arXiv:2303.13480v1 [math.CT] 23 Mar 2023

张量三角几何中的余支撑

TOBIAS BARTHEL、NAT`ALIA CASTELLANA、Drew Heard 和 Beren Sanders

Abstract. 我们在张量三角几何中发展了余支撑与余分层理论。我们研究支撑与余支撑之间的几何关系，为余支撑作为支撑在范畴意义下的对偶提供概念基础，并发现余分层理论与分层理论之间令人惊讶的联系。通过发展和应用下降技术，我们证明代数、拓扑学和几何学中的许多范畴都是余分层的。贯穿始终的一个主题是：余支撑与张量三角几何中的各种问题息息相关；要全面理解一个范畴，就必须同时了解它的支撑与余支撑。

Contents

1. 引言 2

第一部分。余支撑与余分层 13
2. 余局部化余理想 3. 余支撑理论 4. 张量三角余支撑 5. 茎与余茎 6. 局部到整体原理 7. 余分层 8. 余支撑的几何学 13 15 16 21 24 26 30

第二部分：完美性与对偶性 35
9. 完美生成 10. 余支撑即支撑 11. 普适性 12. 对偶性 35 37 43 47

第三部分：态射与下降 51
13. 几何函子的像 51 14. 支撑与余支撑的基变换 56 15. 局部到整体原理的下降 61 16. 局部余生成 62 17. 余分层的引导 64

第四部分：应用与例子 69
18. 张量三角例子 69 19. 代数例子 73 20. 同伦例子 75 21. 未解问题 82

参考文献 83

Date：2023年3月24日。

1. 引言

比较给定范畴中对象的一种方法是借助支撑理论。其典型例子是交换代数中模的支撑，这启发了相关领域中的类似构造，例如代数几何、表示论和色同伦论等。其共同视角是将范畴中的对象视为几何基空间上的“丛”，并记录对象不消失的点。这些支撑理论在整理所研究的对象方面取得了显著成效，尤其是在导出语境和同伦语境中 [BCR97，Tho97，HS98]。

张量三角几何学 [Bal10] 将这些进展置于统一的框架之中：它将张量三角范畴 $\mathcal{T}$ 视为某个空间——其 Balmer 谱——上的一个丛，并为 $\mathcal{T}$的紧对象构造普适的支撑理论。这一普适支撑理论根据紧对象如何利用自然具备的范畴结构相互生成，对它们进行分类。该理论在 [Nee92a、HPS97、BF11、BIK08、Ste13、BHS23]中被扩展到紧对象以外的“无限维”情形。对于非紧对象，支撑理论更为微妙；但在理想的情形下，它将紧对象的分类扩展到所有对象。这可由范畴的一种称为分层的性质来刻画。

本文旨在系统地发展张量三角几何中的余支撑对偶理论，以及与之相伴的余分层概念。从概念上说，可以从三个互补的角度来理解这一目标：

- （几何视角）在代数几何中，拟凝聚层的支撑由其局部上同调刻画。余支撑则对应于局部同调。Grothendieck 局部对偶通过伴随关系表达了这两个概念之间的联系；这一关系可以形式化，并为在更一般的情形下定义余支撑提供依据。传统上，文献中正是以这种方式引入余支撑的。

- （构造视角）支撑理论提供了一种理解无限维对象的方法：考察它们如何借助自然可用的“有限”结构与无限余积相互构造。这相当于研究范畴的局部化理想。尽管从出生起，我们便习惯于通过余积来生成对象，但这并非唯一的选择：我们也可以考察对象如何通过其他构造（例如无限积）相互构造，从而获得新的认识。这引出了对范畴的余局部化余理想的研究，而余支撑正是为此提供的组织框架。

- （范畴论）紧生成范畴的余支撑 $\mathcal{T}$ 可以理解为与对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$相关联的支撑。这为余支撑提供了一种非常概念性的理解，而这在文献中一直缺失。它也揭示了该理论的部分微妙之处，因为除了平凡情形外，$\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 都不是紧生成的。

表面上，这似乎表明，余支撑及其性质不过是已确立的支撑理论的一种形式变体。然而，正如我们将在本文中展示的，这一结论并不成立。此外，事实证明，即使在我们只关注支撑的情形下，余支撑也会自然出现；只有将两者结合起来，才能呈现完整的图景。

我们的余支撑构造是在刚性紧生成的张量三角（“tt”）范畴 $\mathcal{T}$ 中进行的，其紧对象的 Balmer 谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的（这是 [BHS23] 中引入的一种温和的点集拓扑假设，同时推广了诺特性和原有限性）。它具有如下赋值形式：

$$\mathrm{Cosupp}\colon \{\text{objects of } \mathcal{T}\} \longrightarrow \{\text{subsets of } \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)\}$$

满足关于 $\mathcal{T}$ 的张量三角结构的一系列相容性条件。我们简要且非正式地概述余支撑理论的主要特点如下：

- 余支撑揭示了支撑的若干关键性质。例如，支撑的局部到整体原理等价于余支撑的检测性质，而分层可以用支撑与余支撑的联合行为来刻画。余支撑的行为也反映了 Balmer 谱的拓扑，因而有助于洞察紧对象的结构。更一般地说，我们研究支撑与余支撑之间的几何关系，以及它们如何通过 $\mathcal{T}$ 中的内在对偶相互交织。

- 余支撑还引出了与之相应的余分层概念，旨在用 Balmer 谱的子集为 $\mathcal{T}$ 的余局部化余理想 [BHS23] 分类。这一理论的基本性质与 [BHS23] 所发展出的分层理论互为对偶。例如，我们证明，余支撑理论是对余局部化余理想进行分类的普适选择。特别地，这意味着，如果 $\mathcal{T}$ 按照 Benson–Iyengar–Krause 的意义是余分层的 [BIK12]，那么它在我们的意义下也余分层；但有许多类例子中，反向结论并不成立。

- 我们阐明了分层与余分层之间的关系，发现相应的（余）检测和（余）局部到整体原理之间存在一种出人意料的不对称性。尽管余分层在先验上是比聚分层更强的性质，我们仍证明，所有已知的分层范畴实例也都是余分层的。这些结果是一般下降技术的应用。我们的方法简化了文献中所有已知的余局部化余理想分类的证明，并建立了此前尚无法获得的新分类。

- 我们通过说明支撑与余支撑都是更一般的支撑概念的特例，统一了二者；这一概念的定义足够普遍，涵盖了 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_{\text{对偶}}$。这让我们得以从更深的概念层面理解余支撑：它不过是对偶范畴的支撑。

主要结果的内容与概要。现在我们将更详细地概述本文的主要结果。这些结果大致可归纳为六个彼此关联的主题，如下所述。不过需要指出的是，这里所讲述的脉络并未忠实反映文档的线性结构；关于后者，请参见引言末尾。

假设。 在整个引言中，$(\mathcal{T},\ \otimes,\ 1)$ 表示一个刚性紧生成三角张量范畴，其谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的。我们用 $\hom(-,\ -)$ 表示 $\mathcal{T}$ 的内 Hom。

主题一：余支撑与余分层。 在我们的三角张量几何情形中，定义支撑与余支撑的共同出发点，是存在一组适当的幂等元 $g_{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}$，可用于将注意力限制在每个点 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 上。这些幂等元的构造依赖于我们的拓扑假设，即 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的。随后，我们将对象 $t \in \mathcal{T}$ (定义 4.23) 的支撑与余支撑定义为 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 的以下子集：

$$\operatorname{Supp}(t) = \left\{ \mathcal{P} \,\middle|\, g_{\mathcal{P}} \otimes t \neq 0 \right\} \quad \text{and} \quad \operatorname{Cosupp}(t) = \left\{ \mathcal{P} \,\middle|\, \hom(g_{\mathcal{P}}, t) \neq 0 \right\}.$$

这一支撑定义源自 Balmer–Favi [BF11]，并由以下文献研究 [BHS23]。余支撑的定义受到以下构造的启发： [HS99], [Nee11]，尤其是 [BIK12]，其中在配备交换诺特环辅助作用的三角范畴背景下考虑了类似的定义。我们首先提取函数 $\operatorname{Cosupp}(t)$ 满足的基本性质，由此提出公理化余支撑理论的概念（定义 3.1和命题 4.25）。概括如下：

定理。 余支撑满足公理化余支撑理论的条件：

(a) $\operatorname{Cosupp}(0) = \varnothing$ 且 $\operatorname{Cosupp}(\mathcal{T}) = \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$; (b) 对每个 $t \in \mathcal{T}$，$\operatorname{Cosupp}(\Sigma t) = \operatorname{Cosupp}(t)$；(c) 对 $\mathcal{T}$ 中的任意正合三角 $a \to b \to c$，$\operatorname{Cosupp}(c) \subseteq \operatorname{Cosupp}(a) \cup \operatorname{Cosupp}(b)$；(d) 对 $\mathcal{T}$ 中任意一组对象 t_i，$\operatorname{Cosupp}(\prod_{i \in I} t_i) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Cosupp}(t_i)$；(e) 对所有 s、$t \in \mathcal{T}$，$\operatorname{Cosupp}(\hom(s,t)) \subseteq \operatorname{Cosupp}(t)$。

虽然这些公理很基础，但由于下文主题 II 中讨论的余支撑与支撑之间存在不对称的相互作用，要正确表述这些公理并不简单；这一点也可从公理 (e) 的特殊形式中窥见。指导我们选择这些公理的关键原则是这样一个观察：支撑在给定集合上的对象族构成一个局部化理想，而余支撑在给定集合上的对象族构成一个余局部化余理想（定义 2.2）。事实上，上述公理（不包括 $\operatorname{Cosupp}(\mathcal{T}) = \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$）等价于以下陈述：余支撑在给定集合上的对象族构成一个余局部化余理想。因此，余支撑与余局部化余理想的研究密切相关，正如支撑与局部化理想的研究密切相关一样。

在 [BHS23] 中，我们将范畴 $\mathcal{T}$ 定义为：若映射

$$\operatorname{Supp}\colon \{\text{localizing ideals of } \mathcal{T}\} \longrightarrow \{\text{subsets of } \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\}$$

由 Balmer–Favi 支撑诱导的映射是一个双射。尽管可以考虑 $\mathcal{T}$ 上任意支撑理论的类似陈述，但我们证明了，为了对 $\mathcal{T}$ 进行分层，Balmer–Favi 支撑概念提供了普适的支撑理论选择。这说明，将分层定义为上述范畴的一种性质，而不是相对于某种辅助支撑理论的选择来定义一个概念，是合理的。

类似地，我们称 $\mathcal{T}$ 是余分层的（定义 7.1），如果映射

$$\operatorname{Cosupp}\colon \{\text{colocalizing coideals of } \mathcal{T}\} \longrightarrow \{\text{subsets of } \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\}$$

由我们的张量三角余支撑理论诱导的映射是双射。将余分层作为 $\mathcal{T}$ 的一种性质来作内在定义，是由我们的余支撑理论的相应普适性结果所证明的：

定理（非正式版本）。余支撑是与通常的紧对象分类相兼容的 $\mathcal{T}$ 余分层余支撑理论中最普适的选择

对象 $\mathcal{T}$。特别地，如果 $\mathcal{T}$ 按照 [BIK12], 的意义是余分层的，那么它在我们的意义下也同样是余分层的。

更精确的表述见 推论 11.10和 推论 11.12。顺带一提，余支撑的这一普适性结果比相应的支撑结果更加微妙，因为将余支撑限制在紧对象上，通常并不等同于紧对象的 Balmer 的泛支撑。大量例子表明，某些张量三角范畴按照我们的意义是余分层的，但按照 [BIK12], 的意义却不是。因此，在我们的张量三角范畴设定中，我们的余分层理论严格比 [BIK12]的理论更一般。

为了进一步讨论我们的结果，我们需要做一些额外准备。回顾一下，$\mathcal{T}$ 的谱通过一种分而治之的方法控制其全局几何结构：首先将 $\mathcal{T}$ 分解为若干部分 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，这些部分刻画了支撑集中于单点 $\mathcal{P}\in\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c$的那些对象；其次研究这些单独的部分（或称“茎”）。直观地说，局部到整体原理指出，$\mathcal{T}$ 可以由其局部部分重构。换言之，$\mathcal{T}$ 的每个对象都可以由其茎构造而成。特别地，它蕴含检测性质：$\mathrm{Supp}(t) = \varnothing$ 当且仅当 $t = 0$。如果 $\mathcal{T}$ 满足局部到整体原理，那么局部部分 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 还满足一个刻画范畴 $\mathcal{T}$ 何时分层的条件，即茎 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是极小局部化理想。这便是 [BHS23]中系统发展的分层理论的开端。

现在我们可以考虑基于余支撑的这些概念的类似版本：我们定义余局部化余理想 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{T}$ 由所有在单个点处具有余支撑的对象组成 $\mathcal{P}\in\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$，并且有相应的余局部到整体原理（定义 6.1），其大意是，每个对象都可以由这些“余茎”构造而成。由此可推出余检测性质（定义 5.5），它指出 $\mathrm{Cosupp}(t) = \varnothing$ 当且仅当 $t = 0$。与分层理论完全类似，我们有（定理 7.7）：

定理。以下条件等价：

(a) $\mathcal{T}$ 是余分层的；*(b)* $\mathcal{T}$ 满足余局部到整体原理，并且对于每个 $\mathcal{P}\in\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$，余局部化余理想 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 都是极小的。

这样，余分层理论就具有与 [BHS23]中发展的分层理论相同的基本特征。

主题 II：分层与余分层之间的不对称性。尽管如上所述，分层和余分层具有类似的刻画，但这两种性质之间的关系却存在显著的不对称性。令人惊讶的是，局部到整体原理等价于余检测性质，而二者又都等价于余局部到整体原理（定理 6.4）：

定理。以下条件等价：

(a) $\mathcal{T}$ 满足局部到整体原理；*(b)* $\mathcal{T}$ 满足余局部到整体原理；*(c)* $\mathcal{T}$ 满足余检测性质。

这些条件蕴含检测性质，但反过来一般不成立。

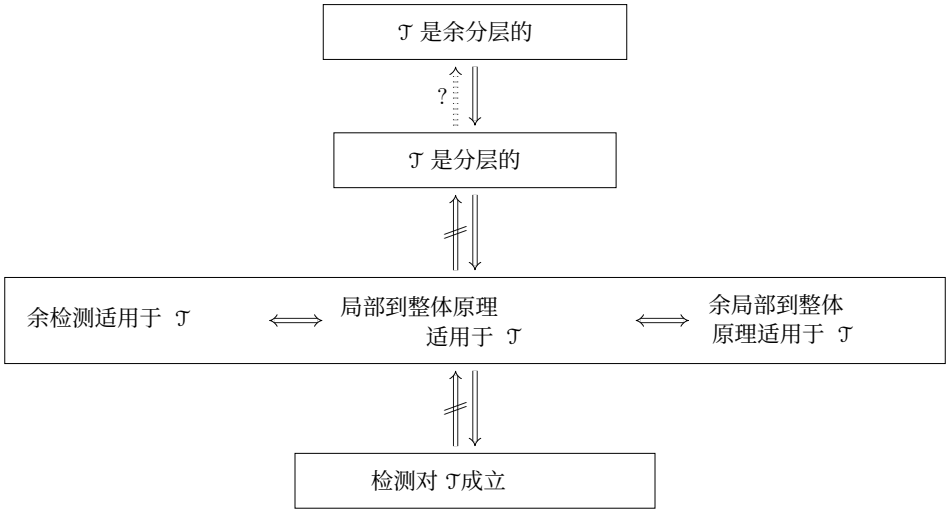
此外，余分层蕴含分层（定理 7.19 和推论 7.20）：

定理。 如果 $\mathcal{T}$ 是余分层的，那么它也是分层的。此外，在这种情况下，将局部化理想 $\mathcal{L}$ 映射到其右正交 $\mathcal{L}^{\perp} = \{ t \in \mathcal{T} \,|\, \text{同态}(\mathcal{L}, t) = 0 \}$的映射诱导出一个双射

$$\{localizing\ ideals\ of\ \mathcal{T}\} \xrightarrow{\sim} \{colocalizing\ coideals\ of\ \mathcal{T}\}$$

其逆由左正交给出。

因此，三角张量范畴可具有一系列性质层级，如下图所示：



一般而言，分层是否蕴含余分层仍是一个未解决的问题。这与任意 Bousfield 局部化是否存在的问题有关，因此也与诸如 Vop$\check{\text{e}}$nka 原理之类的集合论问题有关（见注 2.14和注记 7.22–7.23）。鉴于这一差异，余分层仍然是一种先验 上比层更深的性质。从更实际的角度来看，已知余分层情形的证明——例如 [Nee11]或 [BIK12]——比相应的分层证明复杂得多。我们将在稍后的主题 VI中回到这一主题。

现在我们转向支撑与余支撑之间的另一种不对称性。支撑的一项基本性质是

$$(\dagger) \qquad \operatorname{Supp}(s \otimes t) \subseteq \operatorname{Supp}(s) \cap \operatorname{Supp}(t)$$

对于任意 s， $t \in \mathcal{T}$。“半-$\otimes$ 公式”指出，当对象 s 是紧对象时，这个包含关系就是等式。此外，当范畴是分层的时，这一结论可提升为“完整-$\otimes$ 公式”（也就是说，(†) 对所有对象都成立）。相比之下，余支撑的情况如下：

定理。 以下陈述成立：

(a) 对任意 s、 $t \in \mathcal{T}$， $Cosupp(hom(s,t)) \subseteq Supp(s) \cap Cosupp(t)$。*(b)* 对任意 $x \in \mathcal{T}^c$ 和 $t \in \mathcal{T}$， $Cosupp(hom(x,t)) = Supp(x) \cap Cosupp(t)$。*(c)* 假设 $\mathcal{T}$ 满足局部到整体原理。以下条件等价：*(i)* $\mathcal{T}$ 是分层的；*(ii)* 对所有 s、 $t \in \mathcal{T}$，都有 $Cosupp(hom(s,t)) = Supp(s) \cap Cosupp(t)$。

这在 引理 4.29、命题 4.35和 定理 7.15 中得到了证明。请注意，(*a*) 部分中的包含关系（它是性质 (†) 的类比）同时涉及余支撑和支撑。(*b*) 部分给出了“半同态公式”。(*c*) 部分证明了，如果且仅当该范畴是分层的（且满足局部到整体原理），半同态公式才会提升为“全同态公式”，。分层与余支撑行为之间这一基本关系是 Benson–Iyengar–Krause [BIK12] 的一项发现。人们本来或许会认为，全同态公式反而与余分层关系更密切。

主题 III。支撑与余支撑之间的几何关系。上述内容促使我们寻求一种系统的几何描述，来刻画支撑与余支撑作为谱的子集时二者之间的关系。这是一个微妙的问题，不过我们可以证明一些概念性结果。例如，我们证明（推论 8.4）：

定理。若 $\mathcal{T}$ 的谱是诺特的，则对于任意 $t \in \mathcal{T}$，都有 $\mathrm{minSupp}(t) = \mathrm{minCosupp}(t)$。一般而言，如果谱不是诺特的，这个等式可能不成立。

在该定理的情形下，我们可能会想知道支撑函数与余支撑函数是否可能重合。我们证明（推论 8.14）：

定理。若 $\mathcal{T}$ 的谱是诺特的，则以下条件等价：

(a) 对所有 $t \in \mathcal{T}$，都有 $\mathrm{Supp}(t) = \mathrm{Cosupp}(t)$。*(b)* $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是一个有限离散空间。

从更一般的角度来看，支撑是否与余支撑一致这一问题，与 Tate 构造的消失有关，因而反映了 Balmer 谱的拓扑。例如，我们有（推论 8.12）：

定理。假设余检测性质成立。设 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为一个 *Thomason* 子集，并设 $e_Y \in \mathcal{T}$ 为与之关联的左幂等元，且满足$\mathrm{Supp}(e_Y) = Y$。那么$\mathrm{Cosupp}(e_Y) \subseteq Y$，当且仅当$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c) = Y \sqcup Y^c$ 可分解为闭集的不交并。

还可以给出更精细的表述，但重要的是，即使对于纯粹关于范畴 $\mathcal{T}^c$ 的紧对象之结构的问题，理解余支撑也很有意义。

理想情况下，我们希望找到一种方法，能够根据给定对象的支撑计算其余支撑，或反过来根据其余支撑计算支撑。但事实证明，这种期望过于乐观：我们给出了明确的反例，表明一般而言，一个对象的支撑并不能决定其余支撑（例 8.19）；反过来，一个对象的余支撑也不能决定其支撑（例 8.20）。不过，还有更精细的方法可以关联支撑与余支撑，例如，考察由某种对偶性概念联系起来的对象对。为此，我们对张量三角范畴中的对偶性进行一般性研究（定义 12.1），并分析支撑与余支撑在这些对偶性下如何变换。例如，Brown–Comenetz 对偶性提供了一种构造具有指定余支撑的对象的方法（命题 12.4）：

定理。 对于任意的 $t \in \mathcal{T}$，余支撑$(t^*) =$ 支撑(t)，其中 t^* 表示 t的 *Brown–Comenetz* 对偶。

关于对偶性的结果可应用于各种各样的例子。下面的定理（命题 12.15）展示了这类结果的一个说明性示例

。为了理解该陈述，我们称对象$t \in \mathcal{T}$ 具有小余支撑，如果 Cosupp(t) $\subseteq$ Supp(t)。例子包括紧对象，以及代数几何中的对偶化复形。

定理。 设 $\mathcal{T}$ 是分层的，并假设 $\kappa \in \mathcal{T}$ 对偶化子范畴 $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$。若 $\mathcal{T}_0$ 中的对象具有小余支撑，则对任意 $t \in \mathcal{T}_0$，有

$$\mathrm{Cosupp}(t) = \mathrm{Supp}(t) \cap \mathrm{Cosupp}(\kappa).$$

应用于 Spanier–Whitehead 对偶时，定理的陈述可化为半同态公式。应用于一个具有对偶化复形的交换诺特环的导出范畴时，该结果将半同态公式推广到了有界相干层复形。这些结果阐明了文献中关于余支撑与完备化之间关系的若干结果。

主题 IV。余支撑即支撑。 本文的一项重要贡献是统一了支撑与余支撑，表明二者都是同一构造的体现。这种统一并非显而易见。寻找支撑与余支撑之间更深层联系的尝试，受到这样一个事实的阻碍：余局部化余理想在范畴意义上并不明显是局部化理想的对偶。促成二者统一的关键洞见是认识到 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 具有相同的刚性 tt-范畴 $\mathcal{T}^d \cong (\mathcal{T}^{\mathrm{op}})^d$，其中包含可对偶对象；并且 $\mathcal{T}^d$ 的局部化子模 $\mathcal{T}$恰好是 $\mathcal{T}$的局部化理想，而 $\mathcal{T}^d$ 的局部化子模 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$恰好是 $\mathcal{T}$的余局部化余理想。技术上的困难源于对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 永远不是紧生成的，但完美生成的非闭三角张量范畴这一概念提供了一个同时涵盖 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 的框架（术语 10.1）。总结 第 10 节中的结果，我们有：

定理。 对于完美生成的非闭三角张量范畴 $\mathcal{T}$，若其可对偶对象的谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 弱诺特，则存在支撑理论，以及相应的分层概念，用于分类 $\mathcal{T}^d$ 的局部化子模 $\mathcal{T}$。

例 10.31、例 10.32和定理 10.35 由此给出：

定理。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴。

(a) 应用于 $\mathcal{T}$ 时，上述理论化为关于 $\mathcal{T}$ 的局部化理想的支撑与分层理论，该理论由 [BHS23]发展。*(b)* 应用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 时，上述理论化为本文所发展的关于 $\mathcal{T}$ 的余局部化余理想的余支撑与余分层理论。*(c)* 特别地，对于所有 余支撑$_{\mathcal{T}}(t) =$ 支撑$_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}(t)$， $t \in \mathcal{T}$， $\mathcal{T}$ 的余局部化余理想恰好是$\mathcal{T}^d$-子模 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$，并且 $\mathcal{T}$ 是余分层的，当且仅当 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 是分层的。

这为构造余支撑提供了可靠的概念基础。

主题 V. 支撑与余支撑的基变换。 本文的另一项重要主题，是研究相对情形下支撑与余支撑的行为，也就是沿张量三角范畴之间的函子进行基变换时的行为。这类结果在本领域具有根本重要性，因为它们使我们能够将感兴趣范畴中的问题归结为更简单范畴中的问题。这对于我们在下文讨论的分类问题中的应用至关重要。它也彰显了将余支撑理论建立在

Balmer 谱之上的价值，因为这为关联张量三角范畴提供了直接的几何视角。

基本设定是一个几何函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$，也就是说，它是一个保持余积的张量三角函子。函子 f^* 在谱上诱导出一个连续映射

$$\varphi := \operatorname{Spc}(f^*)\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c).$$

我们的假设还保证了两层右伴随的存在：

$$f^* \dashv f_* \dashv f^!.$$

我们得到了关于 φ 下支撑与余支撑的像和原像的多种结果。一个有趣的特点是，二重右伴随 $f^!$ 在余支撑的基变换中发挥着重要作用。例如，一个重要结果（推论 14.19）在一般的张量三角背景下确立了 Avrunin–Scott 恒等式 [AS82]：

定理。若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个几何函子，且 $\mathcal{T}$ 是分层的，则对任意 $t \in \mathcal{T}$：

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t)) \quad \textit{and} \quad \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t)).$$

这些恒等式在研究分层的下降性质时发挥着至关重要的作用；下文将更详细地讨论这一主题。

另一项结果（推论 13.15）无条件地给出了像的刻画：

定理。若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是几何函子，则 $\operatorname{im}\varphi = \text{支撑}_{\mathcal{T}}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}))$。

我们还得到了若干更精细的结论。例如，我们证明，若 f^* 满足 Grothendieck–Neeman 对偶性（按 [BDS16] 的含义），则诱导的谱映射 φ 是闭映射（注 13.26）。我们还揭示了 φ 的满射性与函子 f^*和 $f^!$的保守性之间的密切关系；参见例如 命题 13.33 和 推论 14.24。

这些只是我们基变换结果中的重点；它们已经表明，在研究任何几何函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 时，余支撑都会自然出现，并为二重右伴随 $f^!\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 的行为提供洞见。

主题 VI. 下降与应用。另一个主题是发展通用技术，以便为许多值得关注的范畴确立余分层。这些技术将为文献中所有已知的余局部化余理想分类提供简洁明了的证明，也适用于以往无法处理的新类例子。为恰当说明我们的结果，我们将简要回顾证明分层的一套蓝图，然后解释如何通过自举这一过程来确立余分层。

假设 $\mathcal{T}$ 是一个我们希望证明为分层的张量三角范畴。自然可以分三步进行：

步骤 *1* 构造几何函子 $f_i^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}_i$ 到更简单的张量三角范畴 $\mathcal{S}_i$，使得映射 $\varphi_i := \operatorname{Spc}(f_i^*)$ 的像共同覆盖 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。步骤 *2* 证明范畴 $\mathcal{S}_i$是分层的。步骤 *3* 沿函子 f_i^* 下降分层。

进展通常取决于第 3 步的改进，也就是找到更一般的分层下降判据。为此，我们在现有的分层工具箱中加入准有限下降 (定理 17.16)和幂零下降 (定理 17.20)。

于是，自然会提出这样一个问题：类似的方法是否也适用于余分层？我们将证明，只要已经有分层，这一点确实成立，而且是以最强的方式成立。换言之，我们证明，只要能够下降分层，就也能够下降余分层。关键的洞见是以下“自举定理”：

定理。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个保守几何函子，且 $\mathcal{S}$ 是余分层的。若 $\mathcal{T}$ 是分层的，那么它也是余分层的。

这是 推论 17.4，也是我们的主要结果之一。为了实施下降策略并应用该定理，我们还需要有充足的余分层范畴。我们的下一个结果提供了一个来源，它结合了 推论 18.9和定理 18.15：

定理。以下张量三角范畴 $\mathcal{T}$ 是余分层的（因此也是分层的）：

(a) $\mathcal{T}$ 是纯半单的（例如，按 [BKS19] 的意义，它是一个 *tt*-域）。在此情形下，$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是有限离散空间。***(b)*** $\mathcal{T}$ 按 [DS16] 的意义是仿射弱正则的。在此情形下，存在一个典范同胚 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 同胚于 $\mathrm{Spec}^h(\mathrm{End}^*_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}))$。

我们的方法灵活多样，适用于代数几何、表示论和同伦论中的各类例子。下一个定理列举了我们的一些应用；更多例子可见论文正文。

定理。

(a) 设 X 是一个拓扑弱诺特的拟紧且拟分离概形。若且唯若其导出范畴 $D_{\mathrm{qc}}(X)$ 是分层的，当且仅当它是余分层的。特别地，对于任意诺特概形 X，$D_{\mathrm{qc}}(X)$ 都是余分层的。（见定理 *19.5*。）***(b)*** 对于一个具有诺特模 p 上同调的 p-良好连通空间 X，上链代数上的模范畴 $\mathrm{Mod}(C^*(X; \mathbb{F}_p))$ 是分层的，当且仅当它是余分层的；而这又当且仅当 X 满足 *Chouinard* 条件。特别地，这些条件对连通诺特 H-空间均成立。（见定理 *20.27*。）***(c)*** E_n-局部谱的范畴是余分层的。（见定理 *20.21*。）***(d)*** 设 G 是一个有限群，且 $E_G \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^G)$ 是一个交换等变环谱，使得对每个 $H \leq G$，非等变导出范畴 $D(\Phi^H E_G)$ 都是具有诺特谱的余分层范畴，其中 $\Phi^H E_G$ 表示几何不动点。则 $D(E_G)$ 是余分层的。（见定理 *20.31*。）***(e)*** 作为 *(d)* 的特例，对任意有限群 G，导出 *Mackey* 函子范畴都是余分层的。（见推论 *20.36*。）***(f)*** 作为 *(d)* 以及 [BCH+23a]，的特例，*Borel* 等变 *Morava* E-理论上的等变模范畴是余分层的。（见定理 *20.41*。）***(g)*** 对紧李群 G，有理 G-谱范畴是余分层的。（见定理 *20.48*。）***(h)*** 对任意有限群 G 和域 k，置换模的导出范畴 $\mathrm{DPerm}(G, k)$ 都是余分层的。（见定理 *19.13*。）

在上述每一种情形中，我们都能根据相应 *Balmer* 谱的（已知）底层集合，对局部化理想和余局部化余理想进行分类。

对于这些例子，分层早已为人所知，我们在正文中给出了准确的出处和参考文献。

另一类新近出现的余分层范畴，采用了本文的技术，但其证明超出了本文的范围；这类范畴是系数取诺特交换环的有限群的稳定模范畴 StMod$(G,\ R)$；参见 [BBI+23]。本文中，我们给出了经典 $R = k$ 情形的简明证明，通过伽罗瓦上升处理初等阿贝尔群（命题 20.12），`方法出自 Mathew；参见定理 19.10 和定理 20.14。

总之，我们已穷尽所知的所有分层 tt-范畴，并证明它们也都是余分层的。这尤其包括前一定理第 $X = S^3\langle 3\rangle$ （b）部分中的情形，而以往的技术无法处理这一情形；参见例 20.28。

本文结构。本文分为四个部分。

第一部分 从 第 2 节 开始，其中我们阐述术语约定、引入记号，并回顾有关余局部化余理想和 Bousfield 局部化的基本事实。我们在 第 3 节中第 4 节定义刚性紧生成范畴的张量三角余支撑，并探究其基本性质。我们在 第 5 节继续这项研究，在每个点定义茎和余茎，并引入检测性质和余检测性质。接着，我们在 第 6 节 研究局部到整体原理和余局部到整体原理，证明二者等价，而且实际上也等价于余检测性质。在 第 7 节中，我们定义余分层，确立刻画范畴何时为余分层的条件，并证明余分层蕴含分层。最后，我们在 第 8 节 研究余支撑的几何行为及其与支撑的关系。

在第二部分中，我们从刚性紧生成张量三角范畴转向一个更一般的框架。我们在第 9 节回顾完美生成三角范畴的概念，并回顾紧生成范畴的对偶范畴如何成为完美生成范畴。在第 10 节中，我们为完美生成张量三角范畴建立支撑理论，并展示它如何统一支撑与余支撑。在第 11 节中，我们证明一般支撑理论的普适性结果，并将余支撑的普适性结果作为特例得出。最后，在第12节中，我们研究支撑与余支撑在内在对偶（例如 Spanier–Whitehead 对偶和 Brown–Comenetz 对偶）下的关系。

在第三部分中，我们研究（余）支撑与（余）分层的基变换和下降结果。特别是，我们在第 13 节中研究几何函子的像，包括判定其是否为满射的准则；并在第 14 节中研究（余）支撑的基变换结果。在第 15 节中，我们应用这些结果研究局部到整体原理的下降。在第 16 节中，我们为余茎范畴构造局部余生成元，这是后续结果的一项重要技术要素。最终，在第 17 节中，我们建立关键的“自举”定理：只要能够对分层进行下降，就能对余分层进行下降。我们还建立了用于支撑该定理的分层下降技术。

在第四部分 中，我们转向应用与例子。我们在第18节讨论抽象张量三角例子，在第19节讨论代数例子，并在第20节讨论同伦论例子。我们在第21节 以一系列未解问题作为全文的结尾，希望这些问题能推动进一步研究。

致谢。 我们感谢 Scott Balchin、Paul Balmer、David Rubinstein 和 Changhan Zou 对本文的关注。我们也感谢马克斯·普朗克研究所和豪斯多夫数学研究所，在由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）根据德国卓越战略资助的三学期项目《代数、几何与拓扑中的谱方法》期间给予我们的热情接待。第一作者获得欧洲研究理事会（ERC）地平线欧洲计划（资助编号：101042990）的支持。第二作者部分获得西班牙国家研究署项目 PID2020-116481GB-I00、Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M），以及 CERCA计划/加泰罗尼亚政府的支持。第三作者获得特隆·蒙基金会编号为 TMS2020TMT02 的资助。第四作者获得美国国家科学基金会（NSF）DMS-1903429 号资助。

第I 部分： 余支撑与余分层

2. Colocalizing coideals

2.1. 术语。我们沿用 [BHS23]中的记号和术语。在本文的大部分内容中， $\mathcal{T}$ 表示一个刚性紧生成张量三角范畴（第 9–11 节中另有例外）。我们用 $-\otimes-$ 表示张量，用 $\mathbb{1}$ 表示单位对象。我们用 $\mathsf{hom}(-,-)$ 表示内 Hom，用 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(-,-)$ 或 $\Upsilon(-,-)$ 表示态射阿贝尔群。对于对象的对偶，我们也记作 $t^\vee := \mathsf{hom}(t,\mathbb{1})$。

2.2. 定义。 $\mathcal{T}$ 的局部化子范畴是一个对余积封闭的厚子范畴。局部化理想是一个局部化子范畴 $\mathcal{L}$ ，并且还是张量理想： $\mathcal{L}\otimes\mathcal{T}\subseteq\mathcal{L}$ 其中 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{T}=\{\,s\otimes t\,|\,s\in\mathcal{L},t\in\mathcal{T}\,\}$。 $\mathcal{T}$ 的余局部化子范畴是一个对积封闭的厚子范畴。余局部化余理想是一个余局部化子范畴 $\mathcal{C}$ ，满足 $\mathsf{hom}(\mathcal{T},\ \mathcal{C})\subseteq\mathcal{C}$ ，其中 $\mathsf{hom}(\mathcal{T},\ \mathcal{C})=\{\,\mathsf{hom}(t,\ s)\,|\,s\in\mathcal{C},\ \ t\in\mathcal{T}\,\}$。

2.3. 记号。 我们用 $\mathsf{Loc}\langle\mathcal{E}\rangle$、$\mathsf{Locid}\langle\mathcal{E}\rangle$、$\mathsf{Coloc}\langle\mathcal{E}\rangle$ 和 $\mathsf{Colocid}\langle\mathcal{E}\rangle$ 分别表示由对象族 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$ 生成的局部化子范畴、局部化理想、余局部化子范畴和余局部化余理想。

2.4. 注记。 若 $\mathcal{T}=\mathsf{Loc}\langle\mathcal{E}\rangle$ 是由对象族 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$ 生成的，则余局部化子范畴 $\mathcal{C}$ 是余理想，当且仅当 $\mathsf{hom}(\mathcal{E},\mathcal{C})\subseteq\mathcal{C}$。因此，如果 $\mathcal{T}$ 是单生成的（即 $\mathcal{T}=\mathsf{Loc}\langle\mathbb{1}\rangle$），那么每个余局部化子范畴自动都是余理想。

2.5. 注记。 对于任意对象 $t\in\mathcal{T}$，考虑以下三个函子

$$t\otimes-\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T},\quad \mathsf{hom}(t,-)\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T},\quad \text{and}\quad \mathsf{hom}(-,t)\colon\mathcal{T}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{T}.$$

局部化理想在第一个函子下的原像仍是局部化理想；余局部化余理想在第二个函子下的原像仍是余局部化余理想；余局部化余理想在第三个函子下的原像则是局部化理想。因此，对于任意对象族 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$，我们有

$$t\otimes\mathsf{Locid}\langle\mathcal{E}\rangle\subseteq\mathsf{Locid}\langle t\otimes\mathcal{E}\rangle, \tag{2.6}$$

$$\mathsf{hom}(t,\mathsf{Colocid}\langle\mathcal{E}\rangle)\subseteq\mathsf{Colocid}\langle\mathsf{hom}(t,\mathcal{E})\rangle,\ \text{and} \tag{2.7}$$

$$\mathsf{hom}(\mathsf{Locid}\langle\mathcal{E}\rangle,t)\subseteq\mathsf{Colocid}\langle\mathsf{hom}(\mathcal{E},t)\rangle. \tag{2.8}$$

2.9. 定义（正交子范畴）。若 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$ 是一个对象族，我们将 $\mathcal{E}$ 的右正交定义为全子范畴

$$\mathcal{E}^{\perp}:=\{\,t\in\mathcal{T}\,|\,\mathsf{hom}(s,t)=0\text{ for all }s\in\mathcal{E}\,\}.$$

注意， $\mathcal{E}^{\perp}$ 是 $\mathcal{T}$的余局部化余理想。此外，由（2.8）可得$\mathcal{E}^{\perp}=\mathsf{Locid}\langle\mathcal{E}\rangle^{\perp}$。类似地，左正交定义为

$${}^{\perp}\mathcal{E}:=\{\,t\in\mathcal{T}\,|\,\mathsf{hom}(t,s)=0\text{ for all }s\in\mathcal{E}\,\}.$$

它是 $\mathcal{T}$ 的局部化理想，并且由（2.7）可得 ${}^{\perp}\mathcal{E}={}^{\perp}\mathsf{Colocid}\langle\mathcal{E}\rangle$。

2.10. 注记。若 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$ 是一个理想，则

$$\mathcal{E}^{\perp}=\{\,t\in\mathcal{T}\,|\,\mathcal{T}(s,t)=0\text{ for all }s\in\mathcal{E}\,\}.$$

类似地，如果 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$ 是余理想，那么

$${}^{\perp}\mathcal{E}=\{\,t\in\mathcal{T}\,|\,\mathcal{T}(t,s)=0\text{ for all }s\in\mathcal{E}\,\}.$$

2.11. 注记。若包含关系 $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{T}$ 有右伴随，则局部化理想 $\mathcal{L}$ 是严格局部化理想。当且仅当 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{T}$ 上某个 Bousfield 局部化的核时，情况才是如此。在这种情况下，局部对象构成的子范畴是 $\mathcal{L}^{\perp}$。值得注意的是，若 $\mathcal{L}$ 是严格局部化理想，则 $\mathcal{L} = {}^{\perp}(\mathcal{L}^{\perp})$，例如参见 [Kra10，命题 4.9.1]。类似地，若包含关系 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{T}$ 有左伴随，则余局部化余理想 $\mathcal{C}$ 是严格余局部化余理想。当且仅当 $\mathcal{C}$ 是某个 Bousfield 局部化的像时，情况才是如此。此外，在这种情况下，$\mathcal{C} = ({}^{\perp}\mathcal{C})^{\perp}$。我们总是有一个函数 $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{\perp}$，它将 $\mathcal{T}$ 的严格局部化理想映到 $\mathcal{T}$ 的严格余局部化余理想。除去是否只有一组这样的 Bousfield 局部化这一集合论问题，此对应关系是一个双射。

2.12. 注记。 关于 Bousfield 局部化是否总是存在的问题，有一段有趣的历史，其始于 [Bou79]。对我们而言，以下内容尤为重要：

2.13.**定理** (Neeman)。 若 $\mathcal{T}$ 是一个良生成三角范畴，则每个集合生成的局部化子范畴都是严格局部化的。

证明。 关键在于，良生成三角范畴中的集合生成的局部化子范畴本身也是良生成的，因此，根据 Brown 可表性，包含关系具有右伴随；参见 [Nee01，注记 1.16 和命题 1。21] 或 [Kra10，命题 4.9.1 和定理 7.2。1]。 □

2.14. 注记。余局部化子范畴并不存在类似的结果（从本质上说，这是因为证明技巧不适用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$）。这正是问题的核心所在：为什么可能存在“更多”余局部化子范畴，以及为什么人们可能会认为，余局部化余理想的分类比局部化理想的分类“更难”。例如，如果局部化理想只有一个集合（例如，若 $\mathcal{T}$ 按照 [BHS23] 的意义是分层的），那么根据 [KS19，引理 3.3]，每个局部化理想都是由一个集合生成的，因此根据定理 2.13，它是严格局部化的。因此，在这种情况下，映射 $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{\perp}$ 给出了从局部化理想的集合到余局部化余理想集族的一个单射。先验而言，余局部化余理想可能更多。如果我们知道所有余局部化余理想都是严格余局部化的，那么这种差异就会消失；但这里潜藏着集合论的风险。例如，Casacuberta– Guti´errez–Rosick´y [CGR14]证明，若一种称为 Vop˘enka 原理的大基数公理成立（见 [AR94，第 6] 章），那么 $\mathcal{T}$ 的每个余局部化子范畴都是严格余局部化的，前提是 $\mathcal{T} = \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ 是某个稳定组合模型范畴的同伦范畴。对于任意的 $\mathcal{T}$，且不假设超出 ZFC 的公理，这一结论是否成立仍是一个未决问题。

