arXiv:2303.13487v1 [math.PR] 23 Mar 2023

索伯列夫-维格纳空间

Charles-Philippe Diez *[1]

[1]香港中文大学统计系。

2023年3月24日

摘要

本文介绍了关于维格纳空间上的自由 Malliavin 微积分的新结果。该理论最初由 Biane 和 Speicher 在其开创性工作中提出 [3]。我们据此定义了高阶Malliavin导数，并研究与之相关的索伯列夫-维格纳空间。借助这些定义，我们得到了 Stroock 公式的自由对应版本以及若干方差恒等式¨。由此，我们以 Ust ¨unel、Nourdin 和 Peccati（[48, 36]）的方式，给出了两个多重维格纳积分之间乘积公式的精巧证明。我们还研究了维格纳空间上的交换关系（具有不同含义），并展示了例如不存在非平凡的有界中心马利亚万可微泛函，也不存在非平凡的马利亚万可微投影。

2010年美国数学学会分类号：46L54, 60H07, 60H30.

关键词：自由概率、维格纳混沌、自由 Malliavin 微积分、Sobolev-维格纳空间。

1 引言

自由概率，尤其是自由性的概念，是以自由积而非代数的张量积为模型的，可视为经典（张量）独立性的自由类比。Dan Virgil Voiculescu 于 20 世纪 80 年代末提出这一理论，旨在更深入地理解 II_1 因子，尤其是自由群因子。Voiculescu 在其开创性研究中展示了自由概率在冯·诺依曼代数研究中的强大应用，以及它与随机矩阵理论之间的联系。事实上，这一理论使多位学者得以证明冯·诺依曼代数的诸多结果，尤其是关于自由群因子 $L(\mathbb{F}_n)$ $1 \leq n \leq \infty$ 的结果，例如不存在 Gamma 性质、不存在 Cartan 子代数或具有素性 [51, 52, 21] ；这些结果在该理论出现之前尚不为人所知。
Voiculescu 还发现了自由概率与高斯随机矩阵之间的重要联系：高斯矩阵的大型 $N \times N$ 极限表现为半圆系，这促成了自由概率与随机矩阵理论之间的大量平行研究。随后，二十年前，在 Biane 和 Speicher 的开创性论文 [3], 中，关于半圆

*charles-philippe.diez@univ-lille.fr

空间上自由随机变分演算的首批结果问世。这是著名的高斯空间随机变分演算的自由对应理论（后者最初是在经典 Wiener 空间上发展起来的），由 Malliavin 于 20 世纪 70 年代创立。事实上，他们在论文中定义了通常（交换或玻色）布朗运动的自由类比，即自由布朗运动。自由随机分析领域取得了许多成果，例如双过程的伊藤积分、适用于一类光滑算子值利普希茨函数的泛函伊藤公式、维格纳空间的 aL^2-分解（这正是维纳混沌分解的非交换类比；维纳混沌分解可与玻色福克空间对应），以及经典 Malliavin 算子的自由对应版本。维纳空间上的若干重要结果也被证明在自由情形下成立，例如 Biane 在 [2], 提出的自由 Clark-Ocone-Bismut 公式、自由 Ornstein-Uhlenbeck 半群的超压缩性、自由 Skorohod 积分，以及近来关于维格纳泛函解析分布的若干正则性结果（参见 Mai [31]）。通过考察经典情形与自由情形之间的类比，相关研究取得了长足进展；维格纳空间上的“第四矩定理”已有证明（参见例如 Kemp 等人 [26], 、Nourdin 和 Peccati [37] （自由泊松逼近）、Bourguin 和 Campese[6], 、Cebron [8], ，或更近来作者 [20] 运用自由 Malliavin 微积分所得的结果）。（对自由 Stein 方法感兴趣的读者，可访问 Nourdin 持续更新的网页 https://sites.google.com/site/malliavinstein/home，了解更多结果：q-高斯逼近：Deya、Norredine、Nourdin，见 [18], ；tetilla 分布：Deya、Nourdin，见 [17], ；多维自由泊松逼近：Bourguin，见 [5], ；齐次和的不变性原理：Deya、Nourdin，见[19].....）。

本文旨在细化关于维格纳空间上的自由 Malliavin 微积分的若干结果。我们首先回顾一些细节，这些内容可见于 Biane 和 Speicher 对这一主题的主要贡献 [3]。接着，我们介绍这一无限维微分演算的主要算子，并证明关于它们的若干结果：例如，将自由 Ornstein-Uhlenbeck 算子视为关于尺度参数的方向导数。随后，我们研究交换关系（其含义各不相同），例如自由 Malliavin 导数与自由 Ornstein-Uhlenbeck 半群之间的交换关系，以及 Malliavin 导数与条件期望之间的交换关系；还研究 Voiculescu 意义下的一种无限维对偶系统：光滑维格纳泛函与左湮灭算子之间的交换子（这或许本身就值得关注，因为结合 Charlesworth 和 Shlyakhtenko 在 [9] 以及 Mai、Speicher 和 Weber 在 [30], 中的发现，它可能有助于证明 Shigekawa 关于多重维格纳积分的解析分布的绝对连续性的结果 [43] 的自由类比）。本节最后一部分中，我们证明在 $\mathbb{D}^{1,\,2}$中不存在中心维格纳泛函（这里的“中心”取冯·诺依曼代数意义），由此借助维格纳空间上的自由庞加莱不等式，给出另一个证明：由自由布朗运动生成的冯·诺依曼代数（已知与 $L(\mathbb{F}_\infty)$同构；主要思路是不使用这一事实）是一个因子。我们采用的思路最早见于 Dabrowski 关于有限生成情形的工作 [13], 。第三部分中，我们定义维格纳泛函的高阶自由 Malliavin 导数。由此，我们考察与之相关的 Sobolev-Wigner（或半圆）空间，它们是高斯空间的自由对应物（通常称为 Sobolev-Watanabe 空间）。随后，我们给出若干关于这些空间的混沌刻画结果，并由此证明自由斯特鲁克公式。最后，我们得以为

维格纳空间上的乘法规则提供一种更契合自由 Malliavin 微积分精神的证明。事实上，这一结果可视为经典维纳空间上乘积公式¨的一种如今广为人知的证明的自由对应物；该证明最早见于 Ust¨unel [49] 和 Nourdin 和 Peccati 的著作 [36]。事实上，它是自由 Malliavin 梯度的一条莱布尼茨法则的推论。这类莱布尼茨法则最早明确出现在 Voiculescu 关于自由差商的工作中（有限生成情形；参见 [53]中命题4.5之前的讨论）。

2 预备知识

本节回顾非交换 L^p-空间的基本定义。这里， $\mathcal{M}$ 表示一个赋有忠实正规态的冯·诺依曼代数。现在，根据 GNS 构造， τ 在 $\mathcal{M}$ 上定义了一个内积，对所有 x、 $y \in \mathcal{M}$，令其为。

$$\langle x, y\rangle_\tau = \tau(y^* x)$$

$\mathcal{M}$ 关于诱导范数 $\|.\|_\tau$ 的完备化记为 $L^2(\mathcal{M},\tau)$。当态的定义明确时，我们将省略对它的记号，并将 $\|.\|_\tau$ 记为 $\|.\|_2$，将 $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 记为 $L^2(\mathcal{M})$。同样，我们也可以定义空间 $L^p(\mathcal{M},\tau)$，其中 $1 \leq p \leq \infty$，通过关于以下范数取完备化：

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

其中 $|x| = (x^* x)^{\frac{1}{2}}$，且 $L^\infty(\mathcal{M},\tau) := \mathcal{M}$ 配备算子范数 $\|.\|_\infty$

由配备算子范数的冯·诺依曼张量积 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{op}$ （为避免混淆，我们在此将代数张量积记为 $\odot$）： $\|.\|_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{op}}$，以及忠实正规态 $\tau \otimes \tau^{op}$，我们可以考虑希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{op}, \tau \otimes \tau^{op})$。它可通过以下映射与 $HS(L^2(\mathcal{M}))$ 等同，后者是 $L^2(M)$ 上的希尔伯特–施密特算子空间：

$$x \otimes y \mapsto \langle y, .\rangle_2 x, \quad x, y \in \mathcal{M}.$$

3 维格纳–伊藤混沌

本节将介绍维格纳空间的基本概念。维格纳空间是经典维纳空间的自由类比，相关概念包括多重 Wigner-Ito积分、 L^2-泛函的混沌分解，以及两个多重维格纳积分之间的乘积法则。由于这些多重维格纳积分满足 L^∞-范数估计，该乘积法则成立，并保证此类算子有界。

我们首先回顾如何通过自由福克空间构造自由布朗运动（本文后续还将用到一些算子）。事实证明，该自由福克空间与由自由布朗运动生成的冯·诺依曼代数关于相应的 L^2 范数取完备化后得到的空间 $*$-酉同构。

定义 1. 设 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是一个实可分希尔伯特空间， $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 是其复化。自由（或称全）福克空间定义为下列空间的完备化：

$$F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n},$$

其中 Ω 是“真空向量”（范数为 1），而 $\odot^n$ 是代数张量积（未经完备化）。

相对于以下内积（我们明确省略底层希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 的记号）：

$$\langle g_1 \otimes ... \otimes g_n, h_1 \otimes ... \otimes h_m \rangle = \delta_{n,m} \langle g_1, h_1 \rangle ... \langle g_n, h_n \rangle,$$

定义 2。我们在 $\mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ 中定义如下算子：

1. 对所有 $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$，左创造算子 $l(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ 定义为：

$$l(h)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = h \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n,$$

2. 对所有 $h \in \mathcal{H}\mathbb{C}$，左湮灭算子（left annihilation） $l(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$

$$\begin{aligned} l^*(h)\Omega &= 0 \\ l^*(h)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) &= \langle h, g_1 \rangle g_2 \otimes \ldots \otimes g_n, \end{aligned}$$

定义 3。我们在 $\mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ 中定义如下算子：

1. 对所有 $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$，右创造算子 $r(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ 定义为：

$$r(h)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes h,$$

2. 对所有 $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$，右湮灭算子 $r^*(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$

$$\begin{aligned} r^*(h)\Omega &= 0 \\ r^*(h)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) &= \langle h, g_n \rangle g_1 \otimes \ldots \otimes g_{n-1}, \end{aligned}$$

定义 4. 我们在 $\mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ 中定义以下算子：对所有 $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$，半圆算子：

$$S(h) := l(h) + l^*(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$$

定义 5. 我们还令

$$\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) = * - alg \{S(h), h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\},$$

它是由实半圆元素生成的 $*$-含幺代数

定理 1.（Voiculescu *[53]*）由实场算子（半圆元素）生成的冯·诺依曼代数同构于自由群因子（生成元的数量取决于 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 的维数）。

$$\mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) = \{S(h), h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\}'' \simeq L(\mathbb{F}_{dim(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})})$$

并且显然有以下包含关系

$$\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})),$$

注意，Ω 是 $\mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ 上的循环分离向量，即 $\mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})\Omega = F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$；并且如果 $X \in \mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ 满足 $X\Omega = 0$，那么 $X = 0$。

我们还将真空态记为： $\tau(\,.\,) = \langle .\,\Omega, \Omega\rangle_{F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})}$，它是迹态 $\tau(XY) = \tau(YX)$，其中$X, Y \in \mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$；我们还回顾一下， $S(h)$ 与 $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 服从关于 τ 的半圆分布。

命题 1.（二次量子化）设 $T: \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ 是实可分希尔伯特空间之间的一个压缩映射，其复化为 $T_{\mathbb{C}}$，则线性映射

$$\mathcal{F}(T)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = (Tf_1) \otimes \ldots \otimes (Tf_n)$$

可延拓为从 $F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 到 $F(\mathcal{K}_{\mathbb{C}})$ 的压缩映射。

事实证明，利用自由福克空间与维格纳空间之间的同构，可以高效地构造维格纳混沌：通常通过维克映射或多重维格纳–伊藤积分 $I^S(f)$ 来构造；当半圆过程 S 固定时，后者通常记作 $I(f)$。完整论述请参阅文章 [3]。

