质像，相干上同调

$$p_*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(S)_{\leq 0} \simeq \mathcal{D}(\mathrm{Ab})_{\leq 0}$$

由复形表示

$$p_*(\mathcal{G}^0) \longrightarrow p_*(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \cdots$$

在阿贝尔范畴 拟凝聚层$(S)^\heartsuit \simeq$ 阿贝尔群中。在同伦论文献中， $f_*$: 拟凝聚层$(Y)^\heartsuit \to$ 拟凝聚层$(X)^\heartsuit$ 的本质像中的对象称为相对内射对象。

现在我们继续证明，拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模的 $\infty$-范畴沿有效满射下降。

**命题 3.23.** 若 $f\colon T \to S$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射，则图表 拟凝聚层$(T^{\times_S[-]})\colon \Delta_+ \to$ LPr 是极限图表。

证明。令 $U \simeq T^{\times_S[-]}\colon \Delta_+^{\mathrm{op}} \to$ Aff 为 $f$的 Čech 神经，并希望证明拟凝聚层$(U)\colon \Delta_+ \to$ LPr 是一个极限图表。根据 [20, 引理 6.2.3.7],，我们可以转而证明，沿着由保序单射张成的（非满）子范畴 $\Delta_{s+} \subset \Delta_+$ 的限制拟凝聚层$(U)|_{\Delta_{s+}}\colon \Delta_{s+} \to$ LPr 是一个极限图表。限制到 $\Delta_{s+} \subset \Delta_+$ 的好处是，在图表 $U|_{\Delta_{s+}}\colon \Delta_{s+}^{\mathrm{op}} \to$ Aff 中，每个映射都是 $f$的基变换，因此是平坦的。所以根据命题 3.20，对于 $\Delta_{s+}$中的每个映射 $\theta\colon [n] \to [m]$，我们有一个图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{QCoh}(U_m)_{\geq 0} & \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} & \mathrm{QCoh}(U_m) & \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & \mathrm{QCoh}(U_m)_{\leq -1} \\
\downarrow{\scriptstyle \theta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^*} \\
\mathrm{QCoh}(U_n)_{\geq 0} & \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} & \mathrm{QCoh}(U_n) & \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & \mathrm{QCoh}(U_n)_{\leq -1}
\end{array}$$

其中各行都是半正交分解。因此，retractions$r$ 定义了一个从 QCoh$(U)|_{\Delta_{s+}}$ 到这些图表的极限的图表映射

$$\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathrm{QCoh}(U)_{\geq 0}|_{\Delta_{s+}} \xrightarrow{\Omega} \mathrm{QCoh}(U)_{\geq 0}|_{\Delta_{s+}},$$

根据 QCoh$(U)$ 是 QCoh$(U)_{\geq 0}$ 的稳定化这一点的定义，这个映射是一个等价。因此，由于极限与极限可交换，只需证明

图表 $\mathrm{QCoh}(U)_{\geq 0}|_{\Delta_{s+}}\colon \Delta_{s+} \to \mathrm{LPr}$，或者等价地，图表

$$\Delta_+ \xrightarrow{\mathrm{QCoh}(U)_{\geq 0}} \widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$$

是一个极限图表。为此，我们利用 Barr–Beck–Lurie 定理的对偶形式[19, 定理 4.7.5。3],只需验证以下内容：

(1) 函子 $f^*$: 拟凝聚层$(U_{-1})_{\geq 0} \to$ 拟凝聚层$(U_0)_{\geq 0}$ 是余单子性的。

(2) 对于 $\Delta_+$ 中的每个映射 $\theta\colon [m] \to n$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(U_m)_{\geq 0} & \xrightarrow{d_0^*} & \mathrm{QCoh}(U_{m+1})_{\geq 0} \\ \downarrow{\scriptstyle \theta^*} & & \downarrow{\scriptstyle ([0]*\theta)^*} \\ \mathrm{QCoh}(U_n)_{\geq 0} & \xrightarrow{d_0^*} & \mathrm{QCoh}(U_{n+1})_{\geq 0} \end{array}$$

是右伴随可交换的。

但由 [23, 命题 D.6.4.6], 可知 (1) 成立，因为映射 $f\colon T \to S$ 是忠实平坦的；由引理 3.18可知 (2) 成立，因为映射 $d_0\colon U_m \to U_{m+1}$ 是平坦的。□

**定理 3.24**。在可缩选择的意义下，存在唯一的分解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{L} & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \\ & {\scriptstyle \mathrm{QCoh}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{QCoh}} & \\ & \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr}) & \end{array}$$

经过层化函子 $L$，此外，该函子

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{QCoh}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$$

将狄拉克叠的小余极限映为对称幺单 $\infty$-范畴的极限。

证明。 我们必须证明函子 拟凝聚层: $\mathcal{P}(\mathbf{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$ 将 注 2.18 中的余极限交换映射映为 $\infty$-范畴的等价；由于遗忘函子 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$ 到 LPr 保持并反映极限，只需证明函子 拟凝聚层: $\mathcal{P}(\mathbf{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{LPr}$ 也如此。因此，我们必须证明，对于每个仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射 $f\colon T \to S$，映射

$$\mathrm{QCoh}(S) \longrightarrow \varprojlim_{\Delta} \mathrm{QCoh}(T^{\times_S [-]})$$

是一个等价；并且对于每一对仿射狄拉克概形 $(S_1, S_2)$，映射

$$\mathrm{QCoh}(S_1 \sqcup S_2) \longrightarrow \mathrm{QCoh}(S_1) \times \mathrm{QCoh}(S_2)$$

是一个等价。前一陈述由 命题 3.23 得出，后一陈述则由两个分次环的乘积上分次模的幂等元分解得出。□

**注记 3.25.** 我们注意到，定理 3.24等价于以下陈述：对于每个狄拉克预层 $X$，由层化伴随的单位诱导的映射

$$\mathrm{QCoh}((\iota \circ L)(X)) \xrightarrow{\eta^*} \mathrm{QCoh}(X)$$

是一个等价。在同伦论中，这一事实最早由 Hopkins 发现 [14]。

**推论 3.26**。 如果 $p\colon Y \to X$ 是层范畴中的有效满射，则以下结论成立：

(1) 图表 拟凝聚层$(Y^{\times_X[-]})\colon \Delta_+ \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{LPr})$ 是一个极限图表。(2) 逆像 $p^*$: 拟凝聚层$(X) \to$ 拟凝聚层$(Y)$ 是保守的。

证明。 该 $p\colon Y \to X$ 是一个有效满射，按定义，这意味着图表 $Y^{\times_X[-]}\colon \Delta_+^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Shv(Aff)}$ 是一个余极限图表。因此，断言 (1) 由 定理 3.24 得出。断言 (2) 由 (1) 以及以下民间常识得出，我们将在 [12, 引理 B.1], 中证明：若 $\mathcal{C}\colon \Delta \to \mathrm{Cat}_\infty$ 是一个余单纯$\infty$范畴，则典范映射 $\lim_{\longleftarrow \Delta} \mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$ 是保守的。 □

**3.4. 几何栈上的拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模。** 几何狄拉克栈的一项优势是，稳定 $\infty$ 范畴中拟凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模的 $t$-结构具有特别良好的性质，下面我们将对此进行说明。

**定理 3.27**。若 $X$ 是一个几何狄拉克栈，则以下结论成立：
*(1)* 可呈示稳定 $\infty$范畴 *QCoh(X)* 上的典范 $t$-结构是左完备、右完备的，并且与滤过余极限相容。*(2)* 可呈示 $\infty$范畴 $\mathit{QCoh}(X)_{\geq 0}$ 是完备 *Grothendieck* 预稳定范畴，且包含 $i\colon \mathit{QCoh}(X)_{\geq 0} \to \mathit{QCoh}(X)$ 是一种稳定化。*(3)* 对于 $\mathcal{F} \in \mathit{QCoh}(X)$，以下条件等价：*(a)* $\mathcal{F} \in \mathit{QCoh}(X)_{\leq 0}$。*(b)* 存在一个浸没 $p\colon V \to X$，其中 $V$ 是仿射 *Dirac* 概形的小余积，使得 $p^*(\mathcal{F}) \in \mathit{QCoh}(V)_{\leq 0}$。*(c)* 对每个浸没 $p\colon V \to X$，其中 $V$ 是仿射 *Dirac* 概形的小余积，均有 $p^*(\mathcal{F}) \in \mathit{QCoh}(V)_{\leq 0}$。

证明。 注意到，根据 [23, 推论C.3.1，4]（1）和（2）是等价的。为证明该定理，称几何栈 $X$ 是良好的，如果（1）–（3）对 $X$成立。因此，我们要证明所有几何栈都是良好的。根据 定理 2.49中的极小性部分，只需验证以下内容：

（i）若 $X \simeq \coprod_\alpha U_\alpha$ 是仿射 Dirac 概形的小余积，则 $X$ 是良好的。（ii）若 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Shv(Aff)}$ 是由良好的几何栈构成、面映射为次浸没映射的群胚，则余极限 $\lim_{\longrightarrow [n] \in \Delta^{\mathrm{op}}} X_n$ 是良好的。

为验证（i），令 $X \simeq \coprod_\alpha U_\alpha$ 为仿射 Dirac 概形的小余积，并首先证明 $X$ 满足陈述中的（1）。根据拟凝聚层的定义，我们有

$$\mathrm{QCoh}(X) \simeq \prod_\alpha \mathrm{QCoh}(U_\alpha),$$

根据典范 $t$-结构的定义，我们有

$$\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0} \simeq \prod_\alpha \mathrm{QCoh}(U_\alpha)_{\geq 0}.$$

此外，由于 anima 的乘积可缩当且仅当其所有因子都可缩，因此典范 $t$-结构的余连通部分为

$$\mathrm{QCoh}(X)_{\leq 0} \simeq \prod_\alpha \mathrm{QCoh}(U_\alpha)_{\leq 0}.$$

根据 命题 3.4，对于 $U_\alpha \simeq$谱$(R_\alpha)$，我们有一个等价

$$\mathrm{QCoh}(U_\alpha) \simeq \mathcal{D}(\mathrm{Mod}_{R_\alpha}(\mathrm{Ab}))$$

与一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴的导出 $\infty$-范畴有关，因此根据 [19, 命题 1.3.3.16、1.3.5.21 和 1.3.5.24], , $t$上的规范拟凝聚层$(U_\alpha)$ -结构是左完备且右完备的，并且与滤过余极限相容。但是

左完备和右完备的性质是用极限来表述的，因此在 $\infty$-范畴的积下保持稳定；根据 [23, 命题 C.3.2.4]，与滤过余极限相容这一性质也是如此。这说明 (1) 对 $X$成立。

为了证明 $X$ 满足 (3)，令 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$。显然，(c) 蕴含 (b)，因此我们接下来证明 (a) 蕴含 (c)，以及 (b) 蕴含 (a)。首先假设 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)^{\leq 0}$，并令 $p\colon V \to X$ 是一个浸没，其中 $V \simeq \coprod_\beta V_\beta$ 是仿射狄拉克概形的小余积。我们希望证明 $p^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(V)^{\leq 0}$，或者等价地，对所有 $\beta$，证明 $p_\beta^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(V_\beta)^{\leq 0}$，其中 $j_\beta\colon V_\beta \to V$ 是典范开浸入，且 $p_\beta = pj_\beta$。由于 $V_\beta$ 是拟紧的，映射 $p_\beta\colon V_\beta \to X$ 可分解为 $p_\beta = i_\beta q_\beta$，其中 $i_\beta\colon X_\beta \to X$ 是某个有限子余积 $X_\beta = \coprod_{\alpha \in I_\beta} U_\alpha$ 的典范开浸入。因此我们得到一个狄拉克概形图表

$$\begin{array}{ccc} V_\beta & \xrightarrow{j_\beta} & V \\ \downarrow{\scriptstyle q_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X_\beta & \xrightarrow{i_\beta} & X \end{array}$$

其中 $p$ 是一个浸没，$j_\beta$ 和 $i_\beta$ 是开浸入。现在，由引理 2.43 可知 $p$ 是平坦的，因此 $pj_\beta \simeq i_\beta q_\beta$ 也是平坦的。由于 $i_\beta$ 是开浸入，可知 $q_\beta$ 是平坦的。由于 $q_\beta$ 是仿射狄拉克概形之间的平坦映射，我们得出 $q_\beta^*$ 是 $t$-正合的。但 $i_\beta^*$ 也是 $t$-正合的，因为 $i_\beta$ 是直和项的包含，因此 $p_\beta^* \simeq q_\beta^* i_\beta^*$ 也是如此。由此可知 $p_\beta^*(\mathcal{F}) \in$ 拟凝聚层$(V_\beta)^{\leq 0}$，这正是我们要证明的结论。这表明 (a) 蕴含 (c)。

最后，为了证明 (b) 蕴含 (a)，令 $\mathcal{F} \in$ 拟凝聚层$(X)$ 并令 $p\colon V \to X$是一个浸没，且 $V \simeq \coprod_\beta V_\beta$ 是仿射狄拉克概形的一个小余积，使得 $p^*(\mathcal{F}) \in$ 拟凝聚层$(V)^{\leq 0}$。现在，对每个 $\alpha$，由 引理 2.43 和注 2.31 可知我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} W_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & V \\ \downarrow{\scriptstyle q_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & X \end{array}$$

其中 $i_\alpha$ 和 $j_\alpha$ 是开浸入，且 $q_\beta$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射。因此，在图表中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(X) & \xrightarrow{(i_\alpha^*)} & \prod_\alpha \mathrm{QCoh}(U_\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle p^*} & & \downarrow{\scriptstyle \prod_\alpha q_\alpha^*} \\ \mathrm{QCoh}(V) & \xrightarrow{(j_\alpha^*)} & \prod_\alpha \mathrm{QCoh}(W_\alpha), \end{array}$$

上方的水平映射是一个等价，而下方的水平映射保持（连通性和）余连通性；另一方面，右侧的垂直映射保持并反映（连通性和）余连通性。由于 $p^*$（$\mathcal{F}$）$\in$ 拟凝聚层（$V$）$^{\leq 0}$，我们得到 $\mathcal{F} \in$拟凝聚层（$X$）$^{\leq 0}$，正如所需。这表明 (b) 蕴含 (a)，从而完成了 (i) 的证明。

剩下需要证明 (ii)。我们声称，若 $f\colon Y \to X$ 是良几何狄拉克栈之间的任意浸没，且 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$，则 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)^{\leq 0}$ 当且仅当$f^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(Y)^{\leq 0}$。事实上，若我们选取一个浸没 $p\colon V \to Y$，使得 $V$ 是一个小

仿射 Dirac 堆栈的余积，那么 $q \simeq fp\colon V \to X$ 也同样是浸没，因此由 (3) 可知，$\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)_{\leq 0}$ 当且仅当 $q^*(\mathcal{F}) \simeq p^*(f^*(\mathcal{F})) \in \mathrm{QCoh}(V)_{\leq 0}$ 当且仅当 $f^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(Y)_{\leq 0}$，如所声称。

现在，为了证明 (ii)，设 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 是良好几何叠中的一个群胚，其面映射都是浸没，并证明

$$|X| \simeq \varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} X_n \simeq \varinjlim_{[n]\in\Delta_s^{\mathrm{op}}} X_n$$

是良好的。这里 $\Delta_s \subset \Delta$ 是由保序单射张成的子范畴，而右侧的等价由[20, 引理 6.5.3。7]我们上面证明的断言表明，图表 拟凝聚层$(X)_{\geq 0}\colon \Delta_s \to \mathrm{LPr}$ 可经由典范包含进行分解

$$\mathrm{Groth}_\infty^{\mathrm{lex}} \longrightarrow \mathrm{LPr}$$

由格罗滕迪克预稳定 $\infty$-范畴以及它们之间保持小余极限和有限极限的函子所张成的（非满）子范畴。但 Lurie 在 [23, 命题 C.3.2.4] 中证明，该子范畴在小极限下封闭，因此我们得出 $\infty$-范畴

$$\mathrm{QCoh}(|X|)_{\geq 0} \simeq \varprojlim_{[n]\in\Delta_s} \mathrm{QCoh}(X_n)_{\geq 0}$$

是格罗滕迪克预稳定的。它也是完备的，因为完备性是用极限和截断来表达的性质，而这两者都在沿左正合函子的极限下保持不变；由[23, 推论 C.3.2.5] 可知

$$\mathrm{QCoh}(|X|)_{\geq 0} \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{QCoh}(|X|)$$

是一个稳定化。这表明 (2)，或等价地 (1)，对 $|X|$成立。

最后，为了证明 (3) 对 $|X|$也成立，令 $p\colon V \to |X|$ 是一个浸没，且$V$ 是仿射狄拉克概形的小余积。由于 $f\colon X_0 \to |X|$ 是一个有效满射，我们可以应用 引理 2.39 得到图表

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\ q\ } & X_0 \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \xrightarrow{\ p\ } & |X| \end{array}$$

其中 $g$ 和 $q$ 都是来自仿射 Dirac 概形小余积的浸没。由于 $X_0$ 和 $V$ 都是良好的，我们得出，在图表中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(|X|) & \xrightarrow{\ p^*\ } & \mathrm{QCoh}(V) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathrm{QCoh}(X_0) & \xrightarrow{\ q^*\ } & \mathrm{QCoh}(W), \end{array}$$

映射 $g^*$ 和 $q^*$ 保持并反映余连通性，$f^*$ 也如此，因为它是预稳定 $\infty$-范畴之间一个余连续左正合函子的稳定化。因此，$p^*$ 也保持并反映余连通性，这表明 (3) 对 $|X|$ 成立。由此完成了 (ii) 的证明，也就完成了定理的证明。□

**注 3.28.** 如注 2.50所述，可以将狄拉克概形之间平坦映射的概念推广到几何狄拉克栈之间。此外，我们还可以

证明，若 $f\colon Y \to X$ 是几何狄拉克栈之间的平坦映射，则逆像函子 $f^*\colon$ 拟凝聚层$(X) \to$ 拟凝聚层 $(Y)$ 是 $t$- 正合的。

**3.5. 仿射映射与向量丛。** 我们讨论拟相干 $\mathcal{O}_X$-模与叠的仿射映射之间的关系，现定义仿射映射。

**定义 3.29。** 若狄拉克叠 $f\colon Y \to X$ 沿任意来自仿射狄拉克概形的映射 $\eta\colon S \to X$ 作基变换 $f_S\colon Y_S \to S$ 后，其定义域都是仿射狄拉克概形，则称该映射为仿射映射。

我们用 $\mathbf{Shv(Aff)}^{\mathrm{aff}}_{/X}$ 表示由仿射映射 $f\colon Y \to X$张成的全子范畴 $\mathbf{Shv(Aff)}_{/X}$。

**例 3.30。** 到仿射狄拉克概形的狄拉克叠映射 $f\colon Y \to S$ 是仿射映射，当且仅当 $Y$是仿射狄拉克概形。因此，狄拉克谱函子

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(S)^{\heartsuit})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Spec}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/S}$$

是 $\infty$-范畴之间的等价。

显然，仿射这一性质在基变换下保持不变。现在我们证明它是底空间上的局部性质。

**命题 3.31。** 若 $p\colon X' \to X$ 是狄拉克叠之间的有效满射，则

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X'} \end{array}$$

是 $\infty$-范畴的一个笛卡尔图表。

证明。首先假设 $p\colon X' \to X$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射 $q\colon T \to S$，并考虑展开后的图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/S} & \longrightarrow & \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/T^{\times_S [n]}} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/T} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/S} & \longrightarrow & \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/T^{\times_S [n]}} & \longrightarrow & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/T}. \end{array}$$

右侧的方块是笛卡尔图表，因为仿射这一性质在基变换下保持不变，而左侧的两条水平映射都是等价。事实上，底部映射的结论由 定理 2.21 得出；顶部映射的结论则由模的忠实平坦下降 [12, 命题 1。4]以及 例 3.30 得出。

接下来，在一般情形下，我们必须证明：若 $f\colon Y \to X$ 是一个狄拉克堆栈之间的映射，且它沿 $f'\colon Y' \to X'$的基变换 $p$是仿射的，那么$f$ 也是仿射的。因此，设 $\eta\colon S \to X$ 是一个从仿射狄拉克堆栈出发的映射，我们必须证明 $f_S\colon Y_S \to X$ 沿 $f$ 的基变换 $\eta$ 是仿射的。由于 $p$ 是一个有效满射，根据 命题 B.6，我们得出存在一个图表

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\xi} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

其中 $q$ 是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射。根据已经证明的结论，只需证明 $f_T$: $Y_T \to T$ 沿 $\eta q$ 对 $f$ 的基变换是仿射的即可。但 $f_T$ 也是 $f'$ 沿 $\xi$ 的基变换，并且由于 $f'$ 是仿射的， $f_T$ 也是仿射的。□

**例 3.32**。 几何狄拉克栈 $X$ 存在一个有效满射

$$S \simeq \coprod_{i \in I} S_i \xrightarrow{p} X$$

来自 Shv(Aff) 中的一族仿射狄拉克概形的余积。由于 Shv(Aff) 中的余积具有泛性质，命题 3.31 表明 $f\colon Y \to X$ 是仿射的，当且仅当它沿 $p_i\colon S_i \to X$ 的基变换 $f_i'\colon Y_{S_i} \to S_i$ 对所有 $i \in I$ 均为仿射。

设 $X$ 是一个狄拉克栈，并设 $\kappa$ 是一个正则基数，使得 $X$ 是沿着 $\mathrm{Aff}_\kappa \to$Aff的左 Kan 延拓。 定理 1.3 表明典范映射

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X} \longrightarrow \varprojlim_\eta \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/S}$$

到由 $\eta\colon S \to X$ 在 $((\mathrm{Aff}_\kappa)_{/X})^{\mathrm{op}}$ 索引的极限的映射是一个等价；并且由 定义 3.29 可直接推出，该等价限制为相应的、由仿射映射张成的全子范畴之间的等价。

**定义 3.33**。 设 $X$ 是一个狄拉克栈。相对于 $X$ 的狄拉克谱，是本质唯一的图表中的左侧垂直映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \varprojlim_\eta \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(S)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Spec}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Spec}} \\ \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X} & \longrightarrow & \varprojlim_\eta \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/S}, \end{array}$$

其右侧垂直映射由 Yoneda 嵌入给出。

**注 3.34**。 在 定义 3.33 中，右侧垂直映射和底部映射都是等价。顶部水平映射是一个右伴随，因此，相对于 $X$ 的狄拉克谱也如此。其左伴随将仿射映射 $f$: $Y \to X$ 映射为拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-代数 $f_*^\heartsuit \mathcal{O}_Y \simeq f_* \mathcal{O}_Y$。

**警告 3.35**。 一般而言，相对于 $X$ 的狄拉克谱，或者等价地，定义 3.33 中的顶部水平映射，并非等价。若它是等价，则

$$X \mapsto \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)$$

会将狄拉克叠的余极限映到范畴的极限。为说明事实并非如此，我们令 $k$ 为一个交换环，并令 $X$ 为通过沿原点粘合两份仿射直线 $\mathbb{A}^1_k$ 而得到的狄拉克栈。令 $f$: $X \to X'$ 为映向狄拉克概形范畴中相应推出的唯一映射。由 [23，定理 16.2.0。2] 可得，该映射

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Spec}(k[x,y]/(xy))_{\geq 0} \simeq \mathrm{QCoh}(X')_{\geq 0} \xrightarrow{f^*} \mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0}$$

是一个等价，因此诱导的心之间的映射也是如此。因此，只需证明这个范畴图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{k[x,y]/(xy)}(\mathrm{Ab})) & \xrightarrow{g'^*} & \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{k[x]}(\mathrm{Ab})) \\ \downarrow{\scriptstyle f'^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{k[y]}(\mathrm{Ab})) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{k}(\mathrm{Ab})) \end{array}$$

不是笛卡尔的。若它是笛卡尔的，那么对于每个 $k[x,y]/(xy)$-代数 $A$，图表

$$A \longrightarrow f'_*f'^*A \times g'_*g'^*A \rightrightarrows f'_*g_*g^*f'^*A \simeq g'_*f_*f^*g'^*A$$

将是一个极限图表。但对于 $A = k[x,y]/(xy, x-y) = k[t]/t^2$，这就变成了

$$k[t]/t^2 \longrightarrow k \times k \rightrightarrows k,$$

这不是一个极限图表。

**定理 3.36**。 若 $X$ 是一个几何狄拉克栈，则

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Spec}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X}$$

是一个等价。

证明。 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{Shv(Aff)}^{\mathrm{geom}}$ 为由几何狄拉克叠 $X$ 所张成的全子范畴，其中相对于 $X$ 的狄拉克谱是一个等价。要证明 $\mathcal{C} = \mathbf{Shv(Aff)}^{\mathrm{geom}}$，根据 定理 2.49 ，只需证明