2.15. 注记。 由 [KS19, 引理 3.3。1] 所提供的 [BHS23, 命题 3。5] 实际上证明了：如果存在一个由 集合生成的 局部化理想组成的集合，那么所有局部化理想都是由集合生成的。有了这一点，上述论证的一种变体如下：如果存在一个余局部化余理想的集合，那么就存在一个严格余局部化余理想的集合，进而存在一个严格局部化理想的集合，也就存在一个由集合生成的局部化理想的集合（通过调用 定理 2.13），因此所有局部化理想都是由集合生成的（且严格局部化）。总之：如果存在一个余局部化余理想的集合，那么就存在一个局部化理想的集合，并且它们与 $\mathcal{T}$ 的严格余局部化余理想相对应。

3. Cosupport theories

我们的目标是利用适用于 $\mathcal{T}$ 中对象的某种“余支撑”概念，对余局部化余理想进行分类。首先，我们公理化这种余支撑理论应满足的性质。

3.1. 定义。 设 X 是一个拓扑空间，且 $\mathfrak{C}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}(X)$是一个函数，其中 $\mathcal{P}(X)$表示 X（的底层集合）的幂集。将此函数扩展到 $\mathcal{T}$ 中的对象族 $\mathcal{E}$，令 $\mathfrak{C}(\mathcal{E}) = \bigcup_{t\in\mathcal{E}} \mathfrak{C}(t)$。若有序对$(X,\ \mathfrak{C})$满足以下条件，则称其为一个余支撑理论：

(a) $\mathfrak{C}(0) = \varnothing$ 且 $\mathfrak{C}(\mathcal{T}) = X$；(b) 对每个 $t \in \mathcal{T}$，$\mathfrak{C}(\Sigma t) = \mathfrak{C}(t)$；
(c) 对 $\mathcal{T}$中的任意正合三角 $a \to b \to c \to \Sigma a$，$\mathfrak{C}(c) \subseteq \mathfrak{C}(a) \cup \mathfrak{C}(b)$；
(d) 对 $\mathcal{T}$中的任意对象集合 t_i，$\mathfrak{C}(\coprod_{i\in I} t_i) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{C}(t_i)$；(e) 对所有 $s,\ t \in \mathcal{T}$，$\mathfrak{C}(\hom(s,\ t)) \subseteq \mathfrak{C}(t)$。

我们也将 $\mathfrak{C}$ 称为余支撑函数。

3.2. 注记。 这些公理（不包括 $\mathfrak{C}(\mathcal{T}) = X$）等价于如下陈述：对于任意子集 $Y \subseteq X$，子范畴 $\{\, t \in \mathcal{T} \mid \mathfrak{C}(t) \subseteq Y \,\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的余局部化余理想。特别地，对于任意对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$，$\mathfrak{C}(\mathrm{Colocid}\langle\mathcal{E}\rangle) = \mathfrak{C}(\mathcal{E})$。例如，若 $\mathrm{Colocid}\langle t_1\rangle = \mathrm{Colocid}\langle t_2\rangle$，则 $\mathfrak{C}(t_1) = \mathfrak{C}(t_2)$。

3.3. 注记。 请注意，我们尚未用到 X 上的拓扑。因此目前可以将其从定义中删去。顺便指出，我们的公理化方式与 [Ver22，定义 32] 中给出的方式相似，但并不完全相同。关于这一点的进一步讨论将在 注记 11.14 中给出。

3.4. 例。 设 $\mathrm{D}(R)$ 是交换诺特环 R的导出范畴。Neeman [Nee11] 利用如下对应对 $\mathrm{D}(R$ 的余局部化余理想进行了分类

$$\{\text{colocalizing coideals of } \mathrm{D}(R)\} \xrightarrow{B(-)} \{\text{subsets of } \mathrm{Spec}(R)\}$$

其中 $B(\mathcal{C}) := \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{谱}(R) \mid \kappa(\mathfrak{p}) \in \mathcal{C} \,\}$，且 $\kappa(\mathfrak{p})$ 是与素理想 $\mathfrak{p}$关联的 R 的剩余域。我们声称，定义在对象 $t \in \mathrm{D}(R)$ 上的函数 $B(t) := B(\mathrm{Colocid}\langle t\rangle)$ 是定义 3.1 意义下的余支撑理论。事实上，$B(0) = \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{谱}(R) \mid \kappa(\mathfrak{p}) \in (0) \,\} = \varnothing$；而根据定义，$\kappa(\mathfrak{p}) \in B(\kappa(\mathfrak{p}))$，因此 $\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{谱}(R)} B(\kappa(\mathfrak{p})) = \mathrm{谱}(R)$。(b) 条件显然成立，而 (c) 由以下事实得出：若 $a \to b \to c \to \Sigma a$ 是一个正合三角，则 c 属于由 a 和 b生成的余局部化子范畴。最后，(e) 是包含关系 $\mathrm{Colocid}\langle\hom(s,t)\rangle \subseteq \mathrm{Colocid}\langle t\rangle$的推论。注意，这个余支撑理论对任意交换环 R都有定义，尽管 Neeman 的定理要求 R 是诺特的。

3.5.例。 另一种方法见 [SWW17], 其中，$t \in \mathrm{D}(R)$ 的余支撑定义为

$$\text{co-supp}_R(t) = \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \hom(k(\mathfrak{p}), t) \neq 0 \,\}.$$

余支撑的大多数公理都在 [SWW17，命题 4.7–4.9] 中得到了验证。公理 (b) 未经验证，但由定义可知显然成立。公理 $\text{co-supp}_R(\mathrm{D}(R)) = \mathrm{Spec}(R)$ 可由如下观察得到，例如：$\hom(k(\mathfrak{p})\ k(\mathfrak{p})) \neq 0$。唯一尚待验证的公理是 (e)。为此，假设 $\hom(k(\mathfrak{p}),\ \hom(s,t)) \neq 0$。则 $\hom(k(\mathfrak{p}) \otimes s, t) \neq 0$。然而，$k(\mathfrak{p}) \otimes s$ 是由 $k(\mathfrak{p})$ 的悬移构成的余积，因此 $\hom(k(\mathfrak{p})\ t) \neq 0$ 也成立。

3.6. 例。令 $\mathcal{S}_{E(n)}$ 表示以下范畴： $E(n)$-局部谱；参见 [HS99] 和[BHS23，第 10] 节。对于 $t \in \mathcal{S}_{E(n)}$，Hovey 和 Strickland [HS99，第 6] 节讨论了色谱余支撑，其定义如下：

$$\text{co-supp}(t) \coloneqq \left\{ m \in \{0, \dots, n\} \,\middle|\, \mathsf{hom}(K(m), t) \neq 0 \right\},$$

其中 $K(m)$ 是第 m 个 Morava K-理论。类似于例3.5 中所用的论证表明，这定义了 $\mathcal{S}_{E(n)}$ 上的余支撑理论。

3.7. 例。如果刚性紧生成三角张量范畴 $\mathcal{T}$ 配备了分次交换诺特环 R 的中心作用，那么 Benson–Iyengar– Krause [BIK12] 给出了一个余支撑理论（$\mathsf{cosupp}_R(\mathcal{T})$, cosupp_R），其余支撑空间 $\mathsf{cosupp}_R(\mathcal{T}) \subseteq \mathsf{Spec}^h(R)$ 位于作用环的齐次谱中。他们在论文的第4、8和9节中验证了余支撑公理。例如，我们可以取诺特交换环 R 的导出范畴 $\mathsf{D}(R)$，并令 R 本身作用于其上；或者取有限群 G 在域 k 上的稳定模范畴 $\mathsf{StMod}(kG)$，并令群上同调环 $H^*(G;k)$ 作用于其上。在后一例中，余支撑空间为 $\mathsf{Proj}(H^*(G,k)) \subsetneq \mathsf{Spec}^h(H^*(G,k))$。

4. Tensor triangular cosupport

本节介绍我们关注的主要余支撑理论，它与 [BF11] 中引入并在 [BHS23] 中深入研究的 Balmer–Favi 支撑（又称小支撑）有关。全文中，$\mathcal{T}$ 表示一个刚性紧生成张量三角范畴，其谱 $\mathsf{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的。在给出余支撑的定义之前，我们先简要回顾这一拓扑条件的含义。更多讨论见 [BHS23 第 2] 节。首先，我们回顾 smashing 局部化和有限局部化及其幂等三角的一些细节。

4.1. 注记。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴。回顾 [BF11 定理 2.13]： 一个 *smashing* 理想 是一个严格局部化理想 $\mathcal{L}$，并满足以下等价条件：

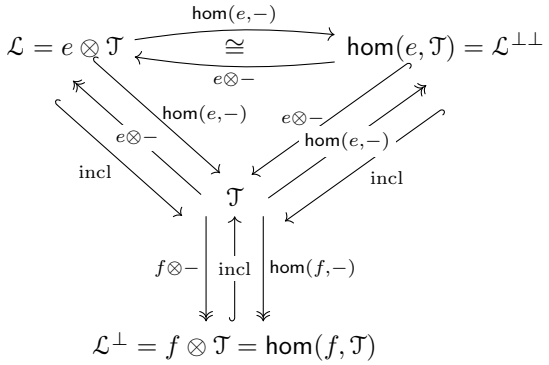
(a) $\mathcal{L}^\perp$ 是 $\mathcal{T}$ 的局部化子范畴；(b) $\mathcal{L}^\perp$ 是 $\mathcal{T}$ 的局部化理想；(c) $\mathcal{L}^\perp$ 是 $\mathcal{T}$ 的理想。

与 smashing 理想相关联的是一个幂等正合三角

$$e \to \mathbb{1} \to f \to \Sigma e$$

并且我们有如下伴随图表

(4.2)



其中六个“竖直”序列 $\bullet \hookrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow \bullet$ 均为 Bousfield 局部化。更多讨论请参见 [BF11, 定理 3。5], [BS17，注记 5。3], [BHV18，第 2]节，以及 [HPS97第 3 节。3] 。

4.3. 例 (有限局部化)。 令 $\mathcal{T}^c_Y := \{ x \in \mathcal{T}^c \mid \operatorname{supp}(x) \subseteq Y \}$ 表示与 Thomason 子集 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 对应的紧对象厚理想。局部化理想 $\mathcal{T}_Y := \operatorname{Locid}\langle \mathcal{T}^c_Y \rangle = \operatorname{Loc}\langle \mathcal{T}^c_Y \rangle$ 是一个 smashing 理想；参见 [BHS23，注记 1。23]。我们记

$$e_Y \to \mathbb{1} \to f_Y \to \Sigma e_Y$$

为相应的幂等三角。

4.4. 例。若 $\mathcal{T} = \mathsf{D}(R)$ 是交换环 R 的导出范畴，且 $I \subseteq R$ 是有限生成理想，则可取 $Y := V(I)$，即 R 中包含 I 的素理想集合。在此情形下，$e_Y \otimes \mathcal{T}$ 是 I-挠复形范畴，而 $\mathsf{hom}(e_Y, \mathcal{T})$ 是 I-阿代尔完备复形范畴；参见 [Gre01，第 5] 节，以及 [Ste18，例 2.24]。等价 $e_Y \otimes \mathcal{T} \cong \mathsf{hom}(e_Y, \mathcal{T})$ 最早出现在 Matlis [Mat78] 和 Greenlees–May [GM92] 的工作中；另见 [PSY14]。函子 $e_Y \otimes -$ 和 $\mathsf{hom}(e_Y, -)$ 分别可用局部上同调和局部同调来解释；例如参见 [ATJLL97, DG02, BHV18]。

4.5. **引理。** 对于每个 *Thomason* 子集 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，

$$\operatorname{Coloc}\langle \mathcal{T}^c_Y \otimes \mathcal{T} \rangle = \mathsf{hom}(e_Y, \mathcal{T}) = (\mathcal{T}_Y)^{\perp\perp}.$$

证明。 此结论已在 [HPS97，定理 3.3.5(e)]中证明。 □

4.6. 定义。 若集合 $W \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 可写成一个 Thomason 子集与另一个 Thomason 子集的补集的交：$W = Y_1 \cap Y_2^c$，则称其为弱可见。于是我们可以定义一个幂等元

$$g_W := e_{Y_1} \otimes f_{Y_2}.$$

这个 $\mathcal{T}$ 对象在同构意义下仅取决于子集 W；参见 [BF11，推论 7。5]。若点 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 的单点子集 $\{\mathcal{P}\}$ 是弱可见的，则称点为弱可见，并定义

$$g_{\mathcal{P}} := g_{\{\mathcal{P}\}}.$$

也就是说，$g_{\mathcal{P}} = e_{Y_1} \otimes f_{Y_2}$ 对于任意选取的 Thomason 子集 Y_1，$Y_2 \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，只要满足 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap Y_2^c$。

4.7. 注记。 对于弱可见点 $\mathcal{P}$，我们总可以取 $Y_2 =$生成$(\mathcal{P})^c$，其中生成$(\mathcal{P})$ $= \{ \mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \}$ 且 $Y_1 =$支撑$(a$，其中 $a \in \mathcal{T}^c$；参见 [BHS23，注 2。8]。

4.8. 注记。 两个弱可见子集的交集 $W_1 \cap W_2$ 仍然是弱可见子集，且 $g_{W_1} \otimes g_{W_2} = g_{W_1 \cap W_2}$。此外，$g_W = 0$ 当且仅当 $W = \varnothing$。这些事实在 [BHS23，引理 1 中得到了证明。27]。

4.9. 例。 若 Y 是 Thomason 子集，则 Y 和 Y^c 都是弱可见子集。我们有 $g_Y = e_Y$ 和 $g_{Y^c} = f_Y$。 注 4.8 因而可特化为$e_{Y_1} \otimes e_{Y_2} = e_{Y_1 \cap Y_2}$ 和 $f_{Y_1} \otimes f_{Y_2} = f_{Y_1 \cup Y_2}$，对于 Thomason 子集 Y_1 和 Y_2；另见 [BF11，定理 5。18] 以及 [BHS23，引理 1。27]。

4.10. 定义。 若每个点都弱可见，则谱空间 X 称为弱诺特。这是我们为构造余支撑理论而要求 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 满足的拓扑条件。

4.11. 注记。 谱空间 X 是弱诺特的，当且仅当其 Hochster 对偶 X^* 具有每个点都是局部闭点这一性质。后者是介于 T_0 与 T_1 之间的一种分离公理，称为 T_D，并见于关于 smashing 谱上这些构造类比的研究；参见 [BS21、Ver21] 和 [DST19，第 4 节。5]。

4.12. 注记。 我们将 X 上的特化序定义为： $x \leq y$ 当且仅当 x是 y的特化，也就是说， $x \in \{y\}$。请注意，这与 [DST19]中对特化序的定义相反。按照我们的约定，闭点是特化序的极小元。

4.13.**命题**。 弱诺特谱空间的不可约闭集满足降链条件（*DCC*）。

证明。只需对本质小张量三角范畴 $\mathcal{K}$ 的 Balmer 谱 X =Spc($\mathcal{K}$) 证明该结论，因为每个谱空间都可以如此得到。[1] 我们断言，若 X 弱诺特，则 $\mathcal{K}$ 满足素理想上的降链条件。事实上，若 $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}_2 \supseteq \mathcal{P}_3 \supseteq \cdots$ 是素理想的一个降链，则考虑素理想 $\mathcal{P} \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$。若 $\mathcal{P}$ 弱可见，则对于某个 $a \in \mathcal{K}$，有 $\{\mathcal{P}\} = \operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{gen}(\mathcal{P})$（注 4.7）。于是 $a \notin \mathcal{P}$ 蕴含对于某个 n，有 $a \notin \mathcal{P}_n$，从而 $\mathcal{P}_n \in \operatorname{supp}(a)$。由于 $\mathcal{P}_n \in \operatorname{gen}(\mathcal{P})$，我们得出 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$。□

4.14. 注记。前一个命题也有一个纯粹基于点集拓扑的证明。该结果等价于如下陈述：任意弱诺特谱空间 X 在 X 上的特化序满足降链条件（注4.12）。为此，设 $Y = (y_1 \geq y_2 \geq \cdots)$ 是 X 中一个特化序降链。令 Y^{con} 表示 Y 在可构造拓扑下的闭包。根据 [DST19，定理 4.2.6]，Y 有一个下确界 $y_\infty \in X$，且该下确界包含于 Y^{con}。由于 X 是弱诺特的，故 $\{y_\infty\} = Z \cap \operatorname{gen}(y_\infty)$，其中 $Z \subseteq X$ 是某个 Thomason 闭子集。要证明存在某个 $n \geq 1$ 使得 $y_\infty = y_n$，只需证明 $Y \cap Z \neq \varnothing$，因为 $Y \subseteq \operatorname{gen}(y_\infty)$。若 $Y \cap Z = \varnothing$，则 $Y \subseteq Z^c$，但 Z^c 在可构造拓扑下是闭的。因此可推出 $Y^{\mathrm{con}} \subseteq Z^c$，这与 $y_\infty \in Y^{\mathrm{con}} \cap Z$ 矛盾。

4.15. 例。 令 X 表示 Zariski 谱 Spec($\mathbb{Z}$) 的 Hochster 对偶。在 X 中的特化链长度至多为一，因此 X 满足不可约闭集上的降链条件。然而， X 中对应于 Spec($\mathbb{Z}$) 泛点的点包含于 X的每个 Thomason 子集中。因此，该点不是弱可见的。此例表明，命题 4.13的逆命题不成立。

4.16. 记号。 设 X 是一个谱空间。对于任意子集 $V \subseteq X$，记 $\min V$为 V 中关于特化序极小（$x \leq y$ 当且仅当 $x \in \{y\}$）的点所组成的集合，这些点属于 V：

$$\min V \coloneqq \left\{ x \in V \,\middle|\, \overline{\{x\}} \cap V = \{x\} \right\}.$$

例如，min X是 X的闭点集合，并且 $V \cap \min X \subseteq \min V$。

4.17. 注记。 命题 4.13 证明了，如果 X 是弱诺特的，那么

$$V \neq \varnothing \Longrightarrow \min V \neq \varnothing.$$

[1]根据 Hochster 定理，每个谱空间都可表示为某个交换环的 Zariski 谱 [Hoc69] 而且由 Thomason 定理 [Tho97] 可知，交换环的 Zariski 谱与其完美复形导出范畴的 Balmer 谱一致。

4.18. 定义。 我们称点 $\mathcal{P}$ 是可见的，如果 $\{\mathcal{P}\}$ 是 $\overline{\text{Thomason}}$；换言之，它是一个弱可见点，并且我们可以取 $Y_1 = \{\mathcal{P}\}$。回顾一下，谱空间是诺特的，当且仅当每个点都是可见的；参见 [BF11，推论 7。14]。另请注意，局部范畴的闭点是弱可见的，当且仅当它是可见的；参见 [BHS23，注记 2。9]。

4.19. 记号。 我们用 $\operatorname{vis} X$ 表示 X 中可见点的集合。我们也会稍微滥用记号，例如用 $\operatorname{vis}\mathcal{T}$ 表示 $\operatorname{vis}(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c))$。

4.20. 记号。 对于弱可见点 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，我们有函子

$$\Gamma_{\mathcal{P}} \coloneqq - \otimes g_{\mathcal{P}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

及其右伴随

$$\Lambda^{\mathcal{P}} \coloneqq \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, -) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}.$$

更一般地，我们有函子

$$\Gamma_W \coloneqq - \otimes g_W \dashv \mathsf{hom}(g_W, -) =: \Lambda^W$$

对于任意弱可见子集 $W \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。

4.21. 注记。 给定 t_1， $t_2 \in \mathcal{T}$，伴随给出以下有用的公式：

$$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathsf{hom}(t_1, t_2) \simeq \mathsf{hom}(\Gamma_{\mathcal{P}} t_1, t_2) \simeq \mathsf{hom}(t_1, \Lambda^{\mathcal{P}} t_2). \tag{4.22}$$

4.23.定义 （Balmer–Favi 支撑与余支撑）。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，其谱 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 弱诺特。对象 $t \in \mathcal{T}$ 的支撑 定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}(t) &\coloneqq \left\{ \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) \,\middle|\, \Gamma_{\mathcal{P}} t \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) \,\middle|\, g_{\mathcal{P}} \otimes t \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

对象 $t \in \mathcal{T}$ 的余支撑 定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{Cosupp}(t) &\coloneqq \left\{ \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) \,\middle|\, \Lambda^{\mathcal{P}} t \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) \,\middle|\, \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, t) \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

4.24. 注记。 正如 [BHS23，注记 212]，中所讨论的，函数 Supp 在 $\mathcal{T}$ 上定义了一种支撑理论，其含义见 [BHS23，定义 71]。我们当前的目标是研究函数 Cosupp 的性质，以及这两种理论之间的关系。

4.25. **命题**。 有序对 $(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c), \operatorname{Cosupp})$ 定义了一种余支撑理论。

证明。 对于任意子集 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，注意到

$$\left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, \operatorname{Cosupp}(t) \subseteq Y \right\} = \bigcap_{\mathcal{P} \in Y^c} \ker(\Lambda^{\mathcal{P}}(-))$$

是一个余局部化子范畴，因为每个 $\Lambda^{\mathcal{P}} = \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, -)$ 都是保积正合函子。此外，根据公式 (4.22)，它还是一个余理想。由此，根据注 3.2，可知 Cosupp 满足余支撑理论的所有性质，除了 $\operatorname{Cosupp}(\mathcal{T}) = \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。对此，只需注意到，由于对象 $g_{\mathcal{P}}$ 非零（注 4.8），内 Hom $\mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, g_{\mathcal{P}})$ 也非零。因此， $\mathcal{P} \in \operatorname{Cosupp}(g_{\mathcal{P}})$，从而 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)} \operatorname{Cosupp}(g_{\mathcal{P}})$。□

4.26. **引理**。 设 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。那么

$$\{\mathcal{P}\} \subseteq \operatorname{Cosupp}(g_{\mathcal{P}}) \subseteq \operatorname{gen}(\mathcal{P}).$$

证明。第一个包含关系 $\{\mathcal{P}\} \subseteq$ 余支撑$(g_{\mathcal{P}})$ 已在 命题 4.25 的证明中确立。对于第二个包含关系，我们需要证明，若 $\mathcal{P} \notin \{\mathcal{Q}\}$ 则同态$(g_{\mathcal{Q}}, g_{\mathcal{P}}) = 0$。记 $\{\mathcal{Q}\} = U_1 \cap \overline{U_2^c}$和 $\{\mathcal{P}\} = V_1 \cap V_2^c$为 Thomason 子集$U_1$，$U_2$，$V_1$，$V_2$。那么我们有等式

$$\begin{aligned}\mathsf{hom}(g_{\mathcal{Q}}, g_{\mathcal{P}}) &= \mathsf{hom}(e_{U_1} \otimes f_{U_2}, e_{V_1} \otimes f_{V_2}) \\ &= \mathsf{hom}(e_{U_1} \otimes f_{U_2} \otimes f_{V_2}, e_{V_1} \otimes f_{V_2}) \\ &= \mathsf{hom}(e_{U_1} \otimes f_{U_2} \otimes f_{V_2}, e_{U_1} \otimes e_{V_1} \otimes f_{V_2}) \\ &= \mathsf{hom}(e_{U_1} \otimes f_{U_2 \cup V_2}, e_{U_1 \cap V_1} \otimes f_{V_2}),\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 例 4.9。因此，同态$(g_{\mathcal{Q}}, g_{\mathcal{P}})$ 在以下两个条件中的任意一个成立时都为零：

$$U_1 \subseteq U_2 \cup V_2 \quad \text{or} \quad U_1 \cap V_1 \subseteq V_2.$$

根据 注 4.7 我们总可以取 $U_2 \coloneqq$ 生成$(\mathcal{Q})^c$ 以及 $V_2 \coloneqq$ 生成$(\mathcal{P})^c$。若 $\mathcal{P} \notin \{\mathcal{Q}\}$那么 $\mathcal{Q} \in V_2$ 因此 $U_1 \cap U_2^c \subseteq V_2$ 这意味着 $U_1 \subseteq U_2 \cup V_2$ 证明完毕。□

4.27. 注记。一般而言，余支撑$(g_{\mathcal{P}}) \neq \{\mathcal{P}\}$；见 例 8.16。

4.28. 注记。余支撑的几何行为有些违反直觉。例如，Cosupp$(\mathbb{1}) \subsetneq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 通常是一个真子集；参见例 8.7。我们将在第 8 节研究余支撑的几何及其与支撑之间微妙的几何关系。目前我们关注一般性质。

4.29. **引理。** 对于 t_1、$t_2 \in \mathcal{T}$，存在包含关系

$$\operatorname{Cosupp}(\mathsf{hom}(t_1, t_2)) \subseteq \operatorname{Supp}(t_1) \cap \operatorname{Cosupp}(t_2). \tag{4.30}$$

证明。如果 $\mathcal{P} \in$ Cosupp$(\mathsf{hom}(t_1, t_2))$，那么根据 $\Lambda^{\mathcal{P}}$定义，有 $\neq 0\,\mathsf{hom}(t_1, t_2)$，因此根据注 4.21，有 $\mathsf{hom}(\Gamma_{\mathcal{P}} t_1, t_2) \neq 0$和 $\mathsf{hom}(t_1, \Lambda^{\mathcal{P}} t_2) \neq 0$。这意味着 $\Gamma_{\mathcal{P}} t_1 \neq 0$和 $\Lambda^{\mathcal{P}} t_2 \neq 0$，结论得证。□

4.31. 注记。包含关系（4.30）是支撑与余支撑之间最根本的关系。对于所有对象 t_1 和 t_2，当且仅当 $\mathcal{T}$ 是分层的时，这个关系才是等式；参见 定理 7.15。这说明，即使只关注局部化理想，余支撑也具有重要意义。一般而言，当$t_1 = e_Y$或 $t_1 = f_Y$ 时，对于 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为 Thomason 子集，（4.30）是等式：

4.32. **引理。** 设 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是 *Thomason* 子集，并设 $t \in \mathcal{T}$。则：

(a) 余支撑$(\mathsf{hom}(e_Y, t)) = Y \cap$ 余支撑(t)；***(b)*** 余支撑$(\mathsf{hom}(f_Y, t)) = Y^c \cap$ 余支撑 (t)；***(c)*** 余支撑 $(\Lambda^{\mathcal{P}} t) = \{\mathcal{P}\} \cap$ 余支撑 (t) 对于任意 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。

证明。首先注意，对于任意 Thomason 子集 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 和 $\mathcal{P} \in Y$，我们有 $g_{\mathcal{P}} \otimes e_Y = g_{\mathcal{P}}$ 根据 注 4.8。

现在，根据引理 4.29 和 [BHS23，引理 2。13] 我们有

$$\operatorname{Cosupp}(\mathsf{hom}(e_Y, t)) \subseteq Y \cap \operatorname{Cosupp}(t).$$

为证明反向包含关系，设 $\mathcal{P} \in Y \cap$Cosupp(t)。由上一段可知，

$$\mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, \mathsf{hom}(e_Y, t)) \simeq \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, t) \neq 0$$

因此 $\mathcal{P} \in \mathsf{Cosupp}(\mathsf{hom}(e_Y,\ t))$ 也成立。这就证明了第 (a) 部分中的等式。第 (b) 部分中的等式可用类似方法证明。最后一个结论由 (a) 和 (b) 得出，只需将 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap Y_2^c$ 写成：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cosupp}(\Lambda^{\mathcal{P}} t) &= \mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(e_{Y_1} \otimes f_{Y_2}, t)) \\ &= \mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(e_{Y_1}, \mathsf{hom}(f_{Y_2}, t))) \\ &= Y_1 \cap \mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(f_{Y_2}, t)) \\ &= \{\mathcal{P}\} \cap \mathrm{Cosupp}(t).\end{aligned}$$

□

4.33. 注记。 接下来，我们建立余支撑理论中与$\otimes$“半 [BF11，定理 722]中的“半定理”类似的结果；另见 [BHS23，引理 218]。这需要以下引理：

4.34. **引理**。设 $s_1,\ s_2,\ t \in \mathcal{T}$。

（a）若 $s_1 \in \mathsf{Locid}\langle s_2\rangle$，则 $\mathsf{Cosupphom}(s_1,\ t) \subseteq \mathsf{Cosupphom}(s_2,\ t)$。

（b）若 $s_1 \in \mathsf{Colocid}\langle s_2\rangle$，则 $\mathsf{Cosupp\ hom}(t,\ s_1) \subseteq \mathsf{Cosupphom}(t,\ s_2)$。

证明。 注意到注记3.2，第（a）部分由（2.8）推出，而第（b）部分由（2.7）推出。
□

4.35. **命题** （半 Hom 定理）。 若 $t \in \mathcal{T}$ 且 $x \in \mathcal{T}^c$，则

$$\mathrm{Cosupp}\,\mathsf{hom}(x,t) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{Cosupp}(t).$$

证明。 支撑 $\mathsf{supp}(x) \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是紧对象 $x \in \mathcal{T}^c$ 的一个 Thomason 子集，并且我们有紧生成局部化理想之间的等式 $\mathsf{Locid}\langle x\rangle = \mathrm{Locid}\langle e_{\mathrm{supp}(x)}\rangle$。由引理 4.34，可得

$$\mathrm{Cosupp}\,\mathsf{hom}(x,t) = \mathrm{Cosupp}\,\mathsf{hom}(e_{\mathrm{supp}(x)}, t) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{Cosupp}(t),$$

其中最后一个等式用到了 引理 4.32。 □

4.36. 例。 对于任意紧 $x \in \mathcal{T}^c$，我们有

$$\mathrm{Cosupp}(x) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{Cosupp}(\mathbb{1}).$$

事实上，由于 x 及其对偶 $x^\vee =$ 同态$(x,\ \mathbb{1})$ 生成相同的紧对象厚理想，因此它们具有相同的余支撑。因此 $\mathsf{Cosupp}(x) = \mathrm{Cosupp}(\text{同态}(x,\ \mathbb{1})) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{Cosupp}(\mathbb{1})$ 根据 命题 4.35。由此可知，尽管

$$\mathrm{Cosupp}(\mathcal{T}) = \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$$

（如命题 4.25中所示），我们有

$$\mathrm{Cosupp}(\mathcal{T}^c) = \mathrm{Cosupp}(\mathbb{1}).$$

后者可能是 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 的真子集；见 例 8.7。

5. The stalk and costalk

5.1. 定义。 我们将 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 和 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 分别记为函子$\Gamma_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 和 $\Lambda^{\mathcal{P}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$的本质像（记号 4.20）。我们称 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 为茎，即 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{P}$ 处的茎，并称 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 为余茎，即 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{P}$处的余茎。

5.2. **命题**。设 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$。

(a) 全子范畴 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是一个局部化理想，并且

$$\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T} = \left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, t \simeq \Gamma_{\mathcal{P}} t \right\}.$$

(b) 全子范畴 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是一个余局部化余理想，并且

$$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} = \{\, t \in \mathcal{T} \,|\, t \simeq \Lambda^{\mathcal{P}} t \,\}.$$

证明。 我们证明 (*b*)；(*a*) 的证明类似。由于 $\mathcal{P}$ 是弱可见的，我们可以将 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap Y_2^c$ 写成 Y_1，其中 Y_2 为 Thomason 子集。考虑正合三角

$$e_{Y_1\cap Y_2} \to e_{Y_1} \to g_{\mathcal{P}} \to \Sigma e_{Y_1\cap Y_2}$$

由 $e_{Y_2} \to \mathbb{1} \to f_{Y_2} \to \Sigma e_{Y_2}$ 与 e_{Y_1} 张量得到。我们首先证明，$t \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 当且仅当这些典范映射

$$\hom(g_{\mathcal{P}}, t) \to \hom(e_{Y_1}, t) \leftarrow t \tag{5.3}$$

由 $e_{Y_1} \to g_{\mathcal{P}}$ 和 $e_{Y_1} \to \mathbb{1}$ 诱导的同构。事实上，若 $t \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，则对某个 $t' \in \mathcal{T}$ 有 $t \simeq$同态$(g_{\mathcal{P}}, t')$。由于 $\mathcal{P} \notin Y_1 \cap Y_2$，我们有 $e_{Y_1\cap Y_2} \otimes g_{\mathcal{P}} = 0$，因此同态$(e_{Y_1\cap Y_2}, t)$ =同态$(e_{Y_1\cap Y_2} \otimes g_{\mathcal{P}}, t') = 0$。此外，同态$(f_{Y_1}, t)$ =同态$(f_{Y_1} \otimes g_{\mathcal{P}}, t') = 0$，因为 $\mathcal{P} \in Y_1$ 蕴含 $f_{Y_1} \otimes g_{\mathcal{P}} = 0$。（这里我们反复用到了注 4.8。）

由此我们已经证明，$t \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 当且仅当（5.3）中的典范映射是同构，当且仅当存在一个同构 $t \simeq$ 同态$(g_{\mathcal{P}}, t) = \Lambda^{\mathcal{P}} t$。由后一种刻画可知，$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 在正合三角下封闭，因此是 $\mathcal{T}$的三角子范畴。现在，$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 在积下封闭，因为 $\Lambda^{\mathcal{P}} =$ 同态$(g_{\mathcal{P}}, -)$ 是右伴随。此外，它是一个余理想：若$t_1 \in \mathcal{T}$ 且 $t_2 \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，则

$$\hom(t_1, t_2) \simeq \hom(t_1, \hom(g_{\mathcal{P}}, t_2)) \simeq \hom(g_{\mathcal{P}}, \hom(t_1, t_2)) = \Lambda^{\mathcal{P}}\hom(t_1, t_2)$$

由伴随性可得。 □

5.4. 注记。 由引理 4.32 以及 [BHS23，引理 213] 可知

$$\operatorname{Supp}(\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}) \subseteq \{\mathcal{P}\} \quad \text{and} \quad \operatorname{Cosupp}(\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}) \subseteq \{\mathcal{P}\}.$$

由此得到如下结论：

5.5. 定义。 我们称 $\mathcal{T}$ 满足

(a) 若对所有 $t \in \mathcal{T}$，Supp$(t) = \varnothing$ 蕴含 $t = 0$，则称其满足检测性质；

(b) 若对所有 $t \in \mathcal{T}$，Cosupp$(t) = \varnothing$ 蕴含 $t = 0$，则称其满足余检测性质。

5.6. **引理**。 设 $\mathcal{P} \in$Spc$(\mathcal{T}^c)$。

(a) 若 $\mathcal{T}$ 具有检测性质，则

$$\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T} = \{\, t \in \mathcal{T} \,|\, \operatorname{Supp}(t) \subseteq \{\mathcal{P}\} \,\}.$$

(b) 若 $\mathcal{T}$ 具有余检测性质，则

$$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} = \{\, t \in \mathcal{T} \,|\, \operatorname{Cosupp}(t) \subseteq \{\mathcal{P}\} \,\}.$$

证明。由注 5.4 可知，$\subseteq$ 包含于 (*a*) 和 (*b*)。现在我们证明第 (*b*) 部分的反向包含；第 (*a*) 部分的反向包含的证明类似。我们可以将 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap$写为生成$(\mathcal{P})$，其中 $Y_1 \subseteq$ Spc$(\mathcal{T}^c)$ 是 Thomason 集，因此 $g_{\mathcal{P}} = e_{Y_1} \otimes f_{\operatorname{gen}(\mathcal{P})^{c}}$。若 Cosupp$(t) \subseteq \{\mathcal{P}\}$，则由引理 4.32 可知，$\hom(e_{\operatorname{gen}(\mathcal{P})^c}, t)$ 和 $\hom(f_{Y_1}, t)$ 的余支撑为空。由于 $\mathcal{T}$ 具有余检测性质，因此可得 $\hom(e_{\operatorname{gen}(\mathcal{P})^c}, t) = 0$ 且 $\hom(f_{Y_1}, t) = 0$。于是 $t \simeq \hom(f_{\operatorname{gen}(\mathcal{P})^c}, t)$ 且 $t \simeq \hom(e_{\operatorname{gen}(\mathcal{P})^c}, t)$。综上，这意味着 $t \simeq \hom(g_{\mathcal{P}}, t) \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，证毕。□

5.7.**命题**。若 $\mathcal{T}$ 满足余检测性质，则也满足检测性质。

证明。令 $t \in \mathcal{T}$，并假设 Supp$(t) = \varnothing$。于是

$$\mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(t,t)) \subseteq \mathrm{Supp}(t) \cap \mathrm{Cosupp}(t)$$

由 引理 4.29 可知 Cosupp(同态$(t,\ t)) = \varnothing$。余检测性质进而推出 同态$(t,\ t) = 0$。因此 $\mathcal{T}(t,\ t) = \mathcal{T}(\mathbb{1},$ 同态$(t,\ t)) = 0$，从而 $t = 0$。□

5.8. 例。相比之下，下面的例子表明，检测性质并不蕴含余检测性质。令 R 为一个绝对平坦环，并令$\mathcal{T} = \mathrm{D}(R)$。由于 Spc$(\mathcal{T}^c) \cong \mathrm{Spec}(R)$ 的维数为零，$\{\mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}(R) \cap$ 生成$(\mathfrak{p})$。因此 $g_{\mathfrak{p}} \cong f_{\mathrm{gen}(\mathfrak{p})^c} \cong R_{\mathfrak{p}} \cong k(\mathfrak{p})$ 是素理想 $\mathfrak{p}$的剩余域；参见 [Ste14a，引理 4.2 和公式 (4.1)] 以及 [BHS23，例 1。36]。因此，我们有

$$\mathrm{Cosupp}(t) = \left\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \,\middle|\, \mathsf{hom}(k(\mathfrak{p}), t) \neq 0 \right\}$$

对任意 $t \in$D(R)。根据 R 的 [Ste14a, 引理 4.1]，检测性质对任意绝对平坦环都成立。另一方面，如果 R 不是半阿廷的，则余检测性质不成立。这可由 [Ste14a, 定理 4.8] 的证明中的论证得出：如果 R 不是半阿廷的，那么根据 [Trl96, 引理 1.2]，存在一个超分解的（纯）单射 R-模 $E \neq 0$。对于每个 $\mathfrak{p} \in$ Spec(R)，必有 Hom$_R(k(\mathfrak{p})\ E) = 0$；否则 E 将包含单射简单模 $k(\mathfrak{p})$ 作为直和项，这与 E 的超分解性矛盾。因此，Cosupp$(E) = \varnothing$，尽管 $E \neq 0$。绝对平坦但非半阿廷环的一个具体例子是域的无限直积，例如 $R = \prod_{\mathbb{N}} \mathsf{F}_p$。下文的定理 6.4 将进一步阐明这一例子以及检测性质与余检测性质之间的关系。

5.9. **引理**。设 $\mathcal{P} \in$Spc$(\mathcal{T}^c)$。

(a) 若 $t \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，则 支撑$(t) \subseteq$ 余支撑(t)。

(b) 若 $t \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，则 余支撑$(t) \subseteq$ 支撑(t)。

证明。若 $t \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 则 $t \simeq \Gamma_{\mathcal{P}}t$ 由 命题 5.2 可得，因此支撑$(\Gamma_{\mathcal{P}}t) \subseteq \{\mathcal{P}\}$ 由注 5.4可得。若 $t = 0$，则该结论显然成立；否则

$$0 \neq \mathcal{T}(t,t) \simeq \mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{P}}t, t) \simeq \mathcal{T}(t, \Lambda^{\mathcal{P}}t)$$

表明 $\Lambda^{\mathcal{P}}t \neq 0$，即 $\mathcal{P} \in$ 余支撑(t)。这就证明了 (a)。(b) 的证明使用类似的论证。若 $t \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 则 $t \simeq \Lambda^{\mathcal{P}}t$ 由 命题 5.2 可得，因此余支撑$(\Lambda^{\mathcal{P}}t) \subseteq \{\mathcal{P}\}$ 由 注 5.4可得。若 $t = 0$，则包含关系成立。否则，同一个显示方程表明 $\Gamma_{\mathcal{P}}t \neq 0$。□

5.10. **推论**。对于任意 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$，我们有 余支撑$(\Lambda^{\mathcal{P}}\Gamma_{\mathcal{P}}\mathbb{1}) = \{\mathcal{P}\}$。此外，对于每个子集 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$，都存在一个对象 $t \in \mathcal{T}$，使得 余支撑$(t) = Y$。

证明。第一个陈述由引理 5.9(a) 和 引理 4.32(c) 推得，此外还需注意到 $\Gamma_p\mathbb{1} = g_{\mathcal{P}} \neq 0$ (注 4.8)。然后，给定 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$，对象 $t := \prod_{\mathcal{P} \in Y} \Lambda^{\mathcal{P}}\Gamma_{\mathcal{P}}\mathbb{1}$ 的余支撑等于 Y。□

5.11. 注记. 设 $Y_1, Y_2 \subseteq$ Spc$(\mathcal{T}^c)$ 为 Thomason 子集。回顾 (4.2)，对于任意 smashing 局部化 $e \to \mathbb{1} \to f \to \Sigma e$，我们有等价 $e \otimes \mathcal{T} \cong$ hom$(e, \mathcal{T})$，以及等式 $f \otimes \mathcal{T} =$hom$(f, \mathcal{T})$。特别地，对于任意 $t \in \mathcal{T}$，可得 hom$(f, f \otimes t) \simeq f \otimes t$，且 $f \otimes$hom$(f,t) \simeq$hom(f,t)。由此，再结合幂等元

函子在其本质像上是全忠实的这一事实，我们推得有一个伴随图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{hom}(e_{Y_1}, \mathcal{T}) & \xrightarrow[\cong]{} & e_{Y_1} \otimes \mathcal{T} \\ {\scriptstyle -\otimes f_{Y_2}}\uparrow \dashv \downarrow{\scriptstyle \mathsf{hom}(f_{Y_2},-)} & & {\scriptstyle -\otimes f_{Y_2}}\downarrow \dashv \uparrow{\scriptstyle \mathsf{hom}(f_{Y_2},-)} \\ \mathsf{hom}(f_{Y_2}, \mathsf{hom}(e_{Y_1}, \mathcal{T}),) & & f_{Y_2} \otimes e_{Y_1} \otimes \mathcal{T} \end{array}$$