定义 6. 我们将阶数为 n 的有限维格纳混沌记作 $\mathcal{P}_n$，定义为 $L^2(\mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}))$ 中由下列元素生成的（子）希尔伯特空间：

$$\{S(h_1)\ldots S(h_k), h_1, \ldots, h_k \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}, 1 \leq k \leq n\} \cup \{1\} \tag{2}$$

我们还将阶数为 n 的齐次维格纳混沌定义为：

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{P}_n \ominus \mathcal{P}_{n-1} \tag{3}$$

显然，我们还有：

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k, \tag{4}$$

其中直和在 L^2 中理解。

事实上，将到长度为“n”的张量上的投影记为 π_n from$\mathcal{H}_n$ to $L^2(\mathcal{A}, \tau)$：

$$I_n : h_1 \otimes ... \otimes h_n \mapsto \pi_n(S(h_1)...S(h_n)), \tag{5}$$

它可以扩展为 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ 到 $\mathcal{H}_n$ 之间的线性等距映射。这使我们能够引入基本定理，该定理断言，自由福克空间与由等距正态半圆过程生成的 L^2-空间酉同构。

定理 2。（Biane、Speicher 在 *[3]* 中的命题 5.3.2）我们有如下维格纳-伊藤混沌分解：

$$L^2(\mathcal{SC}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k \simeq F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$$

当实可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 时，这是自由布朗运动的情形，可将其定义为协方差函数为下式的中心化半圆过程：

$$K(t,s) := \tau(S_t S_s) = t \wedge s, \;\; t, s \geq 0,$$

我们还将相应的布朗过滤（由冯·诺伊曼子代数构成的非递减序列，其并弱生成 $\mathcal{SC}(L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)) := \mathcal{SC}$）记为

$$\mathcal{A}_t = \left\{S(\mathbb{1}_{[0,s]}), 0 \leq s \leq t\right\}''$$

并且我们回顾一下，自由布朗运动相对于此滤过是一个非交换鞅： $\tau(S_t|\mathcal{A}_u) = S_u$，对于 $0 \leq u \leq t$。

在下文中，我们只关注经典维格纳空间上的自由随机分析，并为方便起见，将自由布朗运动生成的冯·诺依曼代数记为 $\mathcal{SC}$ 或 $W^*(\{S_t, t \geq 0\})$。

定义 7。我们将第二类切比雪夫多项式（形式变量 X）定义为以下序列： $U_0 = 1, U_1 = X$ 并递归定义：

$$XU_k = U_{k+1} + U_{k-1} \tag{6}$$

注意，这些恰好是与标准半圆分布相关的正交多项式，并且给出了维格纳伊藤等距，因为我们有：

命题 2。对于 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+) \|h\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$，我们有：

$$U_p(S(h)) = I_p(h^{\otimes p})$$

并且对于范数为 1 的 $n, m \in \mathbb{N}$ 和 $h, h' \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，我们有：

$$\langle U_n(S(h)), U_m(S(h')\rangle_{L^2(\mathcal{SC})} = \begin{cases} \langle h, h'\rangle^n_{L^2(\mathbb{R}_+)} & if\ n = m \\ 0 & if\ n \neq m \end{cases} \tag{7}$$

在此设定下， $n \geq 1$ 阶齐次维格纳混沌也可以定义为 n阶多重自由随机积分的集合。

定义 8. 设对角线的集合，即 $D^n \subset \mathbb{R}^n_+$,

$$D^n = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+, 1 \leq i, j \leq n, \exists i \neq j, t_i = t_j\right\}, \tag{8}$$

对于特征函数 $f = \mathbb{1}_A$，其中 $A = [u_1, v_1] \times \ldots \times [u_n, v_n]$，且 $A \cap D^n = \emptyset$。我们将多重维格纳-伊藤随机积分定义为：

$$I^S_n(f) := (S_{v_1} - S_{u_1}) \ldots (S_{v_n} - S_{u_n}), \tag{9}$$

然后将其线性扩展至：

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{10}$$

其中每个 $A_i = [u^i_1, v^1_i] \times \ldots \times [u^i_n, v^i_n]$ 都是互不相交的矩形，且此外还满足 $A_i \cap D^n = \emptyset$。

引理 1.（Wigner-Ito 等距）对于 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$ 简单函数，我们有：

$$\tau(I_n(f)^* I_m(g)) = \delta_{n,m}\langle g, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}, \tag{11}$$

其中 δ 表示克罗内克 delta 符号。

利用 L^2 中 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上简单函数的稠密性以及 Wigner-Ito 等距，我们可以扩展映射：

$$f \mapsto I_n(f), \tag{12}$$

对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$。这通常与经典情形一样，用形式符号表示 ol

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, \ldots, t_n) dS_{t_1} \ldots dS_{t_n} \tag{13}$$

因此我们有

$$\mathcal{H}_n = \left\{ I_n(f), f \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \right\} \tag{14}$$

一个重要的引理如下，称为 Haagerup-Biane-Speicher 不等式，或更准确地说，其半圆版本（Haagerup 引理 1.4，见 [23]，针对长度为 n、f 的词上的长度函数：$F_\infty \to C_{red}^*(F_\infty)$；半圆情形由 Biane 和 Speicher 证明）。该不等式意味着，我们构造的多重积分虽属于 $L^2(\mathcal{SC}, \tau)$，实际上却属于 $\mathcal{SC}$，更准确地说，它们属于由 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 生成的 C^*-代数（见 [3]的定理 5.3.4）。这个不等式表明，一个令人惊讶的结论是：多重 Wigner 积分的算子范数可以由其 L^2范数控制（与经典情形相反，在经典情形中，具有有限混沌展开的 Wiener 泛函具有任意正阶的矩，且通常并非有界）。

定理 3。（Haagerup、Biane、Speicher *[3]*）。设 $n \geq 0$，则对所有 $F \in \mathcal{H}_n$，有：

$$\|F\|_{L^\infty(\mathcal{SC})} \leq (n+1)\|F\|_{L^2(\mathcal{SC})}, \tag{15}$$

下面的命题保证多重 Wiener-Itˆo 积分对乘法具有良好的性质。事实上，根据前述定理 3，某些齐次维格纳混沌中的元素是有界算子，因此我们可以将它们相乘。实际上，这个公式将两个多重维格纳积分的乘积线性化（而且比经典情形简单得多，因为自由概率中的组合结构要轻量得多，只涉及较小的一类分划：非交叉分划），参见 Nourdin 和 Peccati 的第 2.7.3 节 [36]，以便与经典情形进行比较。

在陈述结果之前，我们先给出嵌套收缩的定义 .

定义 9。设 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ 和 $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$，对每一个
$0 \leq p \leq n \wedge m$，我们将 f 与 g 的 p 阶嵌套收缩定义为 $L^2(\mathbb{R}_+^{n+m-2p})$ 中的元素，定义如下：

$$f \overset{p}{\frown} g(t_1, ..., t_{n+m-2p}) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(t_1, ..., t_{n-p}, s_p, ..., s_1) g(s_1, ..., s_p, t_{n-p+1}..., t_{n+m-2p}) ds_1 ... ds_p \tag{16}$$

命题 3。（Biane、Speicher 在 *[3]* 中的命题 5.3.3）对于所有 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ 和 $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$，有：

$$I_n(f)I_m(g) = \sum_{p=0}^{n\wedge m} I_{n+m-2p}(f \overset{p}{\frown} g), \tag{17}$$

特别地，对所有 n、$m \geq 0$，我们有以下 Wigner-Ito 等距：

$$\tau(I_n(f)^* I_m(g)) = \delta_{n,m}\langle g, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \tag{18}$$

注 1. 给定函数 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$，其伴随函数几乎处处定义为：

$$f^*(t_1, ..., t_n) = \overline{f(t_n, ..., t_1)}$$

由此可知 $I_n(f)^* = I_n(f^*)$。因此我们很容易推得，$I_n(f)$ 是自伴的当且仅当$f = f^*$。这类函数通常称为镜像对称函数（见 *[20]*）。

4 维格纳空间上的自由 Malliavin 微积分

经典的 Malliavin 算子（作用于高斯空间）在自由概率的背景下（目前仅作用于半圆空间）有一个自由对应物，这要归功于 Biane 和 Speicher 在 [3] 中的突破性工作。这一构造可以在自由福克空间上高效完成，随后通过恒等映射 $X \mapsto X\Omega$ 转移到场算子代数，其中 Ω 表示“真空”向量，而 $*$是由场算子生成的含幺代数。由于我们面对的是一个可闭算子，按照惯例，我们将考虑梯度的闭包（仍用同一符号表示）；其定义域是该含幺代数关于 L^p、$p \geq 1$-范数的完备化。为清晰起见，我们也将采用 Malliavin 微积分中的标准空间识别。不过，如前所述，由于记号繁复，我们的研究将仅聚焦于经典维格纳空间，即 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的情形（由于本文始终固定希尔伯特空间，通常会省略这一记号）。

定义 10。固定 $p \geq 1$，则自由 Malliavin 导数是唯一的无界可闭算子（取值于 L^p-可积双过程 $\mathcal{B}_p$）：

$$\begin{aligned} \nabla \quad : \quad & L^p(\mathcal{SC}, \tau) \to L^p(\mathbb{R}_+, L^p(\mathcal{SC}, \tau) \otimes L^p(\mathcal{SC}, \tau)) \\ & A \mapsto \nabla A = (\nabla_t A)_{t\geq 0} \end{aligned} \tag{19}$$

使得对所有 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，$\nabla(S(h)) = h.1 \otimes 1$，并且对所有 $A, B \in S_{alg}$（其中 S_{alg} 是由 $\{S(h)\ h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\}$ 生成的含幺 $*$-代数），我们有导子性质 $\nabla(AB) = A.\nabla B + \nabla A.B$，其中左作用和右作用分别由左腿上的乘法和右腿上的反向乘法给出。

定义 11. 对任意 $p \geq 1$, $\mathbb{D}^{1,\,p}$，我们将 ∇（视为从 $L^p(\mathcal{SC})$ 到 $\mathcal{B}_p$ 的可闭无界算子）的定义域记为，并将其定义为 $\mathcal{SC}_{alg}$ 关于以下范数的完备化：

$$\|Y\|_{1,p}^p = \|Y\|_p^p + \|\nabla Y\|_{\mathcal{B}_p}^p. \tag{20}$$

定义 12. 对于 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$ 和 $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$，我们定义配对（方向 Malliavin 导数）：

$$\nabla^h F := \langle \nabla F, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} := \int_{\mathbb{R}_+} \nabla_t F \, \overline{h(t)} dt \tag{21}$$

我们知道，回顾一下（或许）最重要的公式，它是自由 Malliavin 微积分的基础，并将给出分部积分公式。

引理 2.（非交换 Wick 公式）设 $F = S(e_1) \dots S(e_n) \in \mathcal{SC}_{alg}$，其中 $e_1, \dots, e_n, h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，则：

$$\tau(FS(h)) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \tau(S(e_1) \dots S(e_{k-1})) \tau(S(e_{k+1}) \dots S(e_n)) \tag{22}$$

由此可得基本的分部积分公式，它将在本文中发挥重要作用。

命题 4.（分部积分，Biane-Speicher，*[3]* 中的引理 5.2.2）对于 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$ 和 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，有

$$\tau(FS(h)) = \tau \otimes \tau(\nabla^h F) \tag{23}$$

由于自由 Malliavin 梯度满足链式法则，因此我们很容易得到：

引理 3. 假设 X、Y、$Z \in \mathcal{SC}_{alg}$ 和 $h \in L^2_{\mathbb{R}}$（$\mathbb{R}_+$），则：

$$\tau \otimes \tau(X.\nabla^h Y.Z) = -\tau \otimes \tau(\nabla^h X.YZ) - \tau \otimes \tau(XY.\nabla^h Z) + \tau(XYZS(h)) \tag{24}$$

在以下一组命题中，我们陈述关于自由 Malliavin 导数作用于有限维格纳混沌的基本结果。

命题 5。（*[3]* 的命题 5.3.10）$\mathbb{D}^{1,\,2}$ 包含 $\mathcal{P}_n$，且 ∇ 在此空间上的限制是一个有界线性算子。