(1) $\mathcal{C}$ 包含所有仿射狄拉克堆栈的小余积，并且 (2) $\mathcal{C}$ 在面映射为次沉浸的群胚余极限下封闭。

对于 (1)，我们注意到，相对于 $X$的狄拉克谱的源和目标都会将狄拉克叠的余积映为 $\infty$-范畴的积。根据 例 3.30，相对于仿射狄拉克堆栈的狄拉克谱是一个等价，因此 (1) 成立。对于 (2)，令 $X \simeq \lim_{\longrightarrow \Delta^{\mathrm{op}}} S$ 为 $\mathcal{C}$ 中一个面映射为次沉浸的群胚的余极限，并考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathrm{Spec}} & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim_{\longleftarrow [n]\in\Delta} \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(S_n)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathrm{Spec}} & \lim_{\longleftarrow [n]\in\Delta} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/S_n}. \end{array}$$

现在，左侧的垂直映射根据 定理 3.27是等价，右侧的垂直映射根据 定理 2.21 和 命题 3.31是等价，而下方的水平映射根据假设是等价。因此，上方的水平映射也为等价，这表明 $X$ 包含于 $\mathcal{C}$中。所以 (2) 成立。 □

最后，我们定义狄拉克栈上的向量丛的 $\infty$-范畴。为此，我们考虑对称代数与

$$(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Sym}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Spec}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X}$$

相对狄拉克谱函子的复合。我们记

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F})) \xrightarrow{p} X$$

对于由复合函子下拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 的像所给出的仿射映射，并将其称为与 $\mathcal{F}$相关联的仿射空间。

对称代数具有自然的分次，由此在仿射空间函子上诱导出乘法群 $\mathbb{G}_m$ 的作用。因此，仿射空间函子可提升为一个函子

$$(\mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{V'_X} \mathrm{LMod}_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X})$$

其取值于 $\infty$范畴：其中的对象是 $X$ 上的仿射 Dirac 堆栈，带有 $\mathbb{G}_m$的底层 $\mathbf{E}_1$-群的左作用。函子 $V'_X$ 有一个左伴随，它将带有 $\mathbb{G}_m$-作用 $p\colon V \to X$ 的仿射映射映至拟凝聚$\mathcal{O}_X$-代数 $p_*\mathcal{O}_V$的 1 次部分。当 $X$ 是几何的时，该函子是全忠实的，但一般情况下并非如此。

**定义 3.37.** 设 $X$ 为一个狄拉克栈。若对每个映射 $\eta\colon S \to X$ （其中 $S$ 为仿射的），$\eta^*(\mathcal{E}) \in \mathrm{QCoh}(S)$ 都是紧致的，且属于 $t$- 结构的心，则称拟凝聚 $\mathcal{O}_X$- 模 $\mathcal{E}$ 为有限秩局部自由。

如果拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{E}$ 是有限秩局部自由的，那么我们也称 $\mathcal{E}$ 在 $[0,0]$, 上具有 Tor 振幅，是完美的，并记作

$$\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{QCoh}(X)$$

由有限秩局部自由的拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模张成的全子范畴。它包含于 $t$-结构的心中。

**例 3.38**。 如果 $S \simeq \mathrm{Spec}(R)$ 是仿射的，那么 $\mathrm{QCoh}(S)^{\mathrm{loc}}$ 典范等价于有限生成射影分次 $R$-模的范畴。

设 $X$ 是一个狄拉克栈。若将 $X \simeq \varinjlim_\alpha S_\alpha$ 写成仿射狄拉克概形的小余极限，那么根据 定义 3.37，典范映射

$$\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}} \longrightarrow \varprojlim_\alpha \mathrm{QCoh}(S_\alpha)^{\mathrm{loc}}$$

是一个等价。因此， $\mathcal{O}_X$中概述的比较仿射映射与拟凝聚模时遇到的困难 警告 3.35 在有限秩局部自由的情形下并不会出现，因此函子 $V'_X$ 限制后是一个全忠实函子

$$(\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{V_X} \mathrm{LMod}_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X}).$$

**定义 3.39.** $X$ 上的向量丛 $\infty$-范畴是由以下全子范畴

$$\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{LMod}_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{aff}}_{/X})$$

由函子 $V_X$ 的本质像给出。

**注 3.40.** 由于 $\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}}$ 和 $\mathrm{Vect}(X)$ 在典范意义下反等价，因此二者都等价于 1-范畴。 $V_X$ 的逆映射将一个向量丛 $(p\colon V \to X, \mu\colon \mathbb{G}_m \times V \to V)$ 映射为分次 $\mathcal{O}_X$-代数$p_*^{\heartsuit}\mathcal{O}_V$ 的 1 次部分。

**注 3.41.** 全子范畴 $\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit}$ 与对偶化 $\mathcal{O}_X$-模的全子范畴一致。特别地，它在典范意义下自对偶，因此可以通过协变等价将 $\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}}$ 与 $\mathrm{Vect}(X)$ 视为同一对象

$$\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}} \simeq (\mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{V_X} \mathrm{Vect}(X).$$

然而，我们将遵循 Grothendieck [11, 定义 1.7。8] 并采用反变等价 $V_X$ 介于 拟凝聚层$(X)^{\mathrm{loc}}$ 与 向量丛$(X)$之间；这除了其他作用外，还能给出形式群李代数的正确几何解释。

## 4. 形式叠与形式群

我们将形式群的定义推广到狄拉克叠的情形。为此，我们遵循 Lurie [21, 22]，并将狄拉克叠 $X$ 上的形式群 $\infty$-范畴 $\mathrm{FGroup}(X)$ 定义为 $\infty$-范畴 $\mathrm{Hyp}(X)$ 中的阿贝尔群对象范畴；$\mathrm{Hyp}(X)$ 是 $X$ 上形式超平面的 $\infty$-范畴，我们将首先对其进行定义。我们证明，$\infty$-范畴 $\mathrm{FGroup}(X)$ 可沿有效满射 $f\colon X' \to X$ 下降。

**4.1. 形式完备化与拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模。**我们定义沿闭浸入对狄拉克概形进行的形式完备化，并证明在正则闭浸入的情形下，形式完备化上的拟凝聚模 $\infty$-范畴参与一个“局部上同调”稳定粘合。

**定义 4.1。** 设 $g\colon Z \to X$ 是由拟凝聚理想 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$定义的狄拉克概形的闭浸入。对于每个 $m \geq 0$，第 $m$ 阶无穷小邻域是由下式给出的狄拉克概形

$$Z^{(m)} \simeq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{m+1}) \xrightarrow{g^{(m)}} X.$$

$X$ 沿 $g$ 的形式完备化是狄拉克栈之间的映射

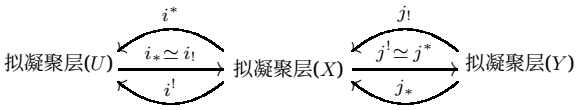
$$Y \simeq \varinjlim_m Z^{(m)} \xrightarrow{j} X$$

它来自无穷小邻域在 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$ 中的余极限。

**注 4.2。** 定义 4.1 中的余极限 与 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathrm{Aff})$中计算的余极限一致，或者等价地，后一个余极限自动是 Aff 上平坦拓扑的层。确实，由于狄拉克栈 $Z^{(m)}$ 对于固定的 $N$ 是 $N$-截断的，即 $N = 0$，并且 Aff 上的平坦拓扑是有限型的，层条件等价于断言某个有限图表是极限图表。但根据 [20, 命题 5.3.3，3]此条件在滤过余极限下保持不变。

按照 Grothendieck 的哲学， $X$ 沿着 $g$的形式完备化： $Z \to X$，扮演着 $Z$ 在 $X$中的那个并不存在的管状邻域。因此，我们应当预期 $j\colon Y \to X$ 表现为开仿射浸入，而 $i\colon U \simeq X \smallsetminus Z \to X$ 是其补集。以下结果印证了这一预期。

**定理 4.3。** 设 $X$ 是一个狄拉克概形，且 $\eta\colon Z \to X$ 是一个正则闭浸入。设 $j\colon Y \to X$是 $X$沿 $\eta\colon Z \to X$的形式完备化，并设$i\colon U \simeq X \smallsetminus Z \to X$是 $S$的开补的包含。在这种情况下，存在一个稳定粘合




并且，加之函子 $j_*$ 是 $t$-正合的。

证明。 我们将在以下情形下详细证明该命题： $X$ 是仿射的，且 $\eta\colon Z \to X$ 是由一列正则序列 $(f_1, \dots, f_d)$ 齐次整体截面所定义的闭浸入。为了将一般情形归结为这一特殊情形，我们将接受以下基变换结果，其证明与[23, 推论 3.4.22]类似：若 $f\colon U \to X$ 是狄拉克概形之间的拟紧拟分离平坦映射，且$f'\colon U' \to X'$是沿任意狄拉克概形映射 $f\ g\colon X' \to X$对 $f$作基变换所得，那么方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}(X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{QCoh}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g'*} \\ \mathrm{QCoh}(X') & \xrightarrow{f'*} & \mathrm{QCoh}(U') \end{array}$$

是右伴随可交换的，意即基变换映射

$$g^* f_* \longrightarrow f'_* f'^* g^* f_* \simeq f'_* g'^* f^* f_* \longrightarrow f'_* g'^*$$

是一个等价。开浸入 $i\colon U \to X$ 是平坦的，我们断言它是拟紧拟分离的。事实上，拟紧拟分离这一性质在目标上是局部的，因此我们假设$X$ 是仿射的，且 $\eta\colon Z \to X$ 由整体截面 $(f_1, \dots, f_d)$构成的正则序列定义。但此时 $i\colon U = X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_d} \to X$是有限个标准开子集之并的开浸入，因而是拟紧的；它也是拟分离的，因为对角线 $\Delta\colon U \to U \times_X U$ 是一个同构。

现在我们假设 $\mathfrak{B}$ 是 $|X|$拓扑的一个基，且对有限交封闭，并且该命题对所有 $V \in \mathfrak{B}$均已证明。证明引理 2.25表明

$$\mathrm{QCoh}(X) \longrightarrow \varprojlim_{V \in \mathfrak{B}} \mathrm{QCoh}(V)$$

是一个等价。稳定粘合由满足以下性质的函子 $i_* \simeq i_!$唯一确定：它是全忠实的，并且同时有左伴随 $i^*$ 和右伴随 $i^!$。由 [19, 命题 4.7.4。19],可知，上述基变换性质意味着 $\mathfrak{B}$指标化的函子族

$$\mathrm{QCoh}(U \cap V) \xrightarrow{(i|_{U\cap V})_*} \mathrm{QCoh}(V)$$

提升为 LPr 中 $\mathfrak{B}^\triangleleft$ 索引极限图表的映射。特别地，极限的映射

$$\mathrm{QCoh}(U) \xrightarrow{i_*} \mathrm{QCoh}(X)$$

是 LPr 中的映射，因此存在右伴随 $i^!$，如所需。它也是全忠实的，因为这一性质在极限下保持。此外， $i^!$ 的纤维可识别为 $j_*\colon \mathrm{QCoh}(Y) \to \mathrm{QCoh}(X)$，因为极限可交换；而且 $j_*$ 是 $t$-正合的，因为它是左 $t$-正合的，并且右 $t$-正合这一性质可以在对 $V \in \mathfrak{B}$ 作基变换后检验。

现在，对于一般的 $X$，我们令 $\mathfrak{B}$ 为开子概形 $V \subset X$构成的偏序集，其中这些开子概形都能开浸入到一个仿射 Dirac 概形中。如果 $X$ 存在一个开

浸入 $j\colon\ X \to S$ 到一个仿射 Dirac 概形中，那么我们令 $\mathfrak{B}$ 为开子概形 $V \subset X$ 构成的偏序集，并满足 $j(V) \subset S$ 是一个特征开子概形。这使我们归结到特殊情形：此时 $X \simeq$谱$(A)$ 是仿射的，而定义 $I \subset A$ 的分次理想 $\eta\colon\ Z \to X$ 由齐次元素构成的正则序列$(f_1, \ldots, f_d)$ 生成。在这种情况下，如 [23,第 7] 章中所示，我们得到半正交分解

$$\mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Nil}(I)} \underset{j^!}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Loc}(I)}$$

$$\mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Cpl}(I)} \underset{j_*}{\overset{j^*}{\leftrightarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})) \underset{i^!}{\overset{i_!}{\leftrightarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Loc}(I)}$$

借助 $i_* \simeq i_!$，并且复合伴随函子

$$\mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Nil}(I)} \underset{j^!}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})) \underset{j_*}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Cpl}(I)}$$

是等价。进一步，如同在 [23, 命题 7.2.3.1] 中一样，可以证明

$$\mathrm{QCoh}(U) \xrightarrow{i_*} \mathrm{QCoh}(X) \simeq \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))$$

是全忠实的，且其本质像是由$I$-局部 $A$-模所张成的全子范畴。因此，我们必须证明函子

$$\mathrm{QCoh}(Y) \simeq \varprojlim_m \mathrm{Mod}_{A/I^{m+1}}(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})) \xrightarrow{j_*} \mathrm{QCoh}(X) \simeq \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))$$

是全忠实的，且其本质像是由$I$-完备 $A$-模所张成的全子范畴。函子 $j_*$ 可分解为

$$\mathrm{QCoh}(Y) \xrightarrow{G} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Cpl}(I)} \longrightarrow \mathrm{QCoh}(X) \simeq \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})),$$

并且由于由 $I$-完备 $A$-模所张成的全子范畴在小极限下封闭，函子 $G$ 有一个左伴随函子

$$\mathrm{QCoh}(Y) \simeq \varprojlim_m \mathrm{Mod}_{A/I^{m+1}}(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})) \underset{G}{\overset{F}{\leftleftarrows}} \mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))^{\mathrm{Cpl}(I)}.$$

根据 $I$-完备性的定义，单位映射

$$M \longrightarrow (GF)(M) \simeq \varprojlim_m M \otimes_A A/I^{m+1}$$

是一个等价。根据三角恒等式，这又意味着由余单位诱导的自然变换 $GFG \to G$ 是一个等价，因此只需证明 $G$ 是保守的。函子 $G$ 将一个相容族 $(M_m)_{m\geq 1}$（其中 $M_m \in$ 属于 $\mathbf{Mod}^{A/I^{m+1}}(\mathcal{D}(\mathbf{Ab}))$）映射到极限 $M \simeq \varprojlim_m M_m \in \mathbf{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathbf{Ab}))^{\mathrm{Cpl}(I)}$，我们必须证明，如果 $M \simeq 0$，那么对所有 $m \geq 1$ 都有 $M_m \simeq 0$。

为此，我们重写所讨论的极限。记 $P$ 为一个范畴，其对象为正整数，并且当且仅当 $i \geq j$ 时存在唯一映射 $i \to j$。回顾 [20, 命题 5.3.1.20]，其中指出，对角线 $\Delta\colon\ P \to P^d$ 是一个 lim⟵等价。

给定 $e=(e_1,\dots,e_d)\in P^d$，令 $I_e=(f_1^{e_1},\dots,f_d^{e_d})\subset A$，并注意到 $I_{\Delta(m)}\subset I^m\subset I_{\Delta([m/d])}$。由此可知，典范映射定义了等价

$$\begin{aligned}\mathrm{QCoh}(Y)&\simeq\varprojlim_{m\in P}\mathrm{Mod}_{A/I^m}(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))\\&\simeq\varprojlim_{m\in P}\mathrm{Mod}_{A/I_{\Delta(m)}}(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))\\&\simeq\varprojlim_{e\in P^d}\mathrm{Mod}_{A/I_e}(\mathcal{D}(\mathrm{Ab})).\end{aligned}$$

因此，给定一个相容族 $(M_e)_{e\in P^d}$，其中 $M_e\in\mathsf{Mod}^{A/I_e}(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))$，我们必须证明：若 $M\simeq\varprojlim_e M_e\simeq 0$，则对所有 $e\in P^d$ 都有 $M_e\simeq 0$。为此，我们对 $d\geq 1$ 作归纳法。首先考虑 $d=1$ 的情形，此时我们将 $f=f_1$ 和 $e=e_1$ 简写。给定任意 $N\in\mathsf{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))$，我们用 $N/f^e$ 表示 $f^e\cdot\mathrm{id}\colon N\to N$ 的余纤维。由于 $f\in A$ 是非零因子，典范映射 $A/f^e\to A/(f^e)$ 是一个等价。因此，余纤维 $A/f^e$ 具有环结构。我们注意到

$$\begin{aligned}M_e/f&\simeq M_e\otimes_{A/(f^e)}((A/f^e)/f)\simeq M_e\otimes_{A/(f^e)}((A/f)/f^e)\\&\simeq M_e\otimes_{A/(f^e)}(A/f\oplus A/f[1])\simeq M_1\oplus M_1[1]\end{aligned}$$

并且在此等价下，映射 $M_e\to M_{e-1}$ 在第一个直和项上诱导恒等映射，在第二个直和项上诱导零映射。由此可得

$$M/f\simeq\varprojlim_e M_e/f\simeq M_1.$$

因此，如果 $M\simeq 0$，那么 $M_1\simeq 0$，由 dévissage 可知，这意味着对所有 $e\in P$，都有 $M_e\simeq 0$。这就证明了情形 $d=1$。因此，我们假设该命题对 $d=r$ 成立，并继续证明它对 $d=r+1$ 成立。我们假设 $M\simeq\varprojlim_e M_e\simeq 0$，并必须证明对所有 $e\in P^{r+1}$，都有 $M_e\simeq 0$。首先，我们写成

$$M\simeq\varprojlim_e M_e\simeq\varprojlim_{e_{r+1}}\varprojlim_{(e_1,\dots,e_r)}M_e\simeq\varprojlim_{e_{r+1}}N_{e_{r+1}}.$$

根据归纳假设，只需证明对所有 $e_{r+1}\in P$，都有 $N_{e_{r+1}}\simeq 0$。但是，$N_{e_{r+1}}$ 上的 $A$-模结构可以扩展为完备狄拉克环上的模结构

$$\widehat{A}\simeq\varprojlim_{(e_1,\dots,e_r)}A/(f_1^{e_1},\dots,f_r^{e_r}),$$

且 $f_{r+1}$ 在 $A$ 中的像不是零因子。事实上，由 [27, 定理 16。1] 可知，$f_{r+1}$ 在 $A/(f_1^{e_1},\ldots,f_r^{e_r})$ 中的像对所有 $(e_1,\ldots,e_r)\in P^r$ 都不是零因子。因此，采用与情形 $d=1$ 相同的论证可得 $N_{e_{r+1}}\simeq 0$ 对所有 $e_{r+1}\in P$ 均成立，正如所需。这就建立了这两个半正交分解。

最后，我们知道 $j_*$ 是左 $t$-正合的，接下来必须证明它也是右 $t$-正合的，或者等价地，证明它限制为一个函子

$$\varprojlim_m\mathrm{Mod}_{A/I^{m+1}}(\mathcal{D}(A))_{\geq 0}\xrightarrow{j_*}\mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}(\mathrm{Ab}))_{\geq 0}.$$

但这可由米尔诺尔序列以及映射这一事实得出

$$M_m\longrightarrow M_m\otimes_{A/I^{m+1}}A/I^m\simeq M_{m-1}$$

在 $\pi_0$ 上诱导满射。 □

**4.2. 形式超平面。** 我们将狄拉克堆栈之间的映射 $q\colon Y \to X$ 称为形式超平面，若局部地在 $X$上，它同构于与局部自由 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{E}$相关联的形式仿射空间。早期文献中，包括 [10, 28],形式超平面被称为形式李簇。

设 $S$ 是一个 Dirac 概形， $\mathcal{E}$ 是一个有限秩局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模。其秩局部恒定，但我们不要求它处处恒定。我们将其对应的、位于 $S$ 上的仿射空间定义为 Dirac $S$-概形

$$\mathbb{A}_S(\mathcal{E}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})) \xrightarrow{p} S,$$

并将零截面定义为

$$S \simeq \mathbb{A}_S(0) \xrightarrow{\eta} \mathbb{A}_S(\mathcal{E})$$

由唯一的 $\mathcal{O}_S$-模映射 $\mathcal{E} \to 0$ 所诱导的映射。最后，我们将与 $\mathcal{E}$ 相关联的、位于 $S$ 上的形式仿射空间定义为形式完备化

$$\hat{\mathbb{A}}_S(\mathcal{E}) = \mathrm{Spf}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})) \xrightarrow{q} S$$

沿零截面对仿射空间 $p\colon \mathbb{A}_S(\mathcal{E}) \to S$ 进行的形式完备化。

**定义 4.4。** 设 $X$ 是一个狄拉克堆栈。若对任意来自仿射狄拉克堆栈 $S$ 的映射 $\eta\colon S \to X$，映射 $q\colon Y \to X$ 沿 $\eta$ 的基变换都等价于一个形式仿射空间，则称它是 $X$ 上的形式超平面。

我们将 $\mathbf{Hyp}(X) \subset \mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})_{/X}$ 记作由 $X$ 上的形式超平面张成的全子范畴。先验而言，它是一个 $\infty$-范畴，但我们现在证明，它实际上等价于一个 1-范畴。

**引理 4.5.** 若 $q\colon Y \to X$ 是一个形式超平面，那么对于任意狄拉克叠的映射$\eta\colon Z \to X$，在 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})_{/X}$ 中计算的映射 *anima* $\mathrm{Map}(Z, Y)$ 是 0-截断的。特别地， $\infty$-范畴 $\mathrm{Hyp}(X)$ 等价于一个 1-范畴。

证明。0-截断 anima 的包含 $\mathcal{S}_{\leq 0} \to \mathcal{S}$ 保持极限，也保持滤过余极限。特别地，将 $Z$ 表示为仿射狄拉克概形的余极限后，我们可以假设 $Z \simeq S$ 是仿射的。由于 $q$ 是一个形式超平面，其沿 $\eta\colon S \to X$ 的基变换 $q_S\colon Y_S \to S$ 等价于某个有限秩局部自由 $\mathcal{O}_S$-模 $\mathcal{E}$ 所对应的形式仿射空间。因此，我们有

$$\mathrm{Map}_X(S, Y) \simeq \mathrm{Map}_S(S, Y_S) \simeq \mathrm{Map}_S(S, \varinjlim_m S^{(m)}) \simeq \varinjlim_m \mathrm{Map}_S(S, S^{(m)}),$$

其中后一个等价由 注 4.2推出。右侧是 0-截断 anima 的滤过余极限，因此其本身也是 0-截断的。 □

由定义立即可知，若 $f\colon X' \to X$ 是狄拉克叠之间的任意映射，则沿 $f$ 的基变换限制为一个函子

$$\mathrm{Hyp}(X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hyp}(X').$$

这些函子是该函子的一部分

$$\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hyp}(-)} \widehat{\mathbf{Cat}}_\infty$$

它将由.....分类的笛卡尔纤维化

$$\mathbf{Hyp} \xrightarrow{p} \mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})$$

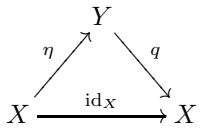
由目标映射的限制给出 $\mathrm{Fun}(\Delta^1,\mathrm{Shv(Aff)}) \to \mathrm{Shv(Aff)}$ 到由形式超平面张成的全子范畴；参见 [20, 记号 6.1.3。4]。

**警告 4.6.** $\infty$上的形式超平面范畴 $\mathrm{Hyp}(X)$一般并不沿有效满射下降，即使 $X$ 是狄拉克概形也是如此。关于一个有启发性的反例，请参见 [22, 警告 1.1.22]。

接下来我们将证明，对于带基点的形式超平面，上述下降问题不复存在。就形式群而言，使用形式超平面还是带基点的形式超平面并无区别。根据定义， $X$ 上的带基点狄拉克栈范畴是切片范畴

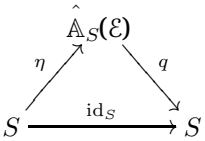
$$(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_* = (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_{X\backslash} \simeq (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{X\backslash})_{/X}.$$

其对象是如下形式的图表 $\sigma\colon \Delta^2 \to \mathrm{Shv(Aff)}$



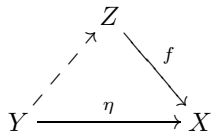

我们将 $q$ 视为结构映射，将 $\eta$ 视为其截面。

**定义 4.7.** 设 $X$ 是一个狄拉克栈。 $X$ 上的带基点狄拉克栈称为带基点的形式超平面，若它沿任意来自仿射 Dirac 概形的映射 $\eta\colon S \to X$ 的基变换等价于




对于某个有限秩局部自由 $\mathcal{O}_S$-模 $\mathcal{E}$。此处 $\eta$ 是零截面。

我们将证明，带基点的形式超平面具有典范穷尽滤过。狄拉克叠的映射 $f\colon Z \to X$ 是 $(-1)$-截断的，当且仅当对于所有仿射狄拉克概形 $S$，anima 的映射 $f_S\colon Z(S) \to X(S)$ 都是 $(-1)$-截断的。根据 [20, 命题 6.2.3，17],$(-1)$-截断这一性质在沿任意映射作基变换时保持不变，并且可沿有效满射下降。此外，若 $f\colon Z \to X$ 是 $(-1)$-截断的，且 $\eta\colon Y \to X$ 是任意映射，那么提升的 anima