其中钩箭头均为全忠实。特别地，记 $W \coloneqq Y_1 \cap Y_2^c$，则$\Gamma_W : \mathcal{T} \rightleftarrows \mathcal{T} : \Lambda^W$ 伴随限制为一个伴随等价

$$\Lambda^W \mathcal{T} \xrightarrow[\cong]{} \Gamma_W \mathcal{T}.$$

这种等价此前已在 [BIK12，命题 5 中得到。1]对于$Y_2 = \varnothing$ 它具体化为例4.4中提到的 Matlis–Greenlees–May 式等价；参见 [DG02，定理 2。1]特别地，我们得到一个等价

$$\Lambda^{\mathcal{P}} \mathcal{T} \cong \Gamma_{\mathcal{P}} \mathcal{T}$$

任意弱可见点 $\mathcal{P}$对应的余茎与茎之间。这一等价为引理 5.9提供了另一种视角。

5.12. 例。 考虑一个 smashing 理想 $\mathcal{L}$，其具有幂等三角

$$e \to \mathbb{1} \to f \to \Sigma e.$$

那么 $\mathcal{L} = e\otimes\mathcal{T}$，由 注4.1 可知，其右正交 $\mathcal{L}^\perp = f\otimes\mathcal{T}$ =同态$(f,\ \mathcal{T})$ 同时是一个局部化理想和余局部化余理想，而 $\mathcal{L}^{\perp\perp}$ =同态$(e,\ \mathcal{T})$ 是一个余局部化余理想。利用这些描述，我们可以直接验证

$$\operatorname{Supp}(e) = \operatorname{Supp}(\mathcal{L}) = \operatorname{Cosupp}(\mathcal{L}^{\perp\perp})$$

and

$$\operatorname{Supp}(f) = \operatorname{Supp}(\mathcal{L}^\perp) = \operatorname{Cosupp}(\mathcal{L}^\perp).$$

例如，余支撑$(\mathcal{L}^\perp)$ =余支撑(同态$(f,\ \mathcal{T})) \subseteq$支撑$(f)$，根据 引理 4.29。反之，若 $\mathcal{P} \in$支撑(f)，则 $\mathcal{P} \in$余支撑$(\mathcal{L}^\perp)$，因为 $g_{\mathcal{P}} \otimes f \neq 0$ 蕴含

$$\mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, \mathsf{hom}(f, g_{\mathcal{P}} \otimes f)) = \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}} \otimes f, g_{\mathcal{P}} \otimes f) \neq 0.$$

类似的论证给出余支撑$(\mathcal{L}^{\perp\perp})$ = 支撑(e)。

6. The local-to-global principle

6.1. 定义 (局部到整体原理)。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，且 Spc$(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的。根据 [BHS23，定义 3.8]，回顾可知， $\mathcal{T}$ 满足 局部化理想的局部到整体原理 (或简称为局部到整体原理)，如果对于每个对象 $t \in \mathcal{T}$，都有

$$\operatorname{Locid}\langle t\rangle = \operatorname{Locid}\langle \Gamma_{\mathcal{P}} t \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\rangle. \tag{6.2}$$

注意，这意味着检测性质（定义 5.5），因为（6.2）右侧与 Locid$\langle\Gamma_{\mathcal{P}}t \mid \mathcal{P} \in$支撑$(t)\rangle$相同。类似地，我们称 $\mathcal{T}$ 满足余局部化余理想的局部到整体原理（或简称余局部到整体原理），如果对于每个对象 $t \in \mathcal{T}$，都有

$$\operatorname{Colocid}\langle t\rangle = \operatorname{Colocid}\langle \Lambda^{\mathcal{P}} t \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\rangle. \tag{6.3}$$

注意，这意味着余检测性质，因为（6.3）右侧与 $\mathsf{Colocid}\langle \Lambda^{\mathcal{P}} t \mid \mathcal{P} \in \text{余支撑（}t\text{）}\rangle$相同。

6.4.**定理**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有弱诺特谱的刚性紧生成三角张量范畴。以下条件等价：

(a) $\mathcal{T}$ 满足余检测性质；*(b)* $\mathcal{T}$ 满足关于局部化理想的局部到整体原理；*(c)* $\mathcal{T}$ 满足关于余局部化余理想的局部到整体原理。

证明。 设 $\mathcal{L} \coloneqq \mathsf{Locid}\langle g_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{T}^c)\rangle$。对象 $t \in \mathcal{T}$ 满足 $\mathsf{Cosupp}(t) = \varnothing$ 当且仅当 $t \in \mathcal{L}^{\perp}$。因此，余检测性质等价于 $\mathcal{L}^{\perp} = 0$。另一方面，关于局部化理想的局部到整体原理等价于 $\mathcal{L} = \mathcal{T}$，因为若 $\mathbb{1} \in \mathcal{L}$，则对任意 $t \in \mathcal{T}$，有

$$t = t \otimes \mathbb{1} \in t \otimes \mathcal{L} \subseteq \mathrm{Locid}\langle t \otimes g_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)\rangle$$

根据（2.6）。显然 $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ 蕴含 $\mathcal{L}^{\perp} = 0$。另一方面， $\mathcal{L}$ 由 定理 2.13可知是严格局部化的，因此有 $\mathcal{L} = {}^{\perp}(\mathcal{L}^{\perp})$ （注 2.11），从而 $\mathcal{L}^{\perp} = 0$ 蕴含$\mathcal{L} = \mathcal{T}$。因此，（$a$）与（$b$）等价。条件（$c$）显然蕴含（$a$），故只需证明（$b$）蕴含（$c$）。这也显而易见，因为若 $\mathbb{1} \in \mathcal{L}$，则对任意 $t \in \mathcal{T}$，有

$$t = \mathsf{hom}(\mathbb{1}, t) \in \mathsf{hom}(\mathcal{L}, t) \subseteq \mathrm{Colocid}\langle \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, t) \mid \mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)\rangle$$

由（2.8）。 □

6.5.**推论**。 若$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是诺特的，则 $\mathcal{T}$ 满足余局部化余理想的局部到整体原理。

证明。 局部化理想的局部到整体原理由 [BHS23，定理 3。21] 成立，因此结论可由 定理6.4 得出。 □

6.6. 注记。 尽管回顾起来，定理 6.4 的证明并不困难，但我们仍认为该定理的结论相当令人意外。局部到整体原理与余局部到整体原理等价，事实上，它们也都等价于余检测性质。特别是，这表明即使是借助支撑理论对局部化理想进行分类，余支撑理论也具有很高的相关性。该定理还提供了另一种方式，说明余检测性质并非总是成立。事实上， [Ste14a，定理 4。8] 证明，若 R 是一个非半阿廷的绝对平坦环，则 $\mathsf{D}(R)$ 不满足局部到整体原理；参见 例 5.8。这个例子还表明，检测性质并不蕴含余检测性质。检测性质是否总是[2] 成立，仍是一个引人遐想的可能性。我们尚未发现任何反例。

[2]当谱不是弱诺特时，支撑的定义需要作出修改， p-局部谱就是一个例子。关于这一方向的一些注记，见 [BHS21，注记 5。14]。William Sanders [San17] 探讨了将 Balmer–Favi 支撑推广到非弱可见点的一般方法，Changhan Zou 最近的工作 [Zou23]对此作了进一步发展。

7. Costratification

7.1. 定义 (余分层)。 令 $\mathcal{T}$ 为刚性紧生成张量三角范畴，且 Spc($\mathcal{T}^c$) 弱诺特。我们称 $\mathcal{T}$ 是余分层的若余支撑理论 (Spc($\mathcal{T}^c$),余支撑) (定义 4.23) 诱导出一个双射

$$\{\text{colocalizing coideals of } \mathcal{T}\} \xrightarrow{\text{Cosupp}} \{\text{subsets of } \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\}. \tag{7.2}$$

保包含关系的函数（7.2）根据推论 5.10总是满射，因此余分层归结为其单射性。

7.3. 注记。 对于子集 $Y \subseteq$Spc($\mathcal{T}$)，我们采用以下记号

$$\operatorname{Supp}^{-1}(Y) \coloneqq \{\, t \in \mathcal{T} \mid \operatorname{Supp}(t) \subseteq Y \,\}$$

表示支撑在 Y 上的对象所构成的局部化理想，以及

$$\operatorname{Cosupp}^{-1}(Y) \coloneqq \{\, t \in \mathcal{T} \mid \operatorname{Cosupp}(t) \subseteq Y \,\}$$

表示余支撑在 Y 上的对象所构成的余局部化余理想。若 $\mathcal{T}$ 是余分层的，则 (7.2) 的逆映射必然由 $Y \mapsto$ 余支撑$^{-1}(Y)$ 给出。事实上，我们总有包含关系 $\mathcal{C} \subseteq$ 余支撑$^{-1}$(余支撑($\mathcal{C}$))，而余分层等价于这些包含关系都是等式。

7.4. 注记。 若一个余局部化余理想由一组对象 $\mathcal{E}$ 生成，则它也可由单个对象生成：Colocid$\langle\mathcal{E}\rangle$ = Colocid$\langle\prod_{t\in\mathcal{E}} t\rangle$。我们将这类余局部化余理想称为由集合生成的 余局部化余理想。

7.5.**命题**。若 $\mathcal{T}$ 的集合生成的余局部化余理想类构成一个集合，则 $\mathcal{T}$ 的每个余局部化余理想都由一个集合生成。

证明。 [KS19，引理 3.3。1] 中的论证可原样照搬，只需将“局部化子范畴”和“Loc”分别替换为“余局部化余理想”和“Colocid”；另见 [BHS23，命题 3。5]。□

7.6. 注记。由 推论 5.10 和 引理4.32可知，余局部化余理想 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 非零，且其余支撑恰为单个点 $\{\mathcal{P}\}$。因此，余分层的一个必要条件是 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 不包含非平凡的真余局部化余理想，即它是一个 极小余局部化余理想。

7.7.**定理**。设 $\mathcal{T}$ 是一个具有弱诺特谱的刚性紧生成张量三角范畴。以下条件等价：

> ***(a)*** 对于 $\mathcal{T}$，余局部化余理想的局部到整体原理成立；对于所有$\mathcal{P} \in$Spc($\mathcal{T}^c$)，$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的极小余局部化余理想。***(b)*** 对于所有 $t \in \mathcal{T}$，Colocid$\langle t\rangle$ = Colocid$\langle\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} \mid \mathcal{P} \in$ 余支撑(t)$\rangle$。***(c)*** 函数
>
> $$\{\textit{colocalizing coideals of } \mathcal{T}\} \xrightarrow{\text{Cosupp}} \{\textit{subsets of } \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\}$$
>
> 是单射（因而根据 推论 *5.10*是双射）；也就是说，$\mathcal{T}$ 是余分层的。

证明。 (a) $\Rightarrow$(b)：根据余局部化余理想的局部到整体原理，我们有

$$\operatorname{Colocid}\langle t\rangle = \operatorname{Colocid}\langle\Lambda^{\mathcal{P}} t \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Cosupp}(t)\rangle.$$

由于 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是极小余局部化余理想，对于任意 $t \in \mathcal{T}$，我们有等式 Colocid$\langle\Lambda^{\mathcal{P}} t\rangle = \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，对任意 $\mathcal{P} \in$ Cosupp(t)。因此，

$$\operatorname{Colocid}\langle t\rangle = \operatorname{Colocid}\langle\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Cosupp}(t)\rangle.$$

$(b) \Rightarrow (c)$：我们实际上将证明映射

(7.8) $\{\text{set-generated colocalizing coideals of } \mathcal{T}\} \xrightarrow{\text{Cosupp}} \{\text{subsets of } \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\}$ 是单射的。因此，集合生成的余局部化余理想只有一个集合。于是根据命题 7.5，每个余局部化余理想都是集合生成的，因此我们就证明了（c）。注意，根据推论 5.10，该映射总是满射。回顾一下，$\mathcal{T}$ 中的每个集合生成的余局部化余理想都由单个对象生成（注 7.4），并且 $\mathsf{Cosupp}(\mathsf{Colocid}\langle t\rangle) = \operatorname{Cosupp}(t)$（注 3.2）。因此，（7.8）的单射性等价于

$$\forall t_1, t_2 \in \mathcal{T}, \operatorname{Cosupp}(t_1) = \operatorname{Cosupp}(t_2) \Longrightarrow \operatorname{Colocid}\langle t_1\rangle = \operatorname{Colocid}\langle t_2\rangle.$$

若 $\mathsf{Cosupp}(t_1) = \mathsf{Cosupp}(t_2)$，则（$b$）推出 $\mathsf{Colocid}\langle t_1\rangle = \mathsf{Colocid}\langle t_2\rangle$，因此结论成立。

（c）$\Rightarrow$（a）：假设函数 Cosupp 是单射的。将其应用于零余理想，得到余检测性质，因此由定理 6.4可得局部到整体原理。接下来假设 $0 \neq \mathcal{C} \subseteq \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是一个余局部化余理想。那么

$$\varnothing \neq \operatorname{Cosupp}(\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{Cosupp}(\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}) = \{\mathcal{P}\}$$

由引理 4.32可知。因此，$\mathsf{Cosupp}(\mathcal{C}) = \operatorname{Cosupp}(\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T})$，故 $\mathcal{C} = \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$。这证明了 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的极小性。□

7.9. 术语。我们称 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{P}$处满足（或具有）“ $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 余极小性”，若 $\mathcal{T}$ 如注记 7.6 和a部分所述，是定理 7.7中的一个极小余局部化余理想。

7.10. 注记。回顾 [BHS23]，若 $\mathcal{T}$ 则称其为分层的，如果 Balmer–Favi 支撑理论 $(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c), \mathsf{Supp})$ 给出一个双射

$$\{\text{localizing ideals of } \mathcal{T}\} \xrightarrow{\text{Supp}} \{\text{subsets of } \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)\}.$$

定理 7.7应与 [BHS23，定理 4.1] 相比较，后者给出了一个与分层直接类似的刻画。注意，b中的定理 7.7 第b部分的表述与[BHS23，定理 4.1]中第$\mathbb{1}$ 部分的表述略有不同。从本质上说，这是因为余支撑不像支撑那样受单位元控制。

7.11. 注记。 我们的下一个目标是证明余分层蕴含分层。为此，我们将使用以下关键结果，它是 [BIK11a，引理 39]的一个小幅修改版本。

7.12.**引理** (Benson–Iyengar–Krause)。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，且 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个非零局部化理想。以下陈述等价：

(a) 局部化理想 $\mathcal{L}$ 是极小的。*(b)* 同态 $(t_1, t_2) \neq 0$，对任意两个非零对象 $t_1, t_2 \in \mathcal{L}$ 均成立。

证明。$(a) \Rightarrow (b)$：若 $t_1 \neq 0$，则由极小性可知 $\mathcal{L} = \mathsf{Locid}\langle t_1\rangle$。因此，若 $\mathsf{hom}(t_1, t_2) = 0$，则 $\mathsf{hom}(\mathcal{L}, t_2) = 0$。特别地，$\mathsf{hom}(t_2, t_2) = 0$，从而 $t_2 = 0$。

$(b) \Rightarrow (a)$：令 $0 \neq t_1 \in \mathcal{L}$。那么 $\mathcal{L}_1 := \operatorname{Locid}\langle t_1\rangle = \operatorname{Loc}\langle t_1 \otimes \mathcal{T}^c\rangle$ 是一个由集合生成的局部化子范畴，因此根据 定理 2.13，它是严格局部化的。由 注 2.11，$\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ 是 $\mathcal{T}$上的一个 Bousfield 局部化的核。对于任意 $t_2 \in \mathcal{L}$，考虑相应的 Bousfield 局部化三角 $\Gamma t_2 \to t_2 \to \mathrm{L}$ $t_2 \to \Sigma\Gamma t_2$。前两个对象属于 $\mathcal{L}$，因此 L 也属于 t_2。然而，(b) 意味着没有非零

对象能够包含在 $\mathcal{L}$ $(\mathcal{L}_1)^\perp$ 中；也就是说，$(\mathcal{L}_1)^\perp \cap \mathcal{L} = \{0\}$。因此 $\mathrm{L}t_2 = 0$，因为 $\Gamma t_2 \in \mathcal{L}_1$，所以 $\Gamma t_2 \simeq t_2$ 包含于 $\mathcal{L}_1$。这就证明了 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$。□

7.13. 注记。 我们特别指出，引理 7.12 的证明关键依赖于任意由集合生成的局部化理想都存在 Bousfield 局部化。鉴于注 2.14，无法用类似论证证明余局部化余理想的极小性。

7.14. 注记。 引理 7.12 有如下相对版本：设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个局部化理想，且 $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{L}$ 是一个集合生成的局部化子范畴。那么，$\mathcal{L}$在那些严格包含 $\mathcal{J}$ 的局部化理想中是极小的，当且仅当同态$(t_1,\ t_2) \neq 0$对任意两个对象 $t_1,\ t_2 \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{J}$均成立。在证明中需要考虑$\mathcal{L}_1 :=\mathrm{Locid}\langle \mathcal{J} \cup \{t_1\}\rangle$。

7.15.**定理**。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，其谱是弱诺特的。假设局部化理想满足局部到整体原理。以下条件等价：

(a) $\mathcal{T}$ 是分层的。*(b)* 对所有 t_1、$t_2 \in \mathcal{T}$，余支撑同态(t_1, t_2) =支撑$(t_1) \cap$余支撑(t_2)。*(c)* 对所有 t_1、$t_2 \in \mathcal{T}$，若 同态$(t_1, t_2) = 0$，则支撑$(t_1) \cap$余支撑$(t_2) = \varnothing$。

证明。利用引理 5.9，我们可以仿照 [BIK12], 中定理 9.5 的证明，现为读者详细写出。

$(a) \Rightarrow (b)$：包含关系之一（$\subseteq$）由引理 4.29给出。对于另一包含关系，设$\mathcal{P} \in$ 支撑$(t_1) \cap$余支撑(t_2)。特别地，$\Gamma_{\mathcal{P}} t_1 \neq 0$。由于 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是一个非平凡的极小局部化理想，$g_{\mathcal{P}} \in \mathrm{Locid}\langle \Gamma_{\mathcal{P}} t_1\rangle$。利用 [BIK12，引理 8.4] 以及假设 $\mathcal{P} \in$余支撑$(t_2$，我们得到

$$0 \neq \Lambda^{\mathcal{P}} t_2 = \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, t_2) \in \mathrm{Colocid}\langle \mathsf{hom}(\Gamma_{\mathcal{P}} t_1, t_2)\rangle.$$

因此 $0 \neq$ 同态$(\Gamma_{\mathcal{P}} t_1,\ t_2) \simeq$同态$(g_{\mathcal{P}},$ 同态$(t_1,\ t_2))$，由此可得 $\mathcal{P} \in$余支撑 同态$(t_1,\ t_2)$。

$(b) \Rightarrow (c)$：这由余支撑$(0) =$得出 $\varnothing$.

$(c) \Rightarrow (a)$：根据假设，局部化理想的局部到整体原理成立。我们证明 引理 7.12 的判据对 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$成立。设 $t_1,\ t_2 \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是非零对象。那么 $\mathcal{P} \in$支撑(t_1) 和 $\mathcal{P} \in$支撑(t_2)。由 引理 5.9，我们还有 $\mathcal{P} \in$ 余支撑(t_2)。因此 (c) 蕴含 同态$(t_1,\ t_2) \neq 0$。□

7.16. 注记。 上述对分层 的刻画中出现余支撑，这一点应被视为意义重大：这是利用余支撑概念对分层作出的基本刻画。这促使我们即使面对纯粹关于局部化理想的问题，也研究余支撑。

7.17. 注记。回顾一下，分层意味着 Balmer–Favi 支撑满足完整的张量积性质：对任意 t_1、$t_2 \in \mathcal{T}$，Supp$(t_1 \otimes t_2)$ = Supp$(t_1) \cap$Supp(t_2)；参见 [BHS23，定理 8.2]。自然会猜想，余分层会将半 Hom 定理（命题 4.35）提升为完整同态定理：Cosupp(hom(t_1, t_2)) = Supp$(t_1) \cap$ Cosupp(t_2)。也许令人惊讶的是，定理 7.15 表明，这个完整同态定理实际上等价于分层。

7.18.**推论**。 若 $\mathcal{T}$ 是分层的，则：

(a) $\mathcal{L}^\perp =$余支撑$^{-1}$(支撑$(\mathcal{L})^c$) 对每个局部化理想 $\mathcal{L}$ 均成立。*(b)* ${}^\perp\mathcal{C} =$ 支撑$^{-1}$(余支撑$(\mathcal{C})^c$) 对每个余局部化余理想 $\mathcal{C}$ 均成立。

证明。 分层蕴含局部到整体原理，见 [BHS23，定理 4。1]因此也蕴含余检测性质，见 定理 6.4。因此我们可以利用定理 7.15 来观察到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\perp} &= \left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, \mathsf{hom}(s,t) = 0 \ \text{ for all } s \in \mathcal{L} \right\} \\ &= \left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, \operatorname{Cosupp} \mathsf{hom}(s,t) = \varnothing \ \text{ for all } s \in \mathcal{L} \right\} \\ &= \left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, \operatorname{Supp}(s) \cap \operatorname{Cosupp}(t) = \varnothing \ \text{ for all } s \in \mathcal{L} \right\} \\ &= \operatorname{Cosupp}^{-1}(\operatorname{Supp}(\mathcal{L})^{c})\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}{}^{\perp}\mathcal{C} &= \left\{ s \in \mathcal{T} \,\middle|\, \mathsf{hom}(s,t) = 0 \ \text{ for all } t \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \left\{ s \in \mathcal{T} \,\middle|\, \operatorname{Cosupp} \mathsf{hom}(s,t) = \varnothing \ \text{ for all } t \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \left\{ s \in \mathcal{T} \,\middle|\, \operatorname{Supp}(s) \cap \operatorname{Cosupp}(t) = \varnothing \ \text{ for all } t \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \operatorname{Supp}^{-1}(\operatorname{Cosupp}(\mathcal{C})^{c}).\end{aligned}$$

□

7.19.**定理**。 若 $\mathcal{T}$ 是余分层的，则它也是分层的。

证明。由于余局部到整体原理与局部到整体原理等价（由定理 6.4），根据 [BHS23, 定理 4.1] 以及定理 7.7，只需证明对所有 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{c})$， $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 都是极小的。为此，我们沿用 [BIK12, 定理 9.7] 的证明，并运用引理 7.12。为此，取两个非零对象t_1、 $t_2 \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，并证明同态$(t_1, t_2)$ $\neq 0$。由于 $t_1 \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，由命题 5.2 可得 $\Gamma_{\mathcal{P}} t_1 \simeq t_1$。接着由注 4.21，$t_1$、 t_2的同态 $\simeq t_1$、 $\Lambda^{\mathcal{P}} t_2$的同态。由于$t_2 \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，由引理 5.9 可知 $\mathcal{P} \in \operatorname{Cosupp}(t_2)$，即 $\Lambda^{\mathcal{P}} t_2 \neq 0$。因为 $\mathcal{T}$是余分层的， $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的余极小性意味着 $\Lambda^{\mathcal{P}} t_1 \in \operatorname{Colocid}\langle \Lambda^{\mathcal{P}} t_2 \rangle$。最后注意到，由于 $t_1 \neq 0$，有 $0 \neq$同态(t_1, t_1) $\simeq$同态$(t_1, \Lambda^{\mathcal{P}} t_1)$；根据 (2.7)，这只有在 $0 \neq$同态$(t_1, \Lambda^{\mathcal{P}} t_2)$ $\simeq$同态(t_1, t_2) 时才可能。□

7.20.**推论**。 若 $\mathcal{T}$ 是余分层的，则将子范畴 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{L}^{\perp}$的映射诱导出一个双射

$$\{\textit{localizing ideals of } \mathcal{T}\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{colocalizing coideals of } \mathcal{T}\}$$

逆映射将 $\mathcal{C}$ 映射到 ${}^{\perp}\mathcal{C}$。

证明。 余分层与分层（定理 7.19）分别给出这两个集合与 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{c})$ 的所有子集所成集合之间的双射。将一个子集映射到其补集的映射，进而诱导出从局部化理想到余局部化理集的双射；根据 推论 7.18，该双射由 $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{\perp}$ 给出，其逆映射为 $\mathcal{C} \mapsto {}^{\perp}\mathcal{C}$。 □

7.21.**命题**。 若 $\mathcal{T}$ 是分层的但不是余分层的，则 $\mathcal{T}$ 存在一个并非严格余局部化的余局部化余理想。

证明。 严格余局部化余理想必定具有以下形式 $\mathcal{L}^{\perp}$，其中局部化理想为 $\mathcal{L}$（参见 注 2.11）。若 $\mathcal{T}$ 是分层的，则对任意 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^{c})$，我们有

$$(\operatorname{Supp}^{-1}(Y))^{\perp} = (\operatorname{Locid}\langle g_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in Y \rangle)^{\perp} = \left\{ g_{\mathcal{P}} \,\middle|\, \mathcal{P} \in Y \right\}^{\perp} = \operatorname{Cosupp}^{-1}(Y^{c}).$$

现在，由于 $\mathcal{T}$ 不是余分层的，因此存在某个余局部化余理想 $\mathcal{C}$，使得$\mathcal{C} \neq$ 余支撑$^{-1}$(余支撑$(\mathcal{C})$)。但如果 $\mathcal{C}$ 是严格余局部化的，那么

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}^{\perp} = (\operatorname{Supp}^{-1}(\operatorname{Supp}(\mathcal{L})))^{\perp} = \operatorname{Cosupp}^{-1}(\operatorname{Supp}(\mathcal{L})^{c})$$

且支撑$(\mathcal{L})^c$ = 支撑$({}^\perp\mathcal{C})^c$ = 余支撑$(\mathcal{C})$，根据推论 7.18(b)，因此 $\mathcal{C}$ =余支撑$^{-1}$(余支撑$(\mathcal{C})$)。□

7.22. 注记。 我们不知道分层是否意味着余分层。这似乎是一个棘手的问题。例如，假设我们能找到一个例子 $\mathcal{T}$，它是分层的，但不是余分层的。根据 命题 7.21，这个范畴将有一个并非严格余局部化的余局部化余理想。假设这个反例源自一个组合模型，那么这将证明（注 2.14）Vop$^{\smile}$enka 原理与 ZFC 不相容。我们并不具备判断这是否可能的专业知识。

7.23. 注记。 另一方面，如果将 Vop$^{\smile}$enka 原理视为一条公理，那么对于任何源自稳定组合模型的例子，分层都意味着余分层。事实上，在这种情况下，每个余局部化余理想 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{T}$ =Ho$(\mathcal{M})$ 都是严格余局部化的（注 2.14）。因此 $\mathcal{C} = ({}^\perp\mathcal{C})^\perp$。如果 $\mathcal{T}$ 是分层的，那么 $({}^\perp\mathcal{C})^\perp$ =余支撑$^{-1}$(余支撑$(\mathcal{C})$)，根据 推论 7.18 即可推出余分层。

7.24. 注记。 我们可以用第 6 页所示的图来概括这一情况。该图汇集了 命题 5.7、定理 6.4、定理 7.19 的推论，以及 例 5.8 和 [BHS23，例 4。6]。

8. The geometry of cosupport

前几节中我们已经看到支撑与余支撑之间的一些关系。现在我们进一步探究给定对象的支撑与余支撑之间那种颇为神秘的关系。本节中，$\mathcal{T}$将表示一个刚性紧生成三角张量范畴，其谱 Spc$(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的。

8.1. **命题**。 假设余检测成立。设 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是一个 *Thomason* 子集。那么对于任意 $t \in \mathcal{T}$，我们有：

$$\mathrm{Supp}(t) \cap Y = \varnothing \text{ if and only if } \mathrm{Cosupp}(t) \cap Y = \varnothing.$$

证明。 由 命题 5.7 可知，余检测性质蕴含检测性质。接着注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cosupp}(t) \cap Y = \varnothing &\iff \mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(e_Y, t)) = \varnothing && \text{(Lemma 4.32)}\\
&\iff \mathsf{hom}(e_Y, t) = 0 && \text{(codetection)}\\
&\iff \mathsf{hom}(x, t) = 0 \text{ for all } x \in \mathcal{T}^c_Y\\
&\iff x \otimes t = 0 \text{ for all } x \in \mathcal{T}^c_Y\\
&\iff e_Y \otimes t = 0\\
&\iff \mathrm{Supp}(e_Y \otimes t) = \varnothing && \text{(detection)}\\
&\iff \mathrm{Supp}(t) \cap Y = \varnothing
\end{aligned}$$

由此得证。 □

8.2. 注记。 下一个定理（及其推论）阐述了支撑与余支撑之间的基本关系，并推广了 [BIK12，定理 4。13]。该陈述使用记号 4.19和记号 4.16。

8.3. **定理**。 假设余检测成立。那么对于任意 $t \in \mathcal{T}$，我们有

$$\mathrm{vis}\,\mathcal{T} \cap \min \mathrm{Supp}(t) = \mathrm{vis}\,\mathcal{T} \cap \min \mathrm{Cosupp}(t).$$

证明。 设 $\mathcal{P}$ 是一个可见点。那么 $\{\mathcal{P}\} = \{\mathcal{P}\} \cap$生成$(\mathcal{P})$，且 $\{\mathcal{P}\} \setminus \{\mathcal{P}\} = \{\mathcal{P}\} \cap$生成$(\mathcal{P})^c$ 是两个 Thomason 子集的交，因此它本身也是 Thomason 子集。将 命题 8.1 应用于 Thomason 子集 $\{\mathcal{P}\} \setminus \{\mathcal{P}\}$ 可得

$$\operatorname{Supp}(t) \cap \overline{\{\mathcal{P}\}} \subseteq \{\mathcal{P}\} \iff \operatorname{Cosupp}(t) \cap \overline{\{\mathcal{P}\}} \subseteq \{\mathcal{P}\}.$$

通过再次应用 命题 8.1 于 Thomason $\{\mathcal{P}\}$，可得

$$\operatorname{Supp}(t) \cap \overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{P}\} \iff \operatorname{Cosupp}(t) \cap \overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{P}\}.$$

回忆一下，按定义， $\mathcal{P} \in \min V$意味着 $V \cap \{\mathcal{P}\} = \overline{\{\mathcal{P}\}}$，因此证明完毕。 □

8.4. **推论**。 若 $\mathcal{T}$ 具有诺特谱且 $t \in \mathcal{T}$，则

$$\min \operatorname{Supp}(t) = \min \operatorname{Cosupp}(t).$$

证明。 由于谱是诺特的，余局部到整体原理成立（由推论 6.5可知），因此余检测性质成立（由 定理 6.4可知）。此外，根据 [BF11，命题 713]，谱空间是诺特的，当且仅当其中每个点都是可见的；另见 [BHS23，注记 2。2]因此，结论由定理 8.3立即得出。□

8.5. 注记。 回忆一下，谱空间的 Krull 维数为零，当且仅当其特化序是平凡的，当且仅当它是 T_1 ，当且仅当它是豪斯多夫的，当且仅当它是原有限的（例如，参见 [BHS23，注记 2。4]）。在这种情况下，我们有：

8.6.**推论**。 若 $\mathcal{T}$ 的谱是零维的，且 $\mathcal{T}$ 满足 *code-tection* 性质，则对于任意 $t \in \mathcal{T}$，我们有

$$\operatorname{vis}\mathcal{T} \cap \operatorname{Supp}(t) = \operatorname{vis}\mathcal{T} \cap \operatorname{Cosupp}(t).$$

证明。 由于特化序是平凡的，对于任意子集$W \subseteq$Spc$(\mathcal{T}^c)$，我们有 $\min W = W$。因此结论由 定理 8.3 得出。□

8.7. 例。 令 $\mathcal{T} = \mathrm{K}(\operatorname{Inj} kG)$ 表示单射 kG-模复形的同伦范畴，其中 G 是一个有限群， k 是一个特征整除 G的阶的域。在 [BIK12，例 11 中，1] 作者证明了 $\operatorname{Cosupp}(\mathbb{1}) = \{\mathfrak{m}\}$是一个单点集，其中 $\mathfrak{m}$ 是 $H^*(G,k)$ 中唯一的极大理想。这表明，在给定的一般性下，推论 8.4 的结论已是最优的。

8.8. 例。 考虑 N^+，即自然数离散集 N 的一点紧化，其中 ∞ 表示聚点；令 $R = C(\mathrm{N}^+, k)$ 为取值于域 k 上的局部常值函数构成的交换环。如果 $\mathrm{D}(R)$ 表示 R-模的导出范畴，则我们有同胚

$$\operatorname{Spc}(\mathrm{D}(R)^c) \cong \operatorname{Spec}(R) \cong \mathbb{N}^+.$$

注意，这个空间是原有限的，因此是弱诺特且泛诺特[3]，但不是诺特的。典范包含 $\mathrm{N} \subset \mathrm{N}^+$ 将 N 表示为一个 Thomason 子集，我们可以考虑 $\Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} =$ 同态$(e_{\mathbb{N}}, \mathbf{1})$。我们断言：

(a) $\infty \in \operatorname{Supp} \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1}$; and
(b) $\operatorname{Cosupp} \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} \subseteq \mathbb{N}$.

[3]回想一下，谱空间 X 称为 *generically noetherian* ，如果对于每个x，gen() 都是诺特的 $x \in X$；参见 [BHS23，定义 9。5]。

由于对任意子集 $W \subseteq \mathsf{N}^+$，$\min W = W$，我们可推出

$$\min \operatorname{Supp} t \neq \min \operatorname{Cosupp} t$$

对于 $t = \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} \in \mathsf{D}(R)$。因此 推论 8.4 在没有诺特假设的情况下并不成立，由此得到更精确的表述 定理 8.3。此外，由于 vis $\mathsf{D}(R)^c = \mathbb{N}$，这个例子还表明，在推论 8.6 中限制为可见点是必要的。

断言（b）由 引理 4.32 得出，因此只需证明断言（a）。为此，注意到由于空间是豪斯多夫的，$\mathsf{gen}(\infty) = \{\infty\}$ 且 $g_\infty = f_{\mathsf{gen}(\infty)^c} = f_{\mathbb{N}}$。因此，$\infty \notin$ 支撑 $\Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1}$ 将意味着 $f_{\mathbb{N}} \otimes \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} = 0$。这将推出同伦拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \longrightarrow & \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_{\mathbb{N}} & \longrightarrow & f_{\mathbb{N}} \otimes \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} \end{array}$$

退化为一个同构 $\mathbb{1} \simeq f_{\mathbb{N}} \oplus \Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1}$。由自然性，这将迫使$\Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} \simeq e_{\mathbb{N}}$，进而得到分解 $\mathsf{N}^+ = \mathsf{N} \sqcup \{\infty\}$。这是矛盾，因此如所述，$\infty \in$ 支撑 $\Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1}$ 。

事实上，余支撑 $\Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} = \mathbb{N}$，因为对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都可以利用狄拉克函数$\delta_n \in C(\mathbb{N}^+, k)$ 构造一个非平凡映射 $g_n \to \mathbb{1}$ 于 $\mathsf{D}(R)$ 中，同时注意例 5.8。由定理 8.3 和 (a) 可得，支撑 $\Lambda^{\mathbb{N}}\mathbb{1} = \mathbb{N}^+$。

8.9. 注记。 上述例子表明，通常 Supp(t) $\neq$ 余支撑(t)。事实上，结果表明，Supp(t) 与余支撑(t) 之间的关系和 Tate 构造有着有趣的联系。

8.10. **命题**。 设 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为一个 *Thomason* 子集，并设

$$e_Y \to \mathbb{1} \to f_Y \xrightarrow{\theta} \Sigma e_Y$$

为相应的有限（余）局部化。以下条件等价：

(a) 内 *Hom* 同态$(f_Y, \Sigma e_Y)$ 消失。*(b)* 映射 $\theta\colon f_Y \to \Sigma e_Y$ 消失。*(c)* *Thomason* Y 既开又闭，且谱可分解为

$$\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) = Y \sqcup Y^c$$

作为闭子集的不交并。

(d) 补集 Y^c 是 *Thomason* 的。

证明。 这由 [PSW22，命题 229]。 □

8.11.**引理**。 设 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是一个 *Thomason* 子集。以下条件等价：

(a) 余支撑(e_Y) $\subseteq Y$。*(b)* 余支撑(同态$(f_Y, \Sigma e_Y)$) $= \varnothing$。

证明。 根据引理 4.32，我们有

$$\operatorname{Cosupp}(\mathsf{hom}(f_Y, \Sigma e_Y)) = Y^c \cap \operatorname{Cosupp}(e_Y)$$

因此，(*a*) 等价于 (*b*)。 □

8.12. **推论**。 假设余检测性质成立，并令 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为一个 *Thomason* 子集。那么余支撑$(e_Y) \subseteq Y$ 当且仅当$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c) = Y \sqcup Y^c$ 可分解为闭子集的不交并。

证明。 由于我们假设余检测性质成立，引理 8.11表明，Cosupp$(e_Y) \subseteq Y$当且仅当 同态$(f_Y, \Sigma e_Y) = 0$。结论由此可由命题 8.10推出。 □

8.13.**命题**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，且 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 弱诺特。以下条件等价：

(a) 余检测性质成立，且对所有 $t \in \mathcal{T}$，$\mathrm{Supp}(t) = \mathrm{Cosupp}(t)$ 。*(b)* $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是一个有限离散空间。

证明。 $(a) \Rightarrow (b)$：回顾一下，对任意 Thomason 子集 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$，均有 Supp$(e_Y) = Y$。因此 推论 8.12 表明 Y 既是开集又是闭集。由于假设 Spc$(\mathcal{T}^c)$ 弱诺特，每个点都是某个 Thomason 子集与另一个 Thomason 子集的补集的交。因此每个点都是开集，故该拓扑是离散的。由于 Spc$(\mathcal{T}^c)$ 拟紧，所以它是有限离散的。$(b) \Rightarrow (a)$：这由 推论 8.4、定理 6.4 和 推论 6.5 得出，因为有限离散空间既是诺特的又是零维的。 □

8.14.**推论**。 若 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是诺特的，则以下条件等价：

(a) 对所有 $t \in \mathcal{T}$，$\mathrm{Supp}(t) =$ 余支撑(t)

。*(b)* $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是有限离散空间。

证明。 这由 命题 8.13 和 推论 6.5得出。 □

8.15. 例。 若 Spc$(\mathcal{T}^c) = *$ 是单点空间，则 Supp $=$ 余支撑。事实上，二者都只检测一个对象是否非零。

8.16.例 （两个连通点）。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，其谱

$$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c) = \begin{array}{c} \bullet \ \mathfrak{m} \\ | \\ \bullet \ \eta \end{array}$$

由两个连通点组成：一个闭点 $\mathfrak{m}$ 和一个泛点 η。只有一个非平凡的 Thomason 子集，即 $\{\mathfrak{m}\}$，因此只有一个非平凡的有限局部化

$$e_{\{\mathfrak{m}\}} \to \mathbb{1} \to f_{\{\mathfrak{m}\}} \to \Sigma e_{\{\mathfrak{m}\}}.$$

此外， $g(\mathfrak{m}) = e_{\{\mathfrak{m}\}}$ 和 $g(\eta) = f_{\{\mathfrak{m}\}}$。我们可以直接观察到，余检测性质成立（即无需调用推论 6.5）。事实上，我们可以直接观察到，在这个例子中，局部到整体原理和余局部到整体原理都成立。由引理 4.26 可知，Cosupp$(g(\eta)) = \{\eta\}$ 是一个点。另一方面，由于这两个点相连，根据推论 8.12，我们知道 Cosupp$(g(\mathfrak{m})) = \{\mathfrak{m}, \eta\}$ 是整个空间。Cosupp(1) 的性质则更为微妙。我们总有 $\mathfrak{m} \in$ Cosupp(1)，这可以通过直接论证或推论 8.4 得出。另一方面， $\eta \in$Cosupp(1) 和 $\eta \notin$Cosupp(1) 都有可能，如下一个子例所示。

8.17. 例。 取 $\mathcal{T}$ =D(R) 为离散赋值环的导出范畴（R， $\mathfrak{m}$， k）。在这个例子中，当且仅当 R 是完备的时，Cosupp(1) $\subseteq \{\mathfrak{m}\}$。这可由如下三角得到

$$\mathsf{hom}(f_{\{\mathfrak{m}\}}, \mathbb{1}) \to \mathbb{1} \to \mathsf{hom}(e_{\{\mathfrak{m}\}}, \mathbb{1})$$

以及 $g(\eta) = f_{\{\mathfrak{m}\}}$，一旦认识到在这种情况下同态$(^{e_{\{\mathfrak{m}\}}}, -)$ 是 $\mathfrak{m}$-进完备化的导出函子；参见例4.4 及其中的参考文献。

8.18. 注记。 若一个范畴是分层的，则其支撑函数决定其余支撑函数，反之亦然。事实上，对于任意 $t \in \mathcal{T}$，我们有 Supp(t) =$\mathrm{Cosupp}(\{t\}^{\perp})^{c}$ 且 Cosupp(t) = $\mathrm{Supp}({}^{\perp}\{t\})^{c}$ ，由推论 7.18可知。然而，问题仍在于：单个对象的支撑 Supp(t) 是否决定其余支撑 Cosupp(t)，反之亦然。接下来的两个例子表明，一般而言这并不成立。

8.19. 例。设 $Y :=$ supp(x)，其中 $x \in \mathcal{T}^{c}$ 是一个紧对象。那么 Supp(x) =Supp(e_Y) = Y。特别地，由例 4.36 可知，Cosupp(x) $\subseteq Y$。另一方面，我们在推论 8.12 中已经看到，若 Cosupp(e_Y) $\subseteq Y$，则谱分裂为 Y 及其补集（前提是余检测性质成立）。因此有许多例子，其中存在两个对象 t_1 和 t_2 ，满足 Supp(t_1) = Supp(t_2)，但 Cosupp(t_1) $\neq$ Cosupp(t_2)。举一个具体例子：对于谱由两个连通点构成的任意范畴 $\mathcal{T}$（例 8.16），以及任意满足 supp(x) = $\{\mathfrak{m}\}$ 的紧对象 $t_1 = e_{\{\mathfrak{m}\}}$ 和 $t_2 = x$ ，情况都是如此。此外，还有一些这样的例子是余分层的；例如，离散赋值环的导出范畴 $\mathcal{T}$ =D(R)（见下文命题 19.1）。由此可知，一般而言，一个对象的支撑并不能决定其余支撑，即使在余分层的例子中也是如此。

8.20. 例。设 $\mathcal{T}$ 是一个局部范畴，其中 Cosupp(1) = $\{\mathfrak{m}\}$ 仅由闭点组成。例如，我们可以取 $\mathcal{T}$ = D(R)，其中 R 是一个完备离散赋值环（例 8.17）；也可以取 $\mathcal{T} = \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\, kG)$（例 8.7）。那么，对于任意非零紧对象 x，我们有 Cosupp(x) = supp(x) $\cap$ Cosupp(1) = $\{\mathfrak{m}\}$（例 4.36）。因此，任意两个非零紧对象都具有相同的余支撑：Cosupp(x) =Cosupp(y)。另一方面，只要谱不是单点，就存在支撑不同的非零紧对象。由此可见，即使在余分层的例子中，对象的余支撑通常也不能确定其支撑。