我们还可以明确给出 ∇ 在 $\mathcal{P}_n$ 上的作用。首先注意，对于任意 n、$m \geq 0$，映射 $I_n \otimes I_m$ 从 L^2（$\mathbb{R}_+^n$）$\otimes L^2$（$\mathbb{R}_+^m$）到 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$。利用 L^2（$\mathbb{R}_+^{n+m}$）与 L^2（$\mathbb{R}_+^n$）$\otimes L^2$（$\mathbb{R}_+^m$）之间的同构，我们可以得到该映射的线性延拓：

$$\begin{aligned} I_n \otimes I_m \quad : \quad & L^2(\mathbb{R}_+^{n+m}) \to \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m \\ & h_1 \otimes ... \otimes h_{n+m} \mapsto \pi_n(S(h_1)...S(h_n)) \otimes \pi_m(S(h_{n+1})...S(h_{n+m})) \end{aligned} \tag{25}$$

特别地，对于初等张量 $f = h \otimes g \in L^2$（$\mathbb{R}_+^n$）$\otimes L^2$（$\mathbb{R}_+^m$）$\simeq L^2$（$\mathbb{R}_+^{n+m}$），我们将定义 $I_n \otimes I_m$（f）：$= I_n$（h）$\otimes I_m$（g），然后将其连续延拓到一般的 $f \in L^2$（$\mathbb{R}_+^{n+m}$），并将其视为 L^2（$\mathbb{R}_+^n$）$\otimes L^2$（$\mathbb{R}_+^m$）中的一个元素。

对于所有的 $A \otimes B \in \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$ 和 $B \otimes C \in \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$，我们记：$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ 和 $(A \otimes B) \sharp (C \otimes D) = AC \otimes DB$；对于第一个映射，我们通过线性性将其延拓，结果得到一个从 $(\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)$ 到 $\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$ 的映射；对于第二个映射，我们通过双线性性和连续性将其延拓，得到一个从 $(\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)^2$ 到 $P_{2n} \otimes P_{2n}$ 的映射。

对于所有的 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$，我们通过下式定义函数 $f_t^k \in L^2(\mathbb{R}_+^{n-1})$，其中等式对几乎所有的 $t \geq 0$ 成立：

$$f(t_1, ..., t, t_{k+1}, ..., t_n) = f_t^k(t_1, .., t_{k-1}, t_{k+1}, ..., t_n)$$

命题 6。（ *[3]*中的命题 5.3.9）Malliavin 导数将 $\mathcal{P}_n$ 映射到 $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)$；事实上，对于 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$，则对几乎所有 $t \geq 0$：

$$\nabla_t(I_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} \otimes I_{n-k}(f_t^k), \tag{26}$$

定义 13。我们将 $\delta : dom(\delta) \subset \mathcal{B}_2 \to L^2(\mathcal{SC})$ 记为自由 Malliavin 导数的伴随算子。它是一个稠密定义的可闭算子，称为自由 Skorohod 积分；其闭包的定义域（仍记为 δ）记为 $dom(\delta)$，并由以下对偶关系刻画：$u \in dom(\delta)$。如果存在一个（唯一的）元素，记为 $\delta(u) \in L^2(\mathcal{SC})$，使得对所有 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$：

$$\langle \nabla F, u \rangle_{\mathcal{B}_2} = \langle F, \delta(u) \rangle_{L^2(\mathcal{SC})}, \tag{27}$$

为方便起见，我们还重述自由 Skorohod 积分的 Voiculescu 公式的无穷维版本（ [53]中的命题 3.9）；因此，可以将其视为以下公式的自由类比：$\delta(Fh) = F.W(h) - \langle DF, h \rangle$ 其中在经典情形下 $F \in \mathbb{D}^{h,\ 2}$（参见 Nualart 的命题 1.3.4 [40]）。

命题 7. 设 $F \in \mathcal{SC}_{alg}^{\odot 2}$ 和 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，则 $F.h$ 属于 $dom(\delta)$，且：

$$\begin{aligned} \delta(F.h) &= F\sharp S(h) - m_1 \circ (id \otimes \tau \otimes id)(\langle \tilde{\nabla} F, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}) \\ &= F\sharp S(h) - m_1 \circ (id \otimes \tau \otimes id)(\langle (\nabla \otimes id + id \otimes \nabla) F, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}) \end{aligned}$$

其中 m_1 表示从 $\mathcal{SC}_{alg} \otimes \mathcal{SC}_{alg}$ 到 $\mathcal{SC}_{alg}$ 的乘法的线性延拓，定义如下：

$$m_1(a \otimes b) = ab \tag{28}$$

注 2. 这一命题实质上是将著名的 Voiculescu 公式应用于半圆系中的自由差商后，在维格纳空间上的无限维版本（参见 *[53]* 第 4 节）。不过，我们更倾向于采用第二种方式表示最后一项，因为它更符合 Voiculescu 公式及其他类似工作的惯用约定。

现在我们陈述自由 Malliavin 导数的链式法则：

命题 8. 对所有 $F \in \mathcal{P}_d$，以及所有 $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\nabla_t P(F) = \partial P(F) \sharp \nabla_t(F),$$

对于多元 在上述情形下，对于所有满足 $F_i \in \mathcal{P}_d$ 和 $P \in \mathbb{C}\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ 的 $(F_1, ..., F_n)$，我们有：

$$\nabla_t(P(F)) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k P(F) \sharp \nabla_t F_k,$$

我们首先引入一类函数（算子-Lipschitz函数的一个子空间），它可以看作是非交换函数中的一个“良好”子集，用以推导自由随机分析中的一些链式法则：自由伊藤公式，以及自由 Malliavin 导数的链式法则（我们在此不进一步探讨这一主题方向；近期这一领域已取得重要进展：参见 Nikitopoulos[34], ，或 Jekel、Li 和 Shlyakhtenko 以及 [25]）。另请注意，这类函数可以在紧区间上由多项式很好地逼近（参见 [26] 中的定理 3.20）。

定义14。我们将以下光滑的 L^2 函数集定义为：

$$\mathcal{I}_2(f) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix}\mu(dy), \int_{\mathbb{R}} |y|^2 |\mu|(dy) < \infty, \right\}, \tag{29}$$

其中， μ 是 $\mathbb{R}$ 上的复值测度。

命题9。（广义链式法则，Biane-Speicher）设 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且 $\phi \in \mathcal{I}_2(f)$，则 $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$，并且对几乎所有 $t \geq 0$，我们有：

$$\nabla_t \phi(F) = \partial\phi(F) \sharp \nabla_t F \tag{30}$$

定理4。（Biane、Speicher，*[3]* 中的命题5.3.12）设 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$，则有以下 Clark-Ocone-Bismut公式：

$$F = \tau(F) + \delta(\Gamma \circ \nabla F) \tag{31}$$

其中， Γ 表示从 $\mathcal{B}_2$ 到平方可积适应双过程 $\mathcal{B}_2^a$ 的正交投影， δ 表示 Skorohod积分（ Malliavin 导数的伴随算子）；积分理解为关于自由布朗运动、对适应双过程进行的自由随机积分。

作为一个直接推论，我们得到固定有限维格纳混沌中的以下表示：

定理5。固定 $n \geq 0$，则有：

$$id_{|\mathcal{P}_n} = P_1 + \delta(\Gamma \circ \nabla)_{|\mathcal{P}_n} \tag{32}$$

其中 P_1 表示到 $\mathbb{C}.1 \subset L^2(\mathcal{SC})$ 上的正交投影。

定理。 **6** Heinseberg对易关系（Biane ，Speicher 命题5 .4.1 在 *[3]* 中）
对于具有有限混沌展开的 $U \in dom(\delta)$（更一般地，对于 $u \in \mathbb{L}^{1,2}$），我们有如下 Skorokhod 积分与 Malliavin 导数之间的交换关系：

$$\nabla_t(\delta(U)) = \nabla_t(\delta(U)) + \delta_s(\nabla_t(U_s)) \tag{33}$$

其中下标 δ_s 表示 Skorohod 积分作用于变量 s；对于双过程，在此情形下我们设 $\nabla_t(A_s \otimes B_s)$ $= \nabla_t A_s \otimes B_s + A_s \otimes \nabla_t A_s$

定义 15. 我们将自由奥恩斯坦-乌伦贝克半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 定义为压缩算子 $T_t = e^{-t} Id_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)}$的二次量子化，即
$P_t := \mathcal{F}(e^{-t} Id_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)})$ $t \geq 0$，它是幺正的、迹态的、完全正的，并且作用于 $F = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mathcal{SC})$，其作用方式如下：

$$P_t F := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} I_n(f_n) \tag{34}$$

定义 16. 我们将 L 记作自由奥恩斯坦-乌伦贝克半群的 L^2-生成元，该半群定义在$F=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ $\in L^2(\mathcal{SC})$ 上，其定义如下：

$$LF := \sum_{n=0}^{\infty} -nI_n(f_n) \tag{35}$$

只要最后一个级数在 L^2 中存在，也就是说， L （一个定义域稠密的闭非正自伴算子）的定义域，记作 $dom(L)$，相对于 L^2 范数，可由以下混沌刻画给出：

$$dom(L) = \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} < \infty \right\} := \mathbb{D}^{2,2}$$

定义 17。我们还将 C 记作柯西算子：自由数算子 $C := -\sqrt{-L}$ 的负平方根，在 $F=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ $\in L^2(\mathcal{SC})$ 上定义如下：

$$CF := \sum_{n=0}^{\infty} -nI_n(f_n) \tag{36}$$

其定义域记作 $dom(C)$：

$$dom(C) = \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \sum_{n=0}^{\infty} n\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} < \infty \right\} := \mathbb{D}^{1,2}$$

事实上， $-L$ 是一个无界正自伴算子，且具有纯点谱： $sp(-L) = \mathbb{N}$，其中对每个 $n \geq 0$ ，相应的 $\{\mathcal{H}_n, n \geq 0\}$ 阶维格纳混沌构成对应的特征子空间。我们有如下命题，它是自由群因子的一个非常重要的特征：维格纳空间上的“自由四阶矩现象”恰如经典情形那样，精确地出现在该算子的特征值中（经典情形可参见 Ledoux [27] ；关于自由情形的更精确细节及一个猜想，可参见 Kemp 等人、C´ebron 或作者 [26, 8, 20] ）。

命题 10。我们有如下抽象混沌分解：

$$L^2(\mathcal{SC}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} ker(L + kId) \tag{37}$$

与经典情形一样，Ornstein-Ulhenbeck 算子可以看作是关于尺度参数的方向导数（参见 Nualart 和 Zakai 在 [38] 中的第 2 节）。这也促使人们在 Malliavin 微积分的早期将 L 定义为导数算子。

命题 11。设 $F=\sum_{n=1}^{\infty} I_n(f) \in L^2(\mathcal{SC})$，对 $|\lambda| < 1$ 定义如下泛函：

$$F_\lambda = \tau(F).1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_n(f), \tag{38}$$

那么，当且仅当以下条件成立时， LF存在： $F^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}(F_{1-\varepsilon} - F)$ 在 L^2 中收敛（当 ε 趋于零时）；此时，

$$LF = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(F_{1-\varepsilon} - F), \tag{39}$$

证明：对于 $0<\varepsilon<1$，对所有 $n\geq 0$, $\varepsilon^{-1}((1-\varepsilon)^n-1)\leq n$ （并且当 $\varepsilon\to 0$时收敛到 $-n$），若 LF 存在，则通过简单计算可得：

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\tau(F^{\varepsilon_1}F^{\varepsilon_2})=\tau[|LF|^2],$$

由此得到了“仅当”部分。
对于逆向蕴含（回想一下，π_n 表示到第 n 个维格纳混沌的投影），设 F^ε 是 L^2 中的一个柯西序列，且收敛到 $G\in L^2(\mathcal{SC})$。
于是我们设 $F_n=\sum_{k=0}^n\pi_n(F)$、$F_n^\varepsilon=\sum_{k=0}^n\pi_n(F^\varepsilon)$ 和 $G_n=\sum_{k=0}^n\pi_n(G)$，则有（由于我们假设极限为 G）$F_n^\varepsilon\overset{L^2}{\underset{\varepsilon\to 0}{\to}}G_n$；根据假设，$F_n^\varepsilon\overset{L^2}{\underset{\varepsilon\to 0}{\to}}LF_n$，因此 LF存在，且 $F^\varepsilon\overset{L^2}{\underset{\varepsilon\to 0}{\to}}LF$，证明得证。