是 $(-1)$-截断的，因此 $\eta$ 经由 $f$ 分解是一个性质。现在我们将无穷小邻域的定义扩展到狄拉克叠，如下所示。

**定义 4.8**。 设 $g\colon Z \to X$ 是狄拉克栈之间的一个 $(-1)$-截断映射，且 $m \geq 0$ 是一个整数。 $Z$ 在 $X$ 中的第 $m$ 个无穷小邻域，是本质上唯一的狄拉克栈之间的 $(-1)$-截断映射

$$Z_g^{(m)} \xrightarrow{g^{(m)}} X$$

使得来自一个仿射 Dirac 概形的映射 $\eta\colon S \to X$ 经过 $g^{(m)}$ 分解，当且仅当存在一个来自仿射 Dirac 概形的有效满射 $p\colon T' \to S$，以及一个由拟凝聚理想定义的闭浸入 $i\colon T \to T'$，该理想的 $(m+1)$ 次幂为零，并且 $\eta|_T\colon T \to X$ 经过 $g$ 分解。

我们常将其缩写为 $g^{(m)}\colon Z^{(m)} \to X$ 表示 $m$ 在 $Z$ 中的第 $X$ 阶无穷小邻域。定义 4.8 隐含地断言 $Z^{(m)}$是一个狄拉克栈。现在我们来验证这一点确实成立。

**命题4.9**。设 $g\colon Z \to X$ 是狄拉克栈之间的一个$(-1)$-截断映射，并设 $g^{(m)}\colon Z^{(m)} \to X$ 是其带有 $m \geq 0$ 的第 $m$ 阶无穷小邻域。在此情形下，预层 $Z^{(m)}\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是一个狄拉克栈。

证明。我们必须证明预层 $Z^{(m)}$ 是可达的，并且是平坦拓扑下的层。为此，我们定义 $g^{(m)\prime}\colon Z^{(m)\prime} \to X$ 为预层之间本质唯一的（$-1$）-截断映射，使得从仿射狄拉克概形出发的映射 $\eta\colon S \to X$ 经过 $g^{(m)\prime}$ 分解，当且仅当存在一个由拟凝聚理想定义的闭浸入$i\colon S' \to S$，其（$m+1$）次幂为零，并且 $\eta|_{S'}\colon S' \to X$ 经过 $g$ 分解。根据定义，包含 $Z^{(m)\prime} \to Z^{(m)}$ 是平坦拓扑下的层化，因此，为了证明 $Z^{(m)}$ 是一个狄拉克栈，只需证明 $Z^{(m)\prime}$ 是可达的。

存在一个正则基数 $\kappa$，使得 $X$ 和 $Z$ 是 $\kappa$-可达的，其含义是它们等于沿包含映射 $i\colon \mathrm{Aff}_\kappa \to \mathrm{Aff}$，对 $\kappa$-小仿射 Dirac 概形全子范畴的限制所作的左 Kan 延拓。我们声称 $Z^{(m)\prime}$ 也是 $\kappa$-可达的。

为证明这一断言，我们考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim Z^{(m)\prime}(T) & \longrightarrow & Z^{(m)\prime}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim X(T) & \longrightarrow & X(S) \end{array}$$

其余极限的指标为 $p\colon S \to T$ 在$(\mathrm{Aff}_\kappa)^{S/}$中。根据 $X$ 是 $\kappa$-可达的这一假设，底部水平映射是一个等价；我们希望证明顶部水平映射也如此。右侧竖直映射按定义是$(-1)$-截断的，而左侧竖直映射是$(-1)$-截断的，因为它是$(-1)$-截断映射的滤过余极限。确实，根据引理 A.1，范畴$(\mathrm{Aff}_\kappa)^{S/}$ 是$\kappa$-滤过的，因此也是滤过的。由此可知，顶部水平映射也是$(-1)$-截断的，因此只需证明它本质满即可。

我们改用环记号。给定 $Z^{(m)\prime}(\mathrm{Spec}(A))$ 的一个点 $x$，我们必须证明存在一个 Dirac 环映射 $B \to A$，使得 $B$ 是 $\kappa$-小的，并且 $x$ 属于 $Z^{(m)\prime}(\mathrm{Spec}(B)) \to Z^{(m)\prime}(\mathrm{Spec}(A))$ 的本质像。根据定义，我们可以将 $x$ 与 $X(\mathrm{Spec}(A))$ 的一个点相认，该点满足：存在一个理想 $I \subset A$，使得 $I^{m+1} = 0$，并且 $x$ 的像由

$$X(\mathrm{Spec}(A)) \longrightarrow X(\mathrm{Spec}(A/I))$$

属于 $Z(\mathrm{谱}(A/I))$。如果我们将 $A$ 写成其 $\kappa$-小子 Dirac 环 $B \subset A$的 $\kappa$-滤过余极限 $A \simeq \varinjlim B$，那么也有 $A/I \simeq \varinjlim B/(B \cap I)$。此外，由于假设 $X$ 和 $Z$ 是 $\kappa$-可达的，它们保持 $\kappa$-滤过余极限，因此我们

得出结论：存在一个 $\kappa$-小子 Dirac 环 $A_0 \subset A$，使得 $x$ 提升为 $X$(谱$(A_0)$)中的一个点 $x_0$，并且其像

$$X(\mathrm{Spec}(A_0)) \longrightarrow X(\mathrm{Spec}(A_0/(A_0 \cap I)))$$

属于 $Z$(谱$(A_0/(A_0 \cap I))$)。但我们有 $(A_0 \cap I)^{m+1} = 0$ 是 $A_0$ 的一个理想，因为 $I^{m+1} = 0$，并且因为 $A_0 \subset A$ 是一个子 Dirac 环，所以我们得出点 $x_0$ 属于 $Z^{(m)\prime}$(谱$(A_0)$)，如所求。□

**注 4.10**（无穷小邻域的基变换）。设 $g\colon Z \to X$ 是狄拉克叠之间的一个 $(-1)$-截断映射，设 $m \geq 0$ 是一个整数，并设 $f\colon X' \to X$ 是任意一个狄拉克叠之间的映射。在此情形下，$g$ 沿 $f$ 的基变换 $g'\colon Z' \to X'$ 是 $(-1)$-截断的，而 $g^{(m)}\colon Z^{(m)} \to X$ 沿 $f$ 的基变换是 $g'^{(m)}\colon Z'^{(m)} \to X'$。

我们还验证，定义 4.8 中针对狄拉克堆栈的无穷小邻域这一概念，推广了定义 4.1 中引入的闭浸入狄拉克概形的无穷小邻域这一概念。

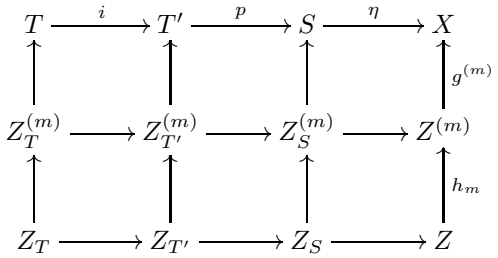
**引理 4.11.** 设 $g\colon Z \to X$ 是狄拉克概形的一个闭浸入。由此诱导的狄拉克栈映射 $h(g)\colon h(Z) \to h(X)$ 是 $(-1)$- 截断的，并且典范映射

$$h(Z_g^{(m)}) \longrightarrow h(Z)_{h(g)}^{(m)}$$

对每个 $m \geq 0$ 都是一个等价。

证明。显然，陈述中的映射存在且是$(-1)$-截断的，因此只需考察该映射是否本质满射。于是，设 $\eta\colon S \to X$ 是从一个仿射 Dirac 概形出发的映射，且 $h(\eta)$ 经由 $h(g)^{(m)}$ 分解，并希望证明 $\eta$ 经由 $g^{(m)}$分解。

由于 $h(\eta)$ 经由 $h(g)^{(m)}$分解，根据定义，存在一个忠实平坦映射 $p\colon T' \to S$，其源自某个仿射 Dirac 概形；还存在一个闭浸入 $i\colon T \to T'$，它由 $\mathcal{O}_{T'}$ 的一个拟凝聚理想定义，且该理想的第 $(m+1)$ 次幂为零，使得$\eta|_T\colon T \to X$ 经由 $g$分解。现在我们考虑图表




且所有方块都是笛卡尔的。由于 $g^{(m)}$ 是单态射，我们希望证明的命题，即 $\eta$ 经由 $g^{(m)}$ 分解，等价于 $g^{(m)}$ 沿 $\eta$ 的基变换是同构。又由于 $p$ 忠实平坦，这个共同命题进而等价于 $g^{(m)}$ 沿 $\eta \circ p$ 的基变换是同构。根据同样的推理，假设 $\eta|_T$ 经由 $g \simeq g^{(m)} h_m$ 分解，则意味着 $g^{(m)}$ 和 $h_m$ 沿 $\eta \circ p \circ i$ 的基变换都是同构。

现在我们来考察上图左侧的两列以及它们之间的水平映射。这部分图表中的映射都诱导出

底空间之间的同胚；此外，左侧列中的映射都是同构。因此，若 $I$、$J \subset \mathcal{O}_{T'}$ 分别是定义 $g_{T'}$ 和 $i$的拟凝聚理想，则 $I \subset J$。但此时 $I^{m+1} \subset J^{m+1} = 0$，这表明沿 $\eta \circ p$ 对 $g^{(m)}$ 作基变换得到的是一个同构，正如所需。□

**定义 4.12**。设 $g\colon Z \to X$ 是一个狄拉克堆栈之间的 $(-1)$-截断映射。$X$ 沿 $g$ 的形式完备化是由

$$Y_g \simeq \varinjlim_m Z_g^{(m)} \xrightarrow{j} X$$

$X$中 $Z$ 的无穷小邻域的余极限所诱导的映射。若映射 $j$ 是等价，则称狄拉克栈 $X$沿 $g$ 形式完备。

接下来，我们将以如下精确意义说明，沿狄拉克堆栈之间的 $(-1)$-截断映射进行形式完备化是一种幂等运算。

**命题 4.13**。设 $g\colon Z \to X$ 是一个狄拉克堆栈之间的 $(-1)$-截断映射，设$j\colon Y \to X$是 $X$ 沿 $g$的形式完备化，并设 $h\colon Z \to Y$是满足 $g \simeq j \circ h$的唯一映射。在此情形下，映射 $j$ 诱导出一个等价

$$Z_h^{(m)} \longrightarrow Z_g^{(m)}$$

对所有 $m \geq 0$均成立。特别地，狄拉克栈 $Y$沿 $h$形式完备。

证明。显然，陈述中的映射存在且是 $(-1)$-截断的。因此，设 $\eta\colon S \to X$ 是一个从仿射 Dirac 概形出发的映射，并假设 $\eta$经由 $g^{(m)}$ 分解。特别地，它经由 $j$ 分解，因此对于唯一的映射 $\eta'\colon S \to Y$，有 $\eta \simeq j \circ \eta'$，我们希望证明 $\eta'$ 经由 $h^{(m)}$ 分解。现在，由于 $\eta$ 经由 $g$ 分解，根据定义，存在一个忠实平坦映射 $p\colon T' \to S$，其中 $T'$ 是仿射的，以及一个由拟凝聚理想定义的闭浸入 $i\colon T \to T'$，该理想的 $(m+1)$ 次幂为零，使得 $\eta|_T$ 经由 $g \simeq j \circ h$ 分解。由于 $j$ 是 $(-1)$-截断的，这意味着 $\eta'|_T$ 经由 $h$ 分解，因此根据定义，$\eta'$ 经由 $h^{(m)}$ 分解，正如我们所要证明的。□

现在，我们专门讨论由带基点的形式超平面的零截面给出的狄拉克叠的 $(-1)$-截断映射。

**推论 4.14.** 设 $q\colon Y \to X$是以 $\eta\colon X \to Y$为基点的形式超平面。
(1) 狄拉克栈 $Y$ 沿着 $\eta$形式完备。(2) 对于所有 $m \geq 0$，复合映射 $q_m \simeq q \circ \eta^{(m)}\colon X_\eta^{(m)} \to X$ 都是有限仿射的；对于 $0 \leq m \leq 1$，它是平坦的。

证明. 陈述 (1) 是 命题 4.13的特例。陈述 (2) 可在沿任意来自仿射狄拉克概形的映射进行基变换后验证，因此只需考虑以下情形：其中 $q\colon Y \simeq \hat{\mathbb{A}}_S(\mathcal{E}) \to S$ 是与局部自由 $\mathcal{O}_S$-模 $\mathcal{E}$相关联的形式仿射空间，且 $\eta\colon S \to Y$是零截面。在这种情形下，命题 4.13 将其识别为

$$S^{(m)} \simeq \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})/\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_S}^{\geq m}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\eta^{(m)}} \hat{\mathbb{A}}_S(\mathcal{E}) \simeq \operatorname{Spf}(\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})),$$

由此可得 (2)。□

**警告 4.15**。 我们注意到，在存在半整数自旋截面的情况下，有限秩 $\mathcal{E}$ 的局部自由 $\mathcal{O}_S$-模的对称幂 $\mathrm{Sym}^d_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$ 对于 $d \geq 2$ 不一定是平坦的。例如，

$$\mathrm{Sym}^d_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(1/2)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}(d/2) & \text{for } 0 \leq d \leq 1, \\ \mathbb{Z}/2(d/2) & \text{for } d \geq 2, \end{cases}$$

对于 $d \geq 2$，不是平坦的 $\mathbb{Z}$-模。

**注 4.16.** 若 $q\colon Y \to S$ 是与一个局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模 $\mathcal{E}$ 相关联的形式仿射空间，该模有限秩，并以零截面 $\eta\colon S \to Y$ 为基点，那么根据推论 4.14的证明，存在一个准凝聚 $\mathcal{O}_S$-模的余纤维序列

$$\mathcal{O}_S \longrightarrow q_{1*}\mathcal{O}_{S^{(1)}_\eta} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

特别地，左侧映射的余纤维是一个局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模。

以下定义将这一观察推广到整体情形。

**定义 4.17.** 设 $q\colon Y \to X$ 是一个以 $\eta\colon X \to Y$ 为基点的形式超平面。**(1)** $q\colon Y \to X$ 在 $\eta\colon X \to Y$ 处的余法层是余纤维

$$\mathcal{N}_{X/Y} \simeq \mathrm{cof}(\mathcal{O}_X \to q_{1*}\mathcal{O}_{X^{(1)}_\eta}) \in \mathrm{QCoh}(X).$$

**(2)** $q$ 在 $\eta$ 处的切空间： $Y \to X$ $X \to Y$ 是向量丛。

$$T_{Y/X,\eta} \simeq V_X(\mathcal{N}_{X/Y}) \in \mathrm{Vect}(X).$$

余法层的赋值定义了一个函子。

$$\mathrm{Hyp}_*(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{QCoh}(X),$$

或者等价地，切空间的赋值定义了一个函子

$$\mathrm{Hyp}_*(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X).$$

**命题 4.18**。 设 $f\colon X' \to X$ 是一个狄拉克叠之间的映射，设 $q\colon Y \to X$ 是一个由 $\eta\colon X \to Y$ 指点的形式超平面，并设 $q'\colon Y' \to X'$ 是沿 $f$ 对 $q$ 作基变换所得，并由 $\eta' \simeq (\eta, \mathrm{id})$ 指点。在此情形下，典范映射

$$f^*\mathcal{N}_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{N}_{X'/Y'}$$

是一个等价。

证明。由于 $f^*\colon$ 拟凝聚层$(X) \to$拟凝聚层$(X')$ 是正合的且 $f^*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{X'}$，只需证明在笛卡尔图表中

$$\begin{array}{ccc} X'^{(1)}_{\eta'} & \xrightarrow{f'} & X^{(1)}_\eta \\ \downarrow{\scriptstyle q'_1} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ X' & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

基变换映射 $f^*q_{1*} \to q'_{1*}f'^*$ 是一个等价。但这可由命题 3.20得出，因为 $q_1$ 根据 推论 4.14是仿射平坦的。□

**推论 4.19.** 若 $q\colon Y \to X$ 是以 $\eta\colon X \to Y$ 为基点的形式超平面，则余法层 $\mathcal{N}_{X/Y}$ 是一个有限秩的局部自由 $\mathcal{O}_X$-模。

证明. 由 命题 4.18，我们可以假设 $X$ 是仿射的，此时结论由 注 4.16得出。 □

若 $q\colon Y \to X$ 是形式超平面，则其沿自身的基变换 $q'\colon Y' \to Y$ 也是形式超平面，而且形式超平面 $q'\colon Y' \to Y$ 由对角线 $\Delta\colon Y \to Y'$ 典范地点化。

**定义 4.20**。 设 $q\colon Y \to X$ 是一个形式超平面。

**(1)** $\mathcal{O}_Y$-模 $q\colon Y \to X$ 的微分模是余法层

$$\Omega^1_{Y/X} \simeq \mathcal{N}_{Y/Y'} \in \mathrm{QCoh}(Y)$$

即 $q$ 沿自身的基变换 $q'\colon Y' \to Y$ 的余法层，并由对角线定位。

**(2)** $q\colon Y \to X$ 的切丛是向量丛

$$T_{Y/X} \simeq V_Y(\Omega^1_{Y/X}) \in \mathrm{Vect}(Y).$$

**注 4.21.** 设 $q\colon Y \to X$ 是一个形式超平面，并设 $q'\colon Y' \to Y$ 是 $q$ 沿自身的基变换，以对角线 $\Delta\colon Y \to Y'$ 为指向。若 $\eta\colon X \to Y$ 是 $q\colon Y \to X$ 的一个点，则 $q'\colon Y' \to Y$ 沿 $\eta\colon X \to Y$ 、以 $\Delta\colon Y \to Y'$ 为指向的基变换，可典范地识别为以 $\eta\colon X \to Y$ 为指向的 $q\colon Y \to X$，

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \eta} & & {\scriptstyle q'}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{\eta} & Y & \xrightarrow{q} & X, \end{array}$$

因此命题 4.18 表明 $\mathcal{N}_{X/Y} \simeq \eta^*\Omega^1_{Y/X}$ 和 $T_{Y/X,\ \eta} \simeq \eta^* T_{Y/X}$。

**注 4.22.** 我们的切丛定义是暂定的。在 [13], 中，我们将定义形式超平面 $L_{Y/X}$ 的余切复形 $q\colon Y \to X$ ，并证明它是一个局部自由的 $\mathcal{O}_Y$-模，且同构于 $\Omega^1_{Y/X}$。

若 $q\colon Y \to X$ 是以 $\eta\colon X \to Y$ 为基点的形式超平面，则余法层 $\mathcal{N}_{X/Y}$ 的秩是局部常数的，具体而言，对于任意一个来自狄拉克概形的映射$f\colon S \to X$，局部自由 $\mathcal{O}_S$-模 $f^*\mathcal{N}_{X/Y}$ 的秩是底层拓扑空间 $|S|$ 上的局部常值函数。

**定义 4.23.** 带基点的形式超平面的维数是其余法层的秩。

**警告 4.24.** 人们也许会想将带基点的形式超平面的自旋定义为其余法层的局部生成元的自旋。但所说的自旋并未定义良好，因此无法这样做。例如，若 $k$ 是自旋为 $1/2$ 的狄拉克域 $\mathbb{F}_2[x^{\pm 1}]$ ，则作为一个 $k$-向量空间，任意整数 $d$ 下， $k$ 都由 $x^d$ 生成。

**注 4.25.** 若 $X$ 是一个仿射 Dirac 概形，那么 注 4.16表明，任意 $X$ 上的带基点形式超平面，都同构于其余法层的形式仿射空间，且基点为零截面。然而，这样的同构高度非典范；若 $X$ 不是仿射的，则该同构可能不存在。

**4.3. 带基点形式超平面的自同构与下降。** 给定一个形式超平面 $q\colon Y \to X$，点 $\eta\colon X \to Y$根据 推论 4.14 确定了 $Y$的一个穷尽递增滤过，其各项由 $X$ 在 $Y$ 中的无穷小邻域给出。反过来，此滤过又在自同构群上诱导出一个滤过，下面我们将对此加以描述。首先，我们将自同构群提升为一个群栈。

我们在 定理 A.14 中证明 $\infty$-范畴的 anima 的可达层，具有与 $\infty$-topoi 相同的函子性。因此，给定映射 $f\colon Y \to X$，其中Shv(Aff)，我们有伴随函子

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X} \underset{f_*}{\overset{f_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{f^*}}}} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/Y}$$

其中 $f_!$ 由与 $f$ 复合给出，而 $f^*$ 由沿 $f$的基变换给出。此外，基变换公式成立，即对于给定的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

在 Shv(Aff) 中，基变换映射 $f'_! j'^* \to j^* f_!$ 和 $j^* f_* \to f'_* j'^*$ 是等价。这带来如下结论：

**命题 4.26.** 切片 $\infty$-范畴 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$ 是笛卡尔闭的。

证明。设 $f\colon Y \to X$ 和 $g\colon Z \to X$ 是切片范畴中的两个对象，并令 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 为终对象。我们断言，内部映射对象 $\mathrm{Hom}(f,g)$由 $f_* f^* g_! g^* \mathrm{id}_X$给出。为此，注意对任意$h\colon R \to X$，

$$\mathrm{Map}(h, f_* f^* g_! g^* \mathrm{id}_X) \simeq \mathrm{Map}(f_! f^* h, g_! g^* \mathrm{id}_X) \simeq \mathrm{Map}(f \times h, g),$$

其中映射空间和乘积 $f \times h$ 是在切片范畴 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$中计算的。□

**注 4.27.** 给定对象 $f\colon Y \to X$ in $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$，内部映射对象 $\mathrm{Hom}(f,f)$ 可典范地提升为 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$中的 $\mathrm{E}_1$-幺半群 $\mathrm{End}(f)$。我们将其最大子 $\mathrm{E}_1$-群记为 $\mathrm{Aut}(f)$，并称之为 $f$的自同构分类栈。

**注 4.28.** 假设 $\sigma \in (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_*$是 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X}$中的带基点对象。类似地，我们有一个分类栈

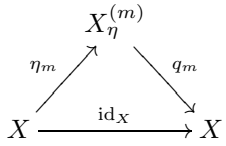
$$\mathrm{Aut}(\sigma) \in \mathrm{Grp}_{\mathbf{E}_1}((\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_*) \simeq \mathrm{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})$$

作为带基点对象的 $\sigma$ 的自同构。将 $\sigma$ 写成图表

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \overset{\eta}{\nearrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\ X & & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & & X \end{array}$$

在 Shv(Aff) 中，我们也使用记号 $\mathrm{Aut}_\eta(Y/X)$，而不使用 $\mathrm{Aut}(\sigma)$。

设 $q\colon Y \to X$ 是一个以 $\eta\colon X \to Y$ 为点的形式超平面。$X$ 在 $Y$ 中的无穷小邻域定义了 $(\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})_{/X})_*$ 中的一个滤过对象，其中




作为其第 $m$ 项。

**定义 4.29**。设 $q\colon Y \to X$ 是一个由 $\eta\colon X \to Y$ 指定基点的形式超平面，且令 $G \simeq \mathbf{Aut}_\eta(Y/X)$ 为其自同构的分类栈。$G$ 的典范滤过是 $\mathbf{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})_{/X})$ 中的滤过对象，满足

$$G^m \simeq \mathrm{Aut}_{\eta_m}(X_\eta^{(m)}/X).$$

**注 4.30**。我们回顾一下 推论 4.14 指出，在 定义 4.29 的情形下，狄拉克栈 $Y$ 沿着 $\eta\colon X \to Y$ 正式完备。因此，$G$ 的典范滤过是完备的，即

$$G \simeq \varprojlim_m G^m.$$

由于 $q_m\colon X_\eta^{(m)} \to X$ 是仿射的，因此它是 0-截断的。这意味着 $\mathbf{E}_1$-群 $G^m$ 也是 0-截断的，或者等价地说，它表示一个取值于普通群的函子。

**注 4.31.** 给定 $\mathcal{F} \in \mathbf{QCoh}(X)$，我们类似地有一个分类栈

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \in \mathrm{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})$$

它表示函子 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})_{/X} \to \mathbf{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S})$，该函子将 $j\colon X' \to X$ 赋予 $j^*(\mathcal{F}) \in \mathbf{QCoh}(X')$ 的自同构 $\mathbf{E}_1$-群。事实上，由于 $\mathbf{QCoh}(X)$ 满足沿有效满射下降，这个函子也满足沿有效满射下降，并且可以证明它是可达的。