8.21. 注记。 在第12节中，我们将阐明支撑与余支撑之间另一项重要关系，即一个对象的支撑与其 Brown–Comenetz 对偶的余支撑相同；参见命题 12.9。其中的讨论还将进一步阐述这一关系与完备化之间的联系。

第二部分。 完美性与对偶性

三角范畴 $\mathcal{T}$ 的对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 继承了三角结构（带有 $\Sigma_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}} = \Sigma_{\mathcal{T}}^{-1}$ ），而厚子范畴的概念是自对偶的。事实上，三角范畴 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴与其对偶三角范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 的厚子范畴相同。此外， $\mathcal{T}$ 的局部化子范畴恰好是 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 的余局部化子范畴，反之亦然。然而，局部化理想与余局部化余理想显然并非对偶概念。就目前而言，余局部化余理想这一概念多少有些神秘，除了它出现在局部化理想的右正交子中。同样，文献中对余支撑的定义——包括我们上文研究的概念——在概念层面上都缺乏充分的动机。初次看到余支撑的定义时，人们难免会感到困惑。幸运的是，在本文这一部分中，我们将从概念上阐明这一切，展示局部化理想与余局部化余理想互为对偶、支撑与余支撑互为对偶，以及分层与余分层互为对偶。为此，我们将在一个涵盖 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 的更一般框架中展开讨论。这引出了完美性：

9. Perfect generation

紧生成三角范畴的对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 从来都不是紧生成的。 $\mathcal{T}$[4] 更一般的“完美生成”三角范畴概念在这方面更为灵活，既涵盖紧生成三角范畴，也涵盖它们的对偶范畴。在本书中，这一概念有三重作用。首先，它将提供足够一般的框架，以构建 Balmer–Favi 方法的支撑，从而有助于比较支撑与余支撑。其次，它将提供另一种构造具有指定余支撑对象的方法。第三，它对于控制余分层的下降也很重要。

9.1. 定义 (Krause)。 回顾 [Kra10，第 5]节中的内容：三角范畴 $\mathcal{T}$ 若 完美生成 ，则它具有余积，且存在一组对象 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$满足以下两个条件：

(PG1) $\mathsf{Loc}\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{T}$。**(PG2)** 对于任意一族 $x_i \to y_{ii\in I}$ 中的态射，如果诱导映射$\mathcal{T}(g,\ x_i) \to \mathcal{T}(g,\ y_i)$ 对所有 $g \in \mathcal{G}$ 和 $i \in I$ 都是满射，则诱导映射

$$\mathcal{T}(g, \coprod_i x_i) \to \mathcal{T}(g, \coprod_i y_i)$$

是满射。

对偶地，如果三角范畴 $\mathcal{T}$ 满足 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 完美生成，我们称其为完美余生成。

9.2. 注记。 如 [Kra10，注记 5.1 中所述，2], 在满足（PG2）条件时，生成条件（PG1）等价于以下（先验 较弱的）生成条件：若对象 $t \in \mathcal{T}$ 满足 $\mathcal{T}(\Sigma^n g, t) = 0$ 对所有 $g \in \mathcal{G}$ 以及 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立，则该对象为零。

[4]Boardman [Boa70] 证明了这一点，适用于 $\mathcal{T} = \mathsf{SH}$。一般结果归功于 Neeman [Nee01，附录 E。1]。

9.3. 例。 紧生成三角范畴是完美生成的。当 $\mathcal{G}$ 是紧对象的集合时，（PG2）条件自动成立。更一般地，良生成三角范畴是完美生成的；参见 [Kra01]。

9.4. 定义。 设 $\mathcal{T}$ 是一个紧生成三角范畴。对于任意紧对象 $c \in \mathcal{T}^c$，函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(c,-),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab} \tag{9.5}$$

是同调的，并将 $\mathcal{T}$ 中的余积映为阿贝尔群范畴中的积，因此根据 Brown 可表性，它由一个对象 $I_c \in \mathcal{T}$表示。因此，我们有一个自然同构

$$\mathcal{T}(t, I_c) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(c,t),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{9.6}$$

对于任意 $t \in \mathcal{T}$ 和 $c \in \mathcal{T}^c$。

9.7. 注记。 上述构造中 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的重要性在于，它是阿贝尔群范畴的内射余生成元。单射性保证函子 (9.5) 是同调的，而余生成意味着每个非零阿贝尔群都存在一个到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的非零同态。因此，对所有 $c \in \mathcal{T}^c$，对象 $t = 0$ 当且仅当 $\mathcal{T}(c,t) = 0$；当且仅当 $\mathcal{T}(t, I_c) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(c,t), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$。此外，我们有：

9.8. **引理。** *对于任意态射 $x \to y$，其中 $\mathcal{T}$ 和 $c \in \mathcal{T}^c$，诱导映射 $\mathcal{T}(y, I_c) \to \mathcal{T}(x, I_c)$ 是满射，当且仅当诱导映射 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathcal{T}(c,y)$ 是单射。*

证明。一个方向由 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的单射性得出：若诱导映射$\mathcal{T}(y, I_c) \to \mathcal{T}(x, I_c)$ 是单射，则诱导映射 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathcal{T}(c,y)$ 是满射。另一个方向用到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的余生成性质：若 $\mathcal{T}(y, I_c) \to \mathcal{T}(x, I_c)$ 是满射，那么根据自然同构 (9.6)，阿贝尔群之间的任意同态 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 都可通过 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathcal{T}(c,y)$ 分解。这意味着 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathcal{T}(c,y)$ 是单射，因为若 $f \in \mathcal{T}(c,x)$ 非零，我们就能将一个非零的阿贝尔群同态 $\langle f \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 延拓为一个同态 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，使其不湮灭 f，因此 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathcal{T}(c,y)$ 不可能湮灭 f。□

9.9. **命题。** *若 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，则 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 是完美生成的。更确切地说，若 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$ 是紧生成元集，则 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 由$I(\mathcal{G}) := \{ I_c \mid c \in \mathcal{G} \}$完美生成。特别地，$\mathcal{T} =$余局部化$\langle I(\mathcal{G}) \rangle$。*

证明。设 $t \in \mathcal{T}$ 满足：对所有 $c \in \mathcal{G}$，$\mathcal{T}(t, I_c) = 0$。由于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是阿贝尔群范畴 Ab 的余生成元，这等价于对所有 $c \in \mathcal{G}$，$\mathcal{T}(c,t) = 0$（注记 9.7）。根据假设，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{T}$的生成集，因此 $t = 0$。这表明 $I(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{T}$ 的余生成元集（注 9.2）。为验证条件（PG2），设 $f_i\colon x_i \to y_i$是 $\mathcal{T}$中的映射族，且对所有 $c \in \mathcal{G}$，$\mathcal{T}(f_i, I_c)$ 满射。根据引理 9.8，这意味着对所有 $c \in \mathcal{G}$，映射$\mathcal{T}(c, f_i)$是单射。因此，对每个 $c \in \mathcal{G}$，$\prod_i \mathcal{T}(c, f_i) = \mathcal{T}(c, \prod_i f_i)$ 在阿贝尔群范畴 Ab 中是单射；这又等价于对所有 $c \in \mathcal{G}$，$\mathcal{T}(\prod_i f_i, I_c)$ 满射。由此可知，$I(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{T}$的完美余生成元集。□

9.10. 注记。 布朗可表性定理适用于完美生成范畴；参见 [Kra02, Kra10]。特别地，若 $\mathcal{T}$ 是完美生成的，则任意保持余积的正合函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 都存在一个右伴随 f_*。

9.11.**命题**。 设三角范畴 $\mathcal{T}$ 由 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$完美生成。令 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 为一个保持余积的正合函子，且其右伴随 f_* 保持余积。则以下条件等价：

(a) 范畴 $\mathcal{S}$ 由 $f^*(\mathcal{G})$完美生成。*(b)* 右伴随 f_* 是保守的。

证明。 直接验证 $f^*(\mathcal{G})$ 满足 (PG2)。这里用到了 f_* 保留余积这一假设。接着利用注 9.2，只需注意到 $f_*(s) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{T}(\Sigma^n \mathcal{G}, f_* s) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{S}(\Sigma^n f^*(\mathcal{G}) \ s) = 0$，因此 (a) 与 (b) 等价。 □

9.12. 注记。 将“完美生成”替换为“紧生成”后，命题 9.11 是众所周知的。在这种情况下，可以去掉 f_* 保留余积这一假设，因为它由条件（实际上与该条件等价）蕴含：第 (a) 部分中，f^* 保留生成元的紧性；参见 [Nee96，定理 5。1]。

10. Cosupport is support

张量三角范畴通常指配备了相容的闭对称幺半结构的三角范畴，详见[HPS97，附录 A]。事实上，闭结构在余支撑的定义中起着根本作用，也是余局部化余理想定义中不可或缺的一部分。虽然对称幺半范畴的对偶范畴继承了对称幺半结构，却不继承闭对称幺半结构。因此，我们需要以下较弱的概念：

10.1. 术语。 本文中，非闭张量三角范畴指配备对称幺半结构的三角范畴 $\mathcal{T}$，使得 $- \otimes t\colon \ \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 对每个 $t \in \mathcal{T}$ 都是正合函子（相关悬移同构满足通常的相容性；参见 [Bal10，定义 3]）。我们不假定 $\mathcal{T}$ 具有内 Hom；即使假定 $\mathcal{T}$ 具有余积，我们也不假定 $- \otimes t\colon \ \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 保持余积。不过，我们要求 $\mathcal{T}^d \subseteq \mathcal{T}$ 由可对偶对象构成的全子范畴是本质小的三角子范畴，并且 $(-)^\vee\colon \ \mathcal{T}^d \to (\mathcal{T}^d)^{\mathrm{op}}$ 保持正合三角。

10.2. 注记。 要求 $\mathcal{T}^d$ 是三角子范畴，等价于假设可对偶对象的扩张仍然是可对偶的。如果 $\mathcal{T}$ 是幂等完备的（例如，它有可数余积），那么 $\mathcal{T}^d$ 是厚子范畴。

10.3. 注记。 如果 $\mathcal{T}$ 是非闭张量三角范畴，那么 $\mathcal{T}^d$ 是 $\mathcal{T}$ 的刚性本质小张量三角子范畴。

10.4. 注记。 如果 $\mathcal{T}$ 按通常意义是刚性紧生成张量三角范畴，那么 $\mathcal{T}^d = \mathcal{T}^c$。不过，在强调可对偶性而非紧性时，我们常写作 $\mathcal{T}^d$。接下来的结果表明，对于张量三角几何而言，更为根本的是 $\mathcal{T}^d$，而 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 才是 $\mathcal{T}$ 的“Balmer 谱”的恰当定义。

10.5. 例。 设 $\mathcal{T}$ 是通常意义下的刚性紧生成张量三角范畴。其对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 是一个非闭张量三角范畴，并且 $\mathcal{T}^d \cong (\mathcal{T}^{\mathrm{op}})^d$ 是等价的张量三角范畴，因此具有

相同的 Balmer 谱。事实上，由于可对偶对象的厚理想在取对偶对象后仍保持闭合，$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 恰好具有相同的可对偶对象厚理想、相同的可对偶对象 Balmer 谱、相同的可对偶对象普适支撑，等等。就各种实际用途而言， $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 只是“同一个”刚性张量三角范畴的两种扩张，我们有时将其记作 $\mathcal{K}$。

10.6. 注记。 以下定义是协调局部化理想与余局部化余理想的关键。

10.7. 定义。 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有小余积的非闭张量三角范畴。 $\mathcal{T}$ 的一个局部化 $\mathcal{T}^d$-子模 是指满足 $\mathcal{T}^d \otimes \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ 的局部化子范畴 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}$。

10.8. 注记。 由对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ 生成的局部化 $\mathcal{T}^d$-子模与 $\mathrm{Loc}\langle \mathcal{E} \otimes \mathcal{T}^d \rangle$ 相同。

10.9. 例。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴（按通常意义）。局部化子范畴 $\mathcal{L}$ 是局部化理想，当且仅当 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$当且仅当 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{T}^d \subseteq \mathcal{L}$ 当且仅当 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{T}^d$ 的一个子模。也就是说， $\mathcal{T}$ 的局部化理想恰好是 $\mathcal{T}$的局部化 $\mathcal{T}^d$子模。其关键原因在于， $\mathcal{T} = \mathrm{Loc}\langle \mathcal{T}^d \rangle$ 由可对偶对象子范畴生成。

10.10. 例。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴（按通常意义）。 $\mathcal{T}$ 的余局部化子范畴 $\mathcal{C}$ 是余局部化余理想，当且仅当 $\hom(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ 当且仅当 $\hom(\mathcal{T}^d, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ 当且仅当 $\mathcal{T}^d \otimes \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$ 当且仅当$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$的一个局部化 $\mathcal{T}^d$子模。也就是说， $\mathcal{T}$ 的余局部化余理想恰好是 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$的局部化 $\mathcal{T}^d$子模。因此，局部化理想和余局部化余理想的分类任务，在这两种情况下，分别就是对 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$的局部化 $\mathcal{T}^d$子模进行分类。

10.11. 注记。 我们的下一个目标是说明余支撑与支撑之间的关系。回顾命题 9.9，如果 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，那么 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 就是完美生成的。

10.12. **引理**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个非闭张量三角范畴，且 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}^d$是一个由可对偶对象组成的集合。若 $\mathcal{T}$ 由 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$ 完美生成，则$\mathrm{Loc}\langle \mathcal{E} \otimes \mathcal{T} \rangle$由 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{G}$完美生成。

证明。 设 $\mathcal{L} := \mathrm{Loc}\langle \mathcal{E} \otimes \mathcal{G} \rangle$。那么 $\{ t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{E} \otimes t \in \mathcal{L} \}$ 是一个局部化子范畴，因为 $\mathcal{E}$ 中的对象都是可对偶的。它包含 $\mathcal{G}$，因此由于 $\mathcal{T} = \mathrm{Loc}\langle \mathcal{G} \rangle$，我们得出 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{T} \subseteq \mathrm{Loc}\langle \mathcal{E} \otimes \mathcal{G} \rangle$。这证明了（PG1）。根据定义，可以轻易验证条件（PG2）。这里的关键在于，对于可对偶对象 $d \in \mathcal{T}^d$，函子 $d \otimes - \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$有一个右伴随 $d^\vee \otimes - \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，而且其自身保持余积；参见命题 9.11。 □

10.13.**命题**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个完美生成的非闭张量三角范畴，并记 $\mathcal{K} := \mathcal{T}^d$。对于每个 *Thomason* 子集 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{K})$，局部化子范畴 $\mathrm{Loc}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T} \rangle$ 都是严格局部化的，其中 $\mathcal{K}_Y := \{ a \in \mathcal{K} \mid \text{支撑}(a) \subseteq Y \}$。我们记

$$\Gamma_Y(t) \to t \to \mathrm{L}_Y(t) \to \Sigma\Gamma_Y(t) \tag{10.14}$$

对于相应的 *Bousfield* 局部化三角。

证明。 根据 引理 10.12，局部化子范畴 $\mathsf{Loc}\langle\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}\rangle$ 是完美生成的。由 [Kra10，命题 5.2。1] 可知，它是严格局部化的。□

10.15. 注记。 余局部对象的子范畴 $\Gamma_Y(\mathcal{T}) = \mathsf{Loc}\langle\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}\rangle$ 是 $\mathcal{T}$ 的局部化 $\mathcal{T}^d$-子模。证明是一个标准的厚子范畴论证，其中用到了这样一个事实：对于可对偶对象 $a \in \mathcal{T}^d$，函子 $a \otimes -\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 保持余积。请注意，一般而言，我们并未假设 $t \otimes -$ 保持余积（对于任意的 $t \in \mathcal{T}$）。这与 $\Gamma_Y(\mathcal{T})$ 不一定是 $\mathcal{T}$ 的局部化理想这一事实有关。

10.16. 注记。 局部对象的子范畴 $\mathrm{L}_Y(\mathcal{T}) = \mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}\rangle^{\perp}$ 与 $\bigcap_{a\in\mathcal{K}_Y} \ker(a \otimes -)$ 相同，因此自身也是一个局部化 $\mathcal{T}^d$-子模，属于 $\mathcal{T}$。这意味着 Bousfield 局部化（10.14）是 smashing 的，即 Γ_Y和 L_Y 保持余积。因此

$$\Gamma_Y(a \otimes t) \simeq a \otimes \Gamma_Y(t) \quad \text{and} \quad \mathrm{L}_Y(a \otimes t) \simeq a \otimes \mathrm{L}_Y(t) \tag{10.17}$$

对任意 $a \in \mathcal{T}^d$ 和 $t \in \mathcal{T}$。

10.18. 注记。 由 $\mathcal{T}^d$-子模生成的局部化 $\mathcal{K}_Y$ 由 $\mathsf{Loc}\langle\mathcal{K}_Y\rangle = \mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}^d\rangle$给出；参见注记 10.8。局部化 $\mathcal{T}^d$-子模$\Gamma_Y(\mathcal{T}) = \mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}\rangle$ 可能更大。

10.19. **引理**。 将映射 $Y \mapsto \Gamma_Y\mathcal{T}$视为从 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 的 *Thomason* 子集格到 $\mathcal{T}$的局部化 $\mathcal{T}^d$-子模格的映射，则该映射保任意并和有限交。

证明。 为简化记号，记 $\mathcal{K} := \mathcal{T}^d$。显然，该映射保最大元和最小元。我们先证明它保任意并。为此，考虑 Spc($\mathcal{K}$) 的 Thomason 子集的并集 $\bigcup_i Y_i$ 。包含关系 $\bigvee_i \Gamma_{Y_i}\mathcal{T} \subseteq \Gamma_{\bigcup_i Y_i}\mathcal{T}$ 显然成立。为证明另一个包含关系，我们需要验证 $\mathcal{K}_{\bigcup_i Y_i} \otimes \mathcal{T} \subseteq \bigvee_i \Gamma_{Y_i}\mathcal{T}$。注意到

$$\left\{ a \in \mathcal{T}^d \,\middle|\, a \otimes \mathcal{T} \subseteq \bigvee_i \Gamma_{Y_i}\mathcal{T} \right\}$$

是 $\mathcal{T}^d$ 的厚理想。对于每个 i，它都包含 $\mathcal{K}_{Y_i}$。因此它包含 $\mathsf{thick}\langle\bigcup_i \mathcal{K}_{Y_i}\rangle$——根据刚性 tt-范畴 $\mathcal{K}$ 的厚理想分类，后者与 $\mathcal{K}_{\bigcup_i Y_i}$ 相同。这就证明了所需的结论。

接下来需要证明该函数保持有限交。也就是说，

$$\Gamma_{Y_1}\mathcal{T} \cap \Gamma_{Y_2}\mathcal{T} = \Gamma_{Y_1\cap Y_2}\mathcal{T}$$

对于任意一对 Thomason 子集 Y_1，Y_2。$\supseteq$ 包含关系显然成立。对于 $\subseteq$包含关系，我们需要证明

$$\mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1} \otimes \mathcal{T}\rangle \cap \mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2} \otimes \mathcal{T}\rangle \subseteq \mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1\cap Y_2} \otimes \mathcal{T}\rangle. \tag{10.20}$$

首先注意，$\mathcal{K}_{Y_1\cap Y_2} = \mathcal{K}_{Y_1} \cap \mathcal{K}_{Y_2} = \text{厚}\langle\mathcal{K}_{Y_1} \otimes \mathcal{K}_{Y_2}\rangle$ 其中最后一个等式用到了 $\mathcal{K}$ 的刚性。然后考虑一个对象 t，它包含在 (10.20) 左侧之中。由于 $t \in \mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2} \otimes \mathcal{T}\rangle$，我们有

$$\Gamma_{Y_1}(t) \in \Gamma_{Y_1}(\mathrm{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2} \otimes \mathcal{T}\rangle) \subseteq \mathrm{Loc}\langle\Gamma_{Y_1}(\mathcal{K}_{Y_2} \otimes \mathcal{T})\rangle,$$

其中，包含关系利用了 Γ_{Y_1} 保持余积（注 10.16）。但还有$t \simeq \Gamma_{Y_1}(t)$，因为 $t \in \mathrm{Locid}\langle\mathcal{K}_{Y_1} \otimes \mathcal{T}\rangle$；因此

$$t \in \mathrm{Loc}\langle\Gamma_{Y_1}(\mathcal{K}_{Y_2} \otimes \mathcal{T})\rangle.$$

现在利用（10.17）以及与可对偶对象进行张量运算会保持余积这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Loc}\langle\Gamma_{Y_1}(\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{T})\rangle = \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\Gamma_{Y_1}\mathcal{T}\rangle &= \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1}\otimes\mathcal{T}\rangle\rangle\\ &= \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{K}_{Y_1}\otimes\mathcal{T}\rangle\\ &= \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1\cap Y_2}\otimes\mathcal{T}\rangle\end{aligned} \tag{10.21}$$

这建立了（10.20）。 □

10.22. **引理。** 设 $Y_1, Y_2 \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 是两个 *Thomason* 子集。则有：

(a) $\Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2} = \Gamma_{Y_1\cap Y_2} = \Gamma_{Y_2}\Gamma_{Y_1}$；

(b) $\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2} = \mathrm{L}_{Y_1\cup Y_2} = \mathrm{L}_{Y_2}\mathrm{L}_{Y_1}$；*(c)* $\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2} = \mathrm{L}_{Y_2}\Gamma_{Y_1}$.

证明。首先注意，若 $Y \subseteq Y'$，则 $\Gamma_Y \simeq \Gamma_Y\Gamma_{Y'}$。因此，$\Gamma_{Y_1\cap Y_2} \simeq \Gamma_{Y_1\cap Y_2}\Gamma_{Y_2} \simeq \Gamma_{Y_1\cap Y_2}\Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2}$。要证明 (*a*)，只需验证 $\Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2}t \in \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1\cap Y_2}\otimes\mathcal{T}\rangle$，从而 $\Gamma_{Y_1\cap Y_2}\Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2}(t) \simeq \Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2}(t)$。注意，根据刚性 tt-范畴 $\mathcal{K}$ 的厚理想分类，$\mathcal{K}_{Y_1\cap Y_2} = \mathcal{K}_{Y_1}\cap\mathcal{K}_{Y_2}$。因此，我们要证明

$$\Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2}t \in \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1}\otimes\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{T}\rangle)$$

对任意 $t \in \mathcal{T}$。由于 $\Gamma_{Y_2}t \in \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{T}\rangle$，我们有

$$\Gamma_{Y_1}\Gamma_{Y_2}t \in \Gamma_{Y_1}(\operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{T}\rangle) \subseteq \operatorname{Loc}\langle\Gamma_{Y_1}(\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{T})\rangle,$$

其中，最后一个包含关系利用了 Γ_Y 保余积（注 10.16）。现在再次运用同一条 注 10.16，可像上文（10.21）中那样得到

$$\operatorname{Loc}\langle\Gamma_{Y_1}(\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{T})\rangle = \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathcal{K}_{Y_1}\otimes\mathcal{T}\rangle$$

这正是我们要证明的结论。由此便证明了（a）。

对于（b）这一部分，首先注意，若 $Y \subseteq Y'$，则 $\mathrm{L}_{Y'} \simeq \mathrm{L}_{Y'}\mathrm{L}_Y$。因此 $\mathrm{L}_{Y_1\cup Y_2} \simeq \mathrm{L}_{Y_1\cup Y_2}\mathrm{L}_{Y_2} \simeq \mathrm{L}_{Y_1\cup Y_2}\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}$。若能证明

$$\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t \in \operatorname{Loc}\langle\mathcal{K}_{Y_1\cup Y_2}\otimes\mathcal{T}\rangle^{\perp}.$$

为此，只需证明

$$\mathcal{K}_{Y_1\cup Y_2}\otimes\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t = 0 \tag{10.23}$$

由于 $\mathcal{K}_{Y_1\cup K_Y} = \mathsf{thickid}\langle\mathcal{K}_{Y_1}\cup\mathcal{K}_{Y_2}\rangle$，这等价于

$$\mathcal{K}_{Y_1}\otimes\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{K}_{Y_2}\otimes\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t = 0$$

这两者都可由 注 10.16推出。

最后，我们证明第 (*c*) 部分。由 (*a*) 可知，$\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t$ 是 L_{Y_2}-局部的。因此$\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t \xrightarrow{\sim}\mathrm{L}_{Y_2}\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t$。另一方面，由 (*a*) 也可知，$\Gamma_{Y_1}t \to\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t$ 是一个 L_{Y_2}-等价，因此

$$\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}_{Y_2}\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t \xleftarrow{\sim} \mathrm{L}_{Y_2}\Gamma_{Y_1}t.$$

□

10.24. 定义 (完美生成范畴的支撑)。 设 $\mathcal{T}$ 是一个完美生成的非闭张量三角范畴，其谱 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 弱诺特。记 $\{\mathcal{P}\} = Y_1\cap Y_2^c$为 Thomason 子集 $Y_1, Y_2 \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$，并定义$\Gamma_{\mathcal{P}} := \Gamma_{Y_1}L_{Y_2}$。借助 引理 10.22，按照 Y_1 和 Y_2 的思路，可以证明该定义不依赖于对它们的选择，见 [BF11，引理 7。4]。对象 $t \in \mathcal{T}$ 的 ***Balmer–Favi*** 支撑 定义为

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t) := \left\{\, \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d) \;\middle|\; \Gamma_{\mathcal{P}}(t) \neq 0 \,\right\} \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d).$$

10.25. 注记。 提醒读者，对于 $x \in \mathcal{T}^d$，$\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(x) = \mathrm{supp}(x)$ 未必成立。也就是说，小支撑未必能够恢复可对偶对象的普适支撑。

10.26. 定义。 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有小余积的非闭张量三角范畴。函数 $\sigma\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}(X)$ 称为局部化支撑理论 $\mathcal{T}^d$- 子模，若其满足以下条件：

(a) $\sigma(0) = \varnothing$；(b) 对每个 $t \in \mathcal{T}$，$\sigma(\Sigma t) = \sigma(t)$；(c) 对任意正合三角 $a \to b \to c \to \Sigma a$，在 $\mathcal{T}$ 中有 $\sigma(c) \subseteq \sigma(a) \cup \sigma(b)$。(d) 对任意对象集合 t_i，在 $\mathcal{T}$ 中有 $\sigma(\coprod_i t_i) = \bigcup_i \sigma(t_i)$。(e) 对任意 $x \in \mathcal{T}^d$ 和 $t \in \mathcal{T}$，有 $\sigma(x \otimes t) \subseteq \sigma(t)$。

这些性质恰好等价于如下陈述：对于每个子集$Y \subseteq X$，子范畴 $\left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, \sigma(t) \subseteq Y \right\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个局部化 $\mathcal{T}^d$-子模。

10.27. 定义。 我们称支撑理论 (X, σ) 分层 $\mathcal{T}$，若映射$\mathcal{L} \mapsto \bigcup_{t \in \mathcal{L}} \sigma(t)$ 是从 $\mathcal{T}$ 的局部化 $\mathcal{T}^d$-子模全体到 X 的所有子集构成的集合的双射。

10.28. 注记。 若 (X, σ) 将 $\mathcal{T}$ 分层，那么其逆映射必然由 $Y \mapsto \left\{ t \in \mathcal{T} \,\middle|\, \sigma(t) \subseteq Y \right\}$ 给出。因此，σ 在局部化 $\mathcal{T}^d$-子模格与 X 的所有子集构成的格之间给出一个格同构。特别地，它保持并与交。

10.29. 例。 若 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 是弱诺特的，那么在 定义 10.24 中定义的 $\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}$，按照 定义 10.26的意义，是一个支撑函数。公理 (d) 和 (e) 可由 注 10.16推出。

10.30. 定义。 我们称具有 $\mathcal{T}$withSpc$(\mathcal{T}^d)$weaklynoetherian 的完美生成非闭三角张量范畴为分层的，如果它由 $\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}$ 分层。

10.31. 例。 设 $\mathcal{T}$ 是通常意义下的刚性紧生成张量三角范畴，并设 $\mathcal{K} := \mathcal{T}^d$。$\mathcal{K}$-子模 $\mathcal{T}$ 恰好是 $\mathcal{T}$ (例 10.9)。若将定义 10.24的构造应用于 $\mathcal{T}$，则我们只是在对每个 Thomason 子集 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{K})$ 考虑 $\mathcal{T}$，其无效对象为

$$\mathrm{Loc}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T} \rangle = \mathrm{Locid}\langle \mathcal{K}_Y \rangle = \mathrm{Locid}\langle e_Y \rangle = \mathrm{Loc}\langle \mathcal{K}_Y \rangle =: \mathcal{T}_Y.$$

这是通常的幂等三角

$$e_Y \otimes t \to t \to f_Y \otimes t \to \Sigma e_Y \otimes t$$

在 $\mathcal{T}$ 上，且支撑为

$$\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t) = \left\{ \mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{K}) \,\middle|\, g_{\mathcal{P}} \otimes t \neq 0 \right\}.$$

也就是说，我们得到了定义 4.23中的通常 Balmer–Favi 支撑。根据定义 10.30，对 $\mathcal{T}$ 的分层恢复了[BHS23]所研究的分层概念。在此例中，对于$_{\mathcal{T}}(x)$，$\mathrm{Supp} = \mathrm{supp}(x)$。$x \in \mathcal{T}^d$。

10.32. 例。 设 $\mathcal{T}$ 是通常意义下的刚性紧生成张量三角范畴。那么 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 是一个完美生成的非闭张量三角范畴，其可对偶对象子范畴为 $\mathcal{K} := (\mathcal{T}^{\mathrm{op}})^d \cong \mathcal{T}^d$。局部化$\mathcal{K}$-子模 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 恰好是 $\mathcal{T}$ (例 10.10)的余局部化余理想。

如果我们将 定义 10.24 中的构造应用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$，那么对于每个 Thomason 子集 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$，我们都在 $Y \subset \mathrm{Spc}(\mathcal{K})$ 中考虑一个 Bousfield 局部化，

$$\Gamma_Y^{\mathrm{op}}(t) \to t \to \mathrm{L}_Y^{\mathrm{op}}(t) \to \Sigma\Gamma_Y^{\mathrm{op}}(t), \tag{10.33}$$

其无效对象为 $\mathrm{Loc}_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rangle$。这对应于 $\mathcal{T}$ 中的一个 Bousfield 局部化，

$$\mathrm{L}_Y^{\mathrm{op}}(t) \to t \to \Gamma_Y^{\mathrm{op}}(t) \to \Sigma\mathrm{L}_Y^{\mathrm{op}}(t), \tag{10.34}$$

其局部 对象是

$$\mathrm{Loc}_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rangle = \mathrm{Coloc}_{\mathcal{T}}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T} \rangle.$$

也就是说，用 $\mathcal{T}$ 表示，局部对象的子范畴是 $\mathrm{Coloc}_{\mathcal{T}}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T} \rangle$ =同态$(e_Y,\ \mathcal{T})$ $= (\mathcal{T}_Y)^{\perp\perp}$ 利用 引理 4.5。因此，10.34） $\mathcal{T}$ 中的 Bousfield 局部化就是 Bousfield 局部化

$$\mathsf{hom}(f_Y, t) \to t \to \mathsf{hom}(e_Y, t) \to \Sigma\mathsf{hom}(f_Y, t)$$

其无效对象为（$\mathcal{T}_Y$）$^{\perp}$。因此，原来的 Bousfield 局部化（10.33）在 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 中由下式给出

$$\Gamma_Y^{\mathrm{op}}(t) = \mathsf{hom}(e_Y, t) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{L}_Y^{\mathrm{op}}(t) = \mathsf{hom}(f_Y, t)$$

而 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 上的支撑函数由下式给出

$$\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}(t) \coloneqq \left\{ \mathcal{P} \in \mathcal{K} \,\middle|\, \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, t) \neq 0 \right\}.$$

总之，我们已经证明，对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 的支撑（定义 4.23）恰好就是 Balmer–Favi 余支撑：

10.35.**定理**。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成张量三角范畴，且 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$弱诺特。则

$$\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) = \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}(t)$$

对所有 $t \in \mathcal{T}$，$\mathcal{T}$ 的余局部化余理想恰好是 $\mathcal{T}^d$-子模 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$，并且 $\mathcal{T}$ 是余分层的（定义 *7.1*）当且仅当 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 是分层的（定义 *10.30*）。

10.36. 注记。我们的视角是将非闭 tt-范畴 $\mathcal{T}$ 视为其可对偶对象刚性 tt-子范畴 $\mathcal{T}^d$ 上的一个模。我们构建的支撑理论与 [Ste13]中的成果既有相似之处，也有不同之处。我们的设定既更一般，也更特殊。当 $\mathcal{T}$是一个作用于紧生成三角范畴 $\mathcal{S}$上的刚性紧生成三角张量范畴时，Stevenson 为$\mathcal{T}$的局部化子模构造了一种支撑概念，其取值于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$。特别地，可以令 $\mathcal{T}$ 作用于自身，此时便得到 Balmer–Favi 支撑理论。另一方面，Stevenson 的理论也适用于非张量的例子，如奇点范畴（例如参见 [Ste14b]）。我们的设定更为特殊，因为我们要求存在幺半群结构；但在幺半群设定内，我们的构造更为一般，因为它只要求一个非闭的完美生成 tt-范畴；此外，它还着重凸显了作用中 $\mathcal{T}^d$ 部分的重要性。这些思想还带来了余支撑之外的新例子，下面我们将予以说明：

10.37. 例。 如果 $\mathcal{L}$ 是刚性紧生成三角张量范畴 $\mathcal{T}$中的任意严格局部化理想，那么相应的 Bousfield 局部化 $\mathcal{T}/\mathcal{L}$ 继承张量三角范畴的结构，并且$\mathcal{T}$的生成元局部化后成为 $\mathcal{T}/\mathcal{L}$的一组可对偶化生成元。一般而言，当 $n > 0$时，这些生成元并非紧。对于

例如， $K(n)$-局部范畴的单位并不紧。尽管如此，局部范畴 $\mathcal{T}/\mathcal{L}$ 是良生成的，因此也是完美生成的（见 [Kra10，定理 7.2。1]），且（$\mathcal{T}/\mathcal{L}$）^{d} 是本质小的（见 [Mat16，第 413]页）。因此，定义 10.24为任何属于可对偶对象谱 Spc((T/L)^d) 的刚性紧生成三角张量范畴的 Bousfield 局部化提供了一种支撑理论，前提是该空间弱诺特。本工作中我们不进一步探讨这类例子，但这将是一种值得研究的支撑理论，例如，对于$K(n)$-局部范畴。相关方向的一些研究已见于 [BHN22]。

11. 普适性

我们的下一个目标是证明，通过第 4 节中定义的余支撑理论来处理余分层的方法，在某种意义上是唯一的或普适的选择。我们在 [BHS23，第 7] 节中得到了分层的类似结果。事实上，鉴于第 10 节中确立的分层与余分层之间的联系，我们将证明该唯一性结果的一个推广版本，该版本适用于完美生成范畴的支撑理论。

11.1.假设。除非另有说明， $\mathcal{T}$ 均表示一个完美生成的非闭张量三角范畴（术语 10.1），而支撑理论指的是定义 10.26中的概念。

11.2. **引理**。设 $\sigma\colon\ \mathcal{T}\to\mathcal{P}(\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d))$ 是一个满足 $\sigma(\Gamma_Y\mathcal{T})\subseteq Y$和 $\sigma(\mathrm{L}_Y\mathcal{T})\subseteq Y^c$ 的支撑理论（定义 *10.26*），其中 $Y\subseteq\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$是一个 *Thomason* 子集。那么

$$\sigma(\Gamma_Y t)=Y\cap\sigma(t)\quad\ \textit{and}\quad\ \sigma(\mathrm{L}_Y t)=Y^c\cap\sigma(t)$$

对任意 $t\in\mathcal{T}$。

证明。 这可以直接由正合三角（10.14）得出。 □

11.3.**引理**。 假设$\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 是弱诺特的。对于任意 *Thomason* 子集$Y\subseteq\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 以及 $t\in\mathcal{T}$，有

(a) 支撑$_\mathcal{T}$(Γ$_Y$*t*) $=Y\cap$支撑$_\mathcal{T}$(*t*)，以及

(b) 支撑$_\mathcal{T}$(L$_Y$*t*) $=Y^c\cap$支撑$_\mathcal{T}$(*t*)。

证明。 这是一个运用 引理 10.22 和正合三角（10.14）即可完成的练习。注意，结合 引理 11.2 和 例 10.29，只需证明 $\subseteq$包含关系（a）和（b）即可。 □

11.4.**命题**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个完美生成的非闭张量三角范畴，且 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 弱诺特。 定义 *10.24* 中定义的支撑，是唯一一种将子集 $\sigma(t)\subseteq\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 赋给每个对象 $t\in\mathcal{T}$，且满足以下两个性质的对应：

(a) 对于每个 $t\in\mathcal{T}$, $\sigma(t)=\varnothing$，均可推出 $t=0$。***(b)*** 对于每个 *Thomason* 子集 $Y\subseteq\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^d)$， $\sigma(\Gamma_Y t)=\sigma(t)\cap Y$以及 $\sigma(\mathrm{L}_Y t)=\sigma(t)\cap Y^c$。

证明。 如果 $\{\mathcal{P}\}=Y_1\cap Y_2^c$那么 $\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t=\{\mathcal{P}\}\cap\sigma(t)$。因此， $\mathcal{P}\in\sigma(t)$ 当且仅当$\sigma($Γ$_{Y_1}$L$_{Y_2}$*t*) $\neq\varnothing$ 当且仅当 $\Gamma_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}t\neq 0$ 当且仅当 $\mathcal{P}\in$Supp$_\mathcal{T}$(*t*)。□

11.5.**定理**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个完美生成的非闭张量三角范畴。假设 $\mathcal{T}$ 是分层的（定义 *10.27*），其支撑函数为 σ （定义 *10.26*），取值于一个谱空间 X。假设 σ 诱导一个双射

$$Y \mapsto \sigma(\Gamma_Y \mathcal{T})$$

在 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 的 *Thomason* 子集集合与 X 的 *Thomason* 子集集合之间。于是存在唯一的同胚 $f\colon X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$，使得对所有 $a \in \mathcal{T}^d$， $\sigma(\Gamma_{\operatorname{supp}(a)}\mathcal{T}) = f^{-1}(\operatorname{supp}(a))$。此外，若空间 X 弱诺特，则对所有 $t \in \mathcal{T}$，$\sigma(t) = f^{-1}(\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t))$。

证明。回顾注 10.28， σ 给出了一个格同构。结合引理 10.19，可知所假设的双射 $Y \mapsto \sigma(\Gamma_Y\mathcal{T})$ 是一个格同构。两个格都是相干框架（参见例如 [KP17]），因此根据 Stone 对偶性， [Joh82] 对应于一个同胚 $f\colon X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$。根据构造，这个同胚满足对每个 Thomason 子集 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$， $f^{-1}(Y) = \sigma(\Gamma_Y\mathcal{T})$。由于 σ 是格同构， $\Gamma_Y\mathcal{T} \cap \mathrm{L}_Y\mathcal{T} = 0$ 和 $\Gamma_Y\mathcal{T} \vee \mathrm{L}_Y\mathcal{T} = \mathcal{T}$，由此可得 $\sigma(\mathrm{L}_Y\mathcal{T}) = f^{-1}(Y)^c$。对每个 $t \in \mathcal{T}$， $f^{-1}(\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t)) = \sigma(t)$ 这一事实，则由引理 11.2 和命题 11.4 得出。唯一性断言是标准的；例如参见 [Bal05, 引理 3.3]。□

11.6. 注记。 回想 注 10.18， $\Gamma_Y\mathcal{T}$ 不一定是由$\mathcal{T}^d$生成的局部化 $\mathcal{T}^d_Y$-子模。例如，由可对偶对象 $\mathcal{T}^d$生成的局部化 $a \in \mathcal{T}^d$ -子模是 $\operatorname{Loc}\langle a \otimes \mathcal{T}^d\rangle$，而 $\Gamma_{\operatorname{supp}(a)}\mathcal{T} = \operatorname{Loc}\langle a \otimes \mathcal{T}\rangle$。这有助于理解定理 11.5： $\sigma(a)$ 是由$\mathcal{T}^d$生成的局部化 a-子模的支撑，而 $\sigma(\Gamma_{\operatorname{supp}(a)}\mathcal{T})$ 则是某个可能更大的局部化 $\mathcal{T}^d$-子模的支撑；参见注记 10.25。

11.7. 注记。 从 $\mathcal{C} \mapsto \operatorname{Loc}\langle \mathcal{C} \otimes \mathcal{T}\rangle$ （将 $\mathcal{T}^d$的厚理想映到 $\mathcal{T}^d$-子模）得到的格同态 $\mathcal{T}$（参见引理 10.19）显然不一定是单射。在已知它是单射的情况下，定理 11.5 的假设会略微简化。以下我们感兴趣的两个主要例子都属于这种情况。

11.8.**推论**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成张量三角范畴。假设 $\mathcal{T}$ 在谱空间 X中由支撑理论 σ 分层。假设对每个 $a \in \mathcal{T}^d$， $\sigma(a)$都是 *Thomason* 闭集，并且 X的每个 *Thomason* 闭子集都以这种方式出现。若 X 是弱诺特的，则存在一个同胚$X \cong \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$，在该同胚下， $\sigma(t) \cong$ 支撑$_{\mathcal{T}}(t)$。

证明。 注意到 $\Gamma_Y\mathcal{T} = \operatorname{Loc}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}\rangle = \operatorname{Loc}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \operatorname{Loc}\langle \mathcal{T}^d\rangle\rangle = \operatorname{Loc}\langle \mathcal{K}_Y\rangle$。因此$\sigma(\Gamma_Y\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{K}_Y)$。特别地， $\sigma(\Gamma_{\operatorname{supp}(a)}\mathcal{T}) = \sigma(a)$ 对任意 $a \in \mathcal{T}^d$都成立。类似地，对于 Thomason 子集 $Y = \bigcup_i \operatorname{supp}(a_i)$，我们有（运用 引理 10.19）

$$\sigma(\Gamma_Y\mathcal{T}) = \sigma\Big(\bigvee_i \Gamma_{\operatorname{supp}(a_i)}\mathcal{T}\Big) = \bigcup_i \sigma(\Gamma_{\operatorname{supp}(a_i)}\mathcal{T}) = \bigcup_i \sigma(a_i).$$