■

事实证明，与经典情形一样，半群 (P_t) 满足与自由马利亚万梯度的交换关系。这一结果在经典情形中有深远影响，其中最重要的是它与对数索伯列夫不等式的联系。遗憾的是，我们未能像 Biane 那样（参见 [2]中的推论 1），利用这一事实通过自由伊藤公式和非交换鞅给出证明。事实上，在经典情形中，最简单直接的证明是借助伊藤公式和鞅得到的；这一证明似乎最早出现在 Capitaine、Hsu 和 Ledoux 的导言中，见 [7]（正如上述论文导言所述，Maurey 和 Neveu 似乎早已知晓这一证明）。

注 3. 自由奥恩斯坦-乌伦贝克半群实际上起到光滑化算子的作用：对于所有，$P_t(L^2(\mathcal{SC}))\subset\mathbb{D}^{1,2}$ 正如我们对 $F=\sum_{n=0}^\infty I_n(f_n)\in L^2(\mathcal{SC})$，$\sum_{n=0}^\infty ne^{-2nt}\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}<\infty$ 所得到的那样。

命题 12.（与奥恩斯坦-乌伦贝克半群的交换关系）设 $F\in\mathbb{D}^{1,2}$，则有如下关系，对每个 $t>0$ 均成立：

$$\nabla P_tF=e^{-t}P_t^{\otimes 2}\nabla F \tag{40}$$

证明：借助一个近似论证，只需证明该结果对 ,$F=I_n(f)$ $f\in L^2(\mathbb{R}_+^n)$，$n\geq 0$ 成立。

那么对所有 $t>0$，以及几乎所有 $s\geq 0$,

$$\begin{aligned}\nabla_sP_tF &= \nabla_s(e^{-nt}I_n(f))\\ &= e^{-nt}\sum_{k=1}^n I_{k-1}\otimes I_{n-k}(f_s^k)\\ &= e^{-t}\sum_{k=1}^n e^{-(k-1)t}I_{k-1}\otimes e^{-(n-k)t}I_{n-k}(f_s^k)\\ &= e^{-t}(P_t\otimes P_t)\nabla_sF,\end{aligned}$$

由此得证。 ■

我们还可以给出自由奥恩斯坦-乌伦贝克半群超压缩性的一些推论。这一重要结果由 Biane 在自由情形下通过 [2] 证明（事实上，Biane 证明了一个强得多的结果：对于所有 $q \in (-1, 1)$， q-高斯奥恩斯坦-乌伦贝克半群都具有超压缩性，因此自由情形 $q = 0$ 只是一个特殊结果）。我们还提醒读者，接下来的结果基本上刻画了有限维格纳混沌中 $\|.\|_p$ 与 $\|.\|_q$ 的等价性；在经典情形下，这是证明所谓迈耶不等式的重要引理。该不等式最早由 Meyer 在其著名论文 [33] 中证明。证明迈耶不等式的自由版本，目前仍是自由概率背景中的一个长期未解问题（我们甚至不知道应该使用什么范数，因为这依赖于非交换黎斯变换，因此需要证明非交换 Carr ´e-du-champ 与柯西算子之间的 L^p、$1 \leq p \leq \infty$-范数等价，即 $\|\Gamma(F, F)\|_p \sim c_p \|CF\|_p$，其中

$\Gamma(F, F) = \langle \nabla F, \nabla F \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} \nabla_t(F) \sharp (\nabla_t(F))^* dt$ 是维格纳空间上的非交换 Carr ´e-du-champ，正如 Biane 和 Speicher 在 [3] 的最后一页所提到的（关于经典 Meyer 不等式以及不同类型的证明，另见 Nualart [40] 或¨Ust¨unel [49] ）。

定理 7. 设 $F \in L^p(\mathcal{SC})$ $p \geq 1$，并记到第 n 阶维纳混沌的投影为 $\pi_n(F)$。那么线性映射：

$$F \mapsto \pi_n(F) \tag{41}$$

在 $L^p(\mathcal{SC})$ 上连续。

证明：首先假设 $p \geq 2$，并选取 $t \geq 0$，使得 $p = e^{2t} + 1$。那么，根据自由奥恩斯坦-乌伦贝克半群的超压缩性（Biane 的定理 3，见 [2]），我们得到：

$$\|P_t F\|_p \leq \|F\|_2 \leq \|F\|_p$$

现在，由于 (P_t) 对所有 $L^p(\mathcal{SC})$ $p \geq 1$ 范数都是压缩算子，我们知道：

$$\|P_t \pi_n(F)\|_p \leq \|\pi_n(F)\|_2 \leq \|F\|_2.$$

but

$$P_t \pi_n(F) = e^{-nt} \pi_n(F) \tag{42}$$

因此

$$\|\pi_n(F)\|_p \leq e^{nt} \|F\|_p$$

现在，若 $1 < p < 2$，我们使用对偶性，其中 q 是 p 的共轭，并选择 $t \geq 0$ 使得 $q = e^{2t} + 1$，从而得到：

$$\begin{aligned} \|\pi_n(F)\|_p &= \sup_{\|G\|_q \leq 1} |\langle G, \pi_n(F) \rangle_2| \\ &= \sup_{\|G\|_q \leq 1} |\langle \pi_n(G), F \rangle_2| \\ &= \sup_{\|G\|_q \leq 1} |\langle \pi_n(F), \pi_n(G) \rangle_2| \\ &\leq \|F\|_p \sup_{\|G\|_q \leq 1} \|\pi_n(G)\|_q \\ &\leq e^{nt} \|F\|_p, \end{aligned} \tag{43}$$

5 交换关系与 Malliavin 导数

本节的目标是证明 Malliavin 导数与条件期望之间，以及 Malliavin 可微元素与左创造算子之间的若干种交换关系。我们还将考察维格纳空间中中心元素和 Malliavin 可微元素的缺失情形。我们还将证明维格纳空间中不存在 Malliavin 可微幂等元。

因此，本节的大部分结果都可以看作是著名的 Nualart [40]一书中所述经典结果的自由概率类比。

我们首先回顾：给定冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{B}$ of $W^*(\{S_t, t \geq 0\})$，存在唯一一个保持迹的条件期望映射到 $\mathcal{B}$ denoted $\tau[.|\mathcal{B}]$。
感兴趣的读者可参阅 Takesaki [50] 的论文，了解关于到冯·诺伊曼子代数的条件期望这一概念的更多细节。

通常，对于任意具有有限勒贝格测度 $\lambda(\mathcal{A})$ 的博雷尔集 $\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$，我们将 $S(\mathcal{A}) := S(\mathbb{1}_{\mathcal{A}})$ 记作与之对应的半圆形元素（中心化且方差为 $\lambda(\mathcal{A})$）。

定义 18. 给定 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 中任意具有有限勒贝格测度的博雷尔集 $\mathcal{A}$，我们将由以下元素生成的冯·诺伊曼子代数记作 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$:

$$\{S(\mathbb{1}_{\mathcal{B}}), B \subset \mathcal{A}, \lambda(B) < \infty\} \tag{44}$$

引理 4. 设 $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mathcal{SC})$，则:

$$\tau(F|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \tag{45}$$

证明：考虑一个初等多重 Wigner 积分 $F = I_n(f_n)$，其中 $f_n = \mathbb{1}_{B_1 \times \ldots \times B_n}$，且$(B_i)_{i=1}^n$ 是互不相交的博雷尔集，其勒贝格测度有限（还需注意映射 $B \mapsto S(B)$ 是线性的），

利用自由性可得:

$$\begin{aligned}
\tau(F|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) &= \tau(S(B_1) \ldots S(B_n)|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) \\
&= \tau\left(\prod_{i=1}^{n}(S(B_i \cap \mathcal{A}) + S(B_i \cap \mathcal{A}^c))|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}\right) \\
&= S(B_1 \cap \mathcal{A}) \ldots S(B_n \cap \mathcal{A}) \\
&:= I_n(f_n \mathbb{1}_{\mathcal{A}}^{\otimes n})
\end{aligned}$$

第三行中我们用到了，对于 $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$。一般结果由逼近和极化得到。

■

我们首先介绍一个基本引理，它保证对 Malliavin 可微泛函取关于（由自由布朗运动生成的代数的）von Neumann 子代数的条件期望后，

所得泛函仍是 Malliavin 可微的，并给出导数与条件期望之间的交换关系。熟悉 Malliavin 微积分的读者可能会注意到，这一事实是自由布朗运动情形所特有的；对于非交换分数布朗运动（简称 ncfBm），要得到这个公式，以及更一般地得到克拉克－奥科内公式的相应版本，就像经典情形一样，要困难得多，因为乘以示性函数可能会使范数增大（见 L´eon 和 Nualart [28] 或 Bender 和 J.Elliot [1] 的命题 3.2）。

引理 5. 设 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$，并且 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 是先前定义的 $W^*(\{S_t, t \geq 0\})$ 的冯·诺伊曼子代数，则 $\tau(F|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) \in \mathbb{D}^{1,2}$，且：

$$\nabla_t(\tau(F|\mathcal{F}_{\mathcal{A}})) = \tau \otimes \tau(\nabla_t(F)|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}).\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(t) \tag{46}$$

证明： 由上 一条引理可知，注意到这是 $\tau(F|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) \in \mathbb{D}^{1,2}$ 的推论。事实上：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\|f_n \mathbb{1}_{\mathcal{A}}^{\otimes n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} n\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} = \|\nabla F\|^2_{\mathcal{B}_2} < \infty$$

因为它只是将混沌分解中的每个元素乘以 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$，因此不会增大每个 $n \geq 0$ 的范数 $\|f_n\|_2$。

现在，对于 $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\begin{aligned}
\nabla_t(\tau(F|\mathcal{F}_{\mathcal{A}})) &= \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_t(I_n(f_n \mathbb{1}_{\mathcal{A}}^{\otimes n})) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} \otimes I_{n-k}(f_n^{k,t}.\mathbb{1}_{\mathcal{A}}^{\otimes(n-1)}).\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(t) \\
&= \tau \otimes \tau(\nabla_t(F)|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}).\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(t)
\end{aligned}$$

我们回忆 在几乎所有的 $t \geq 0$, $f^{k,\ n\ t}.\mathbb{1}_{\mathcal{A}}^{\otimes(n-1)}$ 都被视为 $L^2(\mathbb{R}_+^{k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+^{n-k}$ 的函数). ■

由此直接得到以下推论，它给出了 Malliavin 导数的局部性质：

引理 6. 设 $F \in \mathbb{D}^{1,\ 2}$，那么若 F 属于 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$，则对于 $t \in \mathcal{A}^c$，有：

$$\nabla_t(F) = 0 \tag{47}$$

还要注意，Malliavin 可微元素与左湮灭算子之间存在交换关系。这个引理尤其有用，因为它与解析分布正则性的研究有关：它按照 Voiculescu 在 [53] 第 5 节中定义的意义，提供了一种无限维对偶系统，并且对研究自伴不定元取值下非交换多项式的谱测度的正则性有深远影响，即 $P(y_1, \ldots, y_n)$。例如

当 $y_1, \ldots, y_n$ 构成一个对偶系统，且 P是自伴的，也是“离散”数算子的特征向量，其中 $N = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\,)\sharp y_j$时，Charlesworth 和 Shlyakhtenko 证明， $P(y_1, \ldots, y_n)$的解析分布关于勒贝格测度绝对连续（参见 [9]中的定理 13）。

引理 7。设 $n \geq 0$ 为一个固定整数。那么对所有的 $F \in \mathcal{P}_n$，我们有：

$$[r^*(h), F] = \nabla^h(F)\sharp P_1 \tag{48}$$

其中 P_1 是到 $1 \in L^2(\mathcal{SC})$上的正交投影， ∇^h 是方向 Malliavin 导数： $\nabla^h := \langle \nabla, h \rangle$ 在 $\mathbb{D}^{1,2}$。