**注 4.32.** 若 $\mathcal{E} \in \mathbf{QCoh}(X)^{\mathrm{loc}}$ 是一个局部自由的 $\mathcal{O}_X$-模，对应的向量丛为 $V \simeq V_X(\mathcal{E}) \in \mathbf{Vect}(X)$，则 $\mathbf{E}_1$-群

$$\mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})$$

表示函子 $\mathbf{Shv}(\mathbf{Aff})_{/X} \to \mathbf{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathcal{S})$，该函子将映射 $j\colon X' \to X$ 赋予 $j^*(V) \in \mathbf{Vect}(X')$ 的自同构 $\mathbf{E}_1$-群。

设 $q\colon Y \to X$ 是一个由 $\eta\colon X \to Y$ 标记的形式超平面。在 $\eta$ 处取切空间，定义了一个自同构分类栈之间的映射

$$G \simeq \mathrm{Aut}_\eta(Y/X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T_{Y/X,\eta})$$

将自同构 $f$ 映射为其在 $\eta$处的导数 $df_\eta$。

**引理 4.33**。在 $\eta$ 处的导数经由一个等价分解

$$G^1 \simeq \mathrm{Aut}_{\eta_1}(X_\eta^{(1)}/X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T_{Y/X,\eta}).$$

证明。我们必须证明，由命题中的映射所表示的函子映射，对所有 $j\colon X' \to X$，逐点都是等价。只需考虑 $X' \simeq \mathrm{Spec}(A)$ 为仿射的情形。事实上，我们将在附录 A

证明 Yoneda 嵌入可扩展为等价 $\mathbf{Shv(Aff}_{/X}\mathbf{)} \to \mathbf{Shv(Aff)}_{/X}$。在这种情况下，命题可由以下众所周知的事实推出：映射

$$\mathrm{CAlg(Ab)}_{A/-/A} \longrightarrow \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Ab})$$

对于一个由 $\eta_1$ 增广的 $A$-代数 $q_1\colon\ A \to B$，将 $q_1$ 的余核赋给 $B \to A$，是一个范畴等价。□

**引理 4.34**。对于所有 $m \geq 2$，以下结论成立：
(1) 典范映射 $G^m \to G^{m-1}$ 是一个有效满射。
(2) 若 $j\colon\ X' \to X$ 具有 $X' \simeq \mathbf{谱}(A)$ 仿射性，则

$$\ker(G^m \to G^{m-1})(X' \to X) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Sym}_A^m(P))$$

配有 $P \simeq \mathcal{N}_{Y/X}(X' \to X)$。特别地，核是一个阿贝尔群。

证明。（1）我们断言，对于每个$j$，只要 $X'$ 是仿射的，该映射逐点都是一个 $\pi_0$-满射。接受这一点后，引理便成立，因为根据附录 A，Yoneda 嵌入可扩展为等价 $\mathbf{Shv(Aff}_{/X}\mathbf{)} \to \mathbf{Shv(Aff)}_{/X}$。为证明这一断言，我们将 $X' \simeq \mathbf{Spec}(A)$ 和 $Y' \simeq \mathbf{Spf}(\mathbf{Sym}_A(P))$ 记作某个有限生成射影 $A$-模 $P$的相应对象。令 $q\colon\ A \to \mathbf{Sym}_A(P)$ 和 $\eta\colon \mathbf{Sym}_A(P) \to A$ 分别为结构映射和增广，并令 $I \subset \mathbf{Sym}_A(P)$ 为增广理想。我们希望证明典范映射

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}_A(P)/I^{m+1}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}_A(P)/I^m)$$

是满射。根据对称代数的泛性质，增广 $A$-代数 $\mathbf{Sym}_A(P)/I^{m+1}$ 的一个自同态由一个$A$-线性映射 $P \to I/I^{m+1}$唯一确定，反之亦然。由于 $P$ 是射影的，任意 $A$-线性映射 $P \to I/I^m$都可经由投影 $I/I^{m+1} \to I/I^m$分解，因此

$$\mathrm{End}(\mathrm{Sym}_A(P)/I^{m+1}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Sym}_A(P)/I^m)$$

是满射。但增广 $A$-代数 $\mathbf{Sym}_A(P)/I^{m+1}$ 的自同态是自同构，当且仅当它在 $I$-进滤过下诱导的伴随分次对象上的映射是同构，当且仅当它诱导的 $A$-线性映射

$$P \longrightarrow I/I^{m+1} \longrightarrow I/I^2$$

是同构。这就证明了该断言。
（2）（1）的证明表明

$$\ker(G^m \to G^{m-1})(X' \to X) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, I^m/I^{m+1}),$$

以及 $I^m/I^{m+1} \simeq \mathbf{Sym}_A^m(P)$，正如我们所要证明的。 □

我们回到本节的目的：证明带基点形式超平面的 $\infty$-范畴沿有效满射下降。

**引理 4.35.** 若 $f\colon\ S' \to S$ 是仿射 *Dirac* 堆栈之间的忠实平坦映射，则

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hyp}_*(S) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hyp}_*(S') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Shv(Aff)}_{/S})_* & \xrightarrow{f^*} & (\mathrm{Shv(Aff)}_{/S'})_* \end{array}$$

是一个由 $\infty$-范畴组成的笛卡尔方块。

证明。根据定义，带基点的形式超平面在基变换下保持不变，因此该方块存在。因此，为完成证明，我们必须证明：若 $\sigma$是 $S$上的一个带基点狄拉克栈，沿 $f\colon S' \to S$ 进行基变换后得到的 $\sigma'$ 是一个带基点的形式超平面，那么 $\sigma$ 本身也是一个带基点的形式超平面。我们将 $q\colon Y \to S$和 $\eta\colon S \to Y$分别记为 $\sigma$的结构映射和点，对 $\sigma'$也作类似记号。

我们断言， $Y$沿 $S$形式完备。事实上，典范映射

$$\varinjlim_m S^{(m)} \longrightarrow Y$$

是一个等价，因为它的基变换

$$\varinjlim_m S'^{(m)} \longrightarrow Y'$$

沿有效满射 $f$也是如此。我们还断言 $q_1\colon S^{(1)} \to S$是仿射平坦的。事实上，它沿 $q_1'$ 的基变换 $f$根据 推论 4.14是仿射平坦的，而仿射平坦这一性质可沿有效满射下降。现在，余纤维

$$\mathcal{E} \simeq \mathrm{cof}(\mathcal{O}_S \to q_{1*}\mathcal{O}_{S^{(1)}}) \in \mathrm{QCoh}(S)$$

是 $\mathcal{N}_{S/Y}$的余法层 $\sigma$ 的候选对象，如 定义 4.17所述，只是我们尚未知道 $\sigma$ 是带基点的形式超平面。由于

$$f^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{N}_{S'/Y'}$$

是有限秩局部自由的 $\mathcal{O}_{S'}$-模，并且有限秩局部自由这一性质可沿有效满射下降，因此我们得出， $\mathcal{E}$ 是有限秩局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模。

为了完成证明，我们将证明存在一个等价

$$Z \simeq \hat{\mathbb{A}}_S(\mathcal{E}) \xrightarrow{h} Y$$

它是从与 $\mathcal{E}$ 相关联、以零截面 $\zeta$ 为基点的形式仿射空间到 $S \to Z$ 的带基点狄拉克堆之上 $S$ 的等价。由于 $Y$ 和 $Z$ 沿着 $S$ 都是形式完备的，只需证明存在一个相容的等价序列

$$S_\zeta^{(m)} \xrightarrow{h^{(m)}} S_\eta^{(m)}$$

对所有 $m \geq 0$都成立。 $m = 0$ 的情形是平凡的，而 $m = 1$ 的情形由 $\mathcal{E}$的定义可得。因此令 $m \geq 2$ ，并证明等价 $h^{(m-1)}$ 可扩张为等价 $h^{(m)}$。为此，令 $\mathcal{F}^m$ 为 $\mathbf{Aff}^\flat_{/S}$ 上的层，它将 $g\colon U \to S$ 仿射平坦映射到图表的 anima

$$\begin{array}{ccc} U \times_S S_\zeta^{(m-1)} & \xrightarrow{h^{(m-1)}|_U} & U \times_S S_\eta^{(m-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times_S S_\zeta^{(m)} & \xrightarrow{h_U^{(m)}} & U \times_S S_\eta^{(m)} \end{array}$$

其中 $h_U^{(m)}$ 是一个等价。层 $\mathcal{F}^m$ 自然是 $\mathbf{E}_1$-群的一个主齐性空间

$$\mathcal{K}^m \simeq \ker(G^m \to G^{m-1})$$

的自同构 $S_\eta^{(m)}$，且这些自同构在 $S_\eta^{(m-1)}$上扩张为恒等映射。这类主齐性空间的同构类由层上同调群 $H^1(S, \mathcal{K}^m)$参数化。但是，引理4.34 将这个群与以下对象的一个相干上同调群联系起来：

仿射 Dirac 概形 $S$，因此它为零。于是，主齐性空间 $\mathcal{T}^m$ 是平凡的，因此存在一个整体截面，即所需的等价 $h^{(m)}$。□

**定理 4.36。** 函子 形式超平面范畴$_*$: Shv(Aff)$^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 保持小极限。

证明。设 $X \simeq \lim_{\longrightarrow\alpha} X_\alpha$ 是 Shv(Aff) 中某个小图表的余极限。我们考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hyp}_*(X) & \longrightarrow & \varprojlim_\alpha \mathrm{Hyp}_*(X_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_* & \longrightarrow & \varprojlim_\alpha (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X_\alpha})_* \end{array}$$

并希望证明顶端的水平映射是等价。我们断言底端的水平映射是等价。根据 定理 2.21，映射

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X} \longrightarrow \varprojlim_\alpha \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X_\alpha}$$

是等价，因此只需证明典范映射

$$(\varprojlim_\alpha \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X_\alpha})_* \longrightarrow \varprojlim_\alpha (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X_\alpha})_*$$

是等价，这可由伴随推出

$$\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty \rightleftarrows \widehat{\mathrm{Cat}}{}^{1}_\infty \leftrightarrows \widehat{\mathrm{Cat}}{}^{\mathrm{ptd}}_\infty$$

这里，左下方的映射是由 $\infty$-范畴（非全）子范畴的包含，该子范畴由具有终对象的范畴以及保持终对象的映射张成；右上方的映射则是由带基点的 $\infty$-范畴构成的全子范畴的包含。根据（对偶的）[20, 推论 5.3.6，10],前者是右伴随，因此保极限。此外，后者有一个右伴随，它将具有终对象的 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 映到 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}_* \simeq \mathcal{C}_{1/}$，即 $\mathcal{C}$中的带基点对象。这就证明了这一断言。

现在，在证明开头的图表中，竖直映射都是全忠实的，因此该断言表明，顶部的水平映射是全忠实的。剩下要证明它是本质满的。因此，我们固定 $\sigma \in (\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/X})_*$，使得 $i_\alpha^*(\sigma)$ ∈形式超平面范畴$_*(X_\alpha)$ 对所有 $\alpha$ 都成立，并着手证明 $\sigma$ ∈形式超平面范畴$_*(X)$。

首先，我们考虑特殊情形：$T \simeq \coprod_\alpha T_\alpha$ 是仿射狄拉克概形的有限余积。在这种情形下，所需结论可由以下事实推出：对于有限秩局部自由的 $\mathcal{O}_T$模 $\mathcal{E}$，$\mathcal{O}_{T_\alpha}$模 $\mathcal{E}_\alpha \simeq i_\alpha^*(\mathcal{E})$是有限秩局部自由的；并且图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_\alpha \hat{\mathbb{A}}_{T_\alpha}(\mathcal{E}_\alpha) & \longrightarrow & \hat{\mathbb{A}}_T(\mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_\alpha T_\alpha & \longrightarrow & T \end{array}$$

是笛卡尔的，且水平映射是等价。

接下来，在一般情形下，我们必须证明，对于 $\eta\colon S \to X$ 且 $S$ 仿射，$\eta^*(\sigma) \in$ 形式超平面范畴$_*(S)$。根据 引理 4.35，只需证明存在一个忠实平坦的

仿射狄拉克概形之间的映射 $g\colon T \to S$，使得 $g^*\eta^*(\sigma) \in$ 形式超平面范畴$_*(T)$。为此，我们考虑预层的典范映射

$$\varinjlim_\alpha \iota(X_\alpha) \longrightarrow \iota(\varinjlim_\alpha X_\alpha).$$

经过层化后，它成为一个等价，因此也是一个有效满射；由命题 B.6 可知，存在一个预层图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I} h(T_i) & \xrightarrow{\sum_i \tilde{\eta}_i} & \varinjlim_\alpha \iota(X_\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle \sum_i h(g_i)} & & \downarrow \\ h(S) & \xrightarrow{\eta} & \iota(\varinjlim_\alpha X_\alpha) \end{array}$$

其中 $(g_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$ 是一个有限覆盖族。此外，由于预层的余极限是逐点计算的，每个 $\tilde{\eta}_i$ 都经由某个 $\iota(X_{\alpha_i})$分解，因此

$$g_i^*\eta^*(\sigma) \simeq \tilde{\eta}_i^* i_{\alpha_i}^*(\sigma) \in \mathrm{Hyp}_*(T_i)$$

对所有 $i \in I$ 均成立。现在，$g_i\colon T_i \to S$的余积 $g\colon T \to S$是仿射狄拉克概形之间的忠实平坦映射，而我们上面考虑的特例表明，$g^*\eta^*(\sigma) \in$ 形式超平面范畴$_*(T)$，正如所需。证明完毕。□

**推论 4.37。** 若 $f\colon X' \to X$ 是狄拉克堆栈之间的有效满射，则

$$\mathrm{Hyp}_*(X) \longrightarrow \varprojlim_\Delta \mathrm{Hyp}_*(X'^{\times_X [-]})$$

是 $\infty$-范畴之间的等价。

证明。 这是 定理 4.36 的一个特例。 □

**推论 4.38。** 对于每个狄拉克栈 $X$，形式超平面范畴$_*(X)$ 都是本质小的。

证明。 若 $X \simeq$谱$(R)$ 是仿射的，那么在 $X$ 上形式超平面的等价类集合的基数，根据 注 4.16，等于有限生成射影分次 $R$-模的同构类集合的基数，这是一个小集合。一般情况下，我们可以将 $X \simeq \varinjlim X_\alpha$ 写成仿射狄拉克概形的小余极限；又由于根据 形式超平面范畴$_*(X) \simeq \varprojlim$形式超平面范畴$_*(X_\alpha)$ 由 定理 4.36，推论得证。 □

**4.4. 形式群。** 本节定义狄拉克栈上的形式群群胚，并证明它沿有效满射下降。

**定义 4.39。** 令 Lat 表示有限生成自由阿贝尔群所成的范畴。若 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴，且存在有限积，则 $\mathcal{C}$ 中阿贝尔群对象所成的 $\infty$-范畴是由保持有限积的函子张成的全子范畴

$$\mathrm{Ab}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}^{\Sigma}(\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$$

由保有限积的函子张成。

**注记 4.40.** 我们注意到，全子范畴 $\mathrm{Ab}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$ 根据 [20, 命题 5.5.8.10]，在筛余极限和极限下封闭。因此，由 [20, 推论 5.1.2.3]可知，$\mathrm{Ab}(\mathcal{C})$ 中的小极限和小滤过余极限都是逐点计算的。

根据 推论4.38，函子 形式超平面范畴$_*$ 取值于 $\infty$-范畴 $\mathrm{Cat}_\infty$，其中对象是小的 $\infty$-范畴。事实上，它取值于子范畴 $\mathrm{Cat}_\infty^\Pi \subset \mathrm{Cat}_\infty$，该子范畴由 $\infty$-范畴以及保有限积函子所张成；这些范畴都具有有限积。因此，我们可以将其与函子复合：

$$\mathrm{Cat}_\infty^\Pi \xrightarrow{\mathrm{Ab}} \mathrm{Cat}_\infty$$

将 $\mathrm{Ab}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}^\Sigma(\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$ 指派给 $\mathcal{C}$ 的函子。

**定义 4.41** （形式群）。 将 $\infty$-范畴 $\mathrm{FGroup}(X)$（即 $X$ 上的形式群）指派给狄拉克栈 $X$ 的函子，是以下复合函子

$$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hyp}_*} \mathrm{Cat}_\infty^\Pi \xrightarrow{\mathrm{Ab}} \mathrm{Cat}_\infty\,.$$

**例 4.42** （形式加法群）。 设 $X$ 是一个狄拉克栈，且 $\mathcal{E}$ 是有限秩的局部自由 $\mathcal{O}_X$-模。将 $q_L\colon \mathbb{A}_X(L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{E}) \to X$ 指派给 $L$ 的函子 $\mathbb{G}_a(\mathcal{E})\colon \mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hyp}(X)$ 是 $X$ 上的一个形式群，我们称之为与 $\mathcal{E}$ 相关联的形式加法群。其维数等于 $\mathcal{E}$ 的秩。

**命题 4.43.** 函子 $\mathrm{FGroup}\colon \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 将狄拉克栈的小余极限映为 $\infty$-范畴的极限。

证明。 事实上，这是由 定理 4.36 以及在（其对偶的） [**20**, 推论 5.3.6。10], 中证明的如下事实得出的：$\mathrm{Cat}_\infty^\Pi \subset \mathrm{Cat}_\infty$ 对极限封闭。 □

**备注 4.44** （形式群与形式群律）。 我们将以更具体的方式阐述形式群的定义。设 $\mathcal{G}\colon \mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hyp}(X)$ 是定义在 $X$ 上的形式群，并设 $q\colon Y \to X$ 是其底层形式超平面 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$。典范包含 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 诱导出一个等价

$$\mathcal{G}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{G}(\mathbb{Z}),$$

再将该等价的逆与对角映射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 诱导的映射复合，便定义了加法

$$Y \times_X Y \xrightarrow{+} Y$$

在形式群中。类似地，唯一的映射 $\mathbb{Z} \to 0$ 定义了零截面

$$X \xrightarrow{\eta} Y.$$

反过来，形式超平面 $q\colon Y \to X$ 连同映射 $+\colon Y\times_X Y \to Y$ 和 $\eta\colon X \to Y$，若满足阿贝尔群公理，便确定一个形式群$\mathcal{G}\colon \mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hyp}(X)$，且该形式群在可缩选择的意义下唯一。

假设 $X \simeq$谱$(R)$ 和 $Y \simeq$ 形式谱$(A)$，其中 $I \subset A$ 理想定义零截面 $\eta\colon X \to Y$。映射 $+\colon Y\times_X Y \to Y$ 是 anima 的一个点

$$\mathrm{Map}_X(Y\times_X Y, Y) \simeq \varprojlim_{m,n}\varinjlim_p \mathrm{Map}_R(A/I^{p+1}, A/I^{m+1}\otimes_R A/I^{n+1})$$

它是 0-截断的。此外，在 $X$ 上的扎里斯基局部范围内，我们可以选取齐次坐标 $x_1,\dots,x_d \in A$，使得族 $(x_1,\dots,x_d)$ 生成 $I \subset A$，且族 $(x_1+I^2,\dots,x_d+I^2)$ 是 $R$-模 $I/I^2$ 的一组基。用这些坐标表示时

，映射 $+\colon Y \times_X Y \to Y$ 由一族 $d$ 个关于 $2d$ 个变量的幂级数 $f(y,z) = (f_s(y,z))$ 确定，反之亦然，

$$f_s = f_s(y,z) = f_s(y_1,\dots,y_d,z_1,\dots,z_d) \in R[[y_1,\dots,y_d,z_1,\dots,z_d]],$$

使得

$$\deg(f_s) = \deg(x_s) = \deg(y_s) = \deg(z_s).$$

此外，映射 $+\colon Y \times_X Y \to Y$ 在形式超平面 $q\colon Y \to X$ 上定义了形式群结构，其零截面 $\eta\colon X \to Y$ 由 $I \subset A$ 定义，当且仅当幂级数族满足以下恒等式。

(a) $f(x,0) = x = f(0,x)$
(b) $f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$
(c) $f(x,y) = f(y,x)$

满足这些条件的幂级数族在经典上称为**形式群律**；上述讨论表明，任意形式群都可以在局部由一个形式群律描述（这种描述并非规范的）。

我们指出，上述三个公理蕴含了关于加法的逆元存在且唯一。事实上，映射 $-\colon Y \to Y$ 由幂级数族 $i(x) = (i_s(x))$ 确定，反之亦然，其中这些幂级数取自 $d$ 个变量，且为 $d$ 幂级数，

$$i_s = i_s(x) = i_s(x_1,\dots,x_d) \in R[[x_1,\dots,x_d]],$$

使得 $\deg(i_s) = \deg(x_s)$，且映射 $-\colon Y \to Y$ 是关于加法的逆映射，当且仅当以下恒等式成立。

(d) $f(x,i(x)) = 0 = f(i(x),x)$

但由 (a) 可知，这个方程组有唯一解。

**例 4.45.** 设 $R$ 是一个狄拉克环，$M$ 是一个自由 $R$-模。若我们选取 $M$ 的一个由齐次元素组成的基 $(x_1,\dots,x_d)$，则与 $M$ 相关联的加性形式群 $\mathbb{G}_a(M)$ 完全由幂级数族 $f(y,z) = y + z$ 确定，反之亦然，其中 $f_s(y,z) = y_s + z_s$。

**定义 4.46.** 设 $X$ 是一个狄拉克栈。李代数是如下函子

$$\mathrm{FGroup}(X) \xrightarrow{\mathrm{Lie}} \mathrm{Vect}(X)$$

它将形式群 $\mathcal{G}$ 映射到其底层形式超平面 $q\colon Y \to X$ 在零截面 $\eta\colon X \to Y$ 处的切空间 $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \simeq T_{Y/X,\eta}$。

由于 $\mathcal{G}$ 是阿贝尔的，因此无需在向量丛 $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ 上定义李括号，因为它最终会为零。

函子 $\mathrm{FGroup}\colon \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 分类一个笛卡尔纤维化

$$\mathrm{FGroup} \xrightarrow{p} \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}),$$

我们将其定义域称为形式群的 $\infty$-范畴；滥用记号，也将其记作 FGroup。其对象是底空间为不同狄拉克栈的形式群。映射 $f\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ in FGroup 确定了一个图表

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

位于 Shv(Aff) 中，其中 $q$ 和 $q'$ 分别是 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 的底层形式超平面；映射 $f$ 是 $p$-笛卡尔的，当且仅当这个狄拉克栈图表是笛卡尔的。回顾一下，若函子 $\mathcal{G}\colon K \to \mathrm{FGroup}$ 将 $K$ 中的每个映射 $\alpha\colon k' \to k$ 都映为 FGroup 中的笛卡尔映射，则称其为笛卡尔函子。

**命题 4.47**。设 $\mathcal{G}\colon K \to \mathrm{FGroup}$ 是形式群范畴中的一个笛卡尔图表。存在本质上唯一的一对笛卡尔图表

$$K^{\triangleright} \xrightarrow{\bar{\mathcal{G}}} \mathrm{FGroup}$$

以及一个等价 $\bar{\mathcal{G}}|_K \simeq \mathcal{G}$。此外，底层形式超平面的图表 $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})\colon K^{\triangleright} \to \mathrm{Shv(Aff)}^{\Delta^1}$ 是一个余极限图。

证明。我们考虑以下 $\infty$-范畴图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{FGroup}_K & & \xrightarrow{X'} & & \mathrm{FGroup} \\ {\scriptstyle \mathcal{G}_K}\uparrow\downarrow{\scriptstyle p_K} & & \nearrow{\scriptstyle \mathcal{G}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ K & & \xrightarrow{X} & & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}), \end{array}$$

其中 $p_K$ 是沿着 $X \simeq p \circ \mathcal{G}$ 对 $p$ 作基变换所得。由于 $p$ 是一个笛卡尔纤维化，因此 $p_K$ 也是；又由于 $\mathcal{G}$ 是一个笛卡尔函子，诱导截面 $\mathcal{G}_K$ of $p_K$ 也如此。我们固定一对余极限图 $X\colon K^{\triangleright} \to \mathrm{Shv(Aff)}$ 以及一个等价 $X|_K \simeq X$，并考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{FGroup}_K & & \longrightarrow & & \mathrm{FGroup}_{K^{\triangleright}} & \xrightarrow{\bar{X}'} & \mathrm{FGroup} \\ {\scriptstyle \mathcal{G}_K}\uparrow\downarrow{\scriptstyle p_K} & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{K^{\triangleright}}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ K & & \longrightarrow & & K^{\triangleright} & \xrightarrow{\bar{X}} & \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}), \end{array}$$