因此，假设对所有 $a \in \mathcal{T}^d$， $\sigma(a) \subseteq X$ 都是 Thomason 闭集，这意味着对每个 Thomason 子集 $Y \subseteq X$，$\sigma(\Gamma_Y\mathcal{T})$ 也都是 Thomason 闭集。此外，假设 X 的每个 Thomason 闭集都可写成某个 $a \in \mathcal{T}^d$ 的 $\sigma(a)$。因此， X 的每个 Thomason 子集都可写成 $\bigcup_i \sigma(a_i) = \bigcup_i \sigma(\Gamma_{\operatorname{supp}(a_i)}\mathcal{T}) = \sigma(\bigvee_i \Gamma_{\operatorname{supp}(a_i)}\mathcal{T}) = \sigma(\Gamma_{\cup_i \operatorname{supp}(a_i)}\mathcal{T})$。此外，映射 $Y \mapsto \Gamma_Y\mathcal{T}$ 是单射，因为根据 [Nee92b，引理 2.2]， $\Gamma_Y\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^d = \operatorname{Loc}\langle \mathcal{K}_Y\rangle \cap \mathcal{T}^d = \mathcal{K}_Y$。于是定理 11.5 的假设成立，证毕。□

11.9. 注记。 推论 11.8本质上就是 [BHS23 的定理 7。6]我们列出上述论证，是为了说明它如何由原初唯一性 定理 11.5 推导得出。 [BHS23 的定理 7。6]还包含一些与这些假设等价的附加条件。

11.10.**推论**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成的张量三角范畴。假设 $\mathcal{T}$ 由取值于谱空间 X 的余支撑理论 $\mathfrak{C}$ 余分层。以下条件等价：

(a) 对每个 *Thomason* 子集 $Y \subseteq Spc(\mathcal{T}^d)$， $\mathfrak{C}(\hom(e_Y, \mathcal{T}))$ 都是 X 的 *Thomason* 子集，并且 X 的每个 *Thomason* 子集都由此方式得到。*(b)* 映射 $Y \mapsto \mathfrak{C}(\hom(e_Y, \mathcal{T}))$ 是从 $Spc(\mathcal{T}^d)$ 的 *Thomason* 子集格到 X 的 *Thomason* 子集格的双射。*(c)* 对每个 *Thomason* 子集 $Y \subseteq Spc(\mathcal{T}^d)$， $\mathfrak{C}(Loc\langle \mathcal{K}_Y\rangle^{\perp})^c$ 都是 X 的 *Thomason* 子集，并且 X 的每个 *Thomason* 子集都由此方式得到。*(d)* 映射 $\mathcal{C} \mapsto \mathfrak{C}(Loc\langle \mathcal{C}\rangle^{\perp})^c$ 是 $\mathcal{T}^d$ 的厚理想与 X 的 *Thomason* 子集之间的双射。*(e)* 存在唯一的同胚 $f\colon X \xrightarrow{\sim} Spc(\mathcal{T}^d)$，使得

$$f^{-1}(\operatorname{supp}(a)) = \mathfrak{C}(\hom(a, \mathcal{T}))$$

对每个 $a \in \mathcal{T}^d$。

若这些条件成立，且谱空间 X 是弱诺特的，那么在同胚 $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 下，余支撑理论 $\mathfrak{C}$ 与 *Balmer–Favi* 余支撑余支撑一致。

证明。我们希望将定理 11.5 应用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$。回顾例 10.32，$\Gamma_Y\mathcal{T}^{\mathrm{op}} = \hom(e_Y, \mathcal{T})$。因此，定理 11.5 的假设（应用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$）是： $Y \mapsto \mathfrak{C}(\hom(e_Y, \mathcal{T}))$ 是 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^d)$ 的 Thomason 子集集合与 X 的 Thomason 子集集合之间的双射；也就是说，陈述 (b)。注意，此映射必然是单射：若 $\mathfrak{C}(\hom(e_{Y_1}, \mathcal{T})) = \mathfrak{C}(\hom(e_{Y_2}, \mathcal{T}))$，则 $\hom(e_{Y_1}, \mathcal{T}) = \hom(e_{Y_2}, \mathcal{T})$，因为 $\mathfrak{C}$ 余分层 $\mathcal{T}$。因此

$$\operatorname{Locid}(e_{Y_1}) = {}^{\perp\perp}\hom(e_{Y_1}, \mathcal{T}) = {}^{\perp\perp}\hom(e_{Y_2}, \mathcal{T}) = \operatorname{Locid}(e_{Y_2})$$

因此

$$\mathcal{K}_{Y_1} = \mathcal{T}^d \cap \operatorname{Locid}(e_{Y_1}) = \mathcal{T}^d \cap \operatorname{Locid}(e_{Y_2}) = \mathcal{K}_{Y_2}$$

从而 $Y_1 = Y_2$。因此，陈述（b）等价于陈述（a）。

现在回顾注 10.28，分层余支撑 $\mathfrak{C}$ 是一个格同构；特别地，它保持并与交。若 $\mathcal{C}_1 := \operatorname{Loc}\langle \mathcal{K}_Y\rangle^{\perp} = f_Y \otimes \mathcal{T} =$ 同态$(f_Y, \mathcal{T})$ 且 $\mathcal{C}_2 :=$ 同态$(e_Y, \mathcal{T}) = \operatorname{Loc}\langle \mathcal{K}_Y\rangle^{\perp\perp}$，则有 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = 0$。另一方面，对于任意 $t \in \mathcal{T}$，存在一个正合三角 同态$(f_Y, t) \to t \to$同态$(e_Y, t) \to \Sigma$同态(f_Y, t)，这表明 $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 = \mathcal{T}$。由于 $\mathfrak{C}$ 保持并与交，我们得出 $\mathfrak{C}(\mathcal{C}_1)^c = \mathfrak{C}(\mathcal{C}_2)$。因此，陈述（$c$）等价于陈述（$a$），而陈述（$d$）等价于陈述（$b$）。

牢记引理 4.34 给出的 $\hom(a, \mathcal{T}) = \hom(e_{\operatorname{supp}(a)}, \mathcal{T})$，定理 11.5 证明了 (b) 蕴含 (e)。反过来，假设 (e) 成立。对于任意 Thomason $Y = \bigcup_{i\in I}$支撑(a_i)，我们有 $\hom(e_Y, \hom(a_i, t)) = \hom(a_i, t)$，这意味着 $f^{-1}(Y) \subseteq \mathfrak{C}(\hom(e_Y, \mathcal{T}))$。此外，由于 $e_Y \in \operatorname{Locid}\langle a_i \mid i \in I\rangle$，我们有

$$\hom(e_Y, t) \in \hom(\operatorname{Locid}\langle a_i \mid i \in I\rangle, t) \subseteq \operatorname{Colocid}\langle \hom(a_i, t) \mid i \in I\rangle$$

根据（2.8），从而 $\mathfrak{C}$（同态（e_Y，$\mathcal{T}$））$\subseteq f^{-1}(Y)$。因此，$\mathfrak{C}$（同态（e_Y，$\mathcal{T}$））$= f^{-1}(Y)$，这证明了（a）成立。

最后请注意，最后一个结论（当 X 是弱诺特时）也由定理11.5给出。□

11.11. 注记。 与推论 11.8 （以及原文 [BHS23，定理 7。6]）一样，推论 11.10 的要点在于：如果 $\mathcal{T}$ 在弱诺特谱空间中，借助某种余支撑概念实现了余分层，并且这种余分层与可对偶对象的厚理想的通常分类“相容”，那么它必定由 Balmer 谱中的张量三角余支撑理论实现。

11.12.**推论** （BIK 余分层）。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，按照 [BIK12] 的术语，它是诺特的，并且通过分次诺特环 R的作用而余分层。则 *BIK* 余支撑空间 余支撑$_R(\mathcal{T})$与 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 同胚，并且 余支撑$_R(\mathcal{T})$ 中的 *BIK* 余支撑概念与 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 中定义的余支撑概念一致，见定义 *4.23*。

证明。我们首先注意到，由于 $\mathcal{T}$ 被 R 余分层，因此它也被 R 分层，见 [BIK12，定理 9.7]。此外，$\operatorname{cosupp}_R(\mathcal{T}) = \operatorname{supp}_R(\mathcal{T})$；对于任意局部化理想 $\mathcal{L}$，$\operatorname{cosupp}_R(\mathcal{L}^\perp) = \operatorname{supp}_R(\mathcal{L})^c$ （见 [BIK12，推论 9.9] 的证明）。根据 [BIK11b，定理 6.1]，我们看到 $\mathcal{C} \mapsto \operatorname{cosupp}_R(\operatorname{Loc}\langle\mathcal{C}\rangle^\perp)^c$ 是厚理想与 $\operatorname{supp}_R \mathcal{T}$ 的 Thomason 子集之间的双射。此外，根据 [BIK08，定理 5.5]，，$\operatorname{supp}_R(\mathcal{T}) = \operatorname{Supp}_R(1)$ 是 $\operatorname{Spec}(R)$ 的闭子空间，因此它本身是一个诺特谱空间。因此，我们可以在假设 (d) 下应用推论 11.10。或者，我们可以应用 [BHS23，推论 7.11]，得出 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) \cong \operatorname{supp}_R(\mathcal{T}) \cong \operatorname{cosupp}_R(\mathcal{T})$，并应用命题 11.4；注意，BIK 余支撑理论满足条件 (a) 和 (b)（特别参见 [BIK12，定理 4.5 和命题 4.7]）。□

11.13. 注记。定义 10.26 中给出的局部化子模支撑函数公理，似乎略弱于 [BHS23, 定义 7.1] 中给出的局部化理想支撑函数公理。前者的公理 (e) 表明，对于任意 $x \in \mathcal{T}^d$ 和 $t \in \mathcal{T}$，$\sigma(x \otimes t) \subseteq \sigma(t)$；而后者的公理 (e) 表明，对于所有 t_1、$t_2 \in \mathcal{T}$，$\sigma(t_1 \otimes t_2) \subseteq \sigma(t_1) \cap \sigma(t_2)$。对于 $\mathcal{T}$ 刚性紧生成的情形，这条更强的公理可由定义 10.26 的公理推出。事实上，对于任意 $t \in \mathcal{T}$，$\{ s \in \mathcal{T} \mid \sigma(s \otimes t) \subseteq \sigma(t) \}$ 是一个包含可对偶对象的局部化子范畴。类似地，定义 3.1 的公理 (e) 似乎略强于将定义 10.26 应用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 时所能得到的条件，即它要求对所有 s、$t \in \mathcal{T}$，都有 $\mathfrak{C}(\hom(s,t)) \subseteq \mathfrak{C}(t)$。同样，考虑 $\{ s \in \mathcal{T} \mid \mathfrak{C}(\hom(s,t)) \subseteq \mathfrak{C}(t) \}$，即可由表面上较弱的公理推出这一条件。另一方面，定义 10.26 并未包含定义 3.1 的公理 (a) 的第二部分。

11.14. 注记。 读者或许会感兴趣，将我们的余支撑理论公理与 [Ver22，定义 32] 中的公理作一比较；后者明确涉及 Brown–Comenetz 对偶对象（它们将在下一节的工作中登场）。我们的公理先验地较弱。特别地，按照 [Ver22，定义 32] 中的余支撑数据，就是按照定义 3.1中的余支撑函数。我们认为，由于注 3.2，我们对公理 (e) 的表述在本质上是“正确的”；另参见定义 10.26(e)。无论如何，由下文的命题 12.9 可知，Balmer–Favi 余支撑函数满足 [Ver22，定义 32]中陈述的更强公理。因此，根据推论 11.10，任何将

弱诺特空间中的余局部化余理想（按推论中的含义）余分层的余支撑理论，都满足 [Ver22，定义 32]中的更强公理。

12. 对偶性

12.1. 定义。 设 κ 是闭对称幺半范畴 $\mathcal{T}$中的一个对象。若同态 $-,\kappa$ 限制后成为等价$\mathcal{T}_0 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}_0^{\mathrm{op}}$ ，则称 κ 对偶化 全子范畴 $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$。

12.2. 注记。 记 $\Delta_\kappa(x) \coloneqq$ 同态(x,κ)，注意到求值态射$\Delta_\kappa(x) \otimes x \to \kappa$ 与一个态射 $\phi_x\colon x \to \Delta_\kappa\Delta_\kappa(x)$ 伴随。求值的反自然性意味着 ϕ_x 关于 x是自然的。展开定义可知， κ对偶化 $\mathcal{T}_0$ 当且仅当 Δ_κ 保留 $\mathcal{T}_0$，且对所有 $x \in \mathcal{T}_0$， $x \to \Delta_\kappa\Delta_\kappa x$ 都是同构。

12.3. 例。 幺半单位 1 对偶化可对偶对象的全子范畴 $\mathcal{T}^d \subseteq \mathcal{T}$ ，也对偶化 $\mathcal{T}$的自反对象（即满足典范映射 $x \to (x^\vee)^\vee = \Delta_{\mathbb{1}}\Delta_{\mathbb{1}}(x)$ 是同构的那些 $x \in \mathcal{T}$）这一（可能更大的）全子范畴。更一般地，任何 $\otimes$-可逆对象 κ 所对偶化的子范畴恰与幺半单位 1 所对偶化的子范畴相同。

12.4.**命题**。 令 $\mathcal{T}$ 为一个三角范畴，带有相容的闭对称幺半群结构（如 [HPS97，附录 A]中所述）。令 $\kappa \in \mathcal{T}$ 为任意对象。它对偶化全子范畴

$$\mathcal{T}_\kappa \coloneqq \left\{ x \in \mathcal{T} \,\middle|\, \phi_x\colon x \to \Delta_\kappa\Delta_\kappa(x) \text{ is an equivalence} \right\}.$$

全子范畴 $\mathcal{T}_\kappa$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个厚 $\mathcal{T}^d$-子模（即满足 $\mathcal{T}^d \otimes \mathcal{T}_\kappa \subseteq \mathcal{T}_\kappa$的厚子范畴）。它包含 $\mathcal{T}$ 中任何被 κ对偶化的全子范畴。

证明。 函子 $\Delta_\kappa \coloneqq \hom(-,\ \kappa)$ 与自身伴随

$$\Delta_\kappa : \mathcal{T} \rightleftarrows \mathcal{T}^{\mathrm{op}} : \Delta_\kappa \tag{12.5}$$

，其中 ϕ_x （见）注记 12.2中的映射同时充当该伴随的单位和余单位。 κ 对偶化子范畴 $\mathcal{T}_\kappa$ 这一事实，只是任何伴随都会在单位为同构的对象全子范畴与余单位为同构的对象全子范畴之间诱导等价的体现。由于（12.5）是三角伴随， $\mathcal{T}_\kappa$是 $\mathcal{T}$的一个厚子范畴。要证明它是 $\mathcal{T}^d$-子模，只需注意，对于任意 $x \in \mathcal{T}$ 和 $y \in \mathcal{T}^d$，我们有

$$\Delta_\kappa\Delta_\kappa(x) \otimes y \simeq \Delta_\kappa\Delta_\kappa(x \otimes y)$$

以及 $\phi_x \otimes \mathrm{id}_y \simeq \phi_{x\otimes y}$。 最终结论可由注记 12.2直接看出。 □

12.6. 注记。 每个对象 $\kappa \in \mathcal{T}$ 都会使某个典范厚$\mathcal{T}^d$-子模对偶化为 $\mathcal{T}$，这一事实似乎此前并未被注意到（或重视），并由此为组织三角张量范畴中的对象带来了新的方法。例如，刚性 tt-范畴 $\mathcal{K}$ 的皮卡群恰好描述了那些使 $\mathcal{K}$ 自身对偶化的对象。对这一概念更深入的研究将留待未来开展。我们目前关注的是它与余支撑的联系。

12.7. 例 (Brown–Comenetz 对偶性)。 回顾一下，在 定义 9.4 中，我们为每个紧对象 I_c 构造了一个对象 c，它属于一个紧生成三角

范畴 $\mathcal{T}$。现在假设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴。由（9.6）可知， $I_c = c \otimes I_{\mathbb{1}}$ 对任意紧对象 $c \in \mathcal{T}^c$都成立。我们将任意对象 的 *Brown–Comenetz* 对偶 $t \in \mathcal{T}$定义为：

$$t^* \coloneqq \mathsf{hom}(t, I_{\mathbb{1}}).$$

该对象表示函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(\mathbb{1}, t \otimes -), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \colon \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}\,.$$

注意，对于一个紧对象 $c \in \mathcal{T}^c$，我们有 $c^* = I_{c^\vee}$。特别地， $\mathbb{1}^* = I_{\mathbb{1}}$。这一观察结合（9.6）表明，对象 $t = 0$ 当且仅当 $t^* = 0$。

12.8. 例。 当 $\mathcal{T} = \mathsf{SH}$ 是谱的范畴时，球谱 $I_{\mathbb{1}}$ 的 Brown–Comenetz 对偶对谱的同伦群有限的全子范畴取对偶；参见 [BC76]。

12.9. **命题**。 对于任意紧对象 $c \in \mathcal{T}^c$，我们有

$$\mathrm{Cosupp}(I_c) = \mathrm{supp}(c).$$

对于任意对象 $t \in \mathcal{T}$，我们有

$$\mathrm{Cosupp}(t^*) = \mathrm{Supp}(t).$$

若 $t \in \mathcal{T}_{I_{\mathbb{1}}}$，即 $t \xrightarrow{\sim} t^{**}$ 是同构，则

$$\mathrm{Cosupp}(t) = \mathrm{Supp}(t^*).$$

证明。 令 $c \in \mathcal{T}^c$。注意到

$$\begin{aligned}
\mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, I_c) = 0 &\iff \mathcal{T}(d \otimes g_{\mathcal{P}}, I_c) = 0 \ \text{ for all } d \in \mathcal{T}^c \\
&\iff \mathcal{T}(c, d \otimes g_{\mathcal{P}}) = 0 \ \text{ for all } d \in \mathcal{T}^c \\
&\iff \mathcal{T}(d^\vee, c^\vee \otimes g_{\mathcal{P}}) = 0 \ \text{ for all } d \in \mathcal{T}^c \\
&\iff c^\vee \otimes g_{\mathcal{P}} = 0.
\end{aligned}$$

此处，第二个等价依赖于 注记 9.7 中的讨论。因此，

$$\mathrm{Cosupp}(I_c) = \mathrm{Supp}(c^\vee) = \mathrm{supp}(c^\vee) = \mathrm{supp}(c).$$

特别地，余支撑$(I_{\mathbb{1}})$ $=$ 余支撑$(\mathbb{1}^*)$ $= \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$。对于第二个陈述，引理 4.29 给出了包含关系

$$\mathrm{Cosupp}(t^*) = \mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(t, \mathbb{1}^*)) \subseteq \mathrm{Supp}(t) \cap \mathrm{Cosupp}(\mathbb{1}^*) = \mathrm{Supp}(t).$$

另一方面，假设 $\mathcal{P} \in \mathsf{Supp}(t)$，因此 $g_{\mathcal{P}} \otimes t \neq 0$。于是，由于 I_c余生成，我们有 $\mathcal{T}(g_{\mathcal{P}} \otimes t, I_c) \neq 0$，其中某个对象紧 c。利用 $I_c \simeq c \otimes I_{\mathbb{1}}$，我们看到 $\mathcal{T}(c^\vee, \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, \mathsf{hom}(t, I_{\mathbb{1}}))) \neq 0$，因此 $\mathcal{P} \in \mathsf{Cosupp}(t^*)$。□

12.10. 例 （对偶化复形）。 分离诺特概形 X 上的一个对偶化复形[5] 是一个对象 $t \in \mathsf{D}^b(\mathsf{coh}\, X)$，它使 $\mathsf{D}^b(\mathsf{coh}\ X)$ 对偶化。

12.11. 定义。 我们称对象 $t \in \mathcal{T}$ 具有小余支撑 ，如果 $\mathsf{Cosupp}(t) \subseteq \mathsf{Supp}(t)$。

12.12. 例。 紧对象具有小余支撑，见 例 4.36。

[5]经典文献有时还要求“对偶化复形”具有有限内射维数。Neeman [Nee10] 强调，不应将这一要求纳入定义。

12.13. 注记。 如果 Supp(t) 是 Thomason，且余检测性质成立，那么 t具有小余支撑，当且仅当典范映射 $t \to$ 同态($e_{\mathrm{Supp}(t)}$, t) 是一个同构。由此，具有小余支撑与阿代尔完备性的导出概念相关。

12.14. 例。若 $X = \mathrm{Spec}(R)$ 是诺特仿射概形，则任意 $t \in \mathrm{D}^b(\mathrm{coh}\, X)$ 都具有小余支撑。事实上，Balmer–Favi 支撑 Supp(t) $\subseteq$ Spec(R) 与通常的上同调支撑 $\bigcup_{i\in}$ Z Supp($H^i(t)$) 重合，而后者只是有限个闭集的并，因此自身也是闭的。将这个闭集记为 $V(I)$，由 [PSY15, 定理 1.21]（另见 [SWW17, 定理 6.7] 和 [BIK12, 命题 4.19]），复形 t is cohomologically I-阿代尔完备，这意味着典范映射 $t \to$ hom($e_V(I)t$) 是一个同构。因此，余支撑 Cosupp(t) $\subseteq V(I)$ $=$ Supp(t)。

12.15. **命题**。 设 $\mathcal{T}$ 是分层的，并假设 $\kappa \in \mathcal{T}$ 对偶化子范畴 $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$。对于任意 $t \in \mathcal{T}_0$，我们有

$$\mathrm{Cosupp}(t) = \mathrm{Supp}(\Delta_\kappa(t)) \cap \mathrm{Cosupp}(\kappa).$$

特别地，如果 $\mathbb{1} \in \mathcal{T}_0$ （也就是说，如果 $\mathcal{T}^d \subseteq \mathcal{T}_0$），那么

$$\mathrm{Cosupp}(\mathbb{1}) = \mathrm{Supp}(\kappa) \cap \mathrm{Cosupp}(\kappa).$$

如果 $\mathcal{T}_0$ 的对象具有小余支撑，那么

$$\mathrm{Cosupp}(t) = \mathrm{Supp}(t) \cap \mathrm{Cosupp}(\kappa)$$

对每个 $t \in \mathcal{T}_0$。

证明。第一个结论直接由同构 $t \simeq \Delta_\kappa\Delta_\kappa$（$t$）和定理 7.15 得出。第二个结论是第一个结论的直接推论。因此，如果 $t \in \mathcal{T}_0$ 具有小余支撑，那么 Cosupp(t) $\subseteq$ Supp(t) $\cap$Cosupp(κ)。另一方面，如果 Δ_κ（t） $\in \mathcal{T}_0$ 也具有小余支撑，那么 Supp(t) $\cap$ Cosupp(κ) $=$ Cosupp($\Delta_\kappa(t)$) $\subseteq$ Supp($\Delta_\kappa(t)$)，由此可得 Supp(t) $\cap$ Cosupp(κ) $\subseteq$ Supp($\Delta_\kappa(t)$) $\cap$ Cosupp(κ) $=$ Cosupp(t)。□

12.16. 注记。 一般来说，对于任意紧对象 x，我们知道 Cosupp($=\mathrm{Supp}(x) \cap$ Cosupp($\mathbb{1}$。 $x \in \mathcal{T}^c$。 命题 12.15 的要点在于，它给出了更大的（不一定是紧的）对象的支撑与余支撑之间的关系。例如：

12.17.**推论**。 设 X 是一个具有对偶化复形的诺特仿射概形。那么

$$\mathrm{Cosupp}(t) = \mathrm{Supp}(t) \cap \mathrm{Cosupp}(\mathbb{1}).$$

对于任意 $t \in \mathrm{D}^b$(相干层 X)。

证明。设 $\kappa \in \mathrm{D}^b$(相干层 X) 是 X 的一个对偶化复形（例 12.10）。我们应用命题 12.15。由于有界相干层复形具有小余支撑（例 12.14），因此对于任意$t \in \mathrm{D}^b$(相干层 X)，我们得到 Cosupp(t) $=$ Supp(t) $\cap$Cosupp(κ)。注意，D^b(相干层 X) $\supseteq \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)^c$ 包含 1。此外，按照定义，对偶化复形自身属于 D^b(相干层 X)，因此自身具有小余支撑。由此可得 Cosupp(1) $=$ Cosupp(κ)，证毕。□

12.18. 注记。 许多概形都存在对偶化复形；例如，完备诺特局部环、戴德金整环，以及任意域上的有限型概形（例如参见 [Har66，第 10] 节）。命题 12.15和推论 12.17

为诸如 [BIK12，命题 4.18]；另见 [SWW17，定理 1.2]。另一方面，并非每个概形都存在对偶化复形（例如参见 [Sha79，Kaw02]）。

12.19. 例（Matlis 对偶）。设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个诺特局部环。Matlis 对偶表明，内射包 $E(k)$ 对偶化全子范畴 $\mathsf{thick}\langle k\rangle \subset \mathsf{D}(R) =: \mathcal{T}$。事实上，这种对偶性可以沿着映射 $R \to k$ 从 $\mathsf{D}(k)$ 上的普通对偶性“提升”而来；参见 [BDS16，例 7.2]。回顾一下，$\mathsf{thick}\langle k\rangle$ 由那些 R-模复形组成，它们只有有限多个非零同调模，且每个同调模都是有限长度模（例如参见 [DGI06]）。$\mathsf{thick}\langle k\rangle$ 中的对象具有小余支撑，因为有限长度模是 $\mathfrak{m}$-阿代尔完备的。考虑 $\mathsf{thick}\langle k\rangle \subseteq \mathcal{T}_{E(k)}$。由于 $\mathsf{hom}(E(k)\ E(k))$ 同构于 R 的 $\mathfrak{m}$-进完备化，我们看到 $\mathbb{1} \in \mathcal{T}_{E(k)}$ 当且仅当 R 完备，而 $\mathbb{1} \in \mathsf{thick}\langle k\rangle$ 当且仅当 R 是阿廷的（因而也是完备的）。注意，对偶化对象 $E(k)$ 通常并不属于它所对偶化的子范畴 $\mathsf{thick}\langle k\rangle$。例如，若 $R = \mathsf{Z}_{(p)}$，则 $E(k) = \mathsf{Z}(p^\infty)$，它是阿廷的但不是诺特的。注意，若 R 是维数为 d 的正则环（或更一般地，Gorenstein 环），则 $E(k) = \Sigma^d e_{\{\mathfrak{m}\}}$；因此，根据推论 8.12，$E(k)$ 不可能具有小余支撑，除非 $\dim(R) = 0$，也就是说，除非 R 是阿廷的（此时 $E(k) \in \mathsf{thick}\langle k\rangle$）。

第三部分：态射与下降

现在我们回到刚性紧生成 tt-范畴的研究中，考察支撑与余支撑的基变换结果，以及用于建立分层与余分层的下降技术。

13. The image of a geometric functor

我们先来观察一个一般性事实：由几何函子诱导的 Balmer 谱映射的像。文献中似乎一直忽略了这一点；它进一步表明 Balmer–Favi 支撑概念具有特殊的重要性。

13.1. 术语。 保持余积的张量三角函子 $f^*\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 在刚性紧生成张量三角范畴之间称为 几何函子。如 [BDS16], 所述，这样的函子有一个右伴随 f_*，而该右伴随本身也有一个右伴随 $f^!$。对象 $\omega_f := f^!(\mathbb{1}_{\mathcal{T}})\in\mathcal{S}$ 称为 f^*的相对对偶化对象。

13.2. 假设。 在本节中，$f^*\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 始终表示刚性紧生成张量三角范畴之间的一个几何函子，并且

$$\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c)\to\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$$

将表示 Balmer 谱上的诱导映射。我们还将在全文中假设 $\operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c)$ 和 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 都是弱诺特的。

13.3. 注记。 几何函子 $f^*\dashv f_*\dashv f^!$ 的伴随函子 f^* 之间满足若干有用的公式，详见 [BDS16，命题 2。15]特别是，投影公式

$$f_*(f^*(t)\otimes s)\cong t\otimes f_*(s)$$

对任意 $s\in\mathcal{S}$ 和 $t\in\mathcal{T}$ 都成立。利用 f_* 保持余积这一事实，可得

$$f_*\operatorname{Locid}\langle f^*(\mathcal{E})\rangle\subseteq\operatorname{Locid}\langle\mathcal{E}\rangle \tag{13.4}$$

对任意对象族 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{T}$ 都成立。

13.5. 注记。 虽然 f^* 的核是一个局部化理想，但 $f^!$ 的核是一个余局部化余理想。这是由另一个有用的公式推出的：

$$f^!\mathsf{hom}(t_1,t_2)\cong\mathsf{hom}(f^*t_1,f^!t_2) \tag{13.6}$$

对任意 t_1，$t_2\in\mathcal{T}$；参见 [BDS16，(2.19)]。

13.7. 注记。对于任意 Thomason 子集 $Y\subseteq\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，[BS17 命题 5.11] 已证明，$f^*(e_Y)=e_{\varphi^{-1}(Y)}$ 且 $f^*(f_Y)=f_{\varphi^{-1}(Y)}$。特别地，若$\mathcal{P}\in\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，则记 Thomason 子集 Y_1,Y_2 为 $\{\mathcal{P}\}=Y_1\cap Y_2^c$，可知原像 $\varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})=\varphi^{-1}(Y_1)\cap\varphi^{-1}(Y_2)^c$ 是弱可见子集，且$f^*(g_{\mathcal{P}})=e_{\varphi^{-1}(Y_1)}\otimes f_{\varphi^{-1}(Y_2)}=g_{\varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})}$。因此

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(g_{\mathcal{P}}))=\varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}). \tag{13.8}$$

结合 [BHS23 引理 2。13], 这推广为

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(g_{\mathcal{P}})\otimes s)=\varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})\cap\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(s)$$

对任意 $s\in\mathcal{S}$。这些观察将在证明中反复使用。

13.9. 注记。 注意，单位-余单位方程

$$\begin{tikzcd} f^*(t) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & f^*f_*f^*(t) \arrow[r] & f^*(t) \end{tikzcd}$$

这意味着，右伴随 f_* 在其左伴随 f^*的本质像上是保守的。另一个单位-余单位方程表明，同样地，左伴随在其右伴随的本质像上是保守的。

13.10. 定义。 对称幺半范畴中的一个弱环对象 是指一个对象 w，它存在映射 $\eta\colon \mathbb{1} \to w$，使得 $w \otimes \eta\colon w \to w \otimes w$ 是分裂单态射。类似地，弱余代数对象 是指一个对象 c，它存在映射 $\epsilon\colon c \to \mathbb{1}$，使得 $c \otimes \epsilon\colon c \otimes c \to c$ 是分裂满态射。注意，这些概念不区分左右。

13.11. 例。 左幂等元 e_Y 是弱余环，而右幂等元 f_Y 是弱环。事实上，这些例子都是幂等（余）环。更一般地，任意 smashing 局部化的左、右幂等元都是幂等（余）环。

13.12. 注记。 设 $\mathcal{A}$ 是一个对称幺半加性范畴，其中张量积函子 $a \otimes -\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是加性函子。设 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是任意加性函子。若 F 有一个左伴随 $L\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$，那么 F 在形如 $L(b) \otimes w$ 的对象上是保守的，其中 $b \in \mathcal{B}$ 是任意对象， $w \in \mathcal{A}$ 是弱环对象。事实上，若 $F(L(b) \otimes w) = 0$，那么

$$\mathcal{A}(L(b), L(b) \otimes w) = \mathcal{B}(b, F(L(b) \otimes w)) = 0.$$

因此，若 $\eta\colon \mathbb{1} \to w$ 是弱环 w 的单位，则映射 $L(b) \xrightarrow{1\otimes\eta} L(b) \otimes w$为零。这意味着 $L(b) \otimes w = 0$，因为 $L(b) \otimes w$ 的恒等映射可分解为

$$L(b) \otimes w \xrightarrow{1\otimes\eta\otimes 1} L(b) \otimes w \otimes w \to L(b) \otimes w$$

因此它本身也必须消失。类似地，如果 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 有一个右伴随 $R\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$，那么对于形如 $R(b) \otimes c$ 的对象， F 是保守的，其中 b 任意，且 c 是弱余环。

13.13. **定理**。 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是假设 *13.2* 中的几何函子。则对于任意弱环对象 $w \in \mathcal{S}$,

$$\varphi(\mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(w)) = \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(w))$$

满足以下条件之一：

(a) 对 $\mathcal{S}$满足检测性质；或 *(b)* 弱环对象 w 是紧的。

证明。 令 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，并回顾 注释 13.7 中的 $\operatorname{Supp}(f^*(g_{\mathcal{P}})) = \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$。对于任意对象 $w \in \mathcal{S}$，考虑以下蕴含关系：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} \in \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(w)) &\iff g_{\mathcal{P}} \otimes f_*(w) \neq 0 \\
&\iff f_*(f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes w) \neq 0 \\
&\underbrace{\Longrightarrow}_{(\dagger)} f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes w \neq 0 \\
&\underbrace{\Longleftarrow}_{(\ddagger)} \operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes w) \neq \varnothing \\
&\iff \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}) \cap \operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(w) \neq \varnothing \\
&\iff \mathcal{P} \in \varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(w)).
\end{aligned} \tag{13.14}
$$

注意，如果 $\mathcal{S}$ 具有检测性质，则 (‡) 蕴含的逆命题成立。若 w 是紧对象，该逆命题也成立。事实上，记 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap Y_2^c$，并令 $Y_1' := \varphi^{-1}(Y_1)$ 和 $Y_2' := \varphi^{-1}(Y_2)$，注意到对于任意紧对象 $x \in \mathcal{S}^c$，我们有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Supp}(f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes x) = \varnothing &\iff \operatorname{supp}(x) \cap Y_1' \subseteq Y_2' \\
&\iff e_{\operatorname{supp}(x) \cap Y_1'} \otimes f_{Y_2'} = 0 \\
&\iff e_{\operatorname{supp}(x)} \otimes e_{Y_1'} \otimes f_{Y_2'} = 0 \\
&\iff \operatorname{Locid}\langle e_{\operatorname{supp}(x)} \rangle \otimes e_{Y_1'} \otimes f_{Y_2'} = 0 \\
&\iff \operatorname{Locid}\langle x \rangle \otimes e_{Y_1'} \otimes f_{Y_2'} = 0 \\
&\iff x \otimes e_{Y_1'} \otimes f_{Y_2'} = 0.
\end{aligned}
$$

这里我们多次用到了 [BHS23，引理 1。27] 综上，我们已经证明，若检测性质成立或$\operatorname{Im}(f_*(w)) \subseteq \varphi$(支撑$_{\mathcal{S}}(w)$)。如果 w 是紧对象，则结论同样成立。剩下要证明的是，在假设†是弱环的条件下，() 蕴含的逆命题成立。此事已在注释 13.12中解释：右伴随 f_* 对形如 $f^*(t) \otimes w$ 且其中 w 为弱环的对象是保守的。□

13.15.**推论**。 我们总有如下等式

$$\operatorname{im}\varphi = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})).$$

证明。 将 定理 13.13 应用于环对象 $w := \mathbb{1}_{\mathcal{S}}$ 并注意到，在我们的弱诺特假设下，$\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) = \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c)$，例如可由 [BHS23，引理 2。18] 或注记4.8。□

13.16. 注记。 这个结果给出了几何函子所诱导的谱映射之像的无条件公式。它改进了 [Bal18，定理 1。7]后者要求右伴随 f_* 保持紧性。同调谱的类似结果见 [Bal20，定理 5。12]。

13.17. 例。 若 $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$是一个 smashing 局部化，且在 $\mathcal{T}$ 中有幂等三角 $e \to \mathbb{1}_{\mathcal{T}} \to f \to \Sigma e$，则 $\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 的像为 $\operatorname{Supp}(f)$。

13.18. 例。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的对称幺半稳定∞-范畴，其关联的同伦范畴为 $\operatorname{Ho}(\mathcal{C})$。若 $\operatorname{Ho}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Ho}(\operatorname{Mod}_{\mathcal{C}}(A))$ 是关于高度结构化交换代数$A \in \operatorname{CAlg}(\mathcal{C})$的标量扩张，则 $\operatorname{Spc}(\operatorname{Ho}(\operatorname{Mod}_{\mathcal{C}}(A))^c) \to \operatorname{Spc}(\operatorname{Ho}(\mathcal{C})^c)$ 的像为 $\operatorname{Supp}(A)$。

13.19. **推论**。 若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是保守的，则 $\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是满射。

证明。 确实， $0 \neq g_{\mathcal{P}}$ 推出 $0 \neq f^*(g_{\mathcal{P}})$，因此 $0 \neq f_*f^*(g_{\mathcal{P}}) \simeq f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes g_{\mathcal{P}}$ 根据注释 13.9。因此 $\operatorname{Supp}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，我们应用推论 13.15。 □

13.20. 注记。 相比之下，以下映射的保守性

$$f^*|_{\mathcal{T}^c}\colon \mathcal{T}^c \to \mathcal{S}^c$$

（即， f^* 在紧对象上的保守性）等价于 φ 的像包含所有闭点；参见 [Bal18, 定理 1.2]。事实上，推论 13.19 和 [Bal18, 定理 1.4] 证明，若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是保守的，则它满足一个针对紧对象之间态射的幂零定理（更多细节参见同上）。事实上， [BCH+23a, 定理 2.25] 从 f^* 的保守性推出一个更强的幂零定理，其中只要求源对象是紧的。结合 [Bal18, 定理 1.3], ，这给出了推论 13.19 的另一种证明；参见 [BCH+23a, 推论 2.26]。

13.21. **命题**。 如果 $f^!\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是保守的，那么 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 也是保守的。

证明。如果 $f^*(t) = 0$，则 $f!\mathsf{hom}(t,t) \cong \mathsf{hom}(f^*(t)\ f^!(t)) = 0$，由 (13.6) 得出。因此 $\mathsf{hom}(t,t) = 0$ ，从而 $t = 0$。 □

13.22. 注记。 我们稍后将证明，在 推论 13.19 和命题 13.21中，当 $\mathcal{T}$ 是分层的时，反向结论也成立；参见 推论 14.24。下文的 命题 13.33还将给出反向结论成立的另一种情形。我们将看到，这些保守性性质与以下概念密切相关，其名称源自 [Mat16]:

13.23. 定义。 我们称几何函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是弱可下降的，当且仅当 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \operatorname{Locid}\langle f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。

13.24. 注记。 若 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \operatorname{Locid}\langle f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$ 则由 (2.6) 和 (2.8) 可得

$$t \in \operatorname{Locid}\langle f_*f^*t\rangle \quad \text{and} \quad t \in \operatorname{Colocid}\langle f_*f^!t\rangle$$

对所有 $t \in \mathcal{T}$均成立。因此， f^* 和 $f^!$ 都是保守的。

13.25. 注记。 对于任意紧对象 $x \in \mathcal{S}^c$，定理 13.13 蕴含

$$\varphi(\operatorname{supp}(x)) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(x \otimes x^\vee)).$$

事实上，只需回顾一下， $x \otimes x^\vee \cong$ 同态$(x,\ x)$ 是自同态环对象，并且 $\operatorname{supp}(x) = \operatorname{supp}(x \otimes x^\vee)$。对于任意对象 $s \in \mathcal{S}$，我们也可以考虑自同态环对象 $\mathsf{hom}(s,\ s)$。该定理给出

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(\mathsf{hom}(s,s))) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*\mathsf{hom}(s,s))$$

假设 $\mathcal{S}$ 满足检测性质。

13.26. 注记。 注意，如果 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的，那么 推论 13.15 意味着像 $\operatorname{im}\varphi =$ 支撑$(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) =$ 支撑$(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}))$ 是闭的。此外，如果 f_* 保留所有紧对象（而不仅仅是 $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$），那么 注记 13.25 表明 φ 将每个 Thomason 闭子集映射为 Thomason 闭子集。因此， φ 是一个闭映射（例如参见 [DST19，定理 5.3。3]由此引出以下术语:

13.27. 定义。 我们称 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 为弱闭，如果 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的；如果 f_* 保留紧对象，则称其为强闭。注意，如果 $\mathcal{S}$ 是单生成的，那么弱闭态射自动也是强闭的。

13.28. 注记。 上述术语更多是出于语法和语言表达上的便利，而非具有深刻的数学意义。我们并不声称它准确地捕捉了张量三角几何中"闭态射"的正确几何概念。例如，仿射概形的闭浸入 $\operatorname{Spec}(R/I) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ 会诱导一个几何函子 $\mathrm{D}(R) \to \mathrm{D}(R/I)$，但按照 定义 13.27 的意义，它往往并非（弱或强）闭的；参见 [San198]。

13.29. 注记。 按照 [BDS16]，的术语，几何函子 f^* 是强闭的，当且仅当它满足 *Grothendieck–Neeman* 对偶 (简称 GN 对偶)。正如 [BDS16]，所解释的，态射 f^* 满足 GN 对偶，当且仅当它保持积；当且仅当它有左伴随；当且仅当这组三个函子 $f^* \dashv f_* \dashv f^!$ 能够向两侧扩展为由五个伴随函子组成的序列：

$$f_! \dashv f^* \dashv f_* \dashv f^! \dashv f_{(-1)}. \tag{13.30}$$

因此，对于左伴随定理 13.13 也有一个类似的结果 $f_!$:

13.31. **定理**。 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个满足假设 *13.2* 的几何函子。如果 f^* 是强闭的，那么对任意弱余代数对象 $w \in \mathcal{S}$,

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(w)) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(f_!(w))$$

并且满足以下条件之一：

(a) $\mathcal{S}$ 满足检测性质；或 *(b)* 该弱余代数对象是紧的。

证明。证明过程与定理 13.13 的证明类似，只需将 f_* 替换为 $f_!$。注意，左投影公式由 [BDS16, (3.11)] 得到。为得到 (†) 的类似结果中的从右到左的蕴含，即 $f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes w \neq 0$ 蕴含 $f_!(f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes w) \neq 0$，再次利用注释 13.12 中解释的事实：左伴随函子 $f_!$ 在形如 $f^*(t) \otimes w$ 的对象上是保守的，其中 w 是一个弱余环。□