证明：事实上，对于 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ ，它是 $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$的完备正交归一系。若记$\Lambda = \{a := (a_n)_{n\geq 1}, a_n \in \mathbb{N}, \exists M, a_n = 0, \text{其中 } n > M\}$是整数值序列，且除有限项外其余各项均为零。于是，对于 $a \in \Lambda$，取 $(U_n)_{n\geq 0}$，我们定义第二类切比雪夫多项式序列。

$$\phi_a = \prod_{i=1}^{\infty} U_{a_i}(S(e_i)),$$

那么，

$$\{\phi_a, a \in \Lambda, |a| = n\},$$

是一个正交归一系，属于 $\mathcal{H}_n$中的 n重维格纳混沌。因此，作为推论，族 :

$$\{\phi_a, a \in \Lambda\}, \tag{49}$$

是 $L^2(\mathcal{SC})$ 中的完备正交归一系，

事实上，很容易证明，对于任意整数 $n \geq 1$，都有（导子性质），因为很容易验证且众所周知： $[r^*(h)\ S(e_i)] = \langle e_i, \ h\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} .P_1$，对所有 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 均成立。

$$\begin{aligned}
[r^*(h), U_n(S(e_i))] &= \partial_{S(e_i)} U_n(S(e_i))\sharp[r^*(h), S(e_i)] \qquad (50)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} (U_{k-1}(S(e_i)) \otimes U_{n-k}(S(e_i)))\sharp P_1 \\
&= \nabla^h(U_n(S(e_i))\sharp P_1,
\end{aligned}$$

最后这一项恰好是沿方向 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的方向 Malliavin 导数。

于是，由线性性和稠密性可将其延拓到整个空间，因为 $[r^*(h)\ .]$ 和 $\nabla^h(.)\sharp P_1$ 都是导子，并且在张成 $\mathcal{SC}_{alg}$ 的这组正交归一基上相等，而 $\mathcal{SC}_{alg}$ 在 $\mathbb{D}^{1,\,2}$ 中稠密。 ■

还要注意，维格纳空间上存在一种自由庞加莱不等式（此前从未提及或使用过），可以视为 Voiculescu 在一篇未发表的注释中证明的不等式的无限维类比（参见 Dabrowski 引理 2.2）。

定理 8。令 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$，则有自由庞加莱不等式：

$$\|F - \tau(F)\|_2^2 \leq \|\nabla F\|_{\mathcal{B}_2}^2$$

通过混沌分解或自由 Clark-Ocone-Bismut 公式即可直接得到证明。

注 4. 结果表明，这个不等式给出了关于自由布朗运动生成的冯·诺依曼代数结构的一项重要结论：它是一个因子。事实上，Voiculescu 的研究早已表明，自由布朗运动生成的冯·诺依曼代数——我们也采用标准记号 $\mathcal{SC} = W^*(\{S_t, t \geq 0\}) \simeq L(\mathbb{F}_\infty)$（其中第二项定义为非阿贝尔自由群左正则表示的弱算子闭包，该群有可数多个生成元）——是一个因子，因为 $\mathbb{F}_\infty$ of 是一个 i.c.c.（无限共轭类）群。受 Dabrowski 在 *[13],* 中所用的有力技巧启发，我们将证明这一点（但不借助这一同构），并将其作为维格纳空间上的自由 Poincar´e 不等式的推论。Dabrowski 证明了，在有限自由 Fisher 信息 $\Phi^*(X) < \infty$ 的条件下，某个迹态 W^*-概率空间中的自伴算子 $X_1, \ldots, X_n$ 所生成的 $W^*(X_1, \ldots, X_n)$ 是一个满因子（不具有性质 Γ）。我们将使用自由 Malliavin 微积分证明这一结果；它可以看作半圆场上非交换导数理论的无限维版本。

在陈述下一个结果之前，我们先为非专业读者介绍一些关于冯·诺依曼代数的概念。

定义 19。设 $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$，按定义，其交换子定义为：

$$S' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), ST = TS\}, \tag{51}$$

定义 20。冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 的中心定义为 $\mathcal{M}$ 与其交换子 $\mathcal{M}'$ 的交集：

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}1, , \tag{52}$$

我们也提醒感兴趣的读者，因子有三种不同类型（ I 型、 II 型和 III 型）。这里我们讨论的是 II_1 因子的情形。

定义 21。 Π_1 因子是一个无限维冯·诺依曼代数，配备一个（唯一的）忠实正规迹态，并且具有平凡中心：

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}.1, \tag{53}$$

定理 9。 $\mathbb{D}^{1,\ 2} \cap \mathcal{SC}$ 不含任何中心元，即不与所有有界元素交换的元素。

证明：基本思路如下：

记 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ 为$L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$的一个完备正交归一系，并记由 Mai 在 [31] 中引入的沿 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 方向、取值于粗对应的 Malliavin 导数，其定义为：对于 F 一个光滑泛函：

$$\begin{aligned} \nabla^h : \mathcal{SC}_{alg} &\to L^2(\mathcal{SC}) \otimes L^2(\mathcal{SC}) \simeq HS(L^2(\mathcal{SC})) \\ F &\mapsto \langle \nabla F, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} := \int_{\mathbb{R}_+} \nabla_t F \, h(t) dt \end{aligned} \tag{54}$$

定义域为

$$D(\nabla^h) := \mathcal{SC}_{alg} = * - \text{unital} \left\{ S(h), h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+) \right\}$$

那么，我们很容易证明这是一个无界可闭算子（其闭包仍记为∇^h），其定义域 $D(\nabla^h)$ 定义为由自由布朗运动生成的含幺 $*$-代数关于方向导数半范数的闭包：

$$\|Y\|^2_{1,2,h} = \|Y\|^2_2 + \|\nabla^h Y\|^2_{L^2(\tau \otimes \tau)}$$

并且注意，当 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $\nabla^h F = \langle \nabla F, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}$。
现在，假设 $F \in \mathcal{Z}(\mathcal{SC}) \cap \mathbb{D}^{1,2}$，特别地，对所有 $j \in \mathbb{N}$，都有：

$$[F, S(e_j)] = 0$$

这意味着对任意 $i \neq j$，都有：

$$0 = [\nabla^{e_i} F, S(e_j)] + [F, \nabla^{e_i} S(e_j)]$$

接下来，标准验证可知，由于该族正交，$\nabla^{e_i}(S(e_j)) = \langle e_j, e_i \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \cdot 1 \otimes 1 = 0$，因为 $(S(e_i))_{i=1}^{\infty}$ 是一个（无限）半圆系。
于是得到：

$$0 = [\nabla^{e_i} F, S(e_j)]$$

现在，根据本文第 2 节（公式 2）中回顾的通常识别，可以看出 $\nabla^{e_i} F \in HS(L^2(\mathcal{SC}))$ 是一个希尔伯特-施密特算子（因此也必然是紧算子）。容易推出，由于 $S(e_j)$ 是一个半圆算子，它也是一个弥散算子，因为它的谱测度对勒贝格测度绝对连续（其解析分布相对于勒贝格测度绝对连续）。因此，由于与弥散算子对易的紧算子必定恒等于零，不费吹灰之力即可得到：

$$\nabla^{e_i} F = 0 \tag{55}$$

由于 e_i 是任意的，这意味着 $\nabla F = 0_{\mathcal{B}_2}$，因此根据自由庞加莱不等式，我们得到所需的结论。

事实上，最后这个结果可以借助与自由方向 Ornstein–Uhlenbeck 算子相关的预解映射进行正则化，从而得到因子性。不过，我们需要引入 Popa 的一个有力引理：[41], 中的推论（第 818 页），由 Dabrowski 在 [13]中的引理 7 加以改进；该引理使我们能够在 L^2 中得到一个定量估计，说明一个迹态、正规且完全正的映射 ϕ 几乎保持元素 $x \in \mathcal{M}$ 被单位球$y \in (\mathcal{M})_1$, 中的一个元素平移后的结果：这意味着估计 $\|\phi(yx) - y\phi(x)\|_2, y \in (\mathcal{M})_1, x \in \mathcal{M}$，并以该映射 ϕ几乎保持同一个单位球的程度为依据：$\|\phi(y) - y\|_2, u \in (\mathcal{M})_1$。

引理 8。（Popa 在 *[41]* , 中的推论（第 818 页），Dabrowski 在 *[13]*中的引理 7）设 ϕ 是一个保单位元的迹态完全正映射，则对于任意 $x, y \in \mathcal{M}$ ，若满足 $\|y\| \leq 1$，我们有：

$$\|\phi(yx) - y\phi(x)\|_2 \leq \|\phi\|^{\frac{1}{2}} \|x\| (2\|\phi(y) - y\|_2^2 + 2\|\phi(y) - y\|_2)^{\frac{1}{2}} \tag{56}$$

推论 1. $\mathcal{SC} := W^*(\{S_t, t \geq 0\})$ 是一个因子。

证明：剩下只需去掉定义域假设，也就是说，证明任意中心元$Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{SC})$ 实际上都属于 $\mathbb{D}^{1,\,2}$。要做到这一点，一个关键工具是自由马利亚万梯度的可闭性。事实上，如果我们能找到一个光滑（在 $\mathbb{D}^{1,\,2}$ 中）的网 $(Z_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ ，它在 L^2 中收敛到 Z ，并且也属于中心，那么证明便告完成。这基本上是通过 Malliavin 微积分意义下的正则化来实现的。

事实上，记 δ^h 为沿方向 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的方向 Malliavin 导数的伴随算子，它是一个稠密定义的算子：

$$\begin{aligned} \delta^h : dom(\delta^h) \subset L^2(\mathcal{SC}) \otimes L^2(\mathcal{SC}) &\to L^2(\mathcal{SC}) \\ U &\mapsto \delta(U\sharp(1 \otimes h \otimes 1)) \end{aligned} \tag{57}$$

此外，根据 Mai（参见 [31] 中的引理 5.2 (b)）可知，将 ∇^h 限制在实向量 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 上时，它会诱导出一个实可闭导子。这使我们能够直接使用 Cipriani 和 Sauvageot [11] 中的结果，或 Dabrowski 在 [13] 中的引言。

由此，我们可以定义沿方向 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的方向数算子（拉普拉斯算子），其定义为方向 Malliavin 导数的平方：

$$\begin{aligned} N^h : dom(N^h) \subset L^2(\mathcal{SC}) &\to L^2(\mathcal{SC}) \\ F &\mapsto \delta^h(\nabla^h F) \end{aligned} \tag{58}$$

并且可以看出，它是一个完全狄利克雷型的生成元（对所有 $n \geq 0$， $N^h \otimes I_n$ 在 $M_n(SC)$ 上也是一个狄利克雷型）。我们将生成元为 N^h 的半群记为 $\phi_t^h := e^{-N^h t}$ 。

现在，对每个 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，考虑与之关联的预解映射，它们定义于 $\alpha > 0$ ，分别对应各个方向拉普拉斯算子，记作

$$\eta_{\alpha,h} := \alpha(\alpha + N^h)^{-1} \tag{59}$$

and

$$\zeta_{\alpha,h} := \eta_{\alpha,h}^{\frac{1}{2}} \tag{60}$$

此外，它们是保单位的、迹态的（$\tau \circ \eta_{\alpha,h} = \tau$）、正的和完全正的，并且是 $L^2(\mathcal{SC})$ 上的压缩算子。

具有以下性质： $Range(\eta_{\alpha,h}) = dom(N^h) \subset D(\nabla^h)$，以及 $Range(\zeta_{\alpha,h}) = dom(\nabla^h)$；此外，$\nabla^h \circ \zeta_{\alpha,h}$ 有界。

另请注意 （这是一个简单的计算）$\|Z - \zeta_{\alpha,\,h}(Z)\|_2 \underset{\alpha \to \infty}{\to} 0$ 对于所有 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$.
现在根据定义，对于 $Y \in \mathbb{C}\langle X(e_j)_{j \neq i} \rangle$, $\nabla^{e_i}(Y) = 0$。因此，由引理 8 可直接得出 $\zeta_{\alpha,e_i}(FX(e_j)) = \zeta_{\alpha,e_i}(F) X(e_j)$ and $\zeta_{\alpha,e_i}(X(e_j)F) = X(e_j)\zeta_{\alpha,e_i}(F)$。