其中 $p_{K^{\triangleright}}$ 是 $p$ 沿着 $X$ 的基变换。我们在命题 4.43 中证明了函子 $\mathrm{FGroup}\colon \mathrm{Shv(Aff)}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 将狄拉克叠的余极限映为 $\infty$-范畴的极限。因此，由 [20, 命题 3.3.3。1] 可知，$\mathcal{G}_K$ 的笛卡尔截面 $p_K$ 本质上唯一地延拓为 $\mathcal{G}_{K^{\triangleright}}$ 的笛卡尔截面 $p_{K^{\triangleright}}$。这确定了一个笛卡尔函子 $\mathcal{G}\colon K^{\triangleright} \to \mathrm{FGroup}$ 以及一个等价 $\mathcal{G}|_K \simeq \mathcal{G}$，正如所需。

还需证明 $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})\colon K^{\triangleright} \to \mathrm{Shv(Aff)}^{\Delta^1}$ 是一个余极限图表。令我们将 $q_k\colon Y_k \to X_k$ 记为 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ 在 $k \in K^{\triangleright}$ 处的取值，并令 $\infty \in K^{\triangleright}$ 为锥的顶点。由于 $\mathcal{G}\colon K^{\triangleright} \to \mathrm{FGroup}$ 是一个笛卡尔函子，图表

$$\begin{array}{ccc} Y_k & \longrightarrow & Y_\infty \\ \downarrow{\scriptstyle q_k} & & \downarrow{\scriptstyle q_\infty} \\ X_k & \longrightarrow & X_\infty \end{array}$$

对所有 $k \in K$ 都是笛卡尔的；由于 Shv(Aff) 中的余极限具有普遍性，因此它也具有普遍性

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{k\in K} Y_k & \longrightarrow & Y_\infty \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_\infty} \\ \varinjlim_{k\in K} X_k & \longrightarrow & X_\infty. \end{array}$$

但下方的水平映射是一个等价，因此上方的水平映射也是如此。□

## 5. 稳定同伦论

本节是最后一节，旨在说明狄拉克几何是表述稳定同伦论中各种命题的自然几何框架。

**5.1. 下降谱序列。** 设 $\eta\colon k \to E$ 是谱中的交换代数之间的一个映射。[6] 我们可以在 $\infty$-范畴中构造增广余单纯对象，其对象属于 $k$-模的谱

$$\Delta_+ \xrightarrow{E^{\otimes_k[-]}} \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}),$$

这称为 $\eta$ 的余条构造。回顾一下，$[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$使得 $E^{\otimes_k[n]}$ 是 $k$ 上 $E$ 的 $(n+1)$ 重张量幂。给定谱中的一个 $k$-模 $V$，沿着包含映射

$$V \simeq \varprojlim_{\Delta_+} V \otimes_k E^{\otimes_k[-]} \longrightarrow \widehat{V} \simeq \varprojlim_{\Delta} V \otimes_k E^{\otimes_k[-]}$$

称为 $V$ 的 $\eta$-幂零完备化。这通常不是一个特别良好的运算，但其优点是可以通过下降谱序列来分析其目标，我们现在就来说明这一点。

我们令 $\Delta^{\leq n} \subset \Delta$ 为由满足$m \leq n$ 的对象 $[m]$ 张成的全子范畴，并回顾 Lurie 的 $\infty$-范畴 Dold–Kan对应

$$\mathrm{Fun}(\Delta, \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp})) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}^{\mathrm{op}}_{\geq 0}, \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}))$$

来自 [19, 定理 1.2.4。1] 将余单纯 $k$谱中的模 $V \otimes_k E^{\otimes_k[-]}$映为过滤 $k$谱中的模$\mathrm{Fil}_\eta(V)$ ，它将 $n$ 对应到

$$\mathrm{Fil}^n_\eta(V) \simeq \varprojlim_{\Delta^{\leq n}} V \otimes_k E^{\otimes_k[-]}.$$

下降谱序列是相应的谱序列

$$E^1_{i,j} \simeq \pi_{i+j}(\mathrm{gr}^{-i}_\eta(V)) \Longrightarrow \pi_{i+j}(\widehat{V}),$$

它按 Boardman 的意义条件收敛 [3] 到 $V$的 $\eta$-幂零完备化的同伦群。我们回顾以下关于下降谱序列收敛性的结果。

**引理 5.1.** 设 $\eta\colon k \to E$ 是谱中的交换代数之间的映射，设 $I$ 是谱中由 $\eta$ 的纤维给出的$k$-模，并设 $V$ 是谱中的任意 $k$-模。在这种情况下，存在如下谱中 $k$-模的纤维序列

$$V \otimes_k I^{\otimes_k[n]} \longrightarrow V \longrightarrow \mathrm{Fil}^n_\eta(V)$$

[6] 为便于阐述，我们假设 $\eta\colon k \to E$是谱中的交换代数之间的映射，但实际所需条件更弱：若 $k$ 是一个 $\mathrm{E}_2$-代数，则 $\mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp})$ 可提升为一个 $\mathrm{E}_1$-幺半 $\infty$-范畴，而我们可以要求 $E$ 是其中的 $\mathrm{E}_1$-代数。关于此一般情形下余条构造的定义，参见 [26, 构造 2.7] 。由于分次环 $\pi_*(E)$ 并非自动满足狄拉克条件，我们也必须假设它满足该条件。

对所有 $n \geq 0$ 均成立。特别地，若 $\eta$ 是1-连通的，且 $V$ 有右界，则 $\widehat{\ }$ 完备化映射 $V \to V$ 是一个等价。

证明。 这在 [26, 命题 2 中得到了证明。14]。 □

$\infty$-范畴 Dold–Kan 对应的证明将

$$\cdots \xleftarrow{d^1} E^1_{i-1,j} \xleftarrow{d^1} E^1_{i,j} \xleftarrow{d^1} \cdots \xleftarrow{d^1} E^1_{-1,j} \xleftarrow{d^1} E^1_{0,j}$$

与余单纯形 $\pi_0(k)$-模 $\pi_j(V \otimes_k E^{\otimes_k[-]})$所关联的标准化上链复形相对应。因此，下降谱序列具有如下形式

$$E^2_{i,j} \simeq \pi^{-i}(\pi_j(V \otimes_k E^{\otimes_k[-]})) \Longrightarrow \pi_{i+j}(\widehat{V}),$$

接下来，我们将用狄拉克几何的术语来确定 $E^2$-项。

映射 $\eta\colon\ k \to E$ 谱中的交换代数给出了群胚

$$S \simeq \mathrm{Spec}(\pi_*(E^{\otimes_k[-]}))$$

在仿射狄拉克概形中，因此我们可以取余极限所给出的狄拉克栈

$$X \simeq \varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} S \in \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})$$

在狄拉克栈中。因此，我们今后假设群胚 $S$ 具有平坦面映射，从而根据 定理2.49，狄拉克栈 $X$ 是几何的。[7]

**构造 5.2**。 在此情形下，我们定义一对 $(\mathcal{F}, \partial)$，其中包含一个函子

$$\mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit}$$

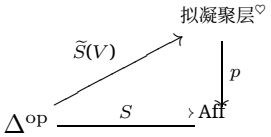
它将谱中的一个 $k$-模 $V$映射为一个拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}(V)$，以及拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模之间的一个自然同构

$$\mathcal{F}(\Sigma V) \xrightarrow{\partial_V} \mathcal{F}(V)(-1/2),$$

它是[30, 定义 2。8]意义下的同调理论。为此，我们令

$$\mathrm{QCoh}^{\heartsuit} \xrightarrow{p} \mathrm{Aff}$$

$\widehat{\ }$为由函子 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 分类的笛卡尔纤维化，该函子将仿射 Dirac 概形 $T$ 映射到阿贝尔范畴 $\mathrm{QCoh}(T)^{\heartsuit}$。现在，我们有一个提升




定义为

$$\widetilde{S}(V) \simeq (S, \pi_*(V \otimes_k E^{\otimes_k[-]}))$$

并且根据假设， $S$ 将 $\Delta$ 中的单射映射到 Aff 中的平坦映射，因此它将 $\Delta$ 中的单射映射到 $\mathrm{QCoh}^{\heartsuit}$ 中的 $p$-笛卡尔映射。那么，令 $\Delta_s \subset \Delta$ 为

[7]等价地，我们假设 $\eta$ 是[5], 术语中的下降平坦；该文中证明， $\eta$ 的这一性质在复合下并不稳定。

由单射映射张成的子范畴。由 推论 3.26 以及[20, 推论 3.3.3。2] 可知，典范映射

$$\mathrm{QCoh}(X)_{\geq 0} \longrightarrow \varprojlim_{\Delta} \mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0} \longrightarrow \varprojlim_{\Delta_s} \mathrm{QCoh}(S)_{\geq 0}$$

是等价，并且根据定理 3.27 复合映射限制后是一个等价

$$\mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit} \longrightarrow \varprojlim_{\Delta_s} \mathrm{QCoh}(S)^{\heartsuit}.$$

根据 [20, 推论 3.3.3。2], 笛卡尔提升 $S(V)$ 定义了右侧的一个点，我们将 $\mathcal{F}(V) \in \mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit}$ 定义为左侧与之对应的本质唯一的点。

显然，笛卡尔提升 $S(V)$ 关于 $V$ 是函子性的，从而得到所需的函子 $\mathcal{F}$。此外，自然同构

$$\pi_*(\Sigma V \otimes_k E^{\otimes_k [-]}) \longrightarrow \pi_*(V \otimes_k E^{\otimes_k [-]})(-1/2)$$

来自 [12, 例 2.4]，诱导出自然同构 $\partial_V \colon \mathcal{F}(\Sigma V) \to \mathcal{F}(V)(-1/2)$。

**注 5.3.** 设 $\eta \colon k \to E$ 是谱中的交换代数之间的一个映射，且群胚 $S \simeq \mathrm{Spec}(\pi_*(E^{\otimes_k [-]}))$ 具有平坦面映射，并设 $X \simeq |S|$。由于 $f_n \colon S_n \to X$ 是一个浸没，定理 3.27 蕴含 $f_n^*$ 是 $t$-正合的，因此我们可以考虑复合

$$\mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{QCoh}(X)^{\heartsuit} \xrightarrow{f_n^*} \mathrm{QCoh}(S_n)^{\heartsuit} \simeq \mathrm{Mod}_{\pi_*(E^{\otimes_k [n]})}(\mathrm{Ab}).$$

注意， $\mathcal{F}$ 在 构造 5.2 中的定义给出了这个复合函子与如下函子之间的一个等价：该函子将 $V$ 映至 $\pi_*(V \otimes_k E^{\otimes_k [n]})$。

**定义 5.4.** 设 $\eta \colon k \to E$ 是谱中的交换代数之间的一个映射，使得群胚 $S \simeq \mathrm{Spec}(\pi_*(E^{\otimes_k [-]}))$ 具有平坦面映射。与 $\eta$ 相关联的同调理论是 $(\mathcal{F}, \partial)$，其定义见 构造 5.2。

**定理 5.5。** 设 $\eta \colon k \to E$ 是谱中的交换代数之间的一个映射，使得仿射 *Dirac* 概形中的群胚 $S \simeq \mathrm{Spec}(\pi_*(E^{\otimes_k [-]}))$ 具有平坦面映射，并设 $X \simeq |S|$ 是由其几何实现给出的几何狄拉克栈。对于谱中的一个 $k$-模，下降谱序列 $V$ 的形式为

$$E_{i,j}^2 \simeq H^{-i}(X, \mathcal{F}(V)(j/2)) \Longrightarrow \pi_{i+j}(\widehat{V}),$$

其中 $(\mathcal{F}, \partial)$ 是与 $\eta$ 相关联的同调理论。

证明。设 $p \colon X \to 1$ 是到终对象狄拉克栈 $1 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 的唯一映射。任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$ 的相干上同调定义为

$$H^{-i}(X, \mathcal{F}) \simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}(\mathcal{O}_1, \Sigma^{-i} p_*(\mathcal{F})),$$

我们首先解释如何利用仿射浸没 $f_0 \colon S_0 \to X$ 来理解其结构。为此，我们考虑以下图表

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{f_n} & X \\ & {\scriptstyle p_n} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle p} & \\ & 1 & \end{array}$$

并观察到典范映射

$$\mathcal{F} \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta} f_{n*}f_n^*(\mathcal{F})$$

是一个等价。事实上，对于任意 $\mathcal{G} \in \mathrm{QCoh}(X)$，我们有一个 anima 图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(\mathcal{G},\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\mathcal{G}, \varprojlim_{[n]\in\Delta} f_{n*}f_n^*(\mathcal{F})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Map}(f_n^*(\mathcal{G}), f_n^*(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Map}(\mathcal{G}, f_{n*}f_n^*(\mathcal{F})), \end{array}$$

其中左侧的垂直映射是一个等价，因为典范映射

$$\mathrm{QCoh}(X) \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{QCoh}(S_n)$$

是 $\infty$-范畴的一个等价。由于右侧的垂直映射和下方的水平映射也都是等价，我们得出顶部的水平映射是一个等价，正如所需。由此可知，典范映射

$$p_*(\mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_{[n]\in\Delta} p_*f_{n*}f_n^*(\mathcal{F}) \simeq \varprojlim_{[n]\in\Delta} p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})$$

是一个等价。因此，我们得到

$$\begin{aligned} H^{-i}(X,\mathcal{F}) &\simeq \pi_0 \mathrm{Map}(\mathcal{O}_1, \Sigma^{-i}p_*(\mathcal{F})) \simeq \pi_i \mathrm{map}(\mathcal{O}_1, p_*(\mathcal{F})) \\ &\simeq \pi_i(\varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{map}(\mathcal{O}_1, p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

现在，假设 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit$。由于 $f_n\colon S_n \to X$ 是从一个仿射 Dirac 堆栈出发的浸没，定理 3.27 表明 $f_n^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(S_n)^\heartsuit$；又由于 $p_n$ 是仿射平坦的，命题 3.20 进一步表明 $p_{n*}f_n^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(1)^\heartsuit$。因此，映射谱 $\mathrm{map}(\mathcal{O}_1, p_{n*}f_n^*(\mathcal{F}))$ 是由分次阿贝尔群 $p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})$ 的 0 次部分 $p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})_0$ 给出的 Eilenberg–MacLane 谱。由此可知，Bousfield–Kan 谱序列

$$\begin{aligned} E^2_{s,t} &= \pi^{-s}([n] \mapsto \pi_t \mathrm{map}(\mathcal{O}_1, p_{n*}f_n^*(\mathcal{F}))) \\ &\Rightarrow \pi_{s+t}(\varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{map}(\mathcal{O}_1, p_{n*}f_n^*(\mathcal{F}))) \end{aligned}$$

集中在线 $t = 0$ 上，因此它退化为一个同构

$$\pi^{-i}([n] \mapsto p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})_0) \simeq \pi_i(\varprojlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{map}(\mathcal{O}_1, p_{n*}f_n^*(\mathcal{F}))).$$

因此，对于 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit$，其相干上同调由下式给出

$$H^{-i}(X,\mathcal{F}) \simeq \pi^{-i}([n] \mapsto p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})_0),$$

更一般地，$\mathcal{F}(j/2)$ 的相干上同调由下式给出

$$H^{-i}(X,\mathcal{F}(j/2)) \simeq \pi^{-i}([n] \mapsto p_{n*}f_n^*(\mathcal{F})_j).$$

最后，若 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}(V)$，那么 $f_n^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(S_n)^\heartsuit$ 是 $\pi_*(E^{\otimes_k[n]})$-模 $\pi_*(V \otimes_k E^{\otimes_k[n]})$ 的分次结构，而 $p_{n*}f_n^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{QCoh}(1)^\heartsuit$ 是其底层分次阿贝尔群，因此我们得出

$$H^{-i}(X,\mathcal{F}(V)(j/2)) \simeq \pi^{-i}([n] \mapsto \pi_j(V \otimes_k E^{\otimes_k[n]})) \simeq E^2_{i,j},$$

正如我们想要证明的那样。 □

**注 5.6.** 在 定理 5.5 的情形下，下降谱序列不依赖于谱中的交换代数之间的映射 $\eta$: $k \to E$，而只依赖于其关联的同调理论 $(\mathcal{F},\ \eta)$。关于以这些术语表述的构造，请参见 [30, 构造 2。24] 不过，我们将在下文说明，同调理论 $(\mathcal{F},\ \partial)$ 确实符合 [30, 定义 2。19]，所要求的适配条件。

在定理 5.5的情形下，伴随的余单位

$$\mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}) \underset{\eta_*}{\overset{\eta^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_E(\mathrm{Sp})$$

由沿 $\eta$ 的标量扩张和沿 $\eta$ 的标量限制给出，它诱导出一个分次 $\pi_*(E)$-模之间的映射 $\pi_*(\eta^*\eta_*(W)) \to \pi_*(W)$，或者等价地，在拟凝聚层$(S_0)^\heartsuit$ 中有一个映射 $f_0^*\mathcal{F}(\eta_*(W)) \to \mathcal{G}(W)$，其伴随映射是一个自然映射

$$\mathcal{F}(\eta_*(W)) \longrightarrow f_{0*}(\mathcal{G}(W))$$

在拟凝聚层$(X)^\heartsuit$ 中。

**引理 5.7。** 在定理 5.5的情形下，典范映射

$$\mathcal{F}(\eta_*(W)) \longrightarrow f_{0*}(\mathcal{G}(W))$$

是一个自然同构。

证明。由于 $\mathsf{QCoh}(X) \simeq \lim_{\longleftarrow [n]\in\Delta} \mathsf{QCoh}(S_n)$，只需证明该映射

$$f_n^*(\mathcal{F}(\eta_*(W))) \longrightarrow f_n^* f_{0*}(\mathcal{G}(W))$$

由陈述中的映射诱导的映射对所有 $n \geq 0$ 都是等价。事实上，只需考虑 $n = 0$ 的情形，但考虑所有 $n \geq 0$ 会使论证更加清晰。我们考虑有限序数的图表

$$\begin{array}{ccccc} [n+1] & = & [0] * [n] & \longleftarrow & [0] \\ \uparrow{\scriptstyle d^0} & & \uparrow{\scriptstyle d^0 * [n]} & & \uparrow{\scriptstyle d^0} \\ [n] & = & \emptyset * [n] & \longleftarrow & \emptyset. \end{array}$$

由此诱导的谱中的交换代数图表

$$\begin{array}{ccc} E^{\otimes_k [n+1]} & \xleftarrow{\eta'_n} & E \\ \uparrow{\scriptstyle \eta'} & & \uparrow{\scriptstyle \eta} \\ E^{\otimes_k [n]} & \xleftarrow{\eta_n} & k \end{array}$$

是余笛卡尔的，且所诱导的狄拉克叠图表

$$\begin{array}{ccc} S_{n+1} & \xrightarrow{f'_n} & S_0 \\ \downarrow{\scriptstyle f'_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ S_n & \xrightarrow{f_n} & X \end{array}$$

是笛卡尔的，因为 $S$ 是一个群胚。由于 $f_0$ 是仿射平坦的，命题 3.20 表明，与后一个方块相关联的基变换映射是一个等价，因此只需证明复合

$$f_n^* f_{0*}(\mathcal{G}(W)) \longrightarrow f_n^* f_{0*}(\mathcal{G}(W)) \longrightarrow f'_{0*} f_n'^*(\mathcal{G}(W))$$

所讨论的映射与基变换映射的复合对所有 $n \geq 0$ 都是等价。改用分次模记号，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(\eta_n^*\eta_*(W)) & \longrightarrow & f'_{0*} f_n'^*(\pi_*(W)) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \pi_*(\eta'_* \eta_n'^*(W)) & \end{array}$$

分次 $\pi_*(E^{\otimes_k [n]})$-模，并且我们希望证明顶端的映射是一个等价。左侧的斜映射是与上述谱中交换代数的余笛卡尔方块相关联的基变换映射，因此是一个同构；右侧的斜映射是 Künneth 映射，它也是一个同构，因为根据 $S$ 具有平坦面映射这一假设，$\pi_*(\eta'_n)$ 是一个平坦的 Dirac 环映射。□

**命题 5.8.** 在 定理 5.5 的情形下，与 $\eta\colon\ k \to E$ 相关联的同调理论是适配的。 $(\mathcal{F}, \partial)$

证明。 回顾一下，根据 [30, 定义 2.19], ，同伦论 $(\mathcal{F},\ \partial)$是适配的，当且仅当对每个内射对象 $\mathcal{I} \in$ 拟凝聚层$(X)^\heartsuit$，存在一个同构$\phi\colon\ \mathcal{F}(I) \to \mathcal{I}$，其中 $I \in \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp})$，使得对每个 $V \in \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp})$，复合映射

$$\pi_0 \operatorname{Map}(V, I) \longrightarrow \operatorname{Map}(\mathcal{F}(V), \mathcal{F}(I)) \longrightarrow \operatorname{Map}(\mathcal{F}(V), \mathcal{I})$$

是一个同构。注意，拟凝聚层 $\mathcal{I} \in \mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit$ 中存在此类同构 $\phi\colon\ \mathcal{F}(I) \to \mathcal{I}$ 的内射对象构成的类在直缩下封闭。

现在，由于 $f \simeq f_0\colon\ S_0 \to X$ 是仿射平坦的，伴随中的两个函子

$$\mathrm{QCoh}(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(S_0)$$

都是 $t$-正合的，因此它们限制为一个伴随

$$\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$$

其中两个函子都是正合的。此外，单位 $\eta\colon\ \mathcal{F} \to f_* f^*(\mathcal{F})$ 是单态射，因为 $f\colon\ S_0 \to X$ 是一个有效满射。因此，左侧的每个内射对象都是 $f_*$ 本质像中的一个内射对象的直缩。

因此，我们令 $\mathcal{I} \simeq f_*(\mathcal{J})$，其中 $\mathcal{J} \in \mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$ 是单射，并继续寻找一个同构 $\phi\colon\ \mathcal{F}(I) \to \mathcal{I}$，使其与 $I \in \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp})$ 具有所需性质。根据布朗可表示性， [19, 定理 1.4.1.2], 可知，函子

$$h\,\mathrm{Mod}_E(\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\operatorname{Map}(\mathcal{G}(-), \mathcal{J})} \mathrm{Set}$$

与 $\mathcal{G}\colon \mathrm{Mod}_E(\mathrm{Sp}) \to \mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$ 如引理 5.7 中所述，是可表的。因此，我们得到一个映射 $\psi\colon\ \mathcal{G}(J) \to \mathcal{J}$ 与 $J \in \mathrm{Mod}_E(\mathrm{Sp})$ 使得复合映射

$$\pi_0 \operatorname{Map}(-, J) \longrightarrow \operatorname{Map}(\mathcal{G}(-), \mathcal{G}(J)) \longrightarrow \operatorname{Map}(\mathcal{G}(-), \mathcal{J})$$

是自然同构，并且由于 $\mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$ 有一族生成元包含于 $\mathcal{G}$ 的本质像中，我们得出映射 $\psi$ 是同构。因此，我们令 $I \simeq \eta_*(J)$，并将 $\phi\colon \mathcal{F}(I) \to \mathcal{I} \simeq f_*(\mathcal{J})$ 定义为复合

$$\mathcal{F}(I) \longrightarrow f_*(\mathcal{G}(J)) \longrightarrow f_*(\mathcal{J})$$

由引理 5.7 给出的同构和由 $\psi$诱导的同构。由于复合

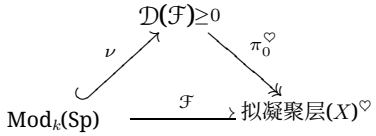
$$f^*\mathcal{F}(V) \longrightarrow f^*\mathcal{F}(\eta_*\eta^*(V)) \longrightarrow f^*f_*\mathcal{G}(\eta^*(V)) \longrightarrow \mathcal{G}(\eta^*(V))$$

对于所有 $V \in \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp})$ 都是同构，我们得出复合映射

$$\pi_0 \operatorname{Map}(V, I) \longrightarrow \operatorname{Map}(\mathcal{F}(V), \mathcal{F}(I)) \longrightarrow \operatorname{Map}(\mathcal{F}(V), \mathcal{I})$$

是同构，正如所需。至此证明完成。 □

**注 5.9**。我们简要讨论第二作者对与 $\eta$相关的下降谱序列所作的范畴化：$k \to E$。根据命题 5.8，与$(\mathcal{F}, \partial)$ 相关的同调理论 $\eta\colon k \to E$ 是适配的，因此 [30, 定理 6。40] 将同调函子 $\mathcal{F}$ 表述为第 0截断




作为格罗滕迪克预稳定$\infty$-范畴中的反射子范畴的全忠实嵌入。[8] 此外，如果我们将 $\mathcal{D}(\mathcal{F})^{\geq 0}$ 展示为一个可呈示稳定 $\infty$-范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ 的连通部分，且其带有与滤过余极限相容的 $t$-结构，那么 [30, 定理 5.60]便将定理 5.5中的下降谱序列与滤过谱所关联的谱序列对应起来[9]

$$F^\star(V) \simeq \operatorname{map}(\nu(k), \Sigma^\star \nu(\Sigma^{-\star} V)) \in \operatorname{Fun}(\mathbb{Z}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sp})$$