13.32. 注记。根据 [BDS16 的 ur-Wirthm¨uller 同构，(3.10)], $f_!(s) \simeq f_*(s \otimes \omega_f)$ 对任意 $s \in \mathcal{S}$ 均成立。特别地，将其应用于弱余环 $s := \mathbb{1}_{\mathcal{S}}$，定理 13.31 蕴含 $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{Supp}(f_*(\omega_f))$。因此，若 f^* 强闭，则 $f_*(\omega_f)$ 和 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 具有相同的支撑。对于一般的几何函子 f^*，这两个对象可能大不相同。例如，若 f^* 是例 13.17 中的 smashing 局部化，则 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) = f$，而 $f_*(\omega_f) = \hom(f, \mathbb{1}_{\mathcal{T}})$。当然，smashing 局部化很少是强闭的。另一方面，根据[San22]， f^* 为有限 ´étale 的一个必要条件是 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \simeq f_*(\omega_f)$。我们已经证明，对于任意强闭函子，这两个对象具有相同的支撑。

13.33. **命题**。 假设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是弱闭的（定义 *13.27*）。以下条件等价：

(*a*) f^* 是弱可下降的（定义 *13.23*）；(*b*) $f^!$ 是保守的；(*c*) f^* 是保守的；(*d*) $\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是满射。

证明。蕴含关系 $(a) \Rightarrow (b)$ 由注 13.24 得出，$(b) \Rightarrow (c)$ 是命题 13.21，而 $(c) \Rightarrow (d)$ 是推论 13.19。对于 $(d) \Rightarrow (a)$，注意到 φ 的满射性蕴含，根据推论 13.15，$\mathsf{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = \mathsf{Spc}(\mathcal{T}^c)$，且根据假设，$f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的。因此，由 $\mathcal{T}^c$ 的厚理想分类可知，$\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \mathsf{thickid}\langle f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle \subseteq \mathsf{Locid}\langle f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。□

14. Base change for support and cosupport

现在我们转而讨论对任意对象都成立的基变换公式。为此，我们需要对函子或范畴添加一些假设。

14.1. 假设。我们继续令 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 表示一个任意几何函子，并假设 $\mathsf{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 和 $\mathsf{Spc}(\mathcal{S}^c)$ 都是弱诺特的。我们记

$$\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$$

对于谱上的诱导映射。

14.2. **命题**。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 如上所述（假设 *14.1*），并设 $s \in \mathcal{S}$。（*a*）若 $\mathcal{S}$ 具有检测性质，则

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(s)) \subseteq \varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(s))$$

当函子 f_* 是保守的时，等号成立。

（*b*）若 $\mathcal{S}$具有余检测性质，则

$$\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(f_*(s)) \subseteq \varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(s))$$

当函子 f_* 是保守的时，等号成立。

证明。证明的设置与 定理 13.13的证明相同。设 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。对于（$a$）部分，考虑 13.14）中列出的蕴含关系，该蕴含关系见 定理 13.13的证明。注意，若 ‡具有检测性质，则（ $\mathcal{S}$ ）从左到右的方向成立。因此，从左到右推导可得（a）部分的包含关系。另一方面，若†则（ f_* ）从右到左的方向成立。

对于（b），考虑一系列类似的蕴含：

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \in \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(f_*(s)) &\iff \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, f_*(s)) \neq 0 \\
&\iff f_*\mathsf{hom}(f^*(g_{\mathcal{P}}), s) \neq 0 \\
&\underbrace{\Longrightarrow}_{(\dagger)} \mathsf{hom}(f^*(g_{\mathcal{P}}), s) \neq 0 \\
&\underbrace{\Longleftarrow}_{(\ddagger)} \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(\mathsf{hom}(f^*(g_{\mathcal{P}}), s)) \neq \varnothing \\
&\iff \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}) \cap \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(s) \neq \varnothing \\
&\iff \mathcal{P} \in \varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(s)).
\end{aligned} \tag{14.3}$$

同样，当 $\mathcal{S}$ 具有余检测性质时，（‡）的逆命题成立；若 f_* 是保守的，则（†）的逆命题成立。□

14.4. 注记。如果右伴随 f_* 不是保守的，那么存在一些对象，使得命题14.2 中的不等式是严格的。

14.5. 注记。众所周知，这是一个习题（回忆一下 注 9.12），右伴随 f_* 是保守的，当且仅当 f^* 将 $\mathcal{T}$ 的紧生成元集映射到 $\mathcal{S}$ 的（紧）生成元集，也就是说，当且仅当 $\mathcal{S}^c = \text{厚生成}\langle f^*(\mathcal{T}^c)\rangle$。

例如，如果 $\mathcal{S}$ 是单生成的，那么每个几何函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 都有一个保守右伴随。

14.6. 注记。 几何函子的右伴随 f_* 总是具有如下意义上的“弱保守性”：对于任意非零 $s \in \mathcal{S}$，总存在某个紧对象 $c \in \mathcal{S}^c$，使得 $f_*(c \otimes s) \neq 0$。事实上，由于 $\mathcal{S}$ 是紧生成的，如果 $s \neq 0$，那么对于某个紧对象 $c \in \mathcal{S}^c$，有 $\mathcal{S}(c,\ s) \neq 0$。将 c 替换为其对偶，我们可以断言存在某个紧对象 $c \in \mathcal{S}^c$，使得 $\mathcal{S}(\mathbb{1}_{\mathcal{S}},\ c \otimes s) \neq 0$。由于$\mathbb{1}_{\mathcal{S}} = f^*(\mathbb{1}_{\mathcal{T}})$，伴随关系推出 $\mathcal{T}(\mathbb{1}_{\mathcal{T}},\ f_*(c \otimes s)) \neq 0$，因而 $f_*(c \otimes s) \neq 0$。理解这一现象的一种方式是注意到，虽然 f_* 的核是一个局部化子范畴，但它未必是一个理想。事实上，上述论证表明，其中包含的最大局部化理想，即

$$\left\{ s \in \mathcal{S} \,\middle|\, f_*(c \otimes s) = 0 \ \forall c \in \mathcal{S}^c \right\}$$

始终是零理想。换言之，几何函子 f_* 的核是理想，当且仅当其右伴随 f_* 是保守的。

14.7. **命题**。 设 $f^*\colon \ \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 如上所述（假设 *14.1*），并令 $t \in \mathcal{T}$。

(a) 我们总有包含关系

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t))) \subseteq \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) \subseteq \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \operatorname{im}\varphi.$$

(b) 如果 $\mathcal{S}$ 具有检测性质，那么

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t))) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})).$$

(c) 如果 $\mathcal{S}$ 具有检测性质且 $\mathcal{T}$ 是分层的，那么

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t))) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \operatorname{im}\varphi.$$

(d) 如果 f^* 是保守的，那么

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t),$$

因此

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t)$$

如果 $\mathcal{S}$ 也具有检测性质。

证明。 设 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，并记 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap Y_2^c$其中 Y_1 且 Y_2 Thomason。回顾注释 13.7。对于任意对象 $t \in \mathcal{T}$ 考虑以下蕴含关系：

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \in \varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t))) &\iff \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}) \cap \operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) \neq \varnothing \\
&\iff \operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes f^*(t)) \neq \varnothing \\
&\underbrace{\Longrightarrow}_{(\dagger)} f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes f^*(t) \neq 0 \\
&\iff f^*(g_{\mathcal{P}} \otimes t) \neq 0 \\
&\underbrace{\Longleftarrow}_{(\ddagger)} f_*(f^*(g_{\mathcal{P}} \otimes t)) \neq 0 \\
&\iff g_{\mathcal{P}} \otimes t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \neq 0 \\
&\iff \mathcal{P} \in \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})).
\end{aligned} \tag{14.8}$$

注意到，借助‡，(注释 13.9) 的逆命题成立。因此，从左向右即可得到第 (a) 部分中的第一个包含关系，而第 (a) 部分中的第二个包含关系则由推论 13.15和 [BHS23，注释 2.12(e)]得出。这就证明了 (a)。现在，若满足检测性质，则 (†) 的逆命题成立。因此，从右向

左即可得到 (*b*)。第 (*c*) 部分由第 (*b*) 部分结合张量积公式 ([BHS23, 定理 8.2]) 得出；该公式成立是因为 $\mathcal{T}$ 是分层的，并由推论 13.15 得出：支撑$_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = $支撑$_{\mathcal{T}}(t) \cap$ 支撑$_{\mathcal{T}}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = $支撑$_{\mathcal{T}}(t) \cap \operatorname{im}\varphi$。对于第 (*d*) 部分，只需证明当 f^* 是保守的时，支撑$_{\mathcal{T}}(t) \subseteq$支撑$_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}))$。事实上，若 f^* 是保守的，则复合映射 f_*f^* (注释 13.9) 也保守，因此 $0 \neq g_{\mathcal{P}} \otimes t$推出 $0 \neq f_*f^*(g_{\mathcal{P}} \otimes t) \simeq g_{\mathcal{P}} \otimes t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$。□

14.9. 注记。若 $\mathcal{S}$ 具有检测性质，则等式

$$\varphi(\operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t))) = \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \operatorname{im}\varphi$$

在以下情况下也成立（无需对 f^* 或 $\mathcal{S}$作额外假设）：若对象 t 是紧对象，或是左幂等元 e_Y，或是右幂等元 f_Y，或是对象 $g_{\mathcal{P}}$。事实上，在这些情况下，包含关系 Supp$_{\mathcal{T}}(t \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) \subseteq \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \cap$Supp$_{\mathcal{T}}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}))$ 由 [BHS23、引理 2.13 和引理 2.18]给出，且为等式。

14.10. **命题**。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 如上所述（假设 *14.1*），并令 $t \in \mathcal{T}$.

(a) 我们总有包含关系

$$\varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t))) \subseteq \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(\mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)) \subseteq \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \operatorname{im}\varphi.$$

(b) 如果 $\mathcal{S}$具有余检测性质，那么

$$\varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t))) = \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(\mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)).$$

(c) 如果 $\mathcal{S}$ 具有余检测性质且 $\mathcal{T}$ 是分层的，那么

$$\varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t))) = \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \operatorname{im}\varphi.$$

(d) 如果 $f^!$ 是保守的，那么

$$\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(\mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)) = \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t),$$

因此

$$\varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) = \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t)$$

如果 $\mathcal{S}$ 也具有余检测性质。

证明。证明与 命题 14.7 的证明类似。设 $\mathcal{P} \in$Spc$(\mathcal{T}^c)$，并记 $\{\mathcal{P}\} = Y_1 \cap Y_2^c$，其中 Y_1 且 Y_2 为 Thomason。对于任意对象 $t \in \mathcal{T}$，考虑以下与（13.14）类似的蕴含关系：

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \in \varphi(\operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t))) &\iff \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}) \cap \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) \neq \varnothing \\
&\iff \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{S}}(\mathsf{hom}(f^*(g_{\mathcal{P}}), f^!(t))) \neq \varnothing \\
&\underbrace{\Longrightarrow}_{(\dagger)} \mathsf{hom}(f^*(g_{\mathcal{P}}), f^!(t)) \neq 0 \\
&\underbrace{\Longleftarrow}_{(\ddagger)} f_*\mathsf{hom}(f^*(g_{\mathcal{P}}), f^!(t)) \neq 0 \\
&\iff \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, f_*f^!(t))) \neq 0 \\
&\iff \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}}, \mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)) \neq 0 \\
&\iff \mathcal{P} \in \operatorname{Cosupp}_{\mathcal{T}}(\mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)).
\end{aligned} \tag{14.11}$$

这里我们用到了 f_*hom$(f^*(a)\ b) \cong$hom$(a, f_*(b))$ 和 $f_*f^!(t) \cong f_*$hom$(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}, f^!(t)) \cong$hom$(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\ t)$ 这两个在 [BDS16] 中建立的伴随同构。此外，(13.6) 中的同构 $f^!$hom$(a, b) \cong$hom$(f^*(a)\ f^!(b))$ 表明 hom$(f^*(g_{\mathcal{P}})\ f^!(t))$ 属于 $f^!$ 的本质像，因此由注释 13.9 可得 (‡) 的逆命题成立

成立。于是，从左到右可得第 (*a*) 部分中的第一个包含关系，而第二个包含关系是余支撑的一项标准性质 (4.30)，再结合推论 13.15 即可得到。这就证明了 (*a*)。现在，当余检测性质成立时，(†) 的逆命题成立。因此，从右到左可得 (*b*)。由第 (*b*) 部分可得第 (*c*) 部分：应用 Hom 公式（定理 7.15），并利用 $\mathcal{T}$ 是分层的以及推论 13.15。对于第 (*d*) 部分，只需证明当 $f^!$ 保守时，$\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) \subseteq \mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(\hom(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t))$。确实，若 $\hom(g_{\mathcal{P}}, t) \neq 0$，则根据注释 13.9，有 $f_*f^!\hom(g_{\mathcal{P}}, t) \neq 0$。也就是说，$0 \neq f_*f!\hom(g_{\mathcal{P}}, t) \cong f_*\hom(f^*(g_{\mathcal{P}}), f^!(t)) \cong \hom(g_{\mathcal{P}}, f_*f!(t))$，并注意 $f_*f^!(t) \cong \hom(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)$。□

14.12. **推论**。设 f^* 是弱闭的（定义 *13.27*）。那么：

(a) 若 $\mathcal{S}$ 具有检测性质，则

$$\varphi(\mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) = \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \mathrm{im}\,\varphi$$

对每个 $t \in \mathcal{T}$均成立。

(b) 若 $\mathcal{S}$具有余检测性质，则

$$\varphi(\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) = \mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) \cap \mathrm{im}\,\varphi$$

对每个 $t \in \mathcal{T}$均成立。

证明。这由*a*) 和 (*b*中的部分结论，以及命题 14.7 和命题 14.10，再结合半张量定理和半同态定理（[BHS23，引理 2。18] 和命题 4.35）。□

14.13. 注记。由命题 14.7(*a*) 和 命题 14.10(*a*) 可知，对任意 $t \in \mathcal{T}$，有以下包含关系：

$$\mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) \subseteq \varphi^{-1}(\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t)), \text{ and}$$
$$\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) \subseteq \varphi^{-1}(\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t)).$$

我们的下一个目标是证明，当 $\mathcal{T}$ 是分层的时，这些包含关系成为等式；见下文推论 14.19 。

14.14. **引理**。设 $\mathcal{Q} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{S}^c)$。对于任意 $s \in \mathcal{S}$，有

$$\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(s \otimes g_{\mathcal{Q}})) \subseteq \{\varphi(\mathcal{Q})\}.$$

证明。假设 $\mathcal{P} \in \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(f_*(s \otimes g_{\mathcal{Q}}))$. 那么

$$f_*(f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes s \otimes g_{\mathcal{Q}}) \simeq g_{\mathcal{P}} \otimes f_*(s \otimes g_{\mathcal{Q}}) \neq 0$$

从而 $f^*(g_{\mathcal{P}}) \otimes g_{\mathcal{Q}} \neq 0$。也就是说，$\mathcal{Q} \in$ 支撑$_{\mathcal{S}}(f^*(g_{\mathcal{P}})) = \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$，根据注释 13.7。因此 $\mathcal{P} = \varphi(\mathcal{Q})$。□

14.15. **定理**（局部 Avrunin–Scott 恒等式）。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是 假设 *14.1* 中的几何函子，且 $t \in \mathcal{T}$。假设对于所有 $\mathcal{P} \in$支撑$_{\mathcal{T}}(t)$，局部化理想 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 都是极小的。那么：

$$\mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t)); \text{ and} \tag{14.16}$$
$$\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t)). \tag{14.17}$$

证明。 $\subseteq$ 包含关系总是成立（备注 14.13）。为证明（14.16）中的 $\supseteq$ 包含关系，假设 $\Omega \in \varphi^{-1}$(支撑$_{\mathcal{T}}(t)$)，于是 $\varphi(\Omega) \in$ 支撑$_{\mathcal{T}}(t)$。由于 $\Gamma_{\varphi(\Omega)}\mathcal{T}$是极小的，因此 $g_{\varphi(\Omega)} \in \mathrm{Locid}\langle t\rangle$。因此 $f^*(g_{\varphi(\Omega)}) \in \mathrm{Locid}\langle f^*(t)\rangle$。故

$$\Omega \in \varphi^{-1}(\{\varphi(\Omega)\}) = \mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(g_{\varphi(\Omega)})) \subseteq \mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)),$$

其中，第一个等式由注释 13.7 得出。接下来需要证明 (14.17) 中的 $\supseteq$包含关系。假设 $\Omega \notin$ 余支撑$_{\mathcal{S}}(f^!(t))$。我们将证明 $\Omega \notin \varphi^{-1}$(余支撑$_{\mathcal{T}}(t)$)。由备注 14.6 和引理 14.14，存在一个紧$c \in \mathcal{S}^c$，使得 支撑$_{\mathcal{T}}(f_*(c \otimes g_\Omega)) = \{\varphi(\Omega)\}$。由于 $\Gamma_{\varphi(\Omega)}\mathcal{T}$是极小的，我们得出

$$g_{\varphi(\Omega)} \in \mathrm{Locid}\langle f_*(c \otimes g_\Omega)\rangle. \tag{14.18}$$

现在，由假设可知 $\Omega \notin$余支撑$_{\mathcal{S}}(f^!(t))$，因此 $\mathsf{hom}(g_\Omega, f^!(t)) = 0$。于是 $\mathsf{hom}(c \otimes g_\Omega, f^!(t)) = 0$，从而

$$\mathsf{hom}(f_*(c \otimes g_\Omega), t) \simeq f_*\mathsf{hom}(c \otimes g_\Omega, f^!(t)) = 0.$$

因此，同态$(g_{\varphi(\Omega)}, t) = 0$ 由（14.18）得出。也就是说，$\varphi(\Omega) \notin$ 余支撑$_{\mathcal{T}}(t)$。 □

14.19.**推论** （全局 Avrunin–Scott 恒等式）。 若 $\mathcal{T}$ 是分层的，则对任意$t \in \mathcal{T}$，有：

$$\mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t)); \text{ and} \tag{14.20}$$

$$\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t)). \tag{14.21}$$

证明。 事实上， [BHS23，定理 41] 表明，对 $\mathcal{T}$ 的分层会使其谱中的每个点都具有极小性，因此结论由 定理 14.15 得出。 □

14.22.注记。 在张量三角范畴中，支撑与余支撑的 Avrunin–Scott 恒等式曾在更严格的假设下进行研究，见 [BCHV19，命题 314]。这些恒等式源自 Avrunin–Scott [AS82] 关于有限群表示的支撑簇的工作。

14.23. 注记。 若假设右伴随 f_* 是保守的，那么通过修改 推论 14.19 的证明，我们可以在对范畴 $\mathcal{T}$ 稍弱的假设下证明其中的 Avrunin–Scott 恒等式，见 [BCHV19，命题 314]；具体而言， f^* 的恒等式在 $\mathcal{T}$ 满足张量积公式时成立，而 $f^!$ 的恒等式在 $\mathcal{T}$ 满足 Hom 公式时成立。回顾一下，前者由分层性推出（[BHS23，定理 82]），后者则等价于分层性（定理 7.15）。

14.24. **推论**。 设 $\mathcal{T}$是分层的。对于 $f^*: \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 如 假设 *14.1*所述，以下条件等价：

(a) f^* 是弱可下降的（定义 *13.23*）；*(b)* $f^!$ 是保守的；*(c)* f^* 是保守的；*(d)* φ: $\mathrm{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是满射。

证明。由注 13.24 可得 $(a) \Rightarrow (b)$；$(b) \Rightarrow (c)$ 是命题 13.21；而 $(c) \Rightarrow (d)$ 是推论 13.19。对于 $(d) \Rightarrow (a)$，注意到由推论 13.15， φ 的满射性蕴含 Supp$_{\mathcal{T}}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$。若 $\mathcal{T}$ 是分层的，则这意味着 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in$Locid$\langle f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。 □

14.25. 例。 设 $(R,\ \mathfrak{m},\ k)$ 是一个交换诺特局部环，其极大理想 $\mathfrak{m}$ 是幂零的（也就是说， R 是一个交换阿廷局部环）。 推论 14.24表明函子 $\mathrm{D}(R) \to \mathrm{D}(k)$ 是保守的。因此，若 M 是一个任意的平坦 R-模，我们便可得出 $M/\mathfrak{m}M = 0$ 蕴含 $M = 0$。这是中山引理的一个众所周知的变体，它以平坦性和理想 M的幂零性取代模 $\mathfrak{m}$的有限生成；参见 [Mat89，定理 7。10]。

14.26. 例。令 A 为 [Kel94] 中记作 A 的环。它是一个秩 1 的非离散赋值整环，其值群为 $\mathbf{Z}[1/\ell] \subset \mathbf{Q}$；参见 [FS01，定理 II.3.8]。于是，任意非零主理想 $R := A/xA$ 的商环都是一个非诺特局部环，其谱只有一个点。到剩余域 $f\colon R \to k$ 的映射诱导函子 $f^*\colon \mathsf{D}(R) \to \mathsf{D}(k)$，它在谱上是满射的。然而， R 的极大理想满足 $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ ，并且作为 R-模是平坦的。因此， $M := \mathfrak{m}$ 是一个非零的 R-模，被 f^* 消去。我们得出结论：$\mathsf{D}(R)$ 不可能是分层的，因为这将与推论 14.24 矛盾。另一种说法是，根据 Bazzoni–Šťovíček 的研究（参见 [BŠ17，例 5.24]），$\mathsf{D}(R) \to \mathsf{D}(k)$ 是一个没有有限无环对象的 smashing 局部化。因此，$\mathsf{D}(R)$ 不满足望远镜猜想；我们也可以引用 [BHS23，定理 9.11]，得出它不是分层的结论。

14.27. 例。 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换诺特局部环，并令 R 的 $\mathfrak{m}$-进完备化。诱导函子 $\mathsf{D}(R) \to \mathsf{D}(\widehat{R})$ 是保守的。事实上， $R \to \widehat{R}$ 忠实平坦，因此 $\operatorname{Spec}(\widehat{R}) \to \operatorname{Spec}(R)$ 是满射。

15. Descending the local-to-global principle

现在我们给出局部到整体原理的一种下降版本。

15.1. **命题**。 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 如上（假设 *14.1*）。假设 $\mathcal{S}$满足局部到整体原理。那么

$$t \in \operatorname{Locid}\langle t \otimes g_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t)\rangle$$

对任意对象 $t \in \mathcal{T}$，使得 $t \in \operatorname{Locid}\langle f_* f^* t\rangle$。

证明。 由 $\mathcal{S}$ 中的局部到整体原理可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Locid}\langle f^* g_{\mathcal{P}}\rangle &= \operatorname{Locid}\langle f^* g_{\mathcal{P}} \otimes g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})\rangle \\ &= \operatorname{Locid}\langle g_{\varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})} \otimes g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})\rangle \\ &= \operatorname{Locid}\langle g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})\rangle\end{aligned}$$

对任意 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，其中最后一个等式用到了 注 4.8。因此

$$\operatorname{Locid}\langle f^* t \otimes f^* g_{\mathcal{P}}\rangle = \operatorname{Locid}\langle f^* t \otimes g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})\rangle \tag{15.2}$$

由 [BHS23，引理 3。6], 例如。于是，根据 $f^* t$ 的局部到整体原理，我们有

$$\begin{aligned} f^* t &\in \operatorname{Locid}\langle f^* t \otimes g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \operatorname{Supp}_{\mathcal{S}}(f^* t)\rangle \\ &\subseteq \operatorname{Locid}\langle f^* t \otimes g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t))\rangle && \text{(Remark 14.13)} \\ &= \operatorname{Locid}\langle f^* t \otimes f^* g_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t)\rangle && \text{(by (15.2)).}\end{aligned}$$

利用（13.4），我们得到

$$f_* f^* t \in \operatorname{Locid}\langle t \otimes g_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \operatorname{Supp}_{\mathcal{T}}(t)\rangle$$

由此得证。 □

15.3. 注记。 由 推论 13.15 可知，满足 $t \in \mathrm{Locid}\langle f_* f^* t\rangle$ 的对象，其支撑包含于 φ 的像中。对于某些函子，逆命题也成立：若 $\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \subseteq \mathrm{im}\,\varphi$，则 $t \in \mathrm{Locid}\langle f_* f^* t\rangle$。以下两个例子便是如此：

(a) 有限局部化 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}(U)$，假设 $\mathcal{T}$具有检测性质。在这种情况下，$\mathrm{im}\,\varphi = U$，且 $f_* f^* t \cong t$对所有 t支撑于 U 的 f^*弱闭函子： $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$假设 $\mathcal{T}$ 具有检测性质。此结论由 [BHS23 引理 3 得出。7]。

直观地说，我们可以认为命题 15.1 表明，局部到整体原理可沿着 f^* 部分地下降到支撑于 φ的像中的对象上。不过请注意，如果 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$是一个不保守的函子，但 φ却是满射（例如例 14.26中所述的函子），那么就存在一个对象 $t \in \mathcal{T}$，使得 $\mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t) \subseteq \mathrm{im}\,\varphi$，但同时 $t \notin \mathrm{Locid}\langle f_* f^* t\rangle$，因此上述直觉并不完全准确。

15.4. 注记。 由备注 14.13 可知，以下结论成立：

(a) 若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是保守的，则检测性质从 $\mathcal{S}$下降到 $\mathcal{T}$。(b) 若 $f^!\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是保守的，则余检测性质从 $\mathcal{S}$下降到 $\mathcal{T}$。

由于余检测性质等价于（余）局部到整体原理（由定理 6.4可知），我们看到，当 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{T}$的 $f^!$ 是保守的时，局部到整体原理会下降。

15.5. 例。若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$是全忠实的，则局部到整体原理从 $\mathcal{S}$ 下降到 $\mathcal{T}$。这由命题 15.1 得出，因为对所有 $t \in \mathcal{T}$， $t \cong f_* f^* t$ 。此外，由注 15.4 也可得出，因为若 f^* 是全忠实的，则 $f^!$ 是保守的。事实上，一般而言， $f_* f^!(t) \cong$同态$(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), t)$；当 f^* 是全忠实的时，这变为 $f_* f^!(t) \cong t$，因为 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \cong \mathbb{1}_{\mathcal{T}}$ （例如参见 San22，注记 4.13]）。

15.6. 例。 若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$是保守且弱闭的，则局部到整体原理从 $\mathcal{S}$ 下降到 $\mathcal{T}$。这由 命题 13.33 和注 15.4得出。也可以将其视为 命题 15.1的一个应用。

16. Local cogeneration

我们已在第 9 节看到，紧生成范畴可由其紧对象的 Brown–Comenetz 对偶对象完美余生成。现在我们将说明如何利用这些对偶对象，在 tt-几何学中构造合适的局部余生成元。这将是我们在第 17 节中证明下降余分层的自举结果的一项重要组成部分。

16.1.**命题**。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴。

(a) 设 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为一个 *Thomason* 子集。子范畴 同态$(e_Y, \mathcal{T})$ 由 $\{ I_c \mid$ 支撑$(c) \subseteq Y \}$ 完美余生成。特别地，

$$\mathsf{hom}(e_Y, \mathcal{T}) = \mathrm{Coloc}\langle I_c \mid \mathrm{supp}(c) \subseteq Y\rangle.$$

(b) 设 $Y_1, Y_2 \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为 *Thomason* 子集，并考虑弱可见子集 $W := Y_1 \cap Y_2^c$。子范畴 $\Lambda^W\mathcal{T}$ 由 $\{\Lambda^W I_c \mid \text{支撑}(c) \subseteq Y_1\}$ 完美余生成。特别地，

$$\Lambda^W\mathcal{T} = \operatorname{Coloc}\langle \Lambda^W I_c \mid \operatorname{supp}(c) \subseteq Y_1\rangle.$$

证明。设 $\mathcal{K} := \mathcal{T}^c$，并设 $\mathcal{K}_Y := \{x \in \mathcal{K} \mid \operatorname{supp}(x) \subseteq Y\}$。由例 12.7 和命题 9.9，$\mathcal{T}$ 由 $\{I_c \mid c \in \mathcal{K}\} = \mathcal{K} \otimes I_{\mathbb{1}}$ 完美余生成。回忆引理 4.5，$\hom(e_Y, \mathcal{T}) = \operatorname{Coloc}\langle \mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{T}\rangle$。因此，引理 10.12（应用于 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$）推出，$\hom(e_Y, \mathcal{T})$ 由 $\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{K} \otimes I_{\mathbb{1}} = \mathcal{K}_Y \otimes I_{\mathbb{1}} = \{I_c \mid c \in \mathcal{K}_Y\}$ 完美余生成。这就证明了（a）。

通过将b应用于命题 9.11 的部分（a），即可得到部分（

$$\hom(f_{Y_2}, -)\colon \hom(e_{Y_1}, \mathcal{T}) \to \hom(g_W, \mathcal{T}) \tag{16.2}$$

保持积。因此，由于定义域范畴是完美余生成的（由部分（a）可知），它必定有一个左伴随。事实上，正如注 5.11中所指出的，它有一个全忠实左伴随

$$- \otimes f_{Y_2}\colon \hom(g_W, \mathcal{T}) \to \hom(e_{Y_1}, \mathcal{T}).$$

但这个函子自然同构于

$$\hom(e_{Y_1}, -)\colon \hom(g_W, \mathcal{T}) \to \hom(e_{Y_1}, \mathcal{T})$$

显然保持积。因此，函子（16.2）有一个保守左伴随，而该左伴随自身也保持积。于是我们可以应用命题 9.11，得出 $\Lambda^W := \text{同态}(g_W, \mathcal{T})$ 被

$$\{\hom(f_{Y_2}, I_c) \mid \operatorname{supp}(c) \subseteq Y_1\}.$$

注意，$\hom(f_{Y_2}, I_c) = \hom(g_W, I_c) = \Lambda^W I_c$，因为 $I_c \in \hom(e_{Y_1}, \mathcal{T})$ 已经成立。 □

16.3.注记。 命题 16.1 第（a）部分的陈述，是第（b）部分在 $Y_2 := \varnothing$: 的特殊情形。事实上，正如证明中所解释的，若 $\operatorname{supp}(c) \subseteq Y$，则$I_c \cong \text{同态}(e_Y, I_c) = \Lambda^Y I_c$。我们之所以如此表述该命题，是因为这个特殊情形用于证明更一般的结论。

16.4. 注记。 读者或许会觉得将其与 [BIK12，命题 5。4]进行比较很有意思。

16.5. 注记。 的紧生成元 $e_Y \otimes \mathcal{T} = \operatorname{Loc}\langle c \mid \text{支撑}(c) \subseteq Y\rangle$ 同样可以下推为一组完美生成元 $\Gamma_W\mathcal{T} = \operatorname{Loc}\langle \Gamma_W(c) \mid \text{支撑}(c) \subseteq Y_1\rangle$。事实上，使用注 5.11中展示的第二个伴随，并注意到全忠实右伴随同态$(f_{Y_2}, -)$ 自然同构于 $e_{Y_1} \otimes -$，后者保余积，因此可以应用命题 9.11。

16.6. **命题**。 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 如上所述（假设 *14.1*），并设 $W \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为弱可见子集。伴随三元组 $f^* \dashv f_* \dashv f^!$ 诱导出一个伴随三元组

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_W\mathcal{T} & \cong & \Lambda^W\mathcal{T} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow \dashv \uparrow{\scriptstyle f_*} & & {\scriptstyle f_*}\uparrow \dashv \downarrow{\scriptstyle f^!} \\ \Gamma_{\varphi^{-1}(W)}\mathcal{S} & \cong & \Lambda^{\varphi^{-1}(W)}\mathcal{S} \end{array}$$

其中，中间方块可交换，并使用了注 *5.11* 中的等价。

证明。由定义以及 [BDS16]中的标准同构，结合注释 13.7 可知，函子 f^*、f_*和 $f^!$ 限制为陈述中的四个函子，并且可以直接验证，我们有两个所示的伴随 $f^* \dashv f_*$ 和 $f_* \dashv f^!$。然后，根据注 5.11中“茎-余茎等价”的定义，可以检验中间方块可交换。□

17. Bootstrap for costratification

现在我们给出建立余分层的下降技术。

17.1. **引理**。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个几何函子。对于任意 $d \in \mathcal{T}^c$，存在一个同构 $I_{f^*d} \cong f^! I_d$。

证明。对于任意 $s \in \mathcal{S}$，根据 Brown–Comenetz 对偶的定义性质（定义 9.4），结合伴随，可得自然同构

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(s, I_{f^*d}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S}(f^*d, s), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(d, f_*s), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathcal{T}(f_*s, I_d) \\ &\cong \mathcal{S}(s, f^! I_d)\end{aligned}$$

于是我们援引米田。□

17.2. **定理**。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是假设 *14.1* 中的几何函子，并考虑一个素理想 $\mathcal{P} \in \operatorname{im}\varphi$。假设

(a) $\mathcal{T}$ 是分层的；且 *(b)* 对所有 $\mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$，$\Lambda^{\mathcal{Q}}\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$ 的极小余局部化余理想。

那么，$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$的极小余局部化余理想。

证明。设 $t \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$是一个非零对象。因此，根据余检测性质（由定理 6.4保证），有 $\mathsf{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) = \{\mathcal{P}\}$。由于 $\mathcal{T}$ 是分层的，我们有

$$\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t)) = \varphi^{-1}\,\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t) = \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$$

由 推论 14.19。于是，由于 $\mathcal{S}$ 在所有素理想处都具有余极小性 $\mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$，我们有

$$\mathrm{Colocid}\langle \Lambda^{\mathcal{Q}}\mathcal{S} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})\rangle \subseteq \mathrm{Colocid}\langle f^!(t)\rangle.$$

现在，$\mathsf{Colocid}\langle f^!(t)\rangle = \mathsf{Coloc}\langle$同态$(\mathcal{S},\ f^!(t))\rangle$因此，由于 f_*保持积，我们得到一个包含关系

$$f_*\Lambda^{\mathcal{Q}}\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Coloc}\langle f_*\mathsf{hom}(\mathcal{S}, f^!(t))\rangle.$$

利用伴随同构 [BDS16，（2.18）], 我们得出

$$f_*\Lambda^{\mathcal{Q}}\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Coloc}\langle \mathsf{hom}(f_*\mathcal{S}, t)\rangle \subseteq \mathrm{Colocid}\langle t\rangle \tag{17.3}$$

对每个 $\mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$。

结合引理 14.14 和备注 14.6，存在 $c \in \mathcal{S}^c$（可能依赖于 $\mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\})$），使得 $\mathsf{supp}(f_*(\Gamma_{\mathcal{Q}}c)) = \{\mathcal{P}\}$。一方面，$\mathcal{T}$的分层表明 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathbb{1} \in \mathrm{Locid}\langle f_*\Gamma_{\mathcal{Q}}c\rangle$。因此由（2.8）可知，对每个 $d \in \mathcal{T}^c$：

$$\Lambda^{\mathcal{P}} I_d \cong \mathsf{hom}(\Gamma_{\mathcal{P}}\mathbb{1}, I_d) \in \mathrm{Colocid}\langle \mathsf{hom}(f_*\Gamma_{\mathcal{Q}}c, I_d)\rangle.$$

另一方面，存在同构

$$\begin{aligned} f_*(\Lambda^{\mathcal{Q}} I_{c^\vee \otimes f^*(d)}) &\cong f_* \mathsf{hom}(\Gamma_{\mathcal{Q}} \mathbb{1}, c^\vee \otimes I_{f^* d}) \\ &\cong f_* \mathsf{hom}(\Gamma_{\mathcal{Q}} c, I_{f^* d}) \\ &\cong \mathsf{hom}(f_* \Gamma_{\mathcal{Q}} c, I_d), \end{aligned}$$

其中第四个同构用到了引理 17.1。将这两个观察与（17.3）结合起来，我们得到

$$\Lambda^{\mathcal{P}} I_d \in \mathrm{Colocid}\langle f_*(\Lambda^{\mathcal{Q}} I_{c^\vee \otimes f^*(d)})\rangle \subseteq \mathrm{Colocid}\langle t\rangle.$$

命题 16.1 于是推出 $\Lambda^{\mathcal{P}} \mathcal{T} \subseteq \mathrm{Colocid}\langle t\rangle$。这证明了 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{P}$处的余极小性。□

17.4. **推论 (自举)。** 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是如上所述的几何函子（假设 *14.1*），满足

(a) $\mathcal{T}$ 是分层的；*(b)* $\mathcal{S}$是余分层的；且 *(c)* f^* 是保守的。

那么 $\mathcal{T}$ 是余分层的。

证明。 根据 定理 7.7和 定理 6.4，我们需要证明$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 对每个 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 中的点都具有极小性。根据 推论 13.19， f^* 的保守性意味着 φ是满射。因此，定理 17.2 适用于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 中的所有点。□

17.5. 注记。 在 推论 17.4的情形下，假设（a），条件（c）等价于映射 φ 是满射，也等价于 $f^!$是保守的，参见 推论14.24。

17.6. 注记。 定理 17.2 与分层的下降结果结合使用时尤为有用。若 $\mathcal{S}$ 是余分层的，那么它也是分层的（定理 7.19），此时可以尝试应用某种分层下降技术来证明 $\mathcal{T}$ 是分层的。 推论 17.4 表明，在诱导的谱映射为满射这一较弱假设下，余分层也会下降。因此，我们将其视为一种自举技术。下面给出这一思想的三个实例，称之为

- 扎里斯基下降 (推论 17.14)；
- 准有限下降 (推论 17.17)；以及
- 幂零下降 (推论 17.22)。

以下这个自举定理的变体也很有用：

17.7. **定理。** 假设存在几何函子 $f_i^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}_i$ *(假设 14.1)*，其目标为余分层范畴 $\mathcal{S}_i$，且诱导映射 φ_i 在谱上联合满射：

$$\bigcup_i \mathrm{im}\, \varphi_i = \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c).$$

那么，当且仅当 $\mathcal{T}$ 是余分层的，$\mathcal{T}$ 才是分层的。

证明。 对于 $\mathcal{T}$ 的余分层 $\mathcal{T}$ 蕴含了定理 7.19中的分层。反过来，我们将 定理 17.2 应用于函子 $f_i^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}_i$。由于 $\mathcal{S}_i$是余分层的，该定理表明 $\mathcal{T}$ 在每个 $\mathcal{P}$ 对应的$\mathcal{P} \in$ 像 φ_i处满足余极小性。遍历 i，可知在 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 的所有素理想处都满足余极小性。由于根据假设 $\mathcal{T}$ 是分层的，局部到整体原理成立，因此

余局部到整体原理也成立（定理 6.4）。因此 $\mathcal{T}$ 由定理 7.7可知是余分层的。□

17.8. 注记。在 [Ste13，定理 8。11] 和 [BHS23，推论 5。5], 中，已有研究表明，在适当意义下，分层是刚性紧生成三角张量范畴的一个 Zariski 局部性质。我们通过证明余分层也有类似结论（推论 17.14），补充了这一结果。

17.9.**命题**。设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，且 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$弱诺特。

(a) 若 $\mathcal{T}$ 满足（余）局部到整体原理，则每个有限局部化 $\mathcal{T}(V)$也满足该原理。
(b) 若 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c) = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ 是由 *Thomason* 集补集构成的有限覆盖，且 $\mathcal{T}(V_i)$ 满足（余）局部到整体原理，则 $\mathcal{T}$也满足该原理。

证明。关于局部到整体原理的陈述分别在 [BHS23，推论 313] 和 [BHS23，命题 317], 中得到了证明。我们在定理 6.4中证明了局部到整体原理与余局部到整体原理等价。□

17.10. 注记。Stevenson 在 [Ste13，命题 84] 中证明，有限局部化函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}(Y^c)$ 与 Thomason 子集 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 相关联，并诱导出茎的一个等价

$$\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{P}}(\mathcal{T}(Y^c))$$

对任意 $\mathcal{P} \in Y^c$ 均成立。他的结果是在假设 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 为诺特空间的条件下陈述的，但其论证在该空间为弱诺特时同样适用。余茎也有相应的结论：

17.11. **命题**。设 $Y \subseteq \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是一个 *Thomason* 子集，并令 $\mathcal{P} \in Y^c$。我们有一个余茎等价

$$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{\mathcal{P}}(\mathcal{T}(Y^c)).$$

证明。令 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}(Y^c)$ 表示有限局部化函子。如 命题 16.6中一样，伴随 $f_* \dashv f^!$ 限制为一个伴随

$$f_*\colon \Lambda^{\mathcal{P}}(\mathcal{T}(Y^c)) \rightleftarrows \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} : f^!.$$

左伴随是全忠实的（因为它是全忠实函子的限制）。因此，只需证明对每个 $x \in \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，余单位 $f_*f^!(x) \to x$ 是一个同构。事实上，对所有 $t \in \mathcal{T}$， $f_*f^!(\Lambda^{\mathcal{P}}t) \simeq$同态$(f_Y, \Lambda^{\mathcal{P}}t) \simeq \Lambda^{\mathcal{P}}t$，这就得到了所需结论。□

17.12. **命题**。设 $U \subseteq$Spc$(\mathcal{T}^c)$ 为 *Thomason* 子集的补集。若 $\mathcal{P} \in U$ 是一个弱可见点，则 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 处满足余极小性，当且仅当局部化范畴 $\mathcal{T}(U)$ 在 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}(U)^c)$处满足余极小性。

证明。令 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}(U)$ 表示局部化函子。命题 17.11 证明，命题 16.6 中诱导的伴随 $f_*\colon \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}(U) \rightleftarrows \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}\colon f^!$ 是伴随等价。因此， $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}(U)$ 的余局部化子范畴与 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的余局部化子范畴之间存在保持包含关系的双射，映射为 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}' := f_*(\mathcal{C})$, 其逆映射为 $\mathcal{C}' \mapsto \mathcal{C} := f^!(\mathcal{C}')$。此外，由于余茎 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}$ 的包含关系保持积，$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的余局部化子范畴恰好是 $\mathcal{T}$ 中包含于 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的余局部化子范畴——类似地

对于余茎 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}(U) \hookrightarrow \mathcal{T}(U)$ 也是如此。我们声称，在余局部化子范畴 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ 的这一对应下， $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}(U)$ 的余理想，当且仅当 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{T}$ 的余理想。这由伴随同构 $\hom_{\mathcal{T}}(t, f_*(s)) \simeq f_*\hom^{\mathcal{T}(U)}(f^*(t)\ s)$ 和 $f_*\hom^{\mathcal{T}(U)}(s, f^!(t)) \simeq \hom_{\mathcal{T}}(f_*(s)\ t)$ 得出。这建立了 $\mathcal{T}(U)$ 中包含于 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}(U)$ 的余局部化余理想与 $\mathcal{T}$ 中包含于 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的余局部化余理想之间的保持包含关系的对应。因此， $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}(U)$ 是 $\mathcal{T}(U)$ 的极小余局部化余理想，当且仅当 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的极小余局部化余理想。□