因此，若我们将 $\alpha > 0$ and $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 记为 $\nabla^h_\alpha := \alpha^{-\frac{1}{2}}\nabla^h \circ \zeta_{\alpha,h}$。
那么，对于 $Y \in \mathbb{C}\langle X(e_j)_{j\neq i}\rangle$，特别是 $\nabla^{e_i}(Y) = 0$，有：

$$\nabla^{e_i}_\alpha([Z,Y]) = [\nabla^{e_i}_\alpha(Z), Y] \tag{61}$$

因此，如果 $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{SC})$，则有：

$$[\nabla^{e_i}_\alpha(Z), Y] = 0 \tag{62}$$

由可闭性可知（使用与下文相同的论证：与弥散算子对易的希尔伯特-施密特算子必为零），$\nabla^{e_i}_\alpha(Z) = 0$。由于 $\|Z - \zeta_\alpha,\ e_i(Z)\|_2 \underset{\alpha\to\infty}{\to} 0$，我们得到 $Z \in D(\nabla^{e_i})$ 和 $\nabla^{e_i}Z = 0$。

接下来很容易验证，对任意 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，通过计算 $[\nabla^h_\alpha(Z)\ Y] = 0$ 并结合属于 $\mathbb{C}\langle X(h')_{h'\in\{h\}^\perp}\rangle$ 的 Y（在 $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 中与 h 正交的补空间内）进行同样的分析，可得 $\nabla^h Z = 0$；我们也很容易验证映射 $h \mapsto \nabla^h Z$ 是线性且连续的。

因此 $Z \in \mathbb{D},^{1\,2}$ 并且 $\nabla Z = 0$，由此可得维格纳空间上的自由 Poincar´e 不等式 s. ■

注 5. Voiculescu 运用自由熵技术取得的突破性成果（ *[53]*中的定理 5.3）也早已表明，这个冯·诺依曼代数不具有正则 DHSA：弥散超有限阿贝尔子代数；进而，由于因子中的正则极大阿贝尔子代数（MASA）也是 DHSA，因此它也不具有 Cartan 子代数。在他们的重要工作中，Dabrowski 和 Ioana *[20]*成功证明了若干不可分解性结果，例如，在存在取值于粗双模的实可闭导子，且其定义域包含一个弱稠密的 $*$-子代数 $\mathcal{M}_0$，并满足若干附加条件（但这些条件并不严格受限）的情况下，证明非L^2 刚性以及不存在 Cartan 子代数；这些附加条件包括存在一个非 amenable 集，并且导子还是代数的。事实上，Dabrowski 在 *[14]*证明，在满足利普希茨共轭变量这一假设时，由 X_1、...、X_n 生成的冯·诺依曼代数 $M = W^*(X_1, \ldots, X_n)$具有自由膨胀：一种变形到 $M * L(\mathbb{F}_\infty)$的过程；随后，Ioana 在 *[24]* 中的重要发现以及 Popa 的变形/刚性理论使他们得以推导出 Cartan 子代数的不存在性。然而，在无限维情形下，我们尚未能再次运用维格纳空间上的这一无限维微分演算，证明 $L(\mathbb{F}_\infty)$不具有 Cartan 子代数。我们将这个问题留给感兴趣的读者。

目前，我们只能证明 Shlyakhtenko 一项结果在半圆形情形下的无限维版本；该结果给出了代数导子的条件，使其通过取指数而产生一个 $M * L(\mathbb{Z})$ 的单参数半群。因此，我们的结果可以视为 Shlyakhtenko 一般结果的一个初等无限维情形，因为在我们的语境中，每个 $S(h)$ $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 都满足最标准的分部积分，也可以视为一个由 Lipschitz 共轭变量组成的无限系统（这一思想由 Dabrowski 在 [15] 中提出）：

$$\tau(FS(h)) = \tau \otimes \tau(\langle \nabla F, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}) \tag{63}$$

对所有 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ 以及 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$，并且对几乎所有 $t \geq 0$，$\nabla_t(S(h)) = h(t).1 \otimes 1 \in \mathcal{SC} \otimes \mathcal{SC}$。

命题 13. 设 $M = W^*(\{S_t, t \geq 0\} \simeq L(\mathbb{F}_\infty)$ 和 M_{alg} 分别为由自由布朗运动 $S = \Big\{S(h)$ 生成的冯·诺依曼代数和 $*$-含幺代数：$= \int_{\mathbb{R}_+} h(s)dS(s)\ h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\Big\}$

并据此，令 ∇^S 和 δ^S 分别为关于半圆过程 S 的自由 Malliavin 导数和 Skorohod积分。

另令 X 表示半圆过程 S 的一个独立副本，它也生成 $L(\mathbb{F}_\infty)$。于是存在 $M*W^*(\{X(h)\ h\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\})$ 上的单参数自同构半群 $(\alpha_t)_{t\geq 0}$，并且满足： $\simeq M*L(\mathbb{F}_\infty)$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\alpha_t(F) &= X_{\nabla^S(F)}, \forall F\in M_{alg},\\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\alpha_t(X(h)) &= -\delta^S(h.1\otimes 1) := -S(h), \forall h\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+),,\end{aligned}$$

其中，对于满足 e_1 的 $F=S(e_1)\dots S(e_n)$，其中 $e_1,\dots,e_n\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，我们定义 $X_{\nabla^S(F)}:=\sum_{k=1}^n S(e_1)\dots S(e_{k-1})X(e_k)S(e_{k+1})\dots S(e_n)$，然后将其线性延拓 .

证明：事实上，记 $X=\{X(h)\ h\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\}$ 为半圆等距过程 $S=\{S(h)\ h\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\}$ 的一个独立副本，

那么，只需考虑 $t\geq 0$,

$$\begin{aligned}\alpha_t(S(h)) &= \cos(t)S(h)+\sin(t)X(h)\\ \alpha_t(X(h)) &= -\sin(t)S(h)+\cos(t)X(h)\end{aligned}$$

它定义良好，显然是 $M*W^*(\{S_t,t\geq 0\})$ 的一个自同构，因此通过求导可得：

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{|t=0}\alpha(S(h)) &= X(h)\\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{|t=0}\alpha_t(X(h)) &= -S(h)=-\delta^S(h.1\otimes 1)\end{aligned}$$

利用自由 Malliavin 导数的链式法则，可以很容易地验证结果对 $F=S(e_1)\dots S(e_n)$ 仍然成立。

我们还在此给出一个有趣的刻画，说明 $\mathbb{D}^{1,\,2}$ 中投影的平凡性。这可视为 Guionnet 和 Shlyakhtenko 在 [22] 中定理 4.2 的一个推论；该定理指出 $C^*(\{S_t,t\geq 0\})$ 没有投影，并由此保证这个 C^*-代数中任意自伴元素的分布都具有连通支撑。因此，我们的命题表明，按照自由 Malliavin 微积分的意义，投影不是正则泛函。

事实上，在其著名专著中，Nualart（见 [40] 中命题 1.2.6）证明了一个关于高斯空间中 Malliavin 可微幂等元存在性的有趣命题：对于由高斯等距正态过程生成的 σ-代数中的任意博雷尔集 A，以下伯努利随机变量： $\mathbb{1}_A$ 属于 $\mathbb{D}^{1,\,2}$，当且仅当 $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$。我们在此提出证明这一“$0-1$ 定律”的自由对应版本。

命题14. $\mathbb{D}^{1,\,2}\cap W^*(\{S_t,t\geq 0\})$不包含非平凡投影，也就是说，对于$p=p^*=p^2\in W^*(\{S_t,t\geq 0\})$是一个投影的情形， $p\in\mathbb{D}^{1,\,2}$当且仅当 $p\in\{0,1\}$。

证明：取 $x \mapsto x^2$ 的一个光滑逼近 $\phi \in \mathcal{I}_2(f)$，它在 p的支撑内与之重合（由于它是有界自伴算子，因此在实数轴上紧支撑），$supp(p) \subset [-\rho(p)\ \rho(p)]$ (ρ 表示谱半径)，其中

$$\mathcal{I}_2(f) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = \int e^{ix}\mu(dy), \int_{\mathbb{R}} |y|^2|\mu|(dy) < \infty, \right\} \tag{64}$$

那么，根据链式法则（注意，此处关于 ϕ 的假设是必要的，因为对于可能具有无限混沌展开的随机变量，链式法则仅对这一类算子-Lipschitz函数成立），我们得到对几乎所有 $t \geq 0$:

$$\nabla_t(p) = \nabla_t(p^2) = p.\nabla_t(p) + \nabla_t(p).p$$

首先，通过在两侧用“p”进行压缩，可得:

$$\begin{aligned} p.\nabla_t(p).p &= p^2.\nabla_t(p).p + p\nabla_t.p^2 \\ &= 2p.\nabla_t(p).p \end{aligned}$$

因此，我们有:

$$p.\nabla_t(p).p = 0 \tag{65}$$

特别地:

$$(p.\nabla_t(p).p)\sharp(\nabla_t(p))^* = 0 \tag{66}$$

由此很容易推出（根据忠实性和迹性，因为 p 是一个投影），以下两项中至少有一项为零:

$$p.\nabla_t(p) = 0 \quad \text{or} \quad \nabla_t(p).p = 0$$

假设第一项为零:
于是我们得到,

$$\nabla_t(p) = \nabla_t(p).p$$

在左侧乘以 p 后，由 65 可得:

$$p.\nabla_t(p) = p.\nabla_t(p).p = 0$$

另一种可能性也可以用同样的方法处理。

因此，在任何情况下，将其代入 65，均有 $\nabla(p) = 0$；由自由 Poincar´e 不等式可知 $p = \tau(p)$。1，并且由于 p 是幂等元，我们得到:

$$\tau(p) = \tau(p)^2 \tag{67}$$

最后得到 $p \in \{0, 1\}$。 ■

注 6. 值得注意的是，我们证明了稍强的结论，因为证明中并未使用自伴条件（正交性）：不存在有界的 Malliavin 可微幂等元。若能证明或否定这一结果对于 $W^*(X_1, \ldots, X_n)$ 的类似结论，将会非常有趣；其中 $X_1, \ldots, X_n$ 是 $(\mathcal{M}, \tau)$ 中的自伴算子，且该空间是一个迹态 W^*-概率空间，例如具有有限费舍尔信息： $\Phi^*(X) < \infty$。这需要建立适用于超出多项式演算范围的自由差商链式法则（这里的特殊之处在于我们研究的是维格纳空间，以及半圆系的泛函），从而能够考虑更一般的函数类。

6 高阶 Malliavin 导数

本节将继续探讨 Biane 和 Speicher 在 [3] 中关于自由 Malliavin 微积分的分析：我们通过定义高阶（半圆形）Sobolev-Wigner空间，研究 Malliavin 导数对有限维格纳混沌的作用。由此，我们得到 Wiener 空间上经典重要结果的自由对应版本。我们首先回顾有关双过程及其关联的L^p-空间的一些定义；这些空间定义为简单适应双过程的完备化。随后，我们聚焦于 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的情形并引入一些记号，以便更清晰地阐述内容。请注意，只要采用更繁复的记号和定义，我们也可以将这些定义推广到一般的“抽象Wigner空间”中。

定义 22. 回顾一下，简单双过程是一个以正时间为指标的分段常值映射 $t \mapsto U_t$ ，满足对所有 $t \geq 0$、 $U_t \in \mathcal{SC} \odot \mathcal{SC}$ （代数张量积，即未取完备化），以及当 t 足够大时， $U_t = 0$ 。

定义 23. 若对所有 $t \geq 0$、 $U_t \in \mathcal{A}_t \odot \mathcal{A}_t$ 均成立，则称简单双过程是适应的。

定义 24. 简单双过程的（复）空间赋予一族范数，对所有 $1 \leq p \leq \infty$ ，定义如下：

$$\|U\|_{\mathcal{B}_p} = \left(\int_0^\infty \|U_t\|^2_{L^p(\tau \otimes \tau^{op})} dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{68}$$

其完备化记为 $\mathcal{B}_p$ ，而限制在 L^p-可积适应双过程构成的闭子空间上的空间记为 $\mathcal{B}^a_p$。

当 $p = 2$、 $\mathcal{B}_2$ 是一个希尔伯特空间且内积定义为：

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{B}_2} = \int_0^\infty \langle U_t, V_t \rangle_{L^2(\tau \otimes \tau^{op})} dt \tag{69}$$