其结构映射由余极限交换映射 $\tau\colon \Sigma\nu(W) \to \nu(\Sigma W)$ 给出。然而，格罗滕迪克预稳定 $\infty$-范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{F})^{\geq 0}$ 所编码的信息远比下降谱序列丰富，因此它很有用。

**注 5.10**。在构造 5.2中，我们使用了这些等价

$$\mathrm{QCoh}(X)^\heartsuit \longrightarrow \varprojlim_{\Delta} \mathrm{QCoh}(S)^\heartsuit \longrightarrow \varprojlim_{\Delta_s} \mathrm{QCoh}(S)^\heartsuit$$

其中，在中间项中，重要的是我们使用与 $\theta\colon S_m \to S_n$ 相关联的截断标量扩张映射 $\theta^*_\heartsuit$，因为并非每个这样的映射 $\theta$ 都是平坦的。

---

[8] 至于一个 $\infty$格罗滕迪克阿贝尔范畴的导出 $\infty$-范畴，附属于$(\mathcal{F}, \partial)$的导出-范畴有几种变体；比较注 6.38 和 6.39]。我们只考虑非分离变体。[9] 稳定动机 $\infty$ 范畴上的切片过滤以类似的方式编码动机谱序列 $E_{i,\ j}^2 = H^{-i}(X, \mathbb{Z}(j/2)) \Rightarrow K_{i+j}(X)$。对于下降谱序列，切片过滤所起的作用由 $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ 上的 $t$-结构承担，因为该塔

$$\cdots \xrightarrow{\tau} \Sigma\nu(\Sigma^{-1}V) \xrightarrow{\tau} \nu(V) \xrightarrow{\tau} \Sigma^{-1}\nu(\Sigma V) \xrightarrow{\tau} \cdots$$

是相对于此 $t$-结构的 Postnikov 塔。

由于图表 拟凝聚层$(S)^\heartsuit$ 是一个 1-范畴的图表，因此我们由 [12,命题A.1] 可知，限制映射

$$\varprojlim_{\Delta} \mathrm{QCoh}(S)^\heartsuit \longrightarrow \varprojlim_{\Delta^{\leq 2}} \mathrm{QCoh}(S)^\heartsuit$$

是一个等价。反过来，右侧的一个对象是由一个对象 $\mathcal{F}_0 \in \mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$ 以及一个“下降结构”映射[10]组成的对 $(\mathcal{F}_0, \epsilon)$

$$d_1^*(\mathcal{F}_0) \xrightarrow{\epsilon} d_0^*(\mathcal{F}_0)$$

在 $\mathrm{QCoh}(S_1)^\heartsuit$ 中，使图表

$$\begin{array}{ccc} s_{0,\heartsuit}^* d_1^*(\mathcal{F}_0) & \xrightarrow{s_{0,\heartsuit}^*(\epsilon)} & s_{0,\heartsuit}^* d_0^*(\mathcal{F}_0) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{F}_0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & d_1^* d_1^*(\mathcal{F}_0) & \xrightarrow{d_1^*(\epsilon)} & d_1^* d_0^*(\mathcal{F}_0) \\ & \swarrow & & & \searrow \\ d_2^* d_1^*(\mathcal{F}_0) & & & & d_0^* d_0^*(\mathcal{F}_0) \\ & \searrow^{d_2^*(\epsilon)} & & \nearrow_{d_0^*(\epsilon)} & \\ & & d_2^* d_0^*(\mathcal{F}_0) = d_0^* d_1^*(\mathcal{F}_0) & & \end{array}$$

在 $\mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$ 和 $\mathrm{QCoh}(S_2)^\heartsuit$ 中可交换。等号表示各种唯一的同构。我们称 $(\mathcal{F}_0, \epsilon)$ 是沿着 $f\colon S_0 \to X$ 具有下降结构的拟凝聚层 $\mathcal{O}_{S_0}$-模，并称映射 $\epsilon$ 使这些图表可交换这一事实满足余循环条件。沿着映射 $f\colon S_0 \to X$ 具有下降结构的拟凝聚层 $\mathcal{O}_{S_0}$-模之间的映射 $\alpha\colon (\mathcal{F}_0, \epsilon) \to (\mathcal{F}_0', \epsilon')$，是一个映射 $\alpha\colon \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0'$，它属于 $\mathrm{QCoh}(S_0)^\heartsuit$，并使图表

$$\begin{array}{ccc} d_1^*(\mathcal{F}_0) & \xrightarrow{\epsilon} & d_0^*(\mathcal{F}_0) \\ \downarrow{\scriptstyle d_1^*(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle d_0^*(\alpha)} \\ d_1^*(\mathcal{F}_0') & \xrightarrow{\epsilon'} & d_0^*(\mathcal{F}_0') \end{array}$$

在拟凝聚层$(S_1)^\heartsuit$ 中交换。

**注 5.11**。 设 $(\mathcal{F}_0, \epsilon)$ 是一个带有沿 $\mathcal{O}_{S_0}$下降数据的拟凝聚 $f$-模：$S_0 \to X$ 如 注 5.10 所述。拟凝聚 $\mathcal{O}_{S_1}$-模之间的映射

$$d_1^*(\mathcal{F}_0) \xrightarrow{\epsilon} d_0^*(\mathcal{F}_0)$$

由其伴随映射给出，并由此确定。拟凝聚层 $\mathcal{O}_{S_0}$-模之间的映射

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\nabla_\epsilon} d_{1*} d_0^*(\mathcal{F}_0)$$

由其伴随映射给出。 $\epsilon$ 的余循环条件转化为映射 $\nabla_\epsilon$满足的莱布尼茨法则，而该映射表现为一个联络。[11]

[10]映射 $\epsilon$ 必然是同构。[11]映射 $\nabla_\epsilon$ 是下降余单子 $f^* f_* \simeq d_{1*} d_0^*$的余模结构。

**5.2. Quillen 定理。** 给定谱中的交换代数 $E$ 和 anima 中的群 $G$，我们在引言中定义了一个形式狄拉克概形

$$Y \simeq Y_{E,G} \xrightarrow{q} S \simeq S_E$$

在 $S \simeq$ 谱$(R)$ 上，其中 $R \simeq \pi_*(E)$。我们考虑这样的情形：

$$G \simeq \widehat{L} \simeq \mathrm{Hom}(L, U(1))$$

是有限生成自由阿贝尔群 $L$ 的庞特里亚金对偶。$E$ 的 Postnikov 过滤定义了一个收敛到.....的 Atiyah–Hirzebruch 谱序列

$$A \simeq \pi_*(p_* p^*(E)) \simeq \pi_*(\mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ BG, E)),$$

并且由于 $BG$ 的整数上同调群是自由的，它具有如下形式：

$$E^2 \simeq \mathrm{Sym}_R(L \otimes_{\mathbb{Z}} R(1)) \Longrightarrow A.$$

我们将 $I \subset A$ 定义为边缘同态 $\theta$: $A \to R$ 的核，并回顾一下，若 $E$ 满足典范映射

$$E^\infty_{-2,*} \simeq I/I^2 \longrightarrow E^2_{-2,*} \simeq L \otimes_{\mathbb{Z}} R(1)$$

是同构，则称其为复定向。在这种情况下，谱序列中的所有微分必然为零，因此我们得出结论：$q$: $Y \to S$ 是一个形式超平面。

**定义 5.12.** 设 $E$ 是谱中的复定向交换代数。与 $E$ 相关联的 Quillen 形式群是如下函子

$$\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{G}^Q_E} \mathrm{Hyp}(S)$$

它将 $L$ 赋予形式超平面 $q$: $Y_{E,\ \widehat{L}} \to S$。

**注释 5.13.** 设 $E$ 是谱中的复定向交换代数。Atiyah–Hirzebruch 谱序列在 $L = \mathbb{Z}$ 情形下给出的典范同构 $I/I^2 \to R(1)$ 定义了一个典范同构

$$\mathbb{A}_S(1) \xrightarrow{\phi^Q_E} \mathrm{Lie}(\mathcal{G}^Q_E)$$

关于 $S$的线丛。这一同构定义 4.46中定义的 Quillen 形式群李代数的典范平凡化。特别地，Quillen 形式群 $\mathcal{G}^Q_E$ 是 1 维自旋 1 上的 $S$。

现在令 $E \simeq \mathrm{MU}^{\otimes[n]}$ 为表示复配边的谱中交换代数的张量幂。文献 [2, 引理 4.5 和定理 81] 证明了 $E$ 的同伦群集中于偶数次，因此 $E$是复定向的。因此，Quillen 形式群给出单纯形式群

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{G}^Q_{\mathrm{MU}^{\otimes[-]}}} \mathrm{FGroup},$$

其在 $L \in$Lat 处的值是单纯形式超平面

$$\mathrm{Spf}(\pi_*(\mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ B\widehat{L}, \mathrm{MU}^{\otimes[-]}))) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\pi_*(\mathrm{MU}^{\otimes[-]})).$$

它满足命题 4.47的假设，因此几何实现

$$\mathcal{G}^Q \simeq |\mathcal{G}^Q_{\mathrm{MU}^{\otimes[-]}}| \in \mathrm{FGroup}$$

存在，且它在 $L \in \mathrm{Lat}$ 处的值是形式超平面

$$|\operatorname{Spf}(\pi_*(\operatorname{map}(\Sigma^\infty_+ B\widehat{L}, \mathrm{MU}^{\otimes[-]})))| \longrightarrow |\operatorname{Spec}(\pi_*(\mathrm{MU}^{\otimes[-]}))|.$$

我们将 $X$ 用于右侧的狄拉克栈，使得 $\mathcal{G}^Q \in \mathrm{FGroup}(X)$。根据有效满射下的模的下降，注释 5.13 中的典范平凡化确定了 $X$ 上线丛的典范同构，

$$\mathbb{A}_X(1) \xrightarrow{\phi^Q} \mathrm{Lie}(\mathcal{G}^Q).$$

现在我们使用 Quillen 定理来证明，$(\mathcal{G}^Q, \phi^Q)$ 是配备其李代数平凡化的一维自旋 1 形式群的泛对象，具体含义如下。

**定理 5.14**。 设 $T$ 是一个狄拉克栈。将 $f\colon T \to X$ 映射到对 $(f^*\mathcal{G}^Q, f^*\phi^Q)$ 的函子，是从 $\mathrm{Map}(T, X)$ 到如下对的群胚的一个等价：$(\mathcal{G}, \phi)$，其中包含一个在 $T$ 上的形式群 $\mathcal{G}$，以及线丛 $T$ 之间的同构 $\phi\colon \mathbb{A}_T(1) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$。

证明。令 $p_n\colon Y_n \to S_n$ 为与 $\mathrm{MU}^{\otimes[n]}$ 相关的 Quillen 形式群的底层形式超平面，并注意到，MU 的复定向由一个同构唯一确定，反之亦然

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{h} & \hat{\mathbb{A}}_{S_0}(1) \\ {\scriptstyle p}\downarrow\uparrow{\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle q}\downarrow\uparrow{\scriptstyle 0} \\ S_0 & = & S_0 \end{array}$$

它是 $S_0$ 上的带基点形式超平面之间的同构，使得图表

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_{S_0}(1) & \\ {\scriptstyle \phi^Q_{\mathrm{MU}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \alpha} \\ T_{Y_0/S_0,0} & \xrightarrow{dh_0} & T_{\hat{\mathbb{A}}_{S_0}(1)/S_0,0} \end{array}$$

它是 $S_0$ 上的线丛之间的同构。这里，$\phi^Q{}_{\mathrm{MU}}$ 和 $\alpha$ 是由 注释 5.13 和 命题 4.13给出的标准平凡化。此外，在由复定向 $h$的选择所给出的识别下，Quillen 形式群 $\mathcal{G}^Q{}_{\mathrm{MU}}$ 由形式群律 $f(y,z) \in \pi_*(MU)[[y,z]]$编码，而该形式群律又唯一确定仿射狄拉克概形之间的一个映射，反之亦然

$$\operatorname{Spec}(\pi_*(\mathrm{MU})) \xrightarrow{\theta} \operatorname{Spec}(L)$$

与 $L$ Lazard 环。Quillen 在 [31, 定理 2] 中证明 $\theta$ 是一个同构；另见 [2, 定理 II.8。2] 其中给出了这一事实的纯同伦论证明。

接下来，我们注意到，面映射 $d_0, d_1\colon Y_1 \to Y_0$ 以及 MU 的复定向$h\colon Y \to \hat{}\mathbb{A}_{S_0}(1)$产生了 $\mathrm{MU}^{\otimes[1]}$的两个复定向，

$$Y_1 \underset{h_1}{\overset{h_0}{\rightrightarrows}} \hat{\mathbb{A}}_{S_1}(1).$$

复合映射 $g \simeq h_0 \circ h_1^{-1}$是带基点的自旋 1 形式仿射直线 $\mathbb{A}_{S_1}(1)$ 的自同构，并且在余法层上诱导恒等自同构。它

定义了一个 $S_1$值点 $g$，属于仿射群概形 $G'$，该群概形由ˆ带基点的自旋 1 形式仿射直线 $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}(1)$ 的自同构构成；这些自同构在零截面处的切空间上诱导恒等映射。[12] Quillen 证明，仿射狄拉克概形之间的映射

$$S_1 \xrightarrow{(g,d_1)} G' \times S_0$$

是一个同构。此外，还有交换图

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{(g,d_1)} & G' \times S_0 \\ & {\scriptstyle d_0}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mu} & \\ & S_0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{(g,d_1)} & G' \times S_0 \\ & {\scriptstyle d_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & S_0 & \end{array}$$

其中，作用映射 $\mu$ 如下给出。设 $T$ =Spec($B$) 是任意仿射 Dirac 概形。一个 $T$-值点确定且由形式群律$f = f(y,z) \in B[[y,z]]$唯一确定，而 $T$-值点确定且由幂级数 $g = g(t) \in B[[t]]$ 唯一确定，其中 $g(0) = 0$ 且 $g'(0) = 1$。这里，生成元 $y$、$z$ 和 $t$ 都是自旋 1，且 $f$ 和 $g$ 也必须是自旋 1。现在，$(f,g)$ 在 $\mu$ 下的像是形式群律 $g(f(g^{-1}(y)\ g^{-1}(z)))$。由此特别可知，群胚 $S$: $\Delta^{\mathrm{op}} \to$ Shv(Aff) 的面映射是平坦的，因此根据定理 2.49，其几何实现 $X \simeq |S|$ 是一个几何栈。

令 $X'(T)$ 为由形式群 $\mathcal{G}$ over$T$ 及向量丛之间的同构 $\phi$: $\mathbb{A}_T(1) \to$Lie($\mathcal{G}$) 构成的对 $(\mathcal{G},\phi)$ 所组成的群胚。我们希望证明函子

$$X(T) \longrightarrow X'(T)$$

它将 $f$: $T \to X$ 赋到 $(f^*\mathcal{G}^Q, f^*\phi^Q)$，是一个等价。为此，我们考虑余极限

$$\mathcal{G}'' \simeq |\mathcal{G}_{\mathrm{MU}^{\otimes[-]}}| \in \mathrm{FGroup}(X'')$$

在预层中计算，因此 $X$ 是 $X''$ 的层化。由于预层的余极限是逐点计算的，我们有 $X''(T) \simeq |S(T)| \in \mathcal{S}$，而 Quillen 定理表明函子

$$X''(T) \longrightarrow X'(T)$$

它将 $f$: $T \to X''$ 赋到 $(f^*\mathcal{G}'', f^*\phi'')$，是全忠实的，且其本质像是由满足以下条件的对 $(\mathcal{G},\phi)$ 张成的子群胚： $\mathcal{G}$ 在全局坐标的意义下存在全局坐标，即 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ 作为 $T$ 上的形式超平面，同构于自旋 1 形式仿射直线。因此，要证明 $X(T) \to X'(T)$ 是一个等价，我们必须证明预层 $X'$ 是一个层。但这正是形式群的平坦下降，我们已在命题 4.43 中证明了这一点。□

**5.3. Milnor 定理。** 接下来令 $p$ 为一个奇素数，并令

$$G \simeq \widehat{L}[p] \simeq \mathrm{Hom}(L, C_p) \xrightarrow{i} \widehat{L} \simeq \mathrm{Hom}(L, U(1))$$

是有限生成自由阿贝尔群 $L$ 的庞特里亚金对偶的 $p$-挠子群。我们声称，若 $\eta$: $\mathbb{F}_p \to E$ 是谱中的交换代数之间的映射，[13]

[12]我们此前已经研究过 $G'$。事实上，根据 引理 4.33，我们有 $G' \simeq$ 核($G \to G^1$)。[13] 根据 Hopkins–Mahowald 定理 [25, 定理 4。16], 若 $E$ 是谱中的一个 $\mathbf{E}_2$-代数，且 $p = 0$ 在 $\pi_*(E)$中，则存在一个谱中的 $\mathbf{E}_2$-代数映射 $\eta$: $\mathbb{F}_p \to E$。

那么形式狄拉克概形

$$Y \simeq Y_{E,G} \xrightarrow{q} S \simeq S_E$$

over $S \simeq$ 谱$(R)$ with $R \simeq \pi_*(E)$，我们在引言中定义了它，它是一个形式超平面。由于 $p$ 是奇数， $BC_p$ 的 $\mathbb{F}_p$-上同调是一个自由的狄拉克 $\mathbb{F}_p$-代数，其生成元为自旋-$1/2$ 生成元 $e$ 和自旋 1 生成元 $\gamma$。由此可得，收敛到

$$A \simeq \pi_*(p_*p^*(E)) \simeq \pi_*(\mathrm{map}(\Sigma^\infty_+ BG, E))$$

具有如下形式

$$E^2 \simeq \mathrm{Sym}_R(L \otimes_{\mathbb{Z}} R(e,\gamma)) \Longrightarrow A,$$

我们断言所有微分均为零。事实上，该谱序列是一个 $R$-代数的谱序列，而对称狄拉克 $R$-代数的生成元都定义在 $\mathbb{F}_p$上，在那里微分因次数原因而消失。这证明了我们的断言： $q$: $Y \to S$ 是一个形式超平面。

**定义 5.15.** 设 $E$ 是谱中的一个交换 $\mathbb{F}_p$-代数，其中 $p$ 是一个奇素数。与 $E$ 相关联的 Milnor 形式群是函子

$$\mathrm{Lat}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{G}^M_E} \mathrm{Hyp}(S)$$

将形式超平面 $q$ 指派给 $L: Y_{E,\,\widehat{L}[p]} \to S$。

**注 5.16.** 与谱中的交换 $\mathbb{F}_p$-代数 $E$ 相关联的 Milnor 形式群是加性的，即作为 $S$ 上的形式群，它非典范地同构于一个加法形式群。

$\widehat{\phantom{x}}$ $\widehat{\phantom{x}}$若 $E$ 是谱中一个满足 $p$ 为奇数的交换 $\mathbb{F}_p$-代数，则 $i$: $L[p] \to L$ 诱导出一个从二维 Milnor 形式群到一维 Quillen 形式群的形式群映射，

$$\mathcal{G}^M_E \longrightarrow \mathcal{G}^Q_E.$$

这个映射是满射，其核

$$\mathrm{Fil}^1\, \mathcal{G}^M_E \longrightarrow \mathrm{Fil}^0\, \mathcal{G}^M_E \simeq \mathcal{G}^M_E$$

又是 $S$ 上的一个形式群。此滤过导出李代数 Lie$(\mathcal{G}^M_E)$ 的分次，我们称之为按荷分次。Atiyah–Hirzebruch 谱序列确定了一个典范的分次向量丛同构

$$\mathbb{A}_S(e,\gamma) \xrightarrow{\phi^M} \mathrm{gr}(\mathrm{Lie}(\mathcal{G}^M_E)),$$

其中 $e$ 的荷为 1 ， 而 $\gamma$ 的荷为0。如同 注 4.27，我们有一个分类栈

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Fil}\, \mathcal{G}^M_E) \in \mathrm{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/S})$$

对于与 $E$ 相关的 Milnor 形式群的自同构，这些自同构保持典范滤过，并在 gr(Lie($\mathcal{G}^M_E$)) 上诱导恒等映射。

**命题 5.17.** 设 $S_0 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 且 $p$ 为素数。分类栈

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{G}^M_{\mathbb{F}_p}) \in \mathrm{Grp}_{\mathbf{E}_1}(\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{S_0})$$

是由霍普夫代数表示的仿射狄拉克群 $S_0$-概形

$$C = \mathbb{F}_p[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots]$$

其中 $\tau_i$ 和 $\xi_i$ 分别是自旋 $p^i - 1/2$ 和 $p^i - 1$的生成元，且余乘法定义为

$$\psi(\tau_i) = \tau_i \otimes 1 + \textstyle\sum_{0\le j\le i} \xi_{i-j}^{p^j} \otimes \tau_j$$
$$\psi(\xi_i) = \textstyle\sum_{0\le j\le i} \xi_{i-j}^{p^j} \otimes \xi_j,$$

其中按约定 $\xi_0 = 1$ 。

证明。令 $\mathcal{G}_0$ 为与 $\mathbb{F}_p$相关联的 Milnor 形式群，并令 $q_0\colon Y_0 \to S_0$ 为其底层超平面 $\mathcal{G}_0(\mathbb{Z})$。因此， $Y_0 \simeq \mathrm{Spf}(A_0)$，其中 $A_0 = \mathbb{F}_p[e,\gamma]$ ，且零截面由分次理想 $I_0 = (e,\gamma)$定义。现在，给定任意 Dirac$\mathbb{F}_p$-代数 $R$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0, Y_0)(R) &\simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Spf}(A_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} R), \mathrm{Spf}(A_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} R))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R(R[e,\gamma], R[[e,\gamma]]),\end{aligned}$$

因此， $f \in \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0, Y_0)(R)$由以下两个幂级数决定，反之亦然

$$f(e) = \textstyle\sum_{i\ge 0}(a_i + c_i e)\gamma^i$$
$$f(\gamma) = \textstyle\sum_{i\ge 0}(b_i + d_i e)\gamma^i$$

其中有 $a_i \in R_{2i-1}$、 $b_i \in R_{2i-2}$、 $c_i \in R_{2i}$和 $d_i \in R_{2i-1}$。现在，令 $T \simeq \mathrm{Spec}(R)$ 和 $Y_{0,\,T} \simeq Y_0 \times_{S_0} T$。 $f$ 是形式群映射这一陈述，等价于以下图表

$$\begin{array}{ccc} Y_{0,T} \times_T Y_{0,T} & \xrightarrow{+} & Y_{0,T} \\ \downarrow{\scriptstyle f\times f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_{0,T} \times_T Y_{0,T} & \xrightarrow{+} & Y_{0,T} \end{array}$$

交换。图表中的两个复合映射都是

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0 \times_S Y_0, Y_0)(R) \simeq \mathrm{Hom}_R(R[e,\gamma], R[[e_1,\gamma_1,e_2,\gamma_2]]),$$

并且通过比较 $e$ 和 $\gamma$ 在这两个复合映射下的像，我们发现，当且仅当以下方程成立时，该图表才交换：

$$\textstyle\sum_{i\ge 0}(a_i + c_i(e_1+e_2))(\gamma_1+\gamma_2)^i = \sum_{i\ge 0}(a_i + c_i e_1)\gamma_1^i + \sum_{i\ge 0}(a_i + c_i e_2)\gamma_2^i,$$
$$\textstyle\sum_{i\ge 0}(b_i + d_i(e_1+e_2))(\gamma_1+\gamma_2)^i = \sum_{i\ge 0}(b_i + d_i e_1)\gamma_1^i + \sum_{i\ge 0}(b_i + d_i e_2)\gamma_2^i.$$

当且仅当对于所有 $i > 0$， $c_i$ 和 $d_i$ 均为零，并且对于所有不是 $p$ 的幂的 $i \ge 0$ ， $b_i$ 均为零时，这些条件才成立。此外，映射 $f$ 保持 Milnor 形式群的典范滤过，当且仅当 $d_0 = 0$；最后，gr(Lie($\mathcal{G}_0$)) 上的诱导映射是恒等映射，当且仅当 $c_0 = 1$ 和 $b_1 = 1$。因此，选择 $e$ 和 $\gamma$，即可确定 Fil $\mathcal{G}_0$ 的 $R$ 值点集合与如下形式的幂级数对集合之间的一个识别

$$f(e) = e + \textstyle\sum_{i\ge 0} a_i \gamma^{p^i}$$
$$f(\gamma) = \gamma + \textstyle\sum_{i\ge 1} b_i \gamma^{p^i}$$

其中 $a_i \in R_{2p^i-1}$ 和 $b_i \in R_{2p^i-2}$。这表明，$\mathrm{E}_1$-群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{G}_0)$ 的底层 $S_0$-栈由所述狄拉克 $\mathbb{F}_p$-代数 $C$ 表示，因此特别地，我们得出 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{G}_0)$ 是一个仿射狄拉克群 $S_0$-概形。