17.13. **推论**。 范畴 $\mathcal{T}$ 在点 $\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 处满足余极小性，当且仅当局部范畴 $\mathcal{T}/\langle\mathcal{P}\rangle$ 在其唯一闭点处满足余极小性。

证明。 应用 命题 17.12 ，取 $U = \mathrm{gen}(\mathcal{P})$。 □

17.14.**推论** (扎里斯基下降)。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*- 范畴，且 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 弱诺特并满足局部到整体原理。假设 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c) = \bigcup_{i\in I} V_i$ 是由 *Thomason* 子集补集构成的覆盖。那么， $\mathcal{T}$ 是余分层的，当且仅当每个有限局部化 $\mathcal{T}(V_i)$ 都是余分层的。

证明。 每个 $\mathcal{T}(V_i)$ 都具有余局部到整体原理，见 命题 17.9 和 定理 6.4。因此只需考虑余极小性（定理 7.7），并可应用命题 17.12。 □

17.15. 注记。 我们以两种用于分层的下降技术结束本节，这些技术为我们的自举定理提供了有力支持（参见 注记 17.6）。第一种是对 [Bar21第 2.2 节中论证的改进。2] 该论证确立了有限 ´étale 下降，而这又是 [BHS23定理 64]的泛化。

17.16. **定理** （拟有限下降）。 设 $f^* : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是满足假设 *14.1*的几何函子。假设 f^* 是强闭的，且 φ 是具有离散纤维的满射。若 $\mathcal{S}$ 是分层的，则 $\mathcal{T}$也是。

证明。 由于 f^* 是弱闭的，满射性假设 φ 意味着二者$f^!$ 和 f^* 都是保守的（回忆 命题 13.33）。因此，根据 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 之间的例 15.6，局部到整体原理可以下降；于是只需检查 $\mathcal{T}$中每个素理想处的极小性。关于函子 f^* 的假设在目标中是局部的（参见 [BHS23，命题 1。30]），因此只需假设 $\mathcal{T}$ 是局部的，并检查唯一闭点 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 处的极小性。

由于 Thomason 闭子集 $\varphi^{-1}(\{\mathfrak{m}\})$是离散的（依假设），通过初等拓扑论证可验证纤维 $\varphi^{-1}(\{\mathfrak{m}\})$由有限个可见闭点组成。现在考虑一个对象 $t \in \mathcal{T}$。回忆一下， $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t)$ 当且仅当 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t)$（定理 8.3）。我们断言，若 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t)$，则 $\varphi^{-1}(\{\mathfrak{m}\}) \subseteq \mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t)) \cap \mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t))$。为此，取 $\mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathfrak{m}\})$。由于 $\mathcal{Q}$是一个可见闭点，存在某个 $z \in \mathcal{S}^c$ 使得 $\mathrm{supp}(z) = \{\mathcal{Q}\}$。此外，由于右伴随 f_* 是弱保守的（备注 14.6），存在某个$x \in \mathcal{S}^c$ 使得 $f_*(z \otimes x) \neq 0$；但 $\mathrm{supp}(z \otimes x) = \{\mathcal{Q}\}$，因此必要时以 $z \otimes x$替换 z 后，不失一般性地假设 $f_*(z) \neq 0$。注意，根据命题 14.2，$\varnothing \neq \mathrm{Supp}(f_*(z)) \subseteq \varphi(\mathrm{Supp}(z)) = \{\mathfrak{m}\}$，因此 $\mathrm{Supp}(f_*(z)) = \{\mathfrak{m}\}$。由于 $f_*(z)$ 是紧的，根据[BHS23，引理 2.18]，$\mathrm{Supp}(t \otimes f_*(z)) = \mathrm{Supp}(t) \cap \mathrm{Supp}(f_*(z)) = \{\mathfrak{m}\}$。特别地，$t \otimes f_*(z) \neq 0$，因此 $f^*(t) \otimes z \neq 0$，从而 $\mathcal{Q} \in \mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t))$。这就证明了 $\varphi^{-1}(\{\mathfrak{m}\}) \subseteq \mathrm{Supp}_{\mathcal{T}}(t)$。现在考虑 $\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t))$。同样，由于 $f_*(z)$ 是紧的，我们有 $\mathrm{Cosupp}_{\mathcal{T}}(\hom(f_*(z)\ t)) =$

支撑$_{\mathcal{T}}(f_*(z)) \cap$余支撑$_{\mathcal{T}}(t) = \{\mathfrak{m}\}$根据 命题 4.35。因此 $f_*\mathsf{hom}(z, f^!(t)) = \mathsf{hom}(f_*(z)\ t) \neq 0$，所以 $\mathsf{hom}(z, f^!(t)) \neq 0$，从而 $\mathcal{P} \in$余支撑$_{\mathcal{T}}(f^!(t))$。

总之，若 t_1，$t_2 \in \mathcal{T}$是对象，且 $\mathfrak{m}$ 包含在它们的（余）支撑中，那么

$$\begin{aligned} \varnothing \neq \varphi^{-1}(\{\mathfrak{m}\}) &\subseteq \mathrm{Supp}_{\mathcal{S}}(f^*(t_1)) \cap \mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(f^!(t_2)) \\ &= \mathrm{Cosupp}_{\mathcal{S}}(\mathsf{hom}(f^*(t_1), f^!(t_2))), \end{aligned}$$

其中等式用到了 $\mathcal{S}$ 是分层的这一假设，并应用了 定理 7.15。因此，$f^!$ 同态$(t_1,\ t_2) =$ 同态$(f^*(t_1)\ f^!(t_2)) \neq 0$，因此 同态$(t_1,\ t_2) \neq 0$。由此可根据 $\mathfrak{m}$ 和 引理 7.12，得出 □

17.17. **推论**。若 f^* 是强闭的，φ 是具有离散纤维的满射，且 $\mathcal{S}$是余分层的，那么 $\mathcal{T}$ 也是余分层的。

证明。由于 $\mathcal{S}$ 是余分层的，根据 定理 7.19，它也是分层的。由此可得，根据 定理 17.16，$\mathcal{T}$ 也是分层的。现在，由于 推论 17.4，我们可以援引它，因为 f^* 根据 命题 13.33 是保守的。□

17.18. 注记。定理 17.16 的名称源于代数几何。概形之间的有限型态射 $f\colon X \to Y$ 按照 [Gro61，定义 6.23] 准有限，当且仅当它具有离散纤维。

17.19.注记。下一个结果受到 Shaul 和 Williamson 的工作 [SW20]在 BIK 分层和 BIK 余分层背景下的启发。下面的 tt-几何版本强化了 [Bar21，定理 2。24]。

17.20. **定理 (幂零下降)**。设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是 假设 *14.1* 中的几何函子。假设 $f^!$ 是保守的，且 φ 是单射。若 $\mathcal{S}$ 是分层的，则 $\mathcal{T}$也是分层的。

证明。由于 $f^!$ 是保守的，$\mathcal{T}$ 从 $\mathcal{S}$ 继承局部到整体原理（注 15.4）。为证明 $\mathcal{T}$ 是分层的，我们将使用定理 7.15。为此，设 t_1、$t_2 \in \mathcal{T}$为满足 $\mathsf{hom}(t_1, t_2) = 0$的对象。我们的目标是证明 $\mathsf{Supp}(t_1) \cap \mathsf{Cosupp}(t_2) = \varnothing$。根据（13.6），我们有 $0 = f!\mathsf{hom}(t_1, t_2) = \mathsf{hom}(f^*t_1, f^!t_2)$，因此

$$\mathrm{Supp}(f^*t_1) \cap \mathrm{Cosupp}(f^!t_2) = \varnothing$$

因为假设 $\mathcal{S}$ 是分层的。假设 φ 是单射的，进而可得

$$\varphi(\mathrm{Supp}(f^*t_1)) \cap \varphi(\mathrm{Cosupp}(f^!t_2)) = \varnothing. \tag{17.21}$$

由于 $\mathcal{S}$ 具有检测和余检测，命题 14.7 和 命题 14.10推出（17.21）与

$$\mathrm{Supp}(t_1 \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) \cap \mathrm{Cosupp}(\mathsf{hom}(f_*\mathbb{1}, t_2)) = \varnothing.$$

由于 $f^!$ 是保守的，f^* 根据 命题 13.21也具有保守性。命题 14.7 和 命题 14.10 进而推出 $\mathsf{Supp}(t_1 \otimes f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) = \mathrm{Supp}(t_1)$ 且 $\mathsf{Cosupp}($同态$(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\ t_2)) = \mathrm{Cosupp}(t_2)$, 至此证明完毕。□

17.22. **推论**。如果 $f^!$ 是保守的，且 φ 是单射（因而是双射），并且 $\mathcal{S}$ 是余分层的，那么 $\mathcal{T}$ 也是余分层的。

证明。注意到 f^* 根据 命题 13.21 也保守。于是结论由定理 7.19、定理 17.20和推论 17.4 得出。□

17.23. 注记。若 f^* 是弱闭的，且 φ 是一个双射，那么根据定理 17.20 和推论 17.22，我们可以应用命题 13.33。

第 IV. 部分 应用与例子

现在我们转向应用和例子。我们证明，纯半单 tt-范畴（特别是任意 tt-域）都是余分层的（定理 18.4），并且任意仿射弱正则 tt-范畴都是余分层的（定理 18.15）。我们还证明，某个（拓扑弱诺特）拟紧且拟分离概形的导出范畴是余分层的，当且仅当它是分层的（定理 19.5）。在表示论中，我们证明，对于任意有限群 G 和域 k，k-线性表示范畴 Rep(G,k) 和 k-线性置换模的导出范畴 DPerm(G,k) 都是余分层的（定理 19.10、定理 19.13 和定理 20.14）。在同伦论中，我们给出一个新证明，证明 $E(n)$-局部谱的范畴是余分层的（定理 20.19），并证明某些上链代数的导出范畴是余分层的（定理 20.27）。我们证明，对于任意紧李群 G，有理 G-谱的范畴是余分层的；并且证明，对于任意有限群 G，取值于交换代数 E $\in$ CAlg(Sp) 的谱 G-Mackey 函子范畴，只要 D(E) 本身是余分层的且具有诺特谱，就也是余分层的（定理 20.31）。作为一个特例，这表明 Kaledin 的导出 Mackey 函子范畴是余分层的（推论 20.36）。

18. Tensor triangular examples

纯半单范畴与 tt-域。

18.1.**引理。** 设 $\mathcal{T}$ 是一个谱弱诺特的刚性紧生成三角张量范畴。假设 $\mathcal{T}$ 的每个余局部化余理想也都是局部化理想。那么，$\mathcal{T}$ 是分层的，当且仅当它是余分层的。

证明。根据定理 6.4 和定理 7.19，只需证明：若点 $\mathcal{P} \in$ Spc$(\mathcal{T}^c)$处的极小性成立，则点 $\mathcal{P}$处的余极小性也成立。在注 5.11 的等价关系 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} \cong \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 下，$\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ 的厚子范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$的厚子范畴 $\mathcal{C}'$ 一一对应。此外，容易验证，$\mathcal{T}^d \otimes \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$ 当且仅当 $\mathcal{T}^d \otimes \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'$。根据假设，余茎 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$是 $\mathcal{T}$的局部化理想。特别地，包含关系 $\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}$ 保持余积。因此，若 $\mathcal{T}$ 的局部化理想为 $\mathcal{C} \subseteq \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$，则与之对应的 $\mathcal{C}' \subseteq \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$也是 $\mathcal{T}$的局部化理想。有了这些观察，设 $\mathcal{C} \subsetneq \Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{T}$是一个真余局部化余理想。根据假设，它是 $\mathcal{T}$的局部化理想，因此对应于一个真局部化理想 $\mathcal{C}' \subsetneq \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$。点 $\mathcal{P}$ 处的极小性蕴含$\mathcal{C}' = 0$，进而 $\mathcal{C} = 0$，所以点 $\mathcal{P}$处具有余极小性。□

18.2. 定义（Beligiannis [Bel00], Krause [Kra00]）。若一个紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 中每个纯单态射都分裂，则称其为纯半单的，其中 f：若对所有紧对象 $c \in \mathcal{T}^c$，诱导映射 $\mathcal{T}(c,x) \to \mathcal{T}(c,y)$ 都是单态射，则称其为纯单态射。这等价于许多其他条件，例如 $\mathcal{T}$ 中任意对象都是紧对象的余积，$\mathcal{T}$ 存在所有滤过余极限，或者 $\mathcal{T}$ 无幻象；参见 [Bel00，定理 9.3] 和 [Kra00，定理 2.10]。

18.3.**命题。** 若 $\mathcal{T}$ 是刚性紧生成纯半单三角张量范畴，则 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是有限离散空间。

证明。 我们首先证明，每个 Thomason 子集 $Y \subseteq$Spc$(\mathcal{T}^c)$ 既是开集也是闭集。由于 $\mathcal{T}$ 是纯半单的，我们可以将 $f_Y = \coprod_{i\in I} x_i$ 写成紧对象的余积，

。注意，每个 x_i 都包含于 $\ker(-\otimes e_Y) = \mathrm{Locid}\langle f_Y\rangle$；参见注4.1。由于这是一个局部化理想，它也包含对偶对象 $x_i^\vee$，因此

$$\mathcal{T}(f_Y, \Sigma e_Y) = \prod_{i\in I} \mathcal{T}(x_i, \Sigma e_Y) = \prod_{i\in I} \mathcal{T}(\mathbb{1}, \Sigma e_Y \otimes x_i^\vee) = 0.$$

因此，命题 8.10 证明了 Y 既是开集也是闭集。

接下来，我们证明特化序是平凡的（参见注 8.5）。为此，假设存在素理想的包含关系 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{Q}$ 满足 $\mathcal{P}\neq\mathcal{Q}$。那么 $\mathcal{Q}\not\subseteq\mathcal{P}$，即 $\mathcal{Q}\notin\{\mathcal{P}\}$。因此存在一个 Thomason 闭子集 Z 包含 $\mathcal{P}$ 但不包含 $\mathcal{Q}$。这与事实矛盾，因为 Thomason 子集 Z 是开集（由证明的第一部分可知），因而对泛化封闭。

$\{\mathcal{P}\} = \mathsf{gen}(\mathcal{P})$是开集，因为它是某个 Thomason 子集的补集。由于每个点都是开集，故该拓扑是离散的。此外，离散拟紧空间必然是有限的。□

18.4.**定理**。若 $\mathcal{T}$ 是刚性紧生成纯半单三角张量范畴，则 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是有限离散空间，且 $\mathcal{T}$ 是余分层的，也是分层的。

证明。命题18.3证明了 Balmer 谱是有限离散的。我们首先证明 $\mathcal{T}$ 是分层的。根据 [BHS23，定理 3.21]，局部到整体原理对 $\mathcal{T}$成立。我们利用引理 7.12证明极小性。为此，固定$\mathcal{P}\in\mathsf{Spc}(\mathcal{T}^c)$，并考虑非零对象 $t_1, t_2 \in \Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$。由于 $\mathcal{T}$ 是纯半单的，对于非零紧对象 x_i, y_j，有 $t_1 = \coprod_{i\in I} x_i$ 和 $t_2 = \coprod_{j\in J} y_j$。由于$x_i$ （分别为 y_j）是 t_1 （分别为 t_2）的直缩，我们可知每个 x_i 和 y_j也属于 $\Gamma_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$。因此，$\mathsf{supp}(x_i) = \mathsf{supp}(y_j) = \{\mathcal{P}\}$，从而 $\mathsf{hom}(x_i, y_j) \neq 0$。由此可得 $\mathsf{hom}(t_1, t_2) \neq 0$，证毕。

对于纯半单 tt-范畴 $\{t_i\}_{i\in I}$ 中的任意对象族 $\mathcal{T}$，典范映射 $\coprod_{i\in I} t_i \to \prod_{i\in I} t_i$ 从余积到积是分裂的；参见[Bel00，定理 9。3]。特别地，$\mathcal{T}$ 的任意余局部化子范畴都是局部化子范畴。此外，由于 $\mathcal{T}$ 的余局部化子范畴是余理想，当且仅当它在与可对偶对象张量下封闭（例 10.10），因此任意余局部化余理想都是局部化理想。于是我们可以应用引理 18.1，得出 $\mathcal{T}$ 是余分层的。□

18.5. 例。设 A 是一个 Artin代数，它与某个 Dynkin型遗传代数导出等价。那么复形范畴 $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\, A)$ 中单射 A-模的同伦范畴是纯半单的 [Zhe13，命题 4。4] 因此，根据定理 18.4，它既是分层的，也是余分层的。

18.6.注记。由 命题18.3 可知，非平凡纯半单张量三角范畴的无限积不可能是纯半单的。这与以下观察形成对照：非平凡纯半单交换环的无限积绝不是纯半单的。事实上，纯半单环总是阿廷环 [Cha60，定理4。4] 而且，特别地，它的 Zariski 谱总是有限离散的。我们还注意到，如果 $\mathsf{D}(R)$ 按照定义18.2 的意义是纯半单的，那么 R 就是纯半单的 [GP05，推论 7。2]。由此可见，对于一个域 k，无论是 $\prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{D}(k)$ 还是 $\mathsf{D}(\prod_{i=1}^{\infty} k)$ 都不是纯半单的，尽管 $\mathsf{D}(k)$ 是纯半单的。

18.7. 例。在 [BKS19，定义 1。1], Balmer–Krause–Stevenson 将 *tt*-域定义为一种刚性紧生成三角张量范畴 $\mathcal{T}$，其中每个对象 $X\in\mathcal{T}$ 都是一个

由紧刚性对象构成的余积 $X \simeq \coprod_{i\in I} x_i \quad x_i \in \mathcal{F}^c$，且其中每个对象$X \in \mathcal{F}$ 都是 $\otimes$-忠实的（$X \otimes f = 0 \implies f = 0$）。tt-域 $\mathcal{F}$ 是纯半单的，且 $\mathsf{Spc}(\mathcal{F}^c) = \{*\}$ 是一个单点；参见 [BKS19，命题 5。1]。

18.8. 例。 稳定模范畴 $\mathcal{T} = \mathrm{StMod}(kC_{p^n})$ 是一个纯半单三角范畴；若 $n \geq 2$，则它不是 tt- 域；参见 [BKS19，例 5。11]。

18.9.**推论**。 任意 *tt*-域 $\mathcal{F}$ 既是分层的，也是余分层的。

仿射弱正则 tt-范畴。

18.10. 定义 (Dell'Ambrogio–Stanley [DS16])。 若一个张量三角范畴 $\mathcal{T}$满足以下两个条件，则称其为 仿射弱正则：

(a)（仿射） $\mathcal{T}$ 由其张量单位 $\mathbb{1}$ 紧生成。(b)（弱正则）分次自同态环 $R := \mathrm{Hom}^*_{\mathcal{T}}(\mathbb{1},\mathbb{1})$ 是一个集中于偶数次的分次诺特环，并且对于 R 的每个齐次素理想 $\mathfrak{p}$，局部环 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想都由一个（有限的）齐次非零因子正则序列生成。

第一个公理确保 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成的三角张量范畴，并且每个（余）局部化子范畴都是一个（余）理想（参见注 2.4）。

18.11. 注记。给定一个仿射弱正则三角张量范畴，我们定义

$$\pi_*(X) := \mathrm{Hom}^*_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}, X).$$

对于任意素理想 $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}^h(R)$，存在一个剩余域对象 $K(\mathfrak{p}) \in \mathcal{T}$，满足

$$\pi_*(K(\mathfrak{p})) \simeq \kappa(\mathfrak{p})$$

其中 $\kappa(\mathfrak{p}) := R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 表示代数剩余域；参见 [DS16，§3]。该对象扮演着与$g_{\mathfrak{p}}$类似的角色；特别地，$\mathsf{Loc}\langle g_{\mathfrak{p}}\rangle = \mathrm{Loc}\langle K(\mathfrak{p})\rangle$。下面的定理陈述了 [DS16]的主要结果：

18.12.**定理**(Dell'Ambrogio–Stanley)。设 $\mathcal{T}$ 是一个仿射弱正则三角张量范畴。存在一个同胚 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c) \cong \mathrm{Spec}^h(R)$ $\mathcal{T}$，且 $\mathcal{T}$ 是分层的。

18.13. **引理**。 对于任意集合 I 和整数 $\{d_i\}_{i\in I}$，自然映射

$$\coprod_{i\in I} \Sigma^{d_i} K(\mathfrak{p}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \Sigma^{d_i} K(\mathfrak{p}) \tag{18.14}$$

是一个分裂单态射。

证明。将 π_* 应用于态射 (18.14)，得到分次$\kappa(\mathfrak{p})$-模之间的单态射 $\bigoplus_{i\in I} \Sigma^{d_i}\kappa(\mathfrak{p}) \to \prod_{i\in I} \Sigma^{d_i}\kappa(\mathfrak{p})$。我们可以将$\bigoplus_{i\in I} \Sigma^{d_i}\kappa(\mathfrak{p})$的标准基扩充为 $\prod_{i\in I} \Sigma^{d_i}\kappa(\mathfrak{p})$的一个基 $\mathcal{B}$。由于 $\prod_{i\in I} \Sigma^{d_i} K(\mathfrak{p}) \simeq K(\mathfrak{p}) \otimes \prod_{i\in I} \Sigma^{d_i}\mathbb{1}$， [DS16] 的命题 3.6 给出一个同构

$$\coprod_{b\in\mathcal{B}} \Sigma^{|b|} K(\mathfrak{p}) \simeq \prod_{i\in I} \Sigma^{d_i} K(\mathfrak{p})$$

其中 $|b|$ 表示 b的同调次数。 $I \subseteq \mathcal{B}$的任意集合论分裂随后都可提升为 (18.14) 的左逆。□

18.15.**定理**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个仿射弱正则三角张量范畴。那么 $\mathcal{T}$ 是余分层的。

证明。 证明见 [BIK12，定理 10。3]。由 推论 6.5，余局部到整体原理成立，因此我们只需证明每个$\mathfrak{p}\in$谱$^h(R)$ 处的余极小性。为此，设 $0\neq t\in\Lambda^{\mathfrak{p}}\mathcal{T}$。那么，由于 $\mathcal{T}$ 是分层的，我们有

$$\mathrm{Coloc}\langle t\rangle=\mathrm{Coloc}\langle\mathsf{hom}(g_{\mathfrak{p}},t)\rangle=\mathrm{Coloc}\langle\mathsf{hom}(K(\mathfrak{p}),t)\rangle$$

其中最后一步用到了 $\mathsf{Loc}\langle g_{\mathfrak{p}}\rangle=\mathrm{Loc}\langle K(\mathfrak{p})\rangle$ 以及 引理 4.34。现在，类似于 [DS16，命题 3.6] 的论证表明

$$\mathsf{hom}(K(\mathfrak{p}),t)\simeq\coprod_{\alpha}\Sigma^{|\alpha|}K(\mathfrak{p})$$

其中 α 遍历 $\pi_*\mathsf{hom}(K(\mathfrak{p})\ t)$ 的一个分次 $\kappa(\mathfrak{p})$-向量空间基。因此， $K(\mathfrak{p})\in$ 余局部化$\langle\mathsf{hom}(K(\mathfrak{p})\ t)\rangle$。此外，由引理 18.13 可知，$\coprod_{\alpha}\Sigma^{|\alpha|}K(\mathfrak{p})$ 是 $\prod_{\alpha}\Sigma^{|\alpha|}K(\mathfrak{p})$ 的直缩，因此我们有

$$\mathsf{hom}(K(\mathfrak{p}),t)\simeq\coprod_{\alpha}\Sigma^{|\alpha|}K(\mathfrak{p})\in\mathrm{Coloc}\langle K(\mathfrak{p})\rangle.$$

因此，我们得到

$$\mathrm{Coloc}\langle t\rangle=\mathrm{Coloc}\langle\mathsf{hom}(K(\mathfrak{p}),t)\rangle=\mathrm{Coloc}\langle K(\mathfrak{p})\rangle.$$

如果 $\mathsf{Coloc}\langle t\rangle$ 是 $\Lambda^{\mathfrak{p}}\mathcal{T}$的真子范畴，那么补集中的任意对象 s 都必须满足 $\mathsf{Coloc}\langle t\rangle=\mathsf{Coloc}\langle s\rangle$，这是荒谬的。因此， $\Lambda^{\mathfrak{p}}\mathcal{T}$ 作为 $\mathcal{T}$的余局部化子范畴是极小的，证毕。□

张量三角范畴的有限直积。

18.16. 例。 设 $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^n$ 是有限个刚性紧生成的张量三角范畴。它们的积 $\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i$ 仍是刚性紧生成的，并且 $(\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i)^c=\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i^c$。此外，

$$\mathrm{Spc}(\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i^c)\cong\coprod_{i=1}^n\mathrm{Spc}(\mathcal{T}_i^c)$$

其中右侧赋予不交并拓扑。事实上， $\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i^c$的每个素理想都具有 $\prod_{i=1}^n\mathcal{P}_i$的形式，其中某个 k满足： $\mathcal{P}_k$ 是 $\mathcal{T}_k^c$的素理想，并且对于 $i\neq k$， $\mathcal{P}_i=\mathcal{T}_i^c$。因此，$\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i$ 具有（弱）诺特谱，当且仅当每个 $\mathcal{T}_i$ 都具有（弱）诺特谱。此外，根据扎里斯基下降（命题 17.9 和推论 17.13）， $\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_i$ 是余分层的，当且仅当每个 $\mathcal{T}_i$ 都是余分层的。

18.17. 例。 设 $\mathcal{T}$ 是任意刚性紧生成三角张量范畴。令 $\mathcal{T}\times_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{T}$表示积范畴 $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$，其带有 $\mathbb{Z}_2$-分次张量三角结构，如 [San22，例 423]所述。它同样是刚性紧生成的，且包含关系 $a\mapsto(a,0)$ 是一个全忠实几何函子 $f^*\colon\ \mathcal{T}\hookrightarrow\mathcal{T}\times\mathcal{T}$到第一坐标的投影既是 f^*的左伴随，也是其右伴随。因此 $f^!=f^*$。$(\mathcal{T}\times\mathcal{T})$ 的素理想$^c=\mathcal{T}^c\times\mathcal{T}^c$ 为 $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$，其中 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{T}^c$的一个素理想，且诱导映射

$$\mathrm{Spc}(f^*)\colon\ \mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c\times\mathcal{T}^c)\to\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^c)$$

由 $\mathcal{P}\times\mathcal{P}\mapsto\mathcal{P}$ 给出的映射是一个同胚。在此对应下，很容易验证 $\mathsf{Supp}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}((t_0,t_1))=\mathsf{Supp}_{\mathcal{T}}(t_0)\cup\mathsf{Supp}_{\mathcal{T}}(t_1)$，且 $\mathsf{Cosupp}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}((t_0,t_1))=\mathsf{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t_0)\cup\mathsf{Cosupp}_{\mathcal{T}}(t_1)$。由此不难证明，若 $\mathcal{T}$ 是余分层的，则 $\mathcal{T}\times_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{T}$ 是余分层的。反向结论由定理 17.20 和推论 17.4 得出。

19. Algebraic examples

交换环与概形。

19.1.**命题。** 设 R 是一个交换环，且 $\mathrm{Spec}(R)$ 弱诺特。那么 $\mathrm{D}(R)$ 分层当且仅当它余分层。

证明。回忆一下，根据 Thomason 定理 [Tho97]，$\mathrm{Spc}(\mathrm{D}(R)^c) \cong \mathrm{Spec}(R)$；参见[BHS23，例 1.36]。对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$，我们考虑基变换函子$f_{\mathfrak{p}}^*\colon \mathrm{D}(R) \to \mathrm{D}(\kappa(\mathfrak{p}))$，其中 $\kappa(\mathfrak{p})$ 表示 $\mathfrak{p}$ 处的剩余域。这是一个几何函子，其目标是一个 tt-域，且诱导的谱映射将唯一的点 $*$ 映至 $\mathfrak{p}$。由定理 17.7 和推论 18.9 即得结论。□

19.2. 例。 对于任意交换诺特环 R，我们由此推出 [Nee11] 的主要结果，该结果出自原始文献 [Nee92a]：$\mathrm{D}(R)$ 是余分层的。

19.3. 例。 设 R 是一个非诺特的绝对平坦环。Stevenson[Ste14a、Ste17] 证明了 R 是半阿廷的，$\iff \mathrm{D}(R)$的局部到整体原理成立，$\iff \mathrm{D}(R)$ 是分层的。根据命题 19.1，这也等价于 $\mathrm{D}(R)$ 是余分层的。例如，这适用于 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_p$ 中由最终为常数的序列构成的子环；参见 [BHS23，例 3。25]。

19.4. 注记。我们可以将命题 19.1 推广到概形的导出范畴。对于拟紧且拟分离概形 X，令 $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 表示由具有拟凝聚上同调的 $\mathcal{O}_X$- 模复形构成的导出范畴。它是刚性紧生成的，其刚性紧对象子范畴 $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)^c = \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 是完美复形的导出范畴。关于 Balmer 谱的一个基本结果是 $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)) \cong X$。参见 [Bal05，定理 6.3]{BKS07，定理 9.5]，和 [Tho97]。

19.5.**定理。** 设 X 是一个拓扑弱诺特的拟紧且拟分离概形。导出范畴 $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是分层的，当且仅当它是余分层的。

证明。一个方向由定理 7.19 得出。反过来，假设 $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是分层的。根据 [BHS23, 定理 4.1]，它满足局部到整体原理，因此由定理 6.4 可知它满足余局部到整体原理。现在取 X 的一个开仿射覆盖，其子集为 $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$。这些仿射概形也都是拓扑弱诺特的（参见 [BHS23, 注记 2.6]），并且有如下蕴含关系：$\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是分层的 $\iff$ 每个 $\mathrm{D}(A_i)$ 都是分层的（[BHS23, 推论 5.5]）$\iff$ 每个 $\mathrm{D}(A_i)$ 都是余分层的（命题 19.1）$\iff \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是余分层的（推论 17.14）。□

19.6. 例。 若 X 是诺特的，则由 [BHS23，推论 510] 可知 $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 是分层的，因此也是余分层的。对于这样的 X，$\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ 的余分层也已在 Verasdanis 的近期工作中得到 [Ver22]。

表示的导出范畴。

19.7. 定义。 对于有限群 G 和交换环 R，我们令

$$\mathrm{Rep}(G, R) := \mathrm{Ind}\,\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Perf}(R))$$

表示导出的 ∞-范畴，其中 R-线性 G-表示的 Ind，Ind 表示 ind-完备化（[Lur09，第 5.3 节。5]），并令

$$\mathrm{StMod}(G, R) := \mathrm{Ind}\,\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Perf}(R))/\,\mathrm{Perf}(R[G]).$$

根据构造，这两个范畴都是刚性紧生成的对称单体稳定 ∞-范畴；取它们的同伦范畴可得到相应的刚性紧生成张量三角范畴。此外，除去幂等完备化的差异，StMod(G, R) 中紧对象的范畴可由 Rep(G, R) 中的紧对象经有限局部化得到。

19.8. 注记。 若 $R = k$ 是一个域，则范畴 Rep(G, k) 等价于 K(Inj $k[G]$)，即无界单射复形的同伦范畴，相关研究见 $k[G]$- 模， [BK08], ；而范畴 StMod(G, k) 与通常的稳定模范畴一致。

19.9.注记。 下一个结果最初由 Benson–Iyengar–Krause 提出 [BIK12，定理 11。6] 其中谱的计算归功于 Benson–Carlson–Rickard[BCR97]。我们将借助自举定理给出另一种证明，并依赖于我们在 第20节 末尾证明的一个结果，该证明使用伽罗瓦上升，方法见 [Mat15]。

19.10.**定理** (Benson–Iyengar–Krause)。 对于任意有限群 G 和域 k，范畴 $\mathrm{Rep}(G, k)$ 是余分层的，其谱为 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Rep}(G, k)^c) \cong \mathrm{Proj}\, H^*(G;\ k)$。

证明。 根据 [BIK11a命题 9 中给出的 Chouinard 定理，6], 由

$$\mathrm{Res}^G_E \colon \mathrm{Rep}(G, k) \to \prod_{E \leq G} \mathrm{Rep}(E, k)$$

限制函子的积给出的函子是一个保守几何函子。此外，目标范畴 $\prod_{E\leq G} \mathrm{Rep}(E,\ k)$ 根据下文的定理 20.14 和例 18.16 而余分层，而 Rep$(G,\ k)$ 根据 [BIK11a 定理 101]而分层。由 推论 17.4 可知，Rep$(G,\ k)$ 也余分层。 □

19.11. 注记。 即将发表的 [BBI+23] 将证明，对于所有有限群 G、 R以及所有诺特交换环 G ，范畴 Rep(R,G) 都是分层的，进而通过自举定理推出其余分层性。对于任意交换环 R，Spc(Rep(^{c}, R)) [的计算归功于 Lau 21]Lau。

19.12. 注记。 范畴 Rep(G, R) 可扩张为置换模的导出范畴 DPerm(G, R)，适用于任意（原）有限群 G和交换环 R。关于该范畴的构造，以及它与 Artin 动机和 Mackey 函子的关系，请参阅 [BG21]。

19.13. **定理**。 置换模的导出范畴 $\mathrm{DPerm}(G, k)$ 对任意有限群 G 和特征为 p 且 p 整除 G的域 k 均为余分层的。

证明。 在 [BG22], 作者构造了几何函子

$$\check{\Psi}_H \colon \mathrm{DPerm}(G, k) \to \mathrm{Rep}(W_G(H), k)$$

由 p-子群 H 中 G所有共轭类索引，其中 $W_G(H)$ 表示 H 在 G中的韦伊群。在 [BG22，定理 5.12], 中，他们证明这些函子联合起来是保守的，而 [BG22，定理 8.11]则证明了 DPerm(G, k) 的分层。结合我们的自举定理 推论 17.4 与 定理 19.10 ，可得 DPerm(G, k) 也是余分层的。 □

20. Homotopical examples

伽罗瓦下降与上升。

20.1. 定义。 设 G 是一个紧李群，并考虑一个态射 $f\colon A \to B$，它是交换环谱之间的态射，其中 B 配备了一个 A-线性 G-作用。遵循 Rognes [Rog08], 的记法，映射 f 是一个 伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G (也简称为 G-伽罗瓦扩张)，当且仅当它满足以下两个条件：

(a) 典范映射 $A \to B^{hG}$ 是等价；(b) 典范映射 $B \otimes_A B \to$ 同态 (G_+, B) 是等价。

伽罗瓦扩张 $f\colon A \to B$ 称为忠实，如果 f^*: 模(A) $\to$模(B) 是保守的。

20.2. 注记。 在即将发表的与 Naumann 和 Pol 的合作工作中 [BCH+23b], 我们研究保守几何函子沿分层的一般下降性质。结合我们的自举定理，我们得到余分层的伽罗瓦下降：

20.3. **命题** (伽罗瓦下降)。 设 $f\colon A \to B$ 是一个忠实的 G-伽罗瓦扩张，其中 G 是一个紧李群。若 $\mathrm{Mod}(B)$ 是余分层的，则 $\mathrm{Mod}(A)$也是余分层的。

证明。 由于 Mod(B) 是余分层的，根据 定理 7.19，它也是分层的。由 [BCH+23b], 中证明的分层的伽罗瓦下降可知，Mod(A) 也是分层的。因此，自举定理（推论 17.4）给出了所述结论。□

20.4. 例。此结果适用的例子不胜枚举。例如，从实 K-理论到复 K-理论的复化映射 $KO \to KU$ 是一个忠实的 C_2-伽罗瓦扩张 [Rog08, 命题 5.3.1] ，而根据定理 18.15, Mod(KU) 是余分层的。因此，余分层性质可以下降，由此可推得 Mod(KO) 是余分层的。类似地，若 E_n 表示 Lubin–Tate 谱，则根据定理 18.15（见下文注记 20.16），Mod(E_n) 是余分层的；由[Rog08, 定理 5.4.4] 和 [HMS17, 命题 3.6] 可推得，对于 Morava 稳定子群的任意有限子群 $G \subseteq \mathbb{G}_n$ ， Mod(E_n^{hG}) 都是余分层的。

20.5. 注记。 在对伽罗瓦群施加更强条件时，命题 20.3 的逆命题成立，我们将在下文的 命题 20.12 中证明这一点。证明遵循 [Bar22] 中采用的策略，以建立关于分层的类似结果。而这又受到 [Mat15]中所发展的思想的启发。首先，我们需要一些一般引理。

20.6. 记号。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成三角张量范畴，并记$\mathcal{C}$olocid($\mathcal{T}$)为 $\mathcal{T}$的余局部化余理想类。注意，对任意函子$F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$，我们都有一个函数

$$\mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{T}) \xrightarrow{F} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{S})$$

它将余局部化余理想 $\mathcal{C}$ 映射为由 $F(\mathcal{C})$生成的余局部化余理想。

20.7. 注记。 若 $G\colon \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ 是一个函子，且具有如下性质： $\mathcal{R}$ 的余局部化余理想在拉回后是 $\mathcal{S}$的余局部化余理想，那么对于任意对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$， G(Colocid$\langle\mathcal{E}\rangle$) $\subseteq$ Colocid$\langle G(\mathcal{E})\rangle$。由此可知，对于任意函子 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$，下图

$$\mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{T}) \xrightarrow[F]{} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{S}) \xrightarrow[G]{} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{R}), \quad \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{T}) \xrightarrow{G\circ F} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{R})$$

可交换。

20.8. 例。 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个几何函子。同构 (13.6) 表明，余局部化余理想沿保积正合函子回拉$f^!\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$。若 f_* 是保守的，则函子 $f_*\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$也具有同样性质。事实上，给定一个 $\mathcal{C}$ 的余局部化余理想 $\mathcal{T}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{hom}(\mathcal{S}, f_*^{-1}(\mathcal{C})) &= \mathsf{hom}(\mathrm{Loc}\langle f^*(\mathcal{T}^c)\rangle, f_*^{-1}(\mathcal{C})) && \text{(Remark 14.5)}\\ &\subseteq \mathrm{Coloc}\langle \mathsf{hom}(f^*(\mathcal{T}^c), f_*^{-1}(\mathcal{C}))\rangle && (2.8)\\ &\subseteq \mathrm{Coloc}\langle f_*^{-1}(\mathcal{C})\rangle = f_*^{-1}(\mathcal{C})\end{aligned}$$

其中最后一个包含关系使用了同构 f_*同态$(f^*(a)\ b) \simeq$同态$(a,\ f_*(b))$，该同构来自[BDS16，（2.17）]。

20.9. **引理**。 设 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是一个弱可下降的（定义 *13.23*）几何函子，其右伴随 f_* 是保守的。则复合

$$\mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{T}) \xrightarrow{f^!} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{S}) \xrightarrow{f_*} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathcal{T})$$

是恒等映射。

证明。 由于 f_* 是保守的，注释 20.7 和 例20.8 表明，上述复合映射将一个余局部化余理想 $\mathcal{D}$ 从 $\mathcal{T}$ 映到

$$\mathrm{Colocid}\langle f_* f^!(\mathcal{D})\rangle = \mathrm{Colocid}\langle \mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), \mathcal{D})\rangle.$$

显然 $\mathrm{Colocid}\langle \mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\ \mathcal{D})\rangle \subseteq \mathcal{D}$。另一方面，若 f^* 是弱可下降的，那么

$$\mathcal{D} = \mathsf{hom}(\mathbb{1}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}) \subseteq \mathsf{hom}(\mathrm{Locid}\langle f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle, \mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Colocid}\langle \mathsf{hom}(f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}), \mathcal{D})\rangle$$

由（2.8）可得，证明完毕。 □

20.10. 例。交换环谱的态射 $f\colon A \to B$ 称为可下降的，如果 $\mathsf{thickid}\langle B\rangle = \mathsf{Mod}(A)$ 位于 $\mathsf{Mod}(A)$ 中。那么，基变换函子$f^*\colon \mathsf{Mod}(A) \to \mathsf{Mod}(B)$ 按定义 13.23 的意义是弱可下降的，且其右伴随是保守的。因此，引理 20.9 适用。例如，忠实的 G-伽罗瓦扩张 $f\colon A \to B$ 是可下降的。这由以下事实得出： B 作为 A-模是可对偶的（见 [Rog08，命题 6.2.1]）。由于$B \otimes -$ 在 $\mathsf{Mod}(A)$ 上是保守的，$B \otimes f_{\mathrm{supp}(B)} = 0$ 推出 $f_{\mathrm{supp}(B)} = 0$，因此 $\mathsf{supp}(B) = \mathsf{Spc}(\mathsf{Mod}(A)^c)$；于是，紧对象的厚理想分类推出 $A \in \mathsf{thickid}\langle B\rangle$。更有力的论证见 [Mat16，定理 3.38]。

20.11. **引理**。 设 $f\colon A \to B$ 是一个忠实的 G-伽罗瓦扩张，且 G 是一个连通紧李群。那么 $f^!$ 诱导一个双射

$$f^!\colon \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(A)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(B)).$$

证明。 下方的交换环谱推出方形诱导出一个交换图，该图由遗忘函子构成，如右侧所示：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ B & \xrightarrow[g_2]{} & B \otimes_A B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}(B \otimes_A B) & \xrightarrow{(g_1)_*} & \mathrm{Mod}(B) \\ {\scriptstyle (g_2)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{Mod}(B) & \xrightarrow[f_*]{} & \mathrm{Mod}(A). \end{array}$$

后一个方形在水平方向上可取右伴随，即相应的 Beck–Chevalley 变换 $(g_2)_* \circ g_1^! \to f^! \circ f_*$ 是自然等价。因此，下图是交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}(B) & \xrightarrow{g_1^!} & \mathrm{Mod}(B \otimes_A B) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (g_2)_*} \\ \mathrm{Mod}(A) & \xrightarrow[f^!]{} & \mathrm{Mod}(B). \end{array}$$

由注记 20.7 和例 20.8，可诱导出一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(B)) & \xrightarrow{g_1^!} & \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(B \otimes_A B)) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (g_2)_*} \\ \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(A)) & \xrightarrow[f^!]{} & \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(B)). \end{array}$$

态射 f 是可下降的（例 20.10），因此 g_1 和 g_2 也都是可下降的。于是，根据引理 20.9，映射 $f^!$ 和 $g_1^!$ 是（分裂）单射，而 f_* 和 $(g_2)_*$ 是（分裂）满射。关于 G 的假设保证典范态射 $h\colon B \otimes_A B \to B$ 也是可下降的（参见 [Mat16，命题 3.36]），因此再次利用引理 20.9，h_* 是（分裂）满射。此外，$h \circ g_2 \simeq$ 在 B上是恒等映射，所以 $(g_2)_* \circ h_* =$ 作为 $\mathcal{C}$olocid(Mod(B))上的映射也是恒等映射。这表明 h_* 也是单射，因此 $(g_2)_*$ 和 h_* 实际上都是双射。由上面的交换方块可知，f_* 也是双射。□