定义 25. 对于 $1 \leq p \leq \infty$，以及 $k, n \geq 1$ 个正整数，我们记 $\mathbb{M}^k_{\ p}{}^n := L^2(\mathbb{R}^k_+, L^p(\mathcal{SC}^{\otimes n}))$，为取值于 $L^p(\mathcal{SC}^{\otimes n})$ 的非交换随机变量所构成的随机场，并配备如下半范数：

$$\|U\|_{\mathbb{M}^{k,n}_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^k_+} \|U_{t_1,\ldots,t_k}\|^2_{L^p(\tau^{\otimes n})} dt_1 \ldots dt_k \right)^{\frac{1}{2}}$$

注 7. 由此可见， L^p-双过程 $\mathcal{B}_p$ 类不过是 $\mathbb{M}^1_{,\ p}{}^2$。请注意，我们采用了这一更一般的定义，它可以独立用于研究“自由随机场”。实际上，我们可以将研究范围限制在具有 $n = k + 1$ 的这些空间上，这对于我们的目的已足够，具体如下。

定义 26. 对每个 $p \geq 1$，我们定义阶数为“n”的迭代自由Malliavin导数，记作∇^n ，其定义为：对任意 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$、 $\nabla^0 = Id$、 $\nabla^1 = \nabla$，以及对于 $n > 1$,

$$\begin{aligned} \nabla^n \ : \ & \mathcal{SC}_{alg} \to L^2(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{SC}^{\odot(n+1)})) \\ & F \mapsto (\nabla^n_{t_1,\ldots,t_n} F)_{t_1 \ldots, t_n \geq 0} := (id^{\otimes(n-1)} \otimes \nabla_{t_n}) \circ \ldots \circ (id \otimes \nabla_{t_2}) \circ \nabla_{t_1}(F) \end{aligned}$$

或者等价地，对几乎所有的 $t_1,\dots,t_n \geq 0$，我们可通过递归得到：

$$\nabla^n_{t_1,\dots,t_n} F = (id^{\otimes(n-1)} \otimes \nabla_{t_n}) \nabla^n_{t_1,\dots,t_{n-1}} F \tag{70}$$

不过，有时我们会更倾向于采用以下定义，因为自由 Malliavin 导数将被证明几乎处处是一个余结合导子，这就说明了为何要乘以系数 $n!$，从而得到某种对称化表达式。请注意，这也将为 Wiener 空间上得到的公式（Stroock 公式、Sobolev-Watanabe 空间的混沌刻画等）提供精确的自由对应形式。

定义 27. 我们将 $D^n, n \geq 1$ 定义为自由 Malliavin 导数的对称化形式，具体如下：

$$D^n F := n! \nabla^n F \tag{71}$$

注 8. 容易验证，这两个映射在 $\mathcal{SC}_{alg}$ 上都有良好定义，且不依赖于表示方式的选择。还请注意，正如下一个命题所述，自由 Malliavin 导数几乎处处是一个余结合导子。强调这一点非常重要，因为它给出了无限维 Dabrowski 不等式（ *[15]* 第 2.2 节）：方向 Malliavin 导数的有界性，即 ($id \otimes \tau$) 的 L^2-界 $\circ \nabla^h$ （应用见 Mai 对 *[31]* 的注 5.7）。

命题15. 自由 Malliavin 导数在几乎处处意义下是余结合导子，具体如下：

对于所有 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$，以及几乎所有的 s、$t \geq 0$:

$$(\nabla_t \otimes id) \nabla_s F = (id \otimes \nabla_s) \nabla_t F. \tag{72}$$

证明：事实上，只需证明 $F = S(e_1) \dots S(e_n)$ 在 $n \geq 1$ 条件下的等式（因为 $\mathcal{SC}_{alg}$ 由有限个此类元素组成），其中 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的正交归一基。于是，我们有：

$$\nabla_s F = \sum_{1 \leq i_2 \leq n} e_{i_2}(s) . S(e_1) \dots S(e_{i_2 - 1}) \otimes S(e_{i_2+1}) \dots S(e_n)$$

因此：

$$(\nabla_t \otimes id) \nabla_s F = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} e_{i_1}(t) e_{i_2}(s) . S(e_1) \dots S(e_{i_1 - 1}) \otimes S(e_{i_1+1}) \dots S(e_{i_2 - 1}) \otimes S(e_{i_2+1}) \dots S(e_n)$$

我们可以计算另一项，得到：

$$\nabla_t F = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} e_{i_1}(t) . S(e_1) \dots S(e_{i_1 - 1}) \otimes S(e_{i_1+1}) \dots S(e_n)$$

并且我们有：

$$(id \otimes \nabla_s) \nabla_t F = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} e_{i_1}(t) e_{i_2}(s) . S(e_1) \dots S(e_{i_1 - 1}) \otimes S(e_{i_1+1}) \dots S(e_{i_2 - 1}) \otimes S(e_{i_2+1}) \dots S(e_n)$$

因此，两个表达式都等于 $\mathcal{SC}_{alg}$，由此得证。 ■

注 9. 请注意，当我们使用内积或配对 $\langle \nabla F, h \rangle$ 时，如果上下文已足够清楚，我们可能会省略表示希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的下标。

定义 28. 对于 $U \in L^2(\mathbb{R}_+^n, SC^{\odot(n+1)})$，我们将 $\subset \mathbb{M}^n, {}_\infty^{n+1}$ 和 $h_1, \ldots, h_n \in L^2(\mathbb{R}_+)$ 的配对的线性延拓记为

$$\langle U, h_1 \otimes \ldots \otimes h_n \rangle := \int_{\mathbb{R}_+^n} U_{t_1,\ldots,t_n} \overline{h_1(t_1)} \ldots \overline{h_n(t_n)} dt_1 \ldots dt_n \tag{73}$$

注意，由柯西–施瓦茨不等式可得：

$$\| \langle U, h_1 \otimes \ldots \otimes h_n \rangle \|_{L^\infty(SC^{\otimes(n+1)})} \leq \|U\|_{\mathbb{M}_\infty^{n,n+1}} \| \|h_1 \otimes \ldots \otimes h_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}, \tag{74}$$

因此，该配对可以连续延拓为 $\mathbb{M}^n, {}_\infty^{n+1}$ 与 $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ 之间的配对。

这使我们能够给出一个有趣的二阶广义分部积分公式。后文将把这一事实推广到更高阶。

命题 16. 设 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$, $h_1, h_2 \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，则

$$\tau^{\otimes 3}(\langle \nabla^2 F, h_1 \otimes h_2 \rangle) = \tau(F I_2(h_2 \otimes h_1)) \tag{75}$$

证明：至少有两种不同的方法可以得出结论。第一种方法较为精巧，它依赖于证明线性算子 $(id \otimes \nabla^{h_2}) \circ \nabla^{h_1}$ 的可闭性。
事实上，重写方程 75 后，需要证明对于 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$，我们有：

$$\tau^{\otimes 3}((id \otimes \nabla^{h_2}) \nabla^{h_1} F) = \tau(F I_2(h_2 \otimes h_1)) \tag{76}$$

换言之，这相当于证明 $= \left((id \otimes \nabla^{h_2}) \circ \nabla^{h_1}\right)^* (1 \otimes 1 \otimes 1) := (\nabla^{h_1})^*((\nabla^{h_2})^*(1 \otimes 1) \otimes 1)$ 在 $L^2(\mathcal{SC})$ 中存在。也就是说，用非交换导数的语言来说，$L^2(\mathcal{SC})$ 中存在某种二阶共轭变量。事实上，我们证明了更强的结论，因为二阶共轭变量将是有界的（甚至是利普希茨的）。事实上，根据 Mai 的结果（在定理 1 的证明中回顾），在这种情况下，∇^{h_1} 是一个实可闭导子，

那么，经过简单计算可知，若该项存在，则它实际上等于：

$$\begin{aligned}
(\nabla^{h_1})^*((\nabla^{h_2})^*(1 \otimes 1) \otimes 1) &:= \delta^{h_1}(\delta^{h_2}(1 \otimes 1) \otimes 1) \\
&= \delta^{h_1}(S(h_2) \otimes 1) \\
&= S(h_2)S(h_1) - m_1 \circ (id \otimes \tau \otimes id)(\langle \tilde{\nabla}(S(h_2) \otimes 1), h_1 \rangle) \\
&= S(h_2)S(h_1) - \langle h_2, h_1 \rangle \\
&:= I_2(h_2 \otimes h_1)
\end{aligned} \tag{77}$$

其中在 l　　在上一行中，我们使用了 Voiculescu 公式的无限维版本 7。

我们提出了另一种基于直接计算的证明。
根据命题15可知，对于 $F = S(e_1)\dots S(e_n)$，其中 $e_1, \dots, e_n \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$（不一定构成完备正交归一系），对于某个 $n \geq 1$,

$$\langle \nabla^2 F, h_1 \otimes h_2 \rangle = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \langle e_{i_1}, h_1 \rangle \langle e_{i_2}, h_2 \rangle . S(e_1) \dots S(e_{i_1 - 1}) \otimes S(e_{i_1+1}) \dots S(e_{i_2-1}) \otimes S(e_{i_2+1}) \dots S(e_n)$$

并通过取迹：

$$\tau^{\otimes 3}(\langle \nabla^2 F, h_1 \otimes h_2 \rangle) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \langle e_{i_1}, h_1 \rangle \langle e_{i_2}, h_2 \rangle . \tau(S(e_1) \dots S(e_{i_1 - 1})) \tau(S(e_{i_1+1}) \dots S(e_{i_2-1})) \tau(S(e_{i_2+1}) \dots S(e_n))$$

现在，将 Wick恒等式应用两次（注意我们采用了以下约定：当$i_1 = n+1$, $e_{n+1} = h_2$），得到

$$\begin{aligned}
&\tau(FX(h_2)X(h_1)) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq n+1} \langle e_{i_1}, h_1 \rangle \tau(S(e_1) \dots X(e_{i_1 - 1})) \tau(S(e_{i_1+1}) \dots S(e_{n+1})) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \langle e_{i_1}, h_1 \rangle \tau(S(e_1) \dots S(e_{i_1 - 1})) \tau(S(e_{i_1+1}) \dots S(h_1)) + \langle h_2, h_1 \rangle \tau(F) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \langle e_{i_1}, h_1 \rangle \langle e_{i_2}, h_2 \rangle \tau(S(e_1) \dots X(e_{i_1 - 1})) \tau(S(e_{i_1+1}) \dots S(e_{i_2-1})) \dots \tau(S(e_{i_2+1}) \dots S(e_n)) \\
&+ \langle h_2, h_1 \rangle \tau(F)
\end{aligned}$$

因此，通过与表达式78进行比较，我们得到：

$$\tau(FI_2(h_2 \otimes h_1)) := \tau(F[S(h_2)S(h_1) - \langle h_2, h_1 \rangle]) = \tau^{\otimes 3}(\langle \nabla^2 F, h_1 \otimes h_2 \rangle) \tag{78}$$

由此得证。 ■

请注意，作用于双过程的梯度定义与我们最初的定义不同，并且有助于在 [3] 中推导海森堡对易关系（参见第5.4节）。事实上，后者是我们第二种“对称化”版本的自由 Malliavin 导数，它作用于双过程，如下所示：对于几乎所有的 $s, t \geq 0$, $\nabla_t(A_s \otimes B_s) := (\nabla_t \otimes id + id \otimes \nabla_{t_1})(A_s \otimes B_s)$ $= \nabla_t A_s \otimes B_s + A_s \otimes \nabla_t B_s$（通过余结合性）。在需要时，我们会通过˜明确指出此处使用的是这一版本的梯度。事实上，正如我们稍后将看到的，若使用它，只会使某些公式变得复杂，因为需要在其中添加一些组合常数；而众所周知，在维格纳空间中，这类公式要比在维格纳空间上简单得多。