狄拉克群 $S_0$-概形 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{G}_0)$ 上的乘法，在 $R$-值点上由映射的复合给出

$$\mathrm{Hom}_T(Y_{0,T}, Y_{0,T}) \times_T \mathrm{Hom}_T(Y_{0,T}, Y_{0,T}) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_T(Y_{0,T}, Y_{0,T}).$$

因此，设 $(f, g)$ 是一对映射，其中 $f$ 由下式给出

$$f(e) = e + \textstyle\sum_{i\geq 0} a_i \gamma^{p^i}$$
$$f(\gamma) = \gamma + \textstyle\sum_{i\geq 1} b_i \gamma^{p^i}$$

并且 $g$ 由下式给出

$$g(e) = e + \textstyle\sum_{i\geq 0} c_i \gamma^{p^i}$$
$$g(\gamma) = \gamma + \textstyle\sum_{i\geq 1} d_i \gamma^{p^i}.$$

由于形式谱 Spf 是逆变的，我们有

$$\begin{aligned}(f \circ g)(e) = g(f(e)) = g(e + \textstyle\sum_{i\geq 0} a_i \gamma^{p^i}) &= g(e) + g(\textstyle\sum_{i\geq 0} a_i \gamma^{p^i}) \\ &= e + \textstyle\sum_{i\geq 0} c_i \gamma^{p^i} + \sum_{i,j\geq 0} a_i^{p^j} d_j \gamma^{p^{i+j}} \\ (f \circ g)(\gamma) = g(\textstyle\sum_{i\geq 0} b_i \gamma^{p^i}) &= \textstyle\sum_{i,j\geq 0} b_i^{p^j} d_j \gamma^{p^{i+j}}\end{aligned}$$

其中 $b_0 = d_0 = 1$。这表明 $C$ 上的余乘法正如所述。 □

我们回顾 Milnor 在奇素数处对偶 Steenrod 代数的计算。为此，我们考虑由下式定义的群胚 $S\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Aff}/_{S_0}$

$$S \simeq \mathrm{Spec}(\pi_*(\mathbb{F}_p^{\otimes[-]})).$$

由于它的面映射是平坦的，几何实现

$$X \simeq |S| \in \mathrm{Shv}(\mathrm{Aff})_{/S_0}$$

是一个几何的狄拉克 $S_0$-栈。此外，面映射 $d_0, d_1\colon S_1 \to S_0$ 必然相等，因为 $\mathbb{F}_p$ 是一个素域，因此我们得出 $X$ 是分类栈

$$X \simeq BG$$

它对应于由对偶 Steenrod 代数 $A \simeq \pi_*(\mathbb{F}_p^{\otimes[1]})$ 表示的仿射狄拉克 $S_0$-群 $G$。单纯 Milnor 形式群的几何实现

$$\mathcal{G}^M \simeq |\mathcal{G}^M_{\mathbb{F}_p^{\otimes[-]}}| \in \mathrm{FGroup}(X)$$

带有典范滤过，以及分次向量丛的典范同构

$$\mathbb{A}_X(e, \gamma) \xrightarrow{\phi^M} \mathrm{gr}(\mathrm{Lie}(\mathcal{G}^M)).$$

现在我们利用 Milnor 定理来确定这一对 $(\mathrm{Fil}(\mathcal{G}^M)\ \phi^M)$ 的结构。

*定理 5.18.* 设 $S_0 = \mathit{Spec}(\mathbb{F}_p)$，其中 $p$ 是一个奇素数，并设 $T$ 是一个狄拉克$S_0$-叠。将 $f\colon T \to X$ 映为有序对 $(f^*\mathit{Fil}(\mathcal{G}^M)\ f^*\phi^M)$ 的函子，是从 $X(T)$ 到群胚 $X'(T)$ 的等价。该群胚由以下有序对 $(\mathit{Fil}(\mathcal{G})\ \phi)$ 构成：一个定义在 $T$ 上、局部同构于滤过加法形式群的滤过形式群 $\mathit{Fil}(\mathcal{G})$，以及一个向量丛同构 $\phi\colon \mathbb{A}_X(e, \gamma) \to \mathit{gr}(\mathit{Lie}(\mathcal{G}))$，其中两者都是定义在 $T$ 上的分次向量丛。

证明。 根据定义，我们有 $X' \simeq BG'$，其中 $G' \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{G}_0)$。此外，陈述中的狄拉克 $S_0$-叠态射 $h\colon X \to X'$ 由狄拉克 $S_0$-群态射 $\rho\colon G \to G'$决定，反之亦然。由 命题 5.17可知，后一个态射由幂级数决定，反之亦然

$$\rho(e), \rho(\gamma) \in \pi_*(\mathbb{F}_p^{\otimes[1]})[[e,\gamma]]$$

形如

$$\rho(e) = e + \textstyle\sum_{i\geq 0} a_i \gamma^{p^i}$$
$$\rho(\gamma) = \gamma + \textstyle\sum_{i\geq 1} b_i \gamma^{p^i}$$

与 $a_i \in \pi_{2p^i-1}(\mathbb{F}_p^{\otimes[1]})$ 以及 $b_i \in \pi_{2p^i-2}(\mathbb{F}_p^{\otimes[1]})$。现在， $\rho$ 是狄拉克 $S_0$-群概形的同构这一陈述，等价于所有 $a_i$和 $b_i$ 均非零这一陈述。但这恰好就是 [29, 引理 6]的陈述。 □

## 附录 A. 可及预层

在本文正文中，我们需要考虑仿射狄拉克概形范畴 Aff 上的 anima 预层。 $\infty$-范畴 Aff 并非小范畴，但它在如下意义下是余可及的：$\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{CAlg(Ab)}$ 是可及的。在此背景下，自然只考虑可及预层。我们将证明，一般而言，余可及 $\infty$-范畴上的 anima 可及预层 $\infty$- 范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 具有以下性质：

(1) Yoneda 嵌入限制为全忠实函子 $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$，它将 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 展示为 $\mathcal{C}$ 的余完备化。(2) $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 满足吉罗公理，但一般而言并不可呈示。(3) 如果 $\mathcal{C}$ 存在拉回，那么存在伴随函子

$$\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X} \underset{f_*}{\overset{f_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{f^*}}}} \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y}$$

它们与 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的每个映射 $f\colon Y \to X$ 相关联，其中 $f_!$ 由沿 $f$ 的限制给出，而 $f^*$由沿 $f$ 的基变换给出。

本附录未能深入到我们所期望的程度。我们认为，对于表现为余可及 $\infty$-范畴上的可及预层的 $\infty$-范畴，存在一种更宏大、更系统的理论。 $\infty$不过，此处并非发展这种理论的地方。为了鼓励朝这一方向开展研究，我们最后列出一些我们认为这种理论应当具备的性质；参见 问题 A.20。

现在我们继续证明上文列出的可及预层的性质 (1)–(3)。我们回顾 [20, 定义 A.2.6.3] ，其中关系 $\lambda \ll \kappa$ 表示：对于每个 $\kappa_0 < \kappa$ 和 $\lambda_0 < \lambda$，都有$\kappa_0^{\lambda_0} < \kappa$。

**引理 A.1.** 设 $\kappa \gg \lambda$ 为正则基数。若 $\mathcal{D}$ 是一个 $\lambda$-可达的 $\infty$-范畴，则对所有 $d \in \mathcal{D}$，切片范畴 $(\mathcal{D}^\kappa)_{/d}$ 都是 $\kappa$-滤过的。

证明。给定一个图表 $p\colon K \to (\mathcal{D}^\kappa)_{/d}$，满足 $K$ 是 $\kappa$-小的，我们必须构造一个图表 $\bar{p}\colon K^\triangleright \to (\mathcal{D}^\kappa)_{/d}$ 以及一个等价 $\bar{p}|_K \simeq p$。我们将

$$\mathcal{D} \simeq \mathrm{Ind}_\lambda(\mathcal{D}^\lambda) \subset \mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$$

与 $\mathcal{D}^\lambda$ 上由可表预层的全子范畴在 $\lambda$-滤过余极限下生成的 anima 预层全子范畴等同。用这些术语来说，我们可以将 $p$ 识别为一对 $(q, g)$，其中包含一个图表 $q\colon K \to \mathcal{D}^\kappa \subset \mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$ 和一个映射

$$\varinjlim_K q \xrightarrow{g} d$$

由 $\mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$ 中计算出的余极限得到，并且我们必须证明 $g$ 可通过 $\mathcal{D}^\kappa$ 中的某个对象分解。我们回顾 [20, 命题 5.4.2。11]中的结论：由于 $\kappa \gg \lambda$，每个$\lambda$-可达 $\infty$-范畴都是 $\kappa$-可达的。因此，我们可以将 $d \in \mathcal{D}$ 写成一个 $\kappa$-滤过余极限

$$d \simeq \varinjlim_\alpha d_\alpha$$

其中有 $d_\alpha \in \mathcal{D}^\kappa \subset \mathcal{D}$，而 loc.cit. 中的证明表明，我们可以安排使每个 $d_\alpha$ 都是 $\mathcal{D}^\lambda \subset \mathcal{D}$ 中一个 $\kappa$-小的 $\lambda$-滤过图表的余极限。因此，每个 $d_\alpha$ 作为 $\mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$ 的对象也都是 $\kappa$-紧致的。现在，包含 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$ 保持 $\lambda$-滤过余极限，因此尤其保持 $\kappa$-滤过余极限。因此，我们也有

$$d \simeq \varinjlim_\alpha d_\alpha$$

余极限在 $\mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$ 中计算。由于所讨论的映射 $g$ 的定义域是 $\mathcal{P}(\mathcal{D}^\lambda)$ 中由 $\kappa$-紧对象构成的一个 $\kappa$-小余极限，因此它本身是 $\kappa$-紧的。于是我们得出结论：$g$ 经由某个 $d_\alpha$ 分解，这正是我们要证明的。□

记号。若 $\kappa$ 是一个正则基数，且 $\mathcal{C}$ 是一个 $\kappa$-余可及 $\infty$-范畴，则我们用 $\mathcal{C}_\kappa \subset \mathcal{C}$ 表示由 $\kappa$-余紧对象张成的全子范畴。$\infty$-范畴 $\mathcal{C}_\kappa$ 是本质小的，而 $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Pro}_\kappa(\mathcal{C}_\kappa)$ 是它在小 $\kappa$-余滤过极限下的完备化。

**命题 A.2.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及 $\infty$-范畴。对于函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$，以下条件等价：

(1) 函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是可达的。(2) 函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是函子 $Y\colon (\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 沿典范包含 $i\colon (\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的左 ***Kan*** 延拓，其中 $\kappa$ 是某个正则基数。(3) 函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是可表函子构成的一个小图表在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中的余极限。

证明。为证明 (1) 蕴含 (2)，我们首先选取一个正则基数 $\lambda$，使得 $\mathcal{C}$ 是 $\lambda$-余可及的，并且 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 是 $\lambda$-可达的。接下来，我们选取一个正则基数 $\kappa$，使得 $\kappa \gg \lambda$。我们断言余单位映射

$$i_! i^*(X) \longrightarrow X$$

是一个等价。$i_! i^*(X)$ 在 $c \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 处的值是图表

$$((\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}})_{/c} \xrightarrow{p} (\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{S}.$$

现在，根据 引理 A.1，左侧的切片范畴是 $\kappa$-滤过的，并且由于 $X$ 保留 $\lambda$-滤过的，因而也保留 $\kappa$-滤过余极限，我们得出余单位映射

$$i_! i^*(X)(c) \longrightarrow X(c)$$

是一个等价，这表明 (2) 对 $Y \simeq i^*(X)$ 成立。

为了证明 (2) 蕴含 (3)，我们假设 $X \simeq i_!(Y)$，其中 $Y \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_\kappa^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$。由于 $\mathcal{C}_\kappa$ 本质小，我们可以将 $Y$ 视为可表

函子的一个小余极限。但左 Kan 延拓保留余极限，并将可表函子映为可表函子，因此我们得出 (3) 成立。

最后，为了证明 (3) 蕴含 (1)，注意到由于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是可达的，每个可表函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 都是可达的。因此，给定一个由可表函子组成的小图表 $X_\alpha$，我们可以找到一个小基数 $\lambda$，使得其中每个 $X_\alpha$ 都保持 $\lambda$-滤过余极限。由于余极限与余极限可交换，它们逐点的余极限仍保持 $\lambda$-滤过余极限，因此是可达的。□

**定义 A.3.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及 $\infty$-范畴。$\mathcal{C}$ 上 anima 的可及预层所成的 $\infty$-范畴是如下全子范畴

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

由满足命题 A.2中等价条件的函子张成。

**注 A.4**（可及预层的泛性质）。若 $\mathcal{C}$ 是一个余可及$\infty$-范畴，则 Yoneda 嵌入可分解为一个函子

$$\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

我们也不严格地将其称为 Yoneda 嵌入。由命题 A.2 可知，该函子由以下泛性质刻画：若 $\mathcal{D}$ 是任意一个 $\infty$-范畴，并且具有小余极限，那么与 Yoneda 嵌入复合便得到一个等价

$$\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

从由保小余极限的函子所张成的全子范畴$\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}(\mathcal{C})\ \mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{P}(\mathcal{C})\ \mathcal{D})$ 到 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 的逆函子将其映至左 Kan 延拓$h_!(F)\colon \mathcal{P}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$。该延拓存在，因为每个可达预层都是可表对象的小余极限，且 $\mathcal{D}$ 是余完备的；另见 [20, 注 5.3.5。9]。

警告 A.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及 $\infty$-范畴。我们将其余完备化记作 $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$。如果 $\mathcal{C}$ 是小的，那么 [20, 推论 5.4.3.6] 表明，其余完备化与 Yoneda 嵌入 $h\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 到函子 $\infty$-范畴相一致。然而一般而言，函子 $\infty$-范畴更大，且具有病态性质。例如，我们在引理 A.7 中证明 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是局部小的，但函子 $\infty$-范畴一般并非如此。

**注 A.6.** 我们回顾一下 [20, 推论 5.4.3。6] 一个小 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$可达，当且仅当它是幂等完备的。然而，若 $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$的幂等完备化，那么 $\mathcal{C}'$ 仍然是小的，且 $j_!\colon \mathcal{P}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}')$ 是一个等价。因此，余可及 $\infty$-范畴上的可及预层理论，是小 $\infty$-范畴上的预层理论的严格推广。

**引理 A.7.** 设 $\mathcal{C}$ 为余可及 $\infty$-范畴。其上的 *anima* 可及预层所构成的 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 在局部意义下是小的。

证明。给定 $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$，映射 anima $\mathrm{Map}(Y, X)$ 可能是大的。我们必须证明它是小的。由 命题 A.2，可将 $Y$ $\simeq$极限$_{\longrightarrow \alpha}\, h(c_\alpha)$ 写成可表函子的一个小余极限。因此，anima

$$\mathrm{Map}(Y, X) \simeq \mathrm{Map}(\varinjlim_\alpha h(c_\alpha), X) \simeq \varprojlim_\alpha X(c_\alpha)$$

是小 anima 的小极限，因此它确实是小的。□

**引理 A.8**。假设 $\mathcal{C}$ 是 $\lambda$-余可及的，并令 $\lambda \ll \kappa \leq \kappa'$ 为无限正则基数。在这种情况下，左 *Kan* 延拓

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_\kappa) \xrightarrow{i_!} \mathcal{P}(\mathcal{C}_{\kappa'})$$

沿着包含 $i\colon (\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}} \to (\mathcal{C}_{\kappa'})^{\mathrm{op}}$ 保留所有余极限和 $\kappa$-小极限。

证明。由于左 Kan 延拓是左伴随，因此保留余极限。对于极限，我们注意到，若 $X \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_\kappa)$ 和 $c \in (\mathcal{C}_{\kappa'})^{\mathrm{op}}$，则 $i_!(X)(c)$ 是下列图表的余极限

$$((\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}})_{/c} \xrightarrow{p} (\mathcal{C}_\kappa)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{S},$$

其中 $p$ 是投影。因此，结论由 引理 A.1 以及 [**20**, 命题 5.3.3 中证明的事实得出：3] $\kappa$-滤过余极限与 $\kappa$-小极限在 anima 上可交换。□

**命题 A.9**。设 $\mathcal{C}$ 是余可及的 $\infty$-范畴。*anima* 预层 $\mathcal{C}$ 上的可及预层之 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 具有所有小极限和余极限，且二者均逐点计算。

证明。我们断言 $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 对小极限和余极限封闭。对于余极限，这由 命题 A.2 的条件 (3) 显然成立。为证明极限的情形，我们固定一个图表 $p\colon K \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$，其中 $K$ 是小的。我们可以选取一个基数 $\kappa$ 使得

(1) $\mathcal{C}$是 $\kappa$-余可及的，(2) 对每个 $k \in K$，$p(k)\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}$ 保持 $\kappa$-滤过余极限，且 (3) $K$ 是 $\kappa$-小的。

按此选取，在 $p$ 中计算的 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 的极限保持 $\kappa$-滤过余极限，因此，命题 A.2 的条件 (1) 表明它属于 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$。□

**定理 A.10**。在余可及$\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 上，可及预层组成的 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$具有以下性质：

(i) 它是余完备、完备的，并且由 $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$的本质像在小余极限下生成；该本质像由紧对象组成且是余可及的。(ii) $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的余极限是万有的。(iii) $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的余积彼此不交。(iv) $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的每个群胚都是有效的。

证明。由于 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的余极限是逐点计算的，因此所有可表预层都是紧致的。此外，命题 A.2 表明 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 由可表预层在小余极限下生成，而 命题 A.9 表明 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是完备且余完备的。这就证明了 (i)。(ii)–(iv) 讨论的是 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中极限与余极限之间的相互作用；由于二者都是逐点计算的，这些结论可由关于$\infty$-范畴 $\mathcal{S}$ anima 的相应结论推出，这些结论已在 [**20**, 定理 6.1.06]中证明。□

接下来我们讨论局部化。回顾一下，若 $\mathcal{C}$ 是小的，那么对于每个预层 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$，都存在一个典范等价

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{/X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$$

其中 $j\colon \mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}$ 是 $p\colon \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$沿着 $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 的基变换。存在一个本质唯一的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{/X} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathcal{P}(\mathcal{C}_{/X}) & \xrightarrow{j_!} & \mathcal{P}(\mathcal{C}) \end{array}$$

其中 $j_!$ 是余连续的，而 $j_!$ 如所述经由一个等价分解。我们希望说明，在 $\mathcal{C}$ 是余可及的情形下，也存在类似的图景。

**引理 A.11.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及的 $\infty$-范畴。令 $X \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$，并令$j\colon \mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}$为沿着 $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$对 $p\colon \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$作的基变换。在此情形下，切片 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}_{/X}$ 和函子 $j\colon \mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}$ 都是余可及的。

证明。函子 $j^{\mathrm{op}}\colon (\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是由函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$分类的左纤维化。因此存在一个由 $\infty$-范畴构成的笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{S}_* \\ \downarrow{\scriptstyle j^{\mathrm{op}}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{X} & \mathcal{S} \end{array}$$

其中右侧的竖直映射是万有左纤维化，即典范投影 $p\colon \mathcal{S}_* \simeq \mathcal{S}_{/1} \to \mathcal{S}$。由于 $p$ 和 $X$ 都是可达范畴之间的可达函子，因此由 $\infty$-范畴，我们根据 [20, 命题 5.4.6。6] 可得，对于 $j^{\mathrm{op}}$，同样的结论也成立。□

**注 A.12.** 在 引理 A.11 的语境中，$j\colon \mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}$ 是一个右纤维化。由于每个 $\kappa$-余滤的 $\infty$-范畴都是弱可缩的，由 [17,标签 02KS] 可知，若 $\mathcal{C}$ 是 $\kappa$-余可及的，则 $\mathcal{C}_{/X}$ 具有 $\kappa$-余滤极限，且 $j$ 保持并反映这些极限。这并不一定意味着 $\mathcal{C}_{/X}$ 是 $\kappa$-余可及的，因为它未必由 $\kappa$-余滤极限下的 $\kappa$-余紧对象生成。

**命题 A.13.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及的 $\infty$-范畴，且 $X \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$。在这种情况下，*Yoneda* 嵌入诱导出一个等价

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{/X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}.$$

证明。由于 $\mathcal{C}_{/X}$ 由 引理 A.11 可知是余可及的，并且 $\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$ 由 命题 A.9 可知具有小余极限，因此映射 $h_{/X}\colon \mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$ 由 Yoneda 嵌入诱导，并且本质上唯一地延拓为陈述中的映射。我们可以将此映射视为相应映射的限制

$$\widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{C}_{/X}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})_{/X}$$

大型 anima 的预层 $\infty$-范畴之间。后者是一个等价，因为相对于这个更大的宇宙，$\mathcal{C}$ 是小的，因此我们得出，陈述中的映射是全忠实的。接下来要证明它是本质满的。

给定 $\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$ 中的 $(Y, f\colon Y \to X)$，我们可以找到一个图表

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ K^{\triangleright} & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathcal{P}(\mathcal{C}) \end{array}$$

其中 $K$ 小，使得 $\bar{p}$ 是一个余极限图，其在锥点处的值为 $Y$。因此，映射 $\bar{p}$和 $f$ 确定了一个图表 $q\colon K \to \mathcal{C}_{/X}$，而陈述中的映射取复合映射的余极限

$$K \xrightarrow{q} \mathcal{C}_{/X} \xrightarrow{h} \mathcal{P}(\mathcal{C}_{/X})$$

到给定对象 $(Y, f\colon Y \to X)$，正如所需。 □

我们回顾 [20, 引理 6.1.1。1] 一个映射 $f\colon Y \to X$ 在一个 $\infty$-范畴$\mathcal{D}$ 中，若该范畴存在拉回，则此映射会导出一对伴随函子

$$\mathcal{D}_{/Y} \underset{f^*}{\overset{f_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}_{/X}$$

并由 [20, 引理 4.4.2.1] 可知，给定一个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

在 $\mathcal{D}$中，复合“基变换”映射

$$f'_! g'^* \longrightarrow g^* g_! f'_! g'^* \simeq g^* f_! g'_! g'^* \longrightarrow g^* f_!$$

是一个等价。若 $\mathcal{D} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是一个 $\mathcal{C}$ 余可及对象，那么 定理 A.10 表明$f^*$ 保小余极限。然而，由于 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 可能不是可呈示的，我们无法调用伴随函子定理来得出 $f^*$ 存在一个右伴随 $f_*$。我们将证明，在假设 $\mathcal{C}$ 存在拉回的情况下，结论仍然成立。我们不知道这一假设是否必要。

**定理 A.14.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及 $\infty$-范畴，并设 $f\colon Y \to X$ 是 $\infty$-范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的一个映射，其中该范畴由 $\mathcal{C}$ 上的可及预层构成。若 $\mathcal{C}$ 存在拉回，则函子 $f^*\colon \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y}$ 存在一个右伴随 $f_*\colon \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$。</output>

在开始证明定理 A.14之前——本附录余下部分将围绕该定理展开——我们先举一个例子，以说明这一情形的微妙之处。

**例 A.15.** 在 命题 A.13所给出的等价下，我们可以将 $f^*$定理 A.14 中的函子 $f^*$与函子 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{/X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_{/Y})$沿 $f_!\colon \mathcal{C}_{/Y} \to \mathcal{C}_{/X}$限制得到的函子等同起来。因此，人们可能会预期，对于余可及 $f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ -范畴之间的每个余可及函子 $\infty$，函子

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) \xrightarrow{f^*} \mathcal{P}(\mathcal{D})$$

由沿 $f$ 限制给出，并存在一个右伴随。令人惊讶的是，一般情况下并非如此！为了给出一个明确的反例，我们考虑函子

$$1 \xrightarrow{f} \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$$

它将唯一对象映射到集合 $\{0,1\}$。在这种情况下，函子

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{f^*} \mathcal{S}$$

将可达函子 $X\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 映射到其在 $\{0,1\}$处的取值。我们声称，此函子 $f^*$ 不具有右伴随 $f_*$。若它具有右伴随，则我们会有

$$f_*(\{0,1\})(-) \simeq \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(-,\{0,1\}),\{0,1\}),$$

但此函子并不可达，因为任何可达函子 $X\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 都会保$\kappa$持某个 $\kappa$-紧对象。

设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及 $\infty$-范畴，并设 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$上的可及预层之间的映射。我们考虑复合函子

$$\mathcal{C}_{/X} \xrightarrow{h} \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X} \xrightarrow{f^*} \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y} \xrightarrow{q_!} \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

并将其与由 $Z \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 表示的函子复合，从而得到一个函子

$$(\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F_{f,Z}} \mathcal{S},$$

其取值于 $\infty$-范畴小 anima，因为 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是局部小的，正如我们在引理 A.7中所证明的。