20.12. **命题** (伽罗瓦上升)。设 $f\colon A \to B$ 是一个忠实的 G-伽罗瓦扩张，且 G 是一个连通紧李群。那么 f^* 诱导一个同胚

$$\varphi\colon \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}(B)^c) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}(A)^c).$$

此外，若 模(A) 是余分层的，那么 模(B)也是如此。

证明。关于 Balmer 谱的陈述是 [BCH+23b], 的一部分，因此假设模(A)是余分层的。我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(A)) & \xrightarrow{f^!} & \mathcal{C}\mathrm{olocid}(\mathrm{Mod}(B)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Cosupp}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cosupp}} \\ \mathcal{P}(\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}(A)^c)) & \xrightarrow[\varphi^{-1}]{\cong} & \mathcal{P}(\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}(B)^c)), \end{array}$$

根据 推论 14.19 和 定理 7.19，该图表可交换。由 引理 20.9，上方的水平映射是一个双射，因此右侧的竖直映射也是双射。换言之，模(B)是余分层的。□

20.13. 注记。因此，我们可以通过给出以下 定理 19.10 的另一种证明，完成该定理的证明 [BIK12，定理 11。6]:

20.14.**定理** (Benson–Iyengar–Krause)。设 E 是一个初等阿贝尔 p-群，k 是特征为 p 的域。那么范畴 $\mathrm{Rep}(E, k)$ 是余分层的，其谱为 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Rep}(E, k)^c) \cong \mathrm{Proj}\ H^*(E; k)$。

证明。 设 E 是一个秩为 $r \geq 1$ 的初等阿贝尔子群。根据 [Mat15，命题 3.9]，包含关系 $E \cong (\mathbb{Z}/p)^\times \subseteq (S^1)^{\times r} =: \mathbb{T}$ 诱导出一个忠实的$\mathbb{T}$-伽罗瓦扩张 $f\colon k^{h\mathbb{T}} \to k^{hE}$。注意到

$$\pi_* k^{h\mathbb{T}} \cong k[x_1, \dots, x_r]$$

具有所有生成元 x_i 均处于 2 次，因此 Mod($k^{h\mathbb{T}}$) 是一个仿射弱正则张量三角范畴。因此，Mod($k^{h\mathbb{T}}$) 由 定理 18.15余分层。由于 f 满足 命题 20.12的假设，伽罗瓦上升意味着 Mod(k^{hE}) 也是余分层的。最后，我们注意到存在一个张量三角范畴的等价

$$\mathrm{Mod}(k^{hE}) \simeq \mathrm{Rep}(E, k),$$

因此 Rep(E, k) 也是余分层的。 □

色同伦论。

20.15. 定义。 对于固定的素数 p，令 $\mathcal{S}$ 表示 p-局部稳定同伦范畴，令 E_n 表示 n 阶 ***Lubin–Tate*** 谱，并令 $\mathcal{S}_{E_n}$表示 E_n-局部谱的范畴。回忆一下， E_n 是一个与第 n 阶 Johnson–Wilson 谱 $E(n)$ Bousfield 等价的交换环谱。关于色同伦论的更多背景知识，有兴趣的读者可参阅 [BB19]。

20.16. 注记。 我们用 $L_n\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}_{E_n}$ 表示相应的 Bousfield 局部化函子。这是一个 smashing 局部化，因此我们有 $\mathcal{S}_{E_n} \simeq$Mod($L_n S^0$)，而局部化 $L_n\colon \mathcal{S} \to$ Mod($L_n S^0$) 由沿着 $S^0 \to L_n S^0$ 的基变换给出。

20.17. 注记。 我们有

$$\pi_*(E_n) \cong W(\mathbb{F}_{p^n})[\![u_1, \dots, u_n]\!][u^{\pm 1}]$$

其中 $|u_i| = 0$和 $|u| = -2$。特别地，Mod(E_n) 是仿射弱正则的（定义 18.10），因此根据 定理 18.15，Mod(E_n) 是余分层的。

20.18. 记号。 对于每个 $0 \leq h \leq n$，我们定义

$$\mathcal{P}_h := \left\{ x \in \mathcal{S}^c_{E_n} \,\middle|\, K(h)_*(x) = 0 \right\},$$

的素理想 $\mathcal{S}^c_{E_n}$。以下是对 [HS99，定理 6。9]，中所述内容的重述，见 [BHN22，命题 3。5]。

20.19.**定理** (Hovey–Strickland)。 谱

$$\mathrm{Spc}(\mathcal{S}^c_{E_n}) = \mathcal{P}_n - \cdots - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0$$

是一个局部不可约空间，由 $n+1$ 个点组成，其中闭包关系指向左侧：
$\{\mathcal{P}_h\} = \left\{ \mathcal{P}_k \,\middle|\, h \leq k \leq n \right\}$。

20.20. 注记。 以下结果恢复了 $\mathcal{S}_{E_n}$ 的余局部化子范畴分类，该分类见 [HS99，定理 6。14]。

20.21.**定理** (Hovey–Strickland)。 E_n-局部谱范畴 $\mathcal{S}_{E_n}$ 是余分层的。

证明。 考虑几何函子 $f^*\colon \mathcal{S}_{E_n} \to$模($E_n$)由基变换给出。根据 Hopkins–Ravenel smash 积定理 [Rav92，第 8]章可知，该函子是保守的（另见 [Mat16，命题 3.18 和定理 4.17]）。此外，模(E_n)是余分层的（注记 20.17），而 $\mathcal{S}_{E_n}$ 由 [BHS23，定理 10.14]分层。根据 推论 17.4，我们得出 $\mathcal{S}_{E_n}$ 是余分层的。 {v55>

20.22.注记 (色谱余支撑)。 在 [BHS23，命题 10.12], 中，我们建立了一个同构 $g_{\mathcal{P}_k} \simeq M_k S^0$ ，将 Balmer–Favi 幂等元与$L_k S^0 \to L_{k-1} S^0$的纤维联系起来。由此可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Cosupp}(t) &= \{\mathcal{P}_k \in \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c_{E(n)}) \mid \mathsf{hom}(g_{\mathcal{P}_k}, t) \neq 0\} \\ &= \{k \in \{0,\dots,n\} \mid \mathsf{hom}(M_k S^0, t) \neq 0\}.\end{aligned}$$

回顾一下，例 3.6中，Hovey–Strickland 将色谱余支撑定义为

$$\text{co-supp}(t) = \left\{ k \in \{0,\dots,n\} \,\middle|\, \mathsf{hom}(K(k), t) \neq 0 \right\}.$$

我们断言，对所有 $t \in \mathcal{S}_{E_n}$，co-supp(*t*) = Cosupp(*t*)。事实上，假设 hom($M_k S^0, t$) = 0。那么

$$\mathsf{hom}(K(k), \mathsf{hom}(M_k S^0, t)) \simeq \mathsf{hom}(K(k) \otimes M_k S^0, t) = 0$$

但 $K(k) \otimes M_k S^0 \simeq M_k K(k) \simeq K(k)$，所以 hom($K(k)$ t) = 0。反过来，假设 hom($K(k)$ t) = 0。所有满足 hom(Y, t) = 0 的 $Y \in \mathcal{S}_{E_n}$ 构成一个局部化子范畴，它包含 $K(k)$，因此根据 [HS99, 命题 6.17]，也包含 $M_k S^0$ 。因此，hom($M_k S^0, t$) = 0 也成立。由此，Balmer–Favi 的余支撑概念与通常的色谱余支撑版本一致。或者，也可以利用推论 11.10 和 [HS99, 定理 6.14]证明这一点。

上链代数。

20.23. 定义。 对于一个空间 X，我们用 $C^*(X; \mathrm{F}_p)$ 表示函数谱$F(\Sigma^\infty_+ X, \mathrm{F}_p)$。

20.24. 注记。在 [BCHV22] 中，我们研究了何时 Mod($C^*(X; \mathrm{F}_p)$) 按照 BIK 的意义是分层的。这用到了一个与 X 相关的特定范畴 $\mathcal{E}(X)$，其对象是由一对 (V, ϕ) 构成的（同构类），其中 E 是一个初等阿贝尔 p-群，而 $\phi\colon H^*(X; \mathrm{F}_p) \to H^*(BE; \mathrm{F}_p)$ 是对偶 Steenrod 代数上的不稳定代数之间的有限态射。我们证明这些映射 ϕ 可以提升为上链层面的映射，因此我们有一个交换环谱的映射

$$\rho_X : C^*(X; \mathbb{F}_p) \to \prod_{(E,\phi)\in\mathcal{E}(X)} C^*(BE; \mathbb{F}_p). \tag{20.25}$$

20.26. 定义。 一个 p-良好[6] 连通拓扑空间 X 具有诺特模 p上同调，被称为满足 ***Chouinard*** 条件，如果沿映射(20.25)的诱导和余诱导是保守的。

20.27.**定理**。 设 X 是一个 p-良好的连通空间，且其模 p 上同调是诺特的。则以下条件等价：

(a) $\operatorname{Mod}(C^*(X;\ \mathbb{F}_p))$ 是分层的。***(b)*** $\operatorname{Mod}(C^*(X;\ \mathbb{F}_p))$ 是余分层的。***(c)*** X 满足 ***Chouinard*** 条件。

若上述任一条件成立，则 $\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}(C^*(X;\ \mathbb{F}_p))^c) \cong \operatorname{Spec}^h(H^*(X;\ \mathbb{F}_p))$。

证明。 根据 *a*) 与 (*c*) 等价，这由 [BCHV22，定理 5 得出。12]而 (*b*) 蕴含 (*a*)，这由 定理 7.19 得出。这些也蕴含结论 (*b*)。于是，假设 (*a*) 成立，从而 (*c*) 也成立，并考虑基变换函子

$$f^*\colon \operatorname{Mod}(C^*(X;\mathbb{F}_p)) \to \prod_{(E,\phi)\in\mathcal{E}(X)} \operatorname{Mod}(C^*(BE;\mathbb{F}_p)).$$

[6]按 Bousfield–Kan 的意义 [BK72]。

由于积是有限的（这是 [Rec84，第 194] 页的推论），目标范畴由 [BIK12，定理 11.6]以及 例 18.16 余分层。此外，f^* 是一个保守几何函子，且 $\mathrm{Mod}(C^*(X;\mathbb{F}_p))$ 是分层的。现在应用推论 17.4。□

20.28. 例。 令 $X = S^3\langle 3\rangle$ 表示 S^3 的 3-连通覆盖。在此情形下，范畴 $\mathcal{E}(S^3\langle 3\rangle$ 中只有一个非平凡对象，即由复合 $B\mathbb{Z}/p \to BS^1 \to S^3\langle 3\rangle$ 得到的那一对。在 [BCHV19，例 5 中。16] 证明了

$$\mathrm{Mod}(C^*(S^3\langle 3\rangle;\mathbb{F}_p)) \to \mathrm{Mod}(C^*(B\mathbb{Z}/p;\mathbb{F}_p))$$

满足 Chouinard 条件。我们由此得出，$\mathrm{Mod}(C^*(S^3\langle 3\rangle;\mathbb{F}_p))$ 是余分层的。请注意，在我们先前的工作中，我们未能证明这一点；参见 [BCHV19，第 4 节。5] 以及其中的讨论。

20.29. 例。 若 X 是一个诺特 H-空间，则 X 根据 [BCHV19，定理 5，满足 Chouinard 条件。15]。因此，$\mathrm{Mod}(C^*(X;\mathbb{F}_p))$ 是余分层的。

等变同伦论。

20.30. 记号。 令 Sp_G 表示真 G-谱的 ∞-范畴。对于交换代数 $E \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$，记 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Sp}_G}(E)$ 为模的 ∞-范畴，记 $\mathrm{D}_G(E)$ 为其关联的同伦范畴。

20.31. **定理。** 令 G 为有限群，并令 $\mathbb{E} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$。假设对于所有子群 $H \leq G$： 以下条件均成立：

(a) $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}(\Phi^H\mathbb{E})^c)$ 是诺特的；并且 *(b)*

$\mathrm{D}(\Phi^H\mathbb{E})$ 是余分层的。

则 $\mathrm{D}_G(\mathbb{E})$ 是余分层的，并且 $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(\mathbb{E})^c)$是诺特的。

证明。 我们首先注意到，根据 定理 7.19，条件 (*b*) 蕴含每个 $\mathrm{D}(\Phi^H\mathbb{E})$ 都是分层的。于是 [BCH+23a，定理 3.33] 表明 $\mathrm{D}_G(\mathbb{E})$ 是具有诺特谱 $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(\mathbb{E})^c)$ 的分层范畴。为了证明它是余分层的，我们使用自举定理（推论 17.4）。事实上，令

$$\Phi\colon \mathrm{D}_G(\mathbb{E}) \xrightarrow{\{\Phi^H\}_H} \prod_{H\leq G} \mathrm{D}(\Phi^H\mathbb{E})$$

表示几何不动点函子的积。根据 [BCH+23a，命题 3。25]， Φ 是一个保守几何函子。根据假设，每个 $\mathrm{D}(\Phi^H\mathbb{E})$ 都是余分层的，因此其积也是如此（例 18.16），而且我们已经看到 $\mathrm{D}_G(\mathbb{E})$ 是分层的。现在应用推论 17.4。□

20.32. 注记。 在 [BCH+23a，定理 4。3]中证明的广义 Quillen 分层定理，描述了 $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(\mathbb{E})^c)$ 的底层集合，该集合由几何不动点 $\mathrm{D}(\Phi^H\mathbb{E})$ 的谱以及韦伊群作用来刻画。

20.33. 注记. 令 $\mathcal{F}$ 表示 G 的一个子群族。回顾一下，$E \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$ 是 $\mathcal{F}$-幂零的，当且仅当 E 属于由 $\{G/H_+ \mid H \in \mathcal{F}\}$ 生成的 Sp_G 的厚理想。在这种情况下，只要 $E \notin \mathcal{F}$，我们就有 $\Phi^H E = 0$； 参见 MNN17，定理 6.41], 。特别地，只需对 $H \in \mathcal{F}$ 检验定理 20.31 的条件。这样的子群族总存在一个最小者 $\mathcal{F}$，称为 E 的导出缺陷基。参见 [MNN19]，其中计算了许多等变谱的导出缺陷基。

20.34. 例. 存在一个典范几何函子 $\mathrm{triv}_G\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}_G$，它将一个谱映到相应的带有平凡 G-作用的 G-谱。更多细节参见 [PSW22，第 3] 节。对于 $\mathrm{E} \in \mathrm{CAlg(Sp)}$，令 $\mathrm{E}_G \coloneqq \mathrm{triv}_G\mathrm{E} \in \mathrm{CAlg(Sp}_G)$ 表示相应的真正 G-谱中的交换代数。对每个 $H \leq G$，我们都有 $\Phi^H\mathrm{E}_G \simeq \mathrm{E}$。特别地，定理 20.31 推出以下结论：

20.35. **推论**。设 $\mathbb{E} \in \mathrm{CAlg(Sp)}$ 是交换环谱，且$\mathrm{Spc}(\mathrm{D}(\mathbb{E})^c)$ 是诺特的。若 $\mathrm{D}(\mathbb{E})$ 是余分层的，那么对于任意有限群 G，$\mathrm{D}_G(\mathbb{E}_G)$ 都是余分层的。

20.36.**推论**。对于任意有限群 G 和离散交换环 R，导出 *Mackey* 函子的范畴 $\mathrm{D}_G(HR_G)$ 是余分层的。

证明。利用 例 19.2，我们可以将 推论 20.35 应用于 $\mathbb{E} = HR$。 □

20.37. 注记。根据 [PSW22，命题 4。9]以及 [BHS23，命题 14。3], 存在一个对称幺半 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{Mack}_G(\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathrm{Sp}_G}(\mathbb{E}_G)$$

其中 $\mathrm{Mack}_G(\mathbb{E})$ 表示 Barwick 的谱 G-Mackey 函子范畴，其系数取自 $\mathbb{E}$ [Bar17]。特别地，前述结果表明，对于任意离散诺特交换环 HR值谱 Mackey 函子都是余分层的 R。对于 $R = \mathbb{Z}$，相应的谱已在[PSW22]中被完全确定。

20.38. 例。取 $\mathrm{E} = L_nS^0$（注记 20.16），可得 E_n-局部谱 Mackey 函子的范畴 $\mathrm{SH}_{G,E_n} \coloneqq \mathrm{D}_G(\mathrm{E}_G)$；见 BHS23，例 13.15]。等价地，这是系数取自 $\mathcal{S}_{E_n}$ 的谱 Mackey 函子范畴；见 BHS23，例 14.4]。如同上文所述，得益于定理 20.19，SH_{G,E_n} 的谱的底层集合是已知的。

20.39. **推论**。对于任意有限群 G、素数 p 和 $0 \leq n < \infty$，E_n-局部谱 *Mackey* 函子的范畴$\mathrm{SH}_{G,\ E_n}$ 是余分层的。

证明。这可由 推论 20.35 在 $\mathbb{E} = L_nS^0$的情形下推出，并应用 定理 20.21。 □

20.40. 注记。给定一个非等变谱 $\mathbb{E} \in$CAlg(Sp)，还可以通过另一种方式构造等变谱，即取其对应的 Borel 等变谱 $b_G\mathbb{E} \in \mathrm{CAlg(Sp}_G)$；见 [MNN17，第 6 节。3]。

20.41.**定理**。对于任意有限群 G，范畴 $\mathrm{D}_G(b_GE_n)$ 由$\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(b_GE_n)^c) \cong \mathrm{Spec}(E_n^0(BG))$ 余分层。

证明。在 [BCH$^+$23a 定理 6.14] 中证明了，$\Phi^H(b_GE_n)$ 仅当 H 是秩至多为 n 的阿贝尔 p-群时才非零；在这种情况下，其同伦群是一个正则诺特偶周期环。特别地，根据定理 18.15，每个 $\mathrm{D}(\Phi^H(b_GE_n))$ 都是具有诺特谱的余分层范畴。根据定理 20.31，$\mathrm{D}_G(b_GE_n)$ 由 $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(b_GE_n)^c)$ 余分层；根据 [BCH$^+$23a 引理 7.3]，后者与 $\mathrm{Spec}(E^0(BG))$ 同胚。□

20.42. 注记。我们的下一个例子来自与有限群的等变复 K-理论 KU_G 相关联的模范畴 G；参见 [Seg68]。我们用 $R(G$ 表示与 G 相关联的复表示环。

20.43.**定理**。 对于任意有限群 G，范畴 $\mathrm{D}_G(KU_G)$ 由$\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(KU_G)^c) \cong \mathrm{Spec}(R(G))$ 余分层。

证明。这与前一个证明类似。 [BCH+23a 的引理 8.6] 证明了，只有当 H 是 G 的循环子群时， $\Phi^H(KU_G)$ 才非零；此时其同伦群是一个正则诺特偶周期环。特别地，根据定理 18.15，每个 $\mathsf{D}(\Phi^H(KU_G))$ 都是具有诺特谱的余分层范畴。根据定理 20.31，$\mathrm{D}_G(KU_G)$ 关于 $\mathrm{Spc}(\mathrm{D}_G(KU_G)^c)$ 余分层；根据 [BCH+23a 的引理 8.11]，该谱与 $\mathrm{Spec}(R(G))$ 同胚。□

20.44. 注记。 对于紧李群 G，令 $\mathrm{SH}_{G,\mathbb{Q}}$ 表示有理 G-等变谱的稳定同伦范畴。这是一个刚性紧生成三角张量范畴，且是分层的；参见 [Gre19] 或 [BHS23，定理 12。22]。我们的最终目标是证明它是余分层的。

20.45. 注记。 回想一下，根据定义， L 在 K 中是余环面 的，当且仅当 L 是 K 的正规子群且 K/L 是一个环面。此外，对每个 $H \leq G$ ，我们都有几何不动点函子

$$\Phi^H \colon \mathrm{SH}_{G,\mathbb{Q}} \to \mathrm{SH}_{\mathbb{Q}}$$

它们联合起来是保守的（例如， [Sch18，命题 3.3.10]）。由于 $\mathrm{SH}_{\mathbb{Q}} \simeq \mathsf{D}(\mathbb{Q})$ 的谱只有一个点，因此对每个 $H \leq G$，我们得到一个素理想 $\mathfrak{p}_H \in \mathrm{Spc}(\mathrm{SH}_{G,\mathbb{Q}})$。除共轭外，这些就是全部的素理想：

20.46.**定理** (Greenlees)。 设 G 是一个紧李群。那么，作为集合，

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{SH}^c_{G,\mathbb{Q}}) = \left\{ \mathfrak{p}_H \,\middle|\, (H) \text{ conjugacy class of closed subgroups in } G \right\}.$$

特化序由余环面包含关系确定：

$\mathfrak{p}_K \subseteq \mathfrak{p}_H$ 当且仅当 K 共轭于一个余环面包含在 H中的子群。 $\mathrm{Spc}(\mathrm{SH}^c_{G,\mathbb{Q}})$ 上的拓扑是 f-拓扑上的*“Zariski 拓扑”*，见 [Gre98]。20.47. 注记。 空间 $\mathrm{Spc}(\mathrm{SH}^c_{G,\mathbb{Q}})$ 是弱诺特的，见 [BHS23，引理 12。12]。20.48.**定理**。 对于任意紧李群 G，有理 G-谱范畴是余分层的。

证明。 我们将自举应用于几何不动点函子集$\Phi^H \colon \mathrm{SH}_{G,\mathbb{Q}} \to \mathrm{SH}_{\mathbb{Q}} \simeq \mathsf{D}(\mathbb{Q})$。目标范畴是余分层的（推论 18.9），而 $\mathrm{SH}_{G,\mathbb{Q}}$ 是分层的（注记 20.44）。因此，根据定理 17.7和定理 20.46 ，我们推得 $\mathrm{Spc}(\mathrm{SH}_{G,\mathbb{Q}})$ 是余分层的。□

21. Open questions

这里汇集了一些我们尚不知答案的问题。

21.1. 问题。 检测性质是否总是成立？（参见注 6.6。）

21.2. 问题。 分层是否蕴含余分层？（参见注 7.22。）

21.3. 问题。 的余支撑是什么？更确切地说，在怎样的一般情形下，等式 $\mathrm{Cosupp}(g_{\mathcal{P}})$ =生成$(\mathcal{P})$ 成立？（参见引理 4.26。）

21.4. 问题。弱（余）环是否总是满足（余）检测性质？

21.5. 问题。 一个刚性紧生成三角张量范畴 $\mathcal{T}$ 若其谱是泛诺特的且该范畴是分层的，则满足望远镜猜想；参见 [BHS23，定理 9。11]若 $\mathcal{T}$ 是余分层的，能否改进这一结果？

21.6. 问题。 是否存在一个几何函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 作用于刚性紧生成三角张量范畴之间，使得 f^* 是保守的，而 $f^!$ 不是？（参见推论 14.24 及其证明中引用的结果。）

21.7. 问题。 若 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是任意几何函子，且 $\mathcal{S}$ 满足局部到整体原理，那么 $\mathcal{T}$ 是否满足对象的局部到整体原理$t \in \mathcal{T}$，其中 $\operatorname{Supp}(t) \subseteq \operatorname{im}\varphi$？只需在附加假设 f_* 是保守函子的情况下证明即可。（参见 第 15 节。）

21.8. 问题。 若对象 $t \in \mathcal{T}$ 的支撑 $\operatorname{Supp}(t)$ 是诺特的，局部到整体原理是否对它成立？

21.9. 问题。 局部到整体原理是否存在一种完全仅以 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 的拓扑来表述的刻画？

21.10. 问题。 分层是否 总是 沿保守几何函子 $f^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$：（其作用于刚性紧生成的 tt-范畴之间）下降？若是如此，我们的自举定理（推论 17.4）意味着余分层也总是会下降。

References

[AR94] Ji˘r´ı Ad´amek and Ji˘r´ı Rosick´y. *Locally presentable and accessible categories*，第189卷《*London Mathematical Society Lecture Note Series*》。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[ATJLL97] Leovigildo Alonso Tarr´ıo、Ana Jerem´ıas L´opez 和 Joseph Lipman。概形上的局部同调与上同调。*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，30(1):1–39，1997年。[AS82] George S. Avrunin 和 Leonard L. Scott。模的 Quillen 分层。

Invent. , ( ): –286,

Math. 66 2 277

1982年。[BS21] Scott Balchin 和 Greg Stevenson。大范畴、大谱。预印本，共30页，在线见 arXiv:2109.11934。即将发表于 *Journal of Topology*，2021年。[Bal05] Paul Balmer。张量三角范畴中素理想的谱。 *J. Reine* , :–。[

Angew. Math. 588 149 168, 2005

Bal10] Paul Balmer。张量三角几何。载于 *International Congress of Mathematicians Vol. II* 85 112 2010

Hyderabad (2010)，页码 –。印度斯坦图书机构，。[Bal18] Paul Balmer。关于张量三角函子所诱导的谱映射的满射性。 *Bull. Lond. Math. Soc.*，50(3):487–495，2018年。[Bal20] Paul Balmer。张量三角范畴中大对象的同调支撑。 *J.Éc. polytech. Math.*，7:1069–1088，2020年。[BDS16] Paul Balmer、Ivo Dell' Ambrogio 和 Beren Sanders。Grothendieck–Neeman 对偶与 Wirthm¨uller 同构。 *Compos. Math.*，152(8):1740–1776，2016年。[BF11] Paul Balmer 和 Giordano Favi。广义张量幂等元与望远镜猜想。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，102(6):1161–1185，2011年。[BG21] Paul Balmer 和 Martin Gallauer。置换模、Mackey 函子与 Artin 动机。预印本，共30页，在线见 arXiv:2107.11797。即将发表于 *Proceedings of ICRA 2020*，2021年。[BG22] Paul Balmer 和 Martin Gallauer。置换模的 tt-几何。第一部分：分层。预印本，共34页，在线见 arXiv:2210.08311，2022年。[BKS19] Paul Balmer、Henning Krause 和 Greg Stevenson。张量三角域：思考。 *Selecta Math. (N.S.)*，25(1):论文第13号，共36页，2019年。[BS17] Paul Balmer 和 Beren Sanders。有限群的等变稳定同伦范畴的谱。 *Invent. Math.*，208(1):283–326，2017年。[Bar21] Tobias Barthel。有限群整表示的分层。预印本，共36页，在线见 arXiv:2109.08135，2021年。[Bar22] Tobias Barthel。通过等变同伦论对整表示进行分层。预印本，共19页，在线见 arXiv:2203.14946，2022年。

[BB19] Tobias Barthel 和 Agn`es Beaudry。稳定同伦论中的色结构。载于 *Handbook of Homotopy Theory*，第165–222页。Chapman and Hall/CRC，2019年。[BBI+23] Tobias Barthel、Dave Benson、Srikanth B. Iyengar、Henning Krause 和 Julia Pevtsova。群代数上的格与分层。编写中，2023年。[BCH+23a] Tobias Barthel、Nat`alia Castellana、Drew Heard、Niko Naumann 和 Luca Pol。等变同伦论中的 Quillen 分层。预印本，共56页，在线见 arXiv:2301.02212，2023年。[BCH+23b] Tobias Barthel、Natalia Castellana、Drew Heard、Niko Naumann、Luca Pol 和 Beren Sanders。张量三角几何中的下降。编写中，2023年。[BCHV19] Tobias Barthel、Nat`alia Castellana、Drew Heard 和 Gabriel Valenzuela。同伦群的分层与对偶性。 *Adv. Math.*，354:106733，61，2019年。[BCHV22] Tobias Barthel、Nat`alia Castellana、Drew Heard 和 Gabriel Valenzuela。关于诺特模

p 144 4 895 941, 上同调空间

2022

的分层。 *Amer. J. Math.*，( ): –。[BHN22] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Niko Naumann。关于 Hovey-Strickland 和 Chai 的猜想。 *Selecta Math. (N.S.)*，28(3)，2022年。[BHS21] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Beren Sanders。分层以及同调支撑与张量三角支撑之间的比较。预印本，共18页，2021年。[BHS23] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Beren Sanders。张量三角几何中的分层及其在谱 Mackey 函子中的应用。预印本，共59页。即将发表于 *Cambridge Journal of Mathematics*，2023年。[BHV18] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Gabriel Valenzuela。代数与拓扑中的局部对偶。 *Adv. Math.*，335:563–663，2018年。[Bar17] Clark Barwick。谱 Mackey 函子与等变代数

K *Adv.* 理论（I）。，

Math. 304 646 727, 2017

: –。[BˇS17] Silvana Bazzoni 和 Jan ˇSˇtov´ıˇcek。弱整体维数至多为一的环的 smashing 局部化。 *Adv. Math.*，305:351–401，2017年。[Bel00] Apostolos Beligiannis。三角范畴中的相对同调代数与纯性。 *J. Algebra*，227(1):268–361，2000年。[BCR97] Dave Benson、Jon F. Carlson 和 Jeremy Rickard。稳定模范畴的厚子范畴。 *Fund. Math.*，153(1):59–80，1997年。[BIK08] Dave Benson、Srikanth B. Iyengar 和 Henning Krause。三角范畴的局部上同调与支撑。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，41 619，2008 4 573( ): –。[BIK11a] Dave Benson、Srikanth B. Iyengar 和 Henning Krause。有限群模表示的分层。 *Ann. of Math. (2)*，174(3):1643–1684，2011年。[BIK11b] Dave Benson、Srikanth B. Iyengar 和 Henning Krause。三角范畴的分层。 *J. Topol.*，4(3):641–666，2011年。[BIK12] David J. Benson、Srikanth B. Iyengar 和 Henning Krause。余局部化子范畴与余支撑。 *J. Reine Angew. Math.*，673:161–207，2012年。[BK08] David John Benson 和 Henning Krause。单射

kG *Algebra* 模的复形。，

Number Theory 2 1 1 30, 2008

( ): –。[Boa70] J. M. Boardman。稳定同伦论并非自对偶。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，26 369: –370，1970年。[Bou79] A. K. Bousfield。关于同调的谱局部化。 *Topology*，18 4 257 281，1979 ( ): –。[BK72] A. K. Bousfield 和 D. M. Kan。 *Homotopy limits, completions and localizations*。《数学讲义》第304卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1972年。[BC76] Edgar H. Brown, Jr. 和 Michael Comenetz。广义同调与上同调理论的 Pontrjagin 对偶。 *Amer. J. Math.*，98(1):1–27，1976年。[BKS07] Aslak Bakke Buan、Henning Krause 和 Øyvind Solberg。支撑簇：一种理想方法。 *Homology Homotopy Appl.*，9(1):45–74，2007年。[CGR14] Carles Casacuberta、Javier J. Guti´errez 和 Ji ˇr´ı Rosick´y。稳定同伦范畴的所有局部化子范畴都是余反射的吗？ *Adv. Math.*，252:158–184，2014年。[Cha60] Stephen U. Chase。模的直积。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，97 473，1960 457: –。

[DS16] Ivo Dell'Ambrogio 和 Donald Stanley。仿射弱正则张量三角范畴。 *Pacific J. Math.*, 285 1 93 109, 2016 https://math. (): –。勘误见[univ-lille1.fr/~dellambr/affreg_erratum.pdf
DST19] Max Dickmann、Niels Schwartz 和 Marcus Tressl。 *Spectral spaces* 35 *New* , [的第 卷。剑桥大 *Mathematical Monographs* 2019
学出版社，剑桥，。02] DG *Amer.* W. G. Dwyer 和 *J. Math.* 124 1 199
J. P. C. Greenlees。完备模与挠模。[, (): –220，2002。06] DGI *Comment. Math. Helv.*W. G. Dwyer、J. P. C. Greenlees 和 S. Iyengar。局部环导出范畴中的有限性。[，81(2):383–432，2006。01] FS Ł´aszl *Modules over non-Noetherian domains*o Fuchs 和 Luigi Salce。*Mathematical Surveys and Monographs*, [第84卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001。05] GP*Algebr. Represent. Theory*Grigory Garkusha 和 Mike Prest。三角范畴与齐格勒谱。[, 8(4):499–523，2005。98] Gre *Proc. London* J. P. C.
Math. Soc. (3) 76 3 549 578, 1998
Greenlees。紧李群的有理麦基函子。I。[, (): –。01] Gre *Coho-*
mological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998) 196 *Progr. Math.* J. P. C.
Greenlees。公理化稳定同伦论中的泰特上同调。载于¨，[的第 卷，第149–176页。Birkh19] auser，巴塞尔，2001。*J. Pure Appl. Algebra*Gre[J. P. C. Greenlees。有理等变上同调理论的 Balmer 谱。92] , 223(7):2845–2871，2019。 *I*GM *J. Algebra*J. P. C. Greenlees 和 J. P. May。[-adic 完备化的导出函子与局部同调。61] , 149(2):438–453，1992。 ´Gro´A. Grothendieck。´El´ements de g´eom ´etrie alg ´ebrique. II. ´Etude globale *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*el[ementaire de quelques classes de morphismes。66] , (8):222，1961。 *Residues and duality*Har[Robin Hartshorne。17] 。《数学讲义》，第20号。Springer-Verlag，柏林—纽约，1966。A. Grothendieck 研究工作的研讨班讲义，1963/64年于哈佛大学授课；附录由 P. Deligne 撰写。*K*HMS $p-1$Drew Heard、Akhil Mathew 和 Vesna Stojanoska。高度为[的高阶实 *Compos. Math.*-理论谱的 Picard 群。69] , 153(9):1820–1854，2017。
*Trans. Amer. Math. Soc.*Hoc[M. Hochster。交换环中的素理想结构。98] , 142 43: –60，1969。
*Ann. of Math. (2)*HS[Michael J. Hopkins 和 Jeffrey H. Smith。幂零性与稳定同伦论。II。97] , 148(1):1–49，1998。 *Mem. Amer. Math. Soc.*HPS[Mark Hovey、John H. Palmieri 和 Neil P. Strickland。公理化稳定同伦论。99] , 128(610)，1997。
K *Mem. Amer.* HS[Mark Hovey *Math. Soc.* 139 666 +100 1999
和 Neil P. Strickland。Morava 82] -理论与局部化。, (): viii, 。 *Stone spaces* 3 *Cambridge Studies in Advanced* Joh[Peter T. *Mathematics* 1982
Johnstone。02] , *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 1 123 149, 2002
的第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，。[Kaw94] Takesi Kawasaki。诺特环的算术麦考利化。 *Manuscripta*
Math. 84 2 193 198, 1994 , (): –。[Kel17]
Bernhard Keller。关于广义粉碎猜想的注记。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, (): –。[KP00] Joachim Kock 和 Wolfgang Pitsch。导出范畴中的 Hochster 对偶与概形的无点重构。 *Invent. Math.*, 369(1):223–261，2017。[Kra01] Henning Krause。粉碎子范畴与望远镜猜想——一种代数方法。 *Doc. Math.*, 139(1):99–133，2000。[Kra02] Henning Krause。关于 Neeman 的良生成三角范畴。 *Topology*, 6 121: –126，2001。[Kra10] Henning Krause。通过相干函子得到的 Brown 可表性定理。 *Triangulated categories*, 41 4 853( ): –861，2002。 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*Kra[Henning Krause。三角范畴的局部化。载于19] , *Spectral structures and topological methods in mathematics*第375卷，第161–235页。剑桥大学出版社，剑桥，2010。KSHenning Krause 和 Greg Stevenson。射影直线的导出范畴。载于，《欧洲数学会大会报告》，第275–297页。欧洲数学会，2019。

[Lau21] Eike Lau。某些 Deligne-Mumford 代数栈的 Balmer 谱。预印本，34页，在线见 arXiv:2101.01446，2021年。[Lur09] Jacob Lurie。 *Higher topos theory*, *Annals of Mathematics Studies*第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Mat15] Akhil Mathew。稳定模范畴上的环面作用、Picard 群与局部化子范畴。预印本，20页，在线见 arxiv:1512.01716，2015年。[Mat16] Akhil Mathew。稳定同伦论的伽罗瓦群。 *Adv. Math.*，291 541，2016 403：–。[MNN17] Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel。等变稳定同伦论中的幂零性与下降。 *Adv. Math.*，305:994–1084，2017。[MNN19] Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel。导出归纳与限制理论。 *Geom. Topol.*，23(2):541–636，2019。[Mat78] Eben Matlis。 R-序列的高阶性质。 *J. Algebra*，50(1):77–112，1978。[Mat89] Hideyuki Matsumura。 *Commutative ring theory* 8 *Cambridge Studies in* ，[的第 卷。 *Advanced Mathematics* 剑桥大学出版社，剑桥，第二版，。由 M. Reid 从日文译出。] Nee92a DAmnon Neeman。R(*Topology*)的色塔。[，31(3):519–532，1992。] Nee92b KAmnon Neeman。Thomason、Trobaugh 和 Yao 的*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*-理论局部化定理与 Bousfield 和 Ravenel 的粉碎子范畴之间的联系。[，25(5):547–566，1992。96] Nee *J. Amer. Math. Soc.*Amnon Neeman。利用 Bousfield 的技巧与 Brown 可表性证明 Grothendieck 对偶定理。[，9(1):205–236，1996。01] Nee *Triangulated categories* 148 *Annals of Mathematics Studies* Amnon Neeman。[，10] 的第 卷。普林斯顿大学出版社，。 *Triangulated categories* 375 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 290 350 Nee[Amnon Neeman。导出范畴与 Grothendieck 对偶。载于11] ，R的第 卷，第–页。剑桥大学出版社，剑桥，2010。 *J. Reine Angew. Math.*Nee[Amnon Neeman。D(22])的余局部化子范畴。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，653:221–243，2011。[PSW14] Irakli Patchkoria、Beren Sanders 和 Christian Wimmer。导出 Mackey 函子的谱。 *Algebr. Represent. Theory*，375(6):4057–4105，2022。 17 1 31 67, 2014 [18 5 1401 1405, PSY[2015] Marco Porta、Liran Shaul 和 Amnon Yekutieli。关于完备化与挠的同调。15] *Comm. Algebra*( )：–。勘误见同刊 ( )：–。[PSY92] Marco Porta、Liran Shaul 和 Amnon Yekutieli。上同调余有限复形。 *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*，43(2):597–615，2015。 *Annals of Mathematics Studies*Rav[Douglas C. Ravenel。84] ， *J.* 第128卷。普 *Pure Appl. Algebra* 32 2 191 217, 1984 林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992。[Rec08] D. L. Rector。具有挠的诺特上同调环与有限环空间。*Mem. Amer. Math. Soc.*，( )：–。+137Rog[John Rognes。结构化环谱的伽罗瓦扩张。稳定可对偶群。19] ，192(898):viii *J. Topol.*，2008。[San22] Beren Sanders。几何函子的紧致性轨迹与 Adams 同构的形式构造。 ′，12(2):287–327，2019。 *Épijournal Géom. Algébrique*San[Beren Sanders。张量三角几何中有限 étale 态射的刻画。17] ，6:第18篇，25页，2022。[San17] William T. Sanders。非诺特环与张量三角范畴中的支撑与消失。预印本，33页，在线见 arXiv:1710.10199，2017年。*Comm. Algebra*SWW[Sean Sather-Wagstaff 和 Richard Wicklein。复形的支撑与 adic 有限性。18] ，45(6):2569–2592，2017。 *Global homotopy theory*Sch *New Mathematical Monographs* Stefan Schwede。[，68] 第34卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。 KSeg *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Graeme Segal。等变 理论。79] ，(34):129–151，1968。 *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil 31ème année (Paris, 1977–1978)* 740 *Lecture Notes in Math.* 213 229 ShaRodney Y. Sharp。交换代数中对偶化复形存在的必要条件。载于，的第 卷，第–页。施普林格，柏林，1979。

[SW20] Liran Shaul 和 Jordan Williamson。张量三角范畴之间（余）分层的提升。预印本，共20页，在线见 arXiv:2012.05190。即将在 *Israel Journal of Mathematics* 发表，2020年。[Ste13] Greg Stevenson。通过张量三角范畴的作用研究支撑理论。

J. Reine , : –。[

Angew. Math. 681 219 254, 2013

Ste14a] Greg Stevenson。绝对平坦环的导出范畴。 *Homology Homotopy Appl.*，16 2 45 64，2014

（）：–。[Ste14b] Greg Stevenson。通过张量作用研究奇点范畴的子范畴。

Compos. , （）：–。[

Math. 150 2 229 272, 2014

Ste17] Greg Stevenson。通过维数函数研究三角范畴的局部到整体原理。 *J. Algebra*，473：406–429，2017年。[Ste18] Greg Stevenson。通过张量三角几何纵览三角范畴的支撑理论。载于 *Building bridges between algebra and topology*，《数学高级课程》，CRM 巴塞罗那，页码63–101。Birkh¨auser/Springer，Cham，2018年。[Tho97] R. W. Thomason。三角子范畴的分类。 *Compositio Math.*，105 1 1（）：–27，1997年。[Trl96] Jan Trlifaj。Ziegler 的两个问题及正则环上的一致模。载于

Abelian groups and modules (Colorado Springs, CO, 1995) 182 *Lecture* , 卷（）， *Notes in Pure and Appl. Math.* 373 383 1996

页码–。Dekker，纽约，。[Ver21] Charalampos Verasdanis。分层与 smashing 谱。预印本，共29页，在线见 arXiv:2204.01082，2021年。[Ver22] Charalampos Verasdanis。余分层与张量三角范畴的作用。预印本，共26页，在线见 arXiv:2211.04139v2，2022年。[Zhe13] Han Zhe。导出离散代数上内射模的同伦范畴。预印本，共19页，在线见 arXiv:1308.2334，2013年。[Zou23] Changhan Zou。正在撰写的手稿，2023年。

Tobias Barthel, Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany*Email address*: tbarthel@mpim-bonn.mpg.de*URL*: https://sites.google.com/view/tobiasbarthel/home

Natàlia Castellana, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain*Email address*: natalia@mat.uab.cat*URL*: http://mat.uab.cat/∼natalia

Drew Heard, Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim*Email address*: drew.k.heard@ntnu.no*URL*: https://folk.ntnu.no/drewkh/

Beren Sanders, Mathematics Department, UC Santa Cruz, 95064 CA, USA *Email address*: beren@ucsc.edu*URL*: http://people.ucsc.edu/∼beren/