**引理 A.16.** 设 $\kappa$ 为一个正则基数，并设 $\mathcal{C}$ 为一个 $\kappa$-余可及的 $\infty$-范畴，且其中存在拉回。设 $f\colon Y \to X$ 为 $\mathcal{C}$ 上的可及预层之间的一个映射，其中$X$ 为可表预层，且 $Y$为可表预层的一个 $\kappa$-小余极限；再设 $Z$ 为 $\mathcal{C}$上的一个 $\kappa$-可及预层。在此情形下，函子

$$(\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F_{f,Z}} \mathcal{S}$$

保留 $\kappa$-滤过余极限。

证明。 注意，由注 A.12可知，切片 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}_{/X}$ 存在 $\kappa$-余滤过极限。若将 $Y \simeq \varinjlim_{\alpha} Y_\alpha$ 写成一个 $\kappa$-小的可表预层余极限，并令 $f_\alpha\colon h(b_\alpha) \to X$ 为 $f$沿 $Y_\alpha \to Y$的限制，则

$$\begin{aligned} F_{f,Z}(c, h(c) \to X) &\simeq \mathrm{Map}(Y \times_X h(c), Z) \simeq \mathrm{Map}(\varinjlim_\alpha Y_\alpha \times_X h(c), Z) \\ &\simeq \varprojlim_\alpha \mathrm{Map}(Y_\alpha \times_X h(c), Z) \simeq \varprojlim_\alpha F_{f_\alpha,Z}(c, h(c) \to X), \end{aligned}$$

并且，由于 anima 的 $\kappa$-小极限与 $\kappa$-滤过余极限可以交换，我们可以假设 $Y$ 是可表的。

因此，我们记为 $X \simeq h(x)$ 和 $Y \simeq h(y)$，并假设 $(c, h(c) \to X)$ 是 $\mathcal{C}_{/X}$ 中一个 $\kappa$-余滤图表 $(c_\alpha, h(c_\alpha) \to X)$ 的极限。由注 A.12 可知， $c$ 是 $\mathcal{C}$ 中底层图 $(c_\alpha)$ 的极限。由于 Yoneda 嵌入保留 $\mathcal{C}$ 中存在的所有极限，我们有

$$Y \times_X h(c) \simeq h(y) \times_{h(x)} h(c) \simeq h(y \times_x c) \simeq h(y \times_x \varprojlim_\alpha c_\alpha) \simeq h(\varprojlim_\alpha y \times_x c_\alpha).$$

因此，由于 $Z$ 是 $\kappa$-可达的，我们有

$$F_{f,Z}(c, h(c) \to X) \simeq \mathrm{Map}(Y \times_X h(c), Z) \simeq Z(\varprojlim_\alpha y \times_x c_\alpha)$$
$$\simeq \varinjlim_\alpha Z(y \times_x c_\alpha) \simeq \varinjlim_\alpha F_{f,Z}(c_\alpha, h(c_\alpha) \to X)$$

正如我们所要证明的那样。 □

我们需要以下概念。

**定义 A.17.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个余可及 $\infty$-范畴，且 $\kappa$ 是一个正则基数。若映射 $f\colon Y \to X$（从 $\mathcal{C}$ 上的可及预层到 $\mathcal{C}$ 上的可及预层）满足：对于每个从 $\mathcal{C}$ 上的可表预层出发的映射 $g\colon h(c) \to X$，基变换 $f'\colon Y' \to h(c)$（$f$ 沿着 $g$ 的基变换）的定义域 $Y'$ 都可写成 $\kappa$-小的、由 $\mathcal{C}$ 上的可表预层构成的余极限，则称其为 $\kappa$-紧致。

**引理 A.18.** 若 $\mathcal{C}$ 是一个具有拉回的余可及 $\infty$-范畴，则对于某个 $\kappa$，$\mathcal{C}$ 上的可及预层之间的每个映射 $f\colon Y \to X$ 都是 $\kappa$-紧致的。

证明。首先假设 $X \simeq h(x)$ 可表。对于某个正则基数 $\kappa$，我们可以将 $Y \simeq \varinjlim_\alpha h(y_\alpha)$ 写成由可表预层构成的 $\kappa$-小余极限。现在，对于任意从一个可表预层出发的映射 $g\colon h(c) \to X$，我们得到

$$Y \times_X h(c) \simeq \varinjlim_\alpha h(y_\alpha) \times_{h(x)} h(c) \simeq \varinjlim_\alpha h(y_\alpha \times_x c),$$

它是 $\mathcal{C}$ 上可表预层的一个 $\kappa$-小余极限。

一般而言，我们将 $X \simeq \varinjlim_\alpha X_\alpha$ 写成可表预层的小余极限，并令 $f_\alpha\colon Y_\alpha \to X_\alpha$ 为 $f$ 沿 $X_\alpha \to X$ 的基变换。由于 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的余极限是逐点计算的，任何从可表预层出发的映射 $g\colon h(c) \to X$ 都会经过某个 $\alpha$ 的 $X_\alpha \to X$ 分解。此外，根据上文讨论的特殊情形，我们发现

$$Y \times_X h(c) \simeq Y_\alpha \times_{X_\alpha} h(c)$$

对于某个正则基数 $\kappa_\alpha$，它是 $\kappa_\alpha$-紧致的。因此，若我们选择一个正则基数 $\kappa$，使得对于所有 $\alpha$ 都有 $\kappa \geq \kappa_\alpha$，那么 $f$ 就是 $\kappa$-紧致的。□

现在我们将引理 A.16 推广到一般情形。

**引理 A.19.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有拉回的余可及 $\infty$-范畴，设 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 上可及预层之间的映射，并设 $Z$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个可及预层。在这种情况下，函子

$$(\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F_{f,Z}} \mathcal{S}$$

是可达的。

证明。利用引理 A.18，我们可以选取一个正则基数 $\kappa$，使得 $\mathcal{C}$ 是 $\kappa$-余可及的，$f$ 是 $\kappa$-紧致的，并且 $Z$ 是 $\kappa$-可达的。接下来证明，对于这个 $\kappa$，函子 $F_{f,Z}$ 保持 $\kappa$-滤过余极限。这里我们利用注 A.12 得出 $\mathcal{C}_{/X}$ 具有 $\kappa$-余滤过极限。

因此，我们固定一个图表 $p\colon K \to \mathcal{C}_{/X}$，其中 $K$ 是 $\kappa$-余滤过的，并希望证明 anima 的典范映射

$$\varinjlim_{K^{\mathrm{op}}}(F_{f,Z} \circ p^{\mathrm{op}}) \longrightarrow F_{f,Z}(\varprojlim_K p)$$

是一个等价。对于任意 $k \in K$，投影 $j\colon K_{/k} \to K$ 是一个 $\varprojlim$-等价，因此，如有必要，通过将 $p$ 替换为 $pj$，我们可以假设 $K$ 有一个终

对象。因此，设 $1 \in K$ 为终对象，并设 $(d, g\colon h(d) \to X)$ 是它在 $p$ 下的取值。在这种情况下，函子 $p\colon K \to \mathcal{C}_{/X}$ 可规范地分解为

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ {\scriptstyle p'}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{C}_{/d} & \xrightarrow{g_!} & \mathcal{C}_{/X} \end{array}$$

并且，根据基变换，我们有一个图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}_{/d})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{(g_!)^{\mathrm{op}}} & (\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} \\ & {\scriptstyle F_{f',Z}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle F_{f,Z}} & \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

关于 $f'\colon Y' \to h(c)$ 沿着 $f$ 的基变换 $g$。由于 $g_!$ 保持 $\kappa$-余滤极限，根据 注 A.12，只需证明典范映射

$$\varinjlim_{K^{\mathrm{op}}} (F_{f',Z} \circ p'^{\mathrm{op}}) \longrightarrow F_{f',Z}(\varprojlim_K p')$$

是一个等价。但 $Y'$ 是一个 $\kappa$-小余极限的可表预层，因为 $f$ 是 $\kappa$-紧致的，所以这由 引理 A.16 得出。□

现在我们给出本节主要结果的证明。

定理 A.14 的证明。 根据 [17, 标签 02FV], , 只需证明对于每个对象 $g\colon Z \to Y$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y}$ 中，函子

$$(\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{R_g} \mathcal{S}$$

由 $f^*$ 与由 $g$ 表示的函子复合得到的函子是可表的。正如我们已经指出的，函子 $f^*$ 保留余极限，因为 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中的余极限是普适的，所以 $R_g$ 保留极限。因此，由于典范映射

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{/X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$$

是等价，依据 命题 A.13，只需证明限制

$$(\mathcal{C}_{/X})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{r_g} \mathcal{S}$$

沿 Yoneda 嵌入的 $R_g$ 是一个可达函子。确实，若如此，则上述等价将 $r_g$ 映到对象 $f_*(g)$，该对象表示 $R_g$。

令 $q\colon Y \to 1$ 为到终对象的唯一映射。伴随

$$\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y} \underset{q^*}{\overset{q_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

是余单子性的，因此， $g\colon Z \to Y$ 的余条构造（构造见 [19, 例 4.7.2。7],）是一个极限图表

$$\Delta_+ \xrightarrow{C_g} \mathcal{P}(\mathcal{C})_{/Y}$$

其在 $[n]$ 处的值是将 $q^*q_!$ 的第 $(n+1)$ 次迭代应用于 $g$ 所得的结果。因此

$$R_g(-) \simeq \mathrm{Map}(f^*(-), g) \simeq \varprojlim_{\Delta} \mathrm{Map}(f^*(-), C_g([-])) \simeq \varprojlim_{\Delta} R_{C_g([-])}(-),$$

由于可及预层在小极限下封闭，只需证明在 $g \simeq q^*(W)$ 对某个 $W \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 的情形下，$r_g$ 是可达的。但是

$$r_{q^*(W)}(-) \simeq \mathrm{Map}(f^*(h(-)), q^*(W)) \simeq \mathrm{Map}(q_! f^*(h(-)), W) \simeq F_{f,W}(-),$$

由 引理 A.19 可达。证明至此完成。 □

**问题 A.20**。 我们称一个 $\infty$-范畴 $\mathcal{D}$ 为：[14]

a) 宏可及的，如果它可写为 $\mathcal{D} \simeq \mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C})$，其中$\kappa$ 是某个正则基数，且 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 是余可及的。b) 宏可呈示的，如果它是宏可及且余完备。c) 宏拓扑斯，如果它是宏可呈示的并满足吉劳公理 (ii)–(iv)。

我们预计以下问题的答案都是肯定的：
(1) 若 $\mathcal{D}$ 是宏可及的，那么对于每个正则基数 $\kappa$，由 $\kappa$-紧对象张成的全子范畴 $\mathcal{D}^\kappa \subset \mathcal{D}$ 是否余可及？(2) 若 $\mathcal{D}$ 是宏可呈示的，那么它是否自动完备？(3) 是否可以提出一种伴随函子定理，用以刻画宏可呈示 $\infty$-范畴之间的左伴随函子？(4) 是否存在宏可及范畴局部化的良好理论？若存在，那么宏可呈示性和宏拓扑斯性质能否刻画为某种可及预层$\infty$-范畴的适当局部化？(5) 宏可呈示 $\infty$-范畴和宏拓扑斯在切片范畴、极限等运算下是否封闭？

## 附录 B. 层的有效满射

在本附录中，我们阐述一些关于层的有效满射的常见结果，但一直未能找到合适的参考文献。

设 $\mathcal{C}$ 是一个小 $\infty$-范畴，并设 $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是到 $\mathcal{C}$ 上 anima 预层的 $\infty$-范畴中的 Yoneda 嵌入。 $S \in \mathcal{C}$ 上的一个筛是 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中 $(-1)$-截断映射 $j\colon U \to h(S)$ 的一个等价类。它确定且仅由全子范畴 $\mathcal{C}_{/S}(U) \subset \mathcal{C}_{/S}$ 所确定；该子范畴由满足 $h(g)$ 经由 $j$ 分解这一性质的映射 $g\colon S' \to S$ 所张成。

**例 B.1.** 若 $f\colon T \to S$ 是 $\mathcal{C}$中的一个映射，那么 [20, 命题 6.2.3.4] 表明，其 Čech 神经的余极限给出了本质唯一的分解

$$h(T) \xrightarrow{i_0} U \simeq \varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} h(T)^{\times_{h(S)}[-]} \xrightarrow{j} h(S)$$

将 $h(f)$ 分解为一个 $(-1)$-连通映射和一个 $(-1)$-截断映射的复合。因此，映射 $g\colon S' \to S$ in $\mathcal{C}$ 可分解经过 $f$，当且仅当映射 $h(g)$ in$\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 可分解经过 $j$。特别地，由具有此性质的映射张成的 $\mathcal{C}_{/S}(U) \subset \mathcal{C}_{/S}$ 的全子范畴在余积下封闭。

**例 B.2.** 若 $(f_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$中的一族映射，则存在最小的筛 $j\colon U \to h(S)$，使得对于所有 $i \in I$， $h(f_i)$ 都经由 $j$ 分解。我们称 $j\colon U \to h(S)$ 为由 $(f_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$生成的筛。

[14]来自 [7] 的类可达和类可呈示 $\infty$-范畴概念更为一般，并涵盖在未必余可及的 $\infty$-范畴上的小预层 $\infty$-范畴。

**定义 B.3.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个小的 $\infty$-范畴。$\mathcal{C}$ 上的格罗滕迪克拓扑是指对 $\mathcal{C}$ 中的每个 $S$，指定一个由 $S$上的筛组成的集合 $J(S)$，称为 $S$上的覆盖筛，并满足以下条件：

(1) 对每个 $S$ in $\mathcal{C}$，$\mathrm{id}_{h(S)}\colon h(S) \to h(S)$ 的类都是一个覆盖筛。(2) 如果 $j\colon U \to h(S)$ 是 $S$ 上的覆盖筛，且 $f\colon T \to S$ 是 $\mathcal{C}$中任意一个映射，那么 $j$ 沿 $h(f)$ 的基变换 $j'\colon U' \to h(T)$ 是 $T$ 上的覆盖筛。(3) 设 $j\colon U \to h(S)$ 和 $k\colon V \to h(S)$ 是 $S$ 上的筛。如果 $k$是一个覆盖筛，并且对于每个满足 $h(f)$ 可经由 $k$分解的 $f\colon T \to S$， $j$沿 $h(f)$ 的基变换 $j'\colon U' \to h(T)$ 都是 $T$ 上的覆盖筛，那么 $j$就是 $S$ 上的覆盖筛。

$\mathcal{C}$ 中的映射族 $(f_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$称为覆盖族，如果它生成的筛 $j\colon U \to h(S)$ 是一个覆盖筛。若每个覆盖筛都包含一个有限覆盖族，则称格罗滕迪克拓扑为有限型。

**注 B.4.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有格罗滕迪克拓扑的小 $\infty$-范畴。我们断言，若 $j\colon U \to h(S)$ 是 $S$ 上的一个筛，并且包含一个覆盖筛，即存在覆盖筛 $k\colon V \to h(S)$，使得 $k$ 可经由 $j$ 分解，则 $j$ 是一个覆盖筛。事实上，若 $f\colon T \to S$ 具有如下性质： $h(f)$ 可经由 $k$ 分解，则 $h(f)$ 也可经由 $j$ 分解。因此，沿 $h(f)$ 对 $j$ 作基变换所得的基变换 $j'\colon U' \to h(T)$ 是一个 $(-1)$- 截断映射，且存在一个截面。但此时 $j'$ 等价于恒等映射，故由 (1) 可知它是一个覆盖筛；于是由 (3) 得出 $j$ 是一个覆盖筛，断言得证。

**定义 B.5.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有格罗滕迪克拓扑的小 $\infty$-范畴，设 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$上 anima 预层之间的映射，并设 $j\colon U \to X$ 是其 Čech 神经的余极限到 $U \to X$ 的典范映射。若对任意映射 $\eta\colon h(S) \to X$，只要 $S$ 属于 $\mathcal{C}$，沿该映射对 $j$ 作基变换所得的映射 $j_S\colon Y_S \to h(S)$ 就是一个覆盖筛，则映射 $f\colon Y \to X$ 是局部满射。

**命题 B.6**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个配备了格罗滕迪克拓扑的小 $\infty$-范畴，并设 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 上的 *anima* 预层之间的映射。以下条件等价：

(1) 映射 $L(f)\colon L(Y) \to L(X)$ 在 层范畴$(\mathcal{C})$ 中是一个有效满射。(2) 映射 $f\colon Y \to X$ 是一个局部满射。(3) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个 $S$ 以及每个 $S$-值点 $\eta \in X(S)$，都存在一个图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i h(T_i) & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \sum_i h(g_i)} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ h(S) & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

其中 $(g_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$ 是一个覆盖族。如果格罗滕迪克拓扑是有限型的，那么该覆盖族可以取为有限族。

证明。 我们回顾 [20, 命题 6.2.3。4]中的结论：

$$Y \xrightarrow{i_0} U \simeq \varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} Y^{\times_X [-]} \xrightarrow{j} X$$

是将 $f$ 分解为一个 $(-1)$-连通映射与一个 $(-1)$-截断映射复合的本质唯一分解。现在，为了证明 (1) 与 (2) 等价，我们称 $\eta\colon X' \to X$ 是良好的，如果沿 $\eta$对 $j$作基变换所得的 $j'\colon U' \to X'$是一个

覆盖筛；等价地说，如果 $L(j')\colon L(U') \to L(X')$ 是一个等价。因此，(1) 表示恒等映射 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 是良好的，而 (2) 表示每个来自可表预层的映射 $\eta\colon S \to X$ 都是良好的。现在，若 $\eta\colon X' \to X$ 是良好的，且 $g\colon X'' \to X'$ 是任意映射，那么 $\eta g\colon X'' \to X$ 也是良好的，因此 (1) 推出 (2)。而由良好映射 $\eta\colon X' \to X$ 张成的 $\mathcal{P}(\mathcal{C})_{/X}$ 的全子范畴对余极限封闭，因此 (2) 推出 (1)。

最后，为了证明 (2) 和 (3) 等价，我们注意到，(2) 表示：对于每个 $S$ 属于 $\mathcal{C}$，以及每个 $\eta \in X(S)$，沿 $\eta$ 对 $j$ 作基变换 $j_S$ 所得的筛是覆盖筛。但筛 $j_S$ 是覆盖筛，当且仅当存在一个覆盖族 $(g_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$ 和一个图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I} h(T_i) & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & U \\ \downarrow{\scriptstyle \sum_i h(g_i)} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ h(S) & \xrightarrow{\eta} & X. \end{array}$$

此外，该图表存在，当且仅当 (3) 中的图表存在，因此我们已经证明 (2) 和 (3) 确实等价。□

如果覆盖族 $(g_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$ 由单个映射 $g\colon T \to S$ 组成，那么我们也称映射 $g\colon T \to S$ 为覆盖。

**推论 B.7**。设 $\mathcal{C}$ 是一个小的 $\infty$-范畴，配备有限型 *Grothendieck* 拓扑，并假设 $\mathcal{C}$ 具有有限余积。$\mathcal{C}$ 上的 *anima* 的层之间的映射 $f\colon Y \to X$ 是有效满射，当且仅当对于每个属于 $\mathcal{C}$ 的 $S$ 以及每个映射 $\eta\colon h(S) \to X$，都存在一个图表

$$\begin{array}{ccc} h(T) & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle h(g)} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ h(S) & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

与 $g\colon T \to S$ 构成一个覆盖。

证明。命题 B.6 表明 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 上的层的有效满射，当且仅当对于每个 $\eta\colon h(S) \to X$ 满足 $S$ 属于 $\mathcal{C}$ 的情形，都存在一个图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I} h(T_i) & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \sum_i h(g_i)} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ h(S) & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

满足 $(g_i\colon T_i \to S)_{i\in I}$ 构成一个有限覆盖族。但 $Y$ 保有限积，因此映射 $\tilde{\eta}$ 本质上唯一地经由典范映射分解

$$\coprod_{i\in I} h(T_i) \longrightarrow h(\coprod_{i\in I} T_i),$$

并且由于 $(g_i\colon T_i \to S)$ 是一个覆盖族，根据注 B.4 可知，诱导映射 $g\colon T \simeq \coprod_{i\in I} T_i \to S$ 是一个覆盖。□

## 参考文献

[1] J. F. Adams，《Steenrod 代数的结构及其应用》，Comment. Math. Helv. 32 (1958), 180–214.[2] ———，《稳定同伦与广义同调》，芝加哥数学讲座，芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州—伦敦，1974.[3] J. M. Boardman，《条件收敛谱序列》，《同伦不变代数结构》（马里兰州巴尔的摩，1998），Contemp. Math., vol. 239，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。[4] U. Bunke、D.-C. Cisinski、D. Kasprowski 和 C. Winges，《左正合∞范畴中的受控对象与诺维科夫猜想》，arXiv:1911.02338。[5] R. Burklund、I. Levy 和 P. Pstrągowski，《Adams 型映射在复合下不稳定》，Proc. Amer. Math. Soc. 9 (2022), 373–376。[6] K. Cesnavicius 和 P. Scholze，《平坦上同调的纯性》，Annals of Math.，即将发表。[7] B. Chorny 和 Rosický，《类局部可呈示范畴与类可达范畴》，J. Pure Appl. Algebra 216 (2012), 2113–2125。[8] D. Clausen 和 M. Jansen，《约化 Borel–Serre 紧化作为不稳定代数 $K$理论的模型》，Selecta Math.，即将发表。[9] D. Clausen 和 P. Scholze，《凝聚数学讲义》，https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf。[10] P. G. Goerss，《形式群模栈上的拟凝聚层》，arXiv:0802.0996。[11] A. Grothendieck，《代数几何基础 II》（与 Jean Dieudonné 合作撰写）。若干类态射的初等整体研究，Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 8 (1961), 5–222。[12] L. Hesselholt 和 P. Pstrągowski，《狄拉克几何 I：交换代数》，Peking Math. J.，即将发表。[13] ———，《狄拉克几何 III：余切复形》，编写中。[14] M. J. Hopkins，《复定向上同调理论与叠的语言》，课程讲义，麻省理工学院，1999。[15] R. Liu 和 G. Wang，《局部域的拓扑循环同调》，Invent. Math. 230 (2022), 851–932。[16] Y. Liu 和 W. Zheng，《高阶阿廷栈的增强六运算与基变换定理》，arXiv:1211.5948。[17] J. Lurie，Kerodon，https://kerodon.net。[18] ———，私人通信。[19] ———，《高阶代数》，https://www.math.ias.edu/~lurie，2017。[20] ———，《高阶拓扑斯理论》，https://www.math.ias.edu/~lurie，2017。[21] ———，《椭圆上同调 I：谱阿贝尔簇》，https://www.math.ias.edu/~lurie，2018。[22] ———，《椭圆上同调 II：定向》，https:wwww.math.ias.edu/~lurie，2018。[23] ———，《谱代数几何》，https://www.math.ias.edu/~lurie，2018。[24] L. Mann，《刚性解析几何中的 $p$-进六函子形式》，arxiv:2206.02022。[25] A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel，《论 J. P. May 的幂零性猜想》，J. Topol. 8 (2015), 917–932。[26] ———，《等变稳定同伦论中的幂零性与下降》，Adv. Math. 305 (2017), 994–1084。[27] H. Matsumura，《交换环论》，剑桥高等数学研究丛书，第 8 卷，剑桥大学出版社，1986。[28] W. Messing，《Barsotti–Tate 群所关联的晶体：及其在阿贝尔概形中的应用》，Lecture Notes in Math., vol. 264，施普林格出版社，柏林—纽约，1972。[29] J. W. Milnor，《Steenrod 代数及其对偶》，Ann. of Math. 67 (1958), 150–171。[30] I. Patchkoria 和 P. Pstrągowski，《Adams 谱序列与 Franke 代数化猜想》，arXiv:2110.03669。[31] D. Quillen，《无定向与复配边的形式群律》，Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1293–1298。[32] Stacks Project 作者，Stacks Project，https://stacks.math.columbia.edu，2018。[33] B. Toën 和 G. Vezzosi，《同伦代数几何 II：几何叠及其应用》，Mem. Amer. Math. Soc. 193 (208), x+224 页。

[34] A. Vistoli，格罗滕迪克拓扑、纤维范畴与下降理论札记，2004年。[35] W. C. Waterhouse，基本有界函子与平坦层，《太平洋数学杂志》**57**（1975年），597–610。[36] 交理论与黎曼–罗赫定理，《数学讲义》，第225卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1971年，《布瓦-马里代数几何研讨班 1966–1967年》（SGA 6）；由 P. Berthelot、A. Grothendieck 和 L. Illusie 主编。D. Ferrand、J. P. Jouanolou、O. Jussila、S. Kleiman、M. Raynaud 和 J. P. Serre 协助编撰。

日本名古屋大学和丹麦哥本哈根大学电子邮箱地址：larsh@math.nagoya-u.ac.jp

美国哈佛大学和美国高等研究院电子邮箱地址：pstragowski.piotr@gmail.com