定义29。我们定义非交换半圆 Sobolev 空间 $\mathbb{D}^{k,\,p}$ 对任意 $p \geq 1$ 和任意自然数 $k \geq 1$，在 $\mathcal{SC}_{alg}$ 上定义如下半范数族：

$$\|F\|_{k,p} = \left[\|F\|_p^p + \sum_{j=1}^{k} \|\nabla^k F\|^p_{\mathbb{M}_p^{k,k+1}} \right]^{\frac{1}{p}} \tag{79}$$

由于我们引入了自由 Malliavin 导数的对称化变体，因此也可以相应地考虑其半圆型索伯列夫空间。

定义30。我们通过在 $\mathcal{SC}_{alg}$ 上定义以下半范数族，来定义对称化半圆型索伯列夫空间 $\mathbb{D}^{k,p,\sigma}$，其中 $p \geq 1$ 任意， $k \geq 1$ 为任意自然数：

$$\|F\|_{k,p,\sigma} = \left[\|F\|_p^p + \sum_{j=1}^{k} \|D^k F\|_{\mathbb{M}_p^{k,k+1}}^p \right]^{\frac{1}{p}} \tag{80}$$

利用这些定义，可以证明这些迭代梯度的可闭性，并得到使用经典索伯列夫空间时所预期的相容性关系。

命题17。对于任意 $p \geq 1$ 和整数 $k \geq 1$， ∇^k 是从 $L^p(\mathcal{SC})$ 到 $\mathbb{M}^{n,p}{}^{n+1}$ 的可闭算子，其闭包的定义域记为 $\mathbb{D}^{k,p}$。对于 $p = \infty$，它是从 $L^\infty(\mathcal{SC})$ 到 $\mathbb{M}^{n,\infty}{}^{n+1}$ 的弱算子拓扑下的可闭算子。

证明：证明与 Biane 和 Speicher 的情形 $k = 1$ 类似，但涉及更多记号。

事实上，为了证明 $\nabla^n, n \geq 1$ 的可闭性，考虑 $(F_n)_n \in \mathcal{SC}_{alg}$，这是一个收敛到零的柱函数泛函序列，即 $F_n \to 0$ (在 $L^p(\mathcal{SC})$ $p \geq 1$ 中，或弱收敛)，并且满足 $\nabla^k F_n \to U \in \mathbb{M}^{k,p}{}^{k+1}$，那么我们需要证明 $U = 0$；只需证明：

$$\tau^{\otimes(k+1)} \left(Z^{(k+1)} \sharp \langle U, h_1 \otimes \ldots \otimes h_n \rangle \right) = 0 \tag{81}$$

对于任意选取的 $h_1 \ldots h_n \in L^2_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R}_+$ $Z_1 \ldots Z_{k+1} \in \mathcal{SC}_{alg}$ $Z^{(k+1)} = Z_1 \otimes$、() 和 , $\ldots \otimes Z_{k+1}$ $\sharp$ $\mathcal{SC}^{\otimes k} \otimes \mathcal{SC}^{op}$ 其中我们记作 ，并且 表示乘法到 上的线性延拓（即 $(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{k+1}) \sharp (b_1 \otimes \ldots \otimes b_{k+1}) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \ldots \otimes b_{k+1} a_{k+1}$, a_i, $b_i \in \mathcal{SC}$，其中 $i = 1, \ldots, k+1$）。然后，递归地运用分部积分公式 3，即可完成证明。

定理10. 在前一个定理中将 ∇ 替换为 D 后，当我们考虑其闭包记为 $\mathbb{D}^{k,\ p,\ \sigma}, k, p \geq 1$ 的对称化半圆型索伯列夫空间时，结论同样成立；对于弱算子拓扑下的 $L^\infty(\mathcal{SC})$，结论也成立。

下面的命题保证这些非交换半圆型 Sobolev 空间在相容关系方面表现良好。

命题 18. 这族半范数满足以下性质：

1. *Almost-Monotonicity:* $\exists\, c_{k,p,q} > 0,\ \|F\|_{k,p} \leq c_{k,p,q} \|F\|_{j,q}$ *for all* $F \in \mathcal{SC}_{alg}$ *and* $k \leq j,\ p \leq q$.

2. 相容性：设 $k, j \geq 1$ 为正整数，且 $p, q \geq 1$，那么若 $(F_n)_{n \geq 0}$ 是一列光滑柱状泛函，$\|F\|_{k,\ p} \to 0$，并且 $(F_n)_{n \geq 0}$ 是关于 $\|\cdot\|_{j,\ q}$ 的柯西序列，那么由 ∇^j 在 $\mathcal{SC}_{alg}$ 上的可闭性可知，$\|F_n\|_{j,\ q} \to 0$。

该陈述 当用由 D 构造的半范数替换原半范数时，这一结论也成立 .

证明：这是 Malliavin 梯度的可闭性 $\nabla^i, D^i, i \geq 1$、在 $\mathcal{SC}_{alg}$ 上的非交换 Holder 不等式所带来的一个直接推论。 ■

这样，我们可以将第 p 阶 Malliavin 导数的伴随算子记为 δ^p 阶 $p \in \mathbb{N}^+$ 自由 Skorokhod 积分。我们还可以证明（正如预期的那样），多重 Wigner 积分可定义为确定性多重过程的 Skorokhod 积分，并且二者与经典情形一样相一致（参见 [36] 中 Nourdin 和 Peccati 的第 2.7 节）。

定义 31. 我们将第 $p \geq 1$ 阶自由 Skorohod 积分（ $p \geq 1$ 为正整数）定义为“p”阶自由 Malliavin 导数的伴随算子，其中该导数被视为从 $\mathbb{D}^{p,2}$ 到 $\mathbb{M}_{,2}^{p\ p+1}$ 的无界可闭算子。我们将其记为 δ^p ，它是一个从 $dom(\delta^p)$ 到 $L^2(\mathcal{SC})$ 的算子。

它尤其满足以下对偶关系：
设 $u \in dom(\delta^p)$ 那么，对于所有 $F \in \mathcal{SC}_{alg}$，都存在唯一的元素，记作 $\delta^p(u)$，使得：

$$\langle \nabla^p F, u \rangle_{\mathbb{M}_2^{p,p+1}} = \langle F, \delta^p(u) \rangle_{L^2(\mathcal{SC})}, \tag{82}$$

注 10. 当 $p = 1$ 时，在式 23 中取 $u = h.1 \otimes 1$ for $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$，可得 $L^2(\mathbb{R}_+).1 \otimes 1$: $= \left\{h.1 \otimes 1, h \in L^2(\mathbb{R}_+)\right\} \subset dom(\delta)$，进而不难证明 $(L^2(\mathbb{R}_+))^{\otimes p}.1^{\otimes(p+1)} := \left\{h.1^{\otimes(p+1)}, h \in (L^2(\mathbb{R}_+))^{\otimes p} \simeq L^2(\mathbb{R}_+^p)\right\} \subset dom(\delta^p)$。

这一事实尤其使我们能够恢复这样的结论：阶数为“p”的多重 Wigner 积分，恰好由确定性多重过程的“p”阶自由 Skorohod 积分给出。Nualart 和 Zakai 最早在经典情形下于 *[39]*, 引入了这一思想。事实证明，这一点十分重要，因为经典情形中的许多重要结论都可以通过这一界定以更简便的方式证明（例如，有限维维纳混沌中的超压缩性，它是所谓迈耶公式的推论，参见 Nourdin 和 Peccati 的第 2.7 节 *[36]*）。

命题 19. 对任意整数 $p \geq 1$，以及 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p)$

$$\delta^p(f.1^{\otimes(p+1)}) = I_p(f) \tag{83}$$

证明：我们通过对“p”进行归纳，证明该结果对 $f = h^{\otimes p}$ 成立，其中 $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$，且 $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$，因此我们有：

$$U_p(S(h)) = \delta^p(h^{\otimes p}.1^{\otimes(p+1)}) \tag{84}$$

对于 $p = 1$，这显然成立，因为 $U_1 = X$ 和 $\delta(h.1 \otimes 1) = S(h)$。
现在，假设该结果对 1、2.....、 p 均成立，

并注意：$\delta^{p+1}(u) = \delta((\delta^p \otimes id_{L^2(\mathbb{R}_+),\ L^2(\mathcal{SC})})(u))$，这意味着：

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(p+1)}(h^{\otimes(p+1)}.1^{\otimes(p+2)}) \\
&= \delta(h.\delta^p(h^{\otimes p}.1^{\otimes(p+1)}) \otimes 1) \\
&= \delta(h.I_p(h^{\otimes p}) \otimes 1) \\
&= I_p(h^{\otimes p})S(h) - m_1 \circ (id \otimes \tau \otimes id)(\langle \tilde{\nabla}(I_p(h^{\otimes p}) \otimes 1), h\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}) \\
&= I_p(h^{\otimes p})S(h) - m_1 \circ (id \otimes \tau \otimes id)\left(\langle h, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \sum_{k=1}^{p} I_{k-1} \otimes I_{p-k}(h^{\otimes(p-1)}) \otimes 1\right) \\
&= I_p(h^{\otimes p})S(h) - m_1\left(I_{p-1}(h^{\otimes(p-1)}) \otimes 1\right) \\
&= U_p(S(h))S(h) - U_{p-1}(S(h)) \\
&= U_{p+1}(S(h))
\end{aligned}
$$

其中，第三行使用了归纳假设，第四行使用了无限维 Voiculescu 公式（参见命题 7），第五行则使用了 Malliavin 导数（一阶）对 Wigner 积分的显式作用（参见命题 6）。

注意，从第四行到第五行的推导是因为阶数大于或等于 1 的 Wigner 积分均以 0 为中心，因此求和中唯一有贡献的项是 $k = p$，它只给出一个常数（即一个 0 阶多重 Wigner 积分）；此外，我们还使用了假设 $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$。现在，由线性性以及这类初等张量的稠密性即可得到一般结论，也就是说，复化 $U_{\mathbb{C}}$ where $U = \left\{h^{\otimes p}, h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)/\|h\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1\right\}$ 的线性张成在 $L^2(\mathbb{R}_+^p)$ 中稠密；同时，δ^p具有可闭性。 ■

注 11. 熟悉 Voiculescu 意义下“高阶共轭变量”概念的读者（参见 *[53]* 中的定义 3.1）或许会注意到，我们实际上以一种更简单的方式重新得出了 *[53]* 中的命题 3.8。该命题指出，标准半圆变量 S 的 p 阶共轭变量是这个半圆变量的 p 阶切比雪夫多项式 S。这一事实可以用更精巧的方式改写为 $\partial^{(p)^*}(1^{\otimes(p+1)}) = U_p(S)$，其中 $\partial^{(p)}$ 表示关于半圆变量 S 的 p 次迭代自由差商（提醒一下，对于任意 $p \in \mathbb{N}^*$，它都是一个无界且稠密定义的可闭算子）；这也是结果 $\delta^p(1) = H_p$ 的自由概率对应形式，其中 δ 表示高斯空间 $L^2(\gamma)$ 上的散度算子，$d\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$ 是标准高斯测度，而 H_p 表示 p 阶埃尔米特多项式（完整且通俗易懂的讲解见 Nourdin 和 Peccati，*[36]* 中的第 1.4 节）。

定义 32. 对每个 $p \geq 1$，我们定义以下索伯列夫-维格纳空间的交集（这里我们只考虑对称化空间，因为前者包含于这些空间中）。该交集是 L^p-测试泛函空间，定义如下：

$$\mathbb{D}^{\infty,p,\sigma} := \bigcap_{k=1} \mathbb{D}^{k,p,\sigma} \tag{85}$$

定义 33. 我们将测试维格纳泛函空间定义为：

$$\mathbb{D}^{\infty,\sigma} := \bigcap_{p\geq 1}\bigcap_{k=1} \mathbb{D}^{k,p,\sigma} \tag{86}$$

注 12. 由非交换 Hölder 不等式的标准应用可知，该空间实际上是一个含幺 $*$-代数。还要注意，多重 Wigner 积分的有限和总是属于 $\mathbb{D}^{\infty,\sigma}$。

现在，我们可以将自由 Malliavin 导数的作用提升到更高阶，使其作用于某个固定的维格纳混沌。

命题 20. 对于正整数 $p \geq 1$，∇^p 对阶数大于 p 的齐次维格纳混沌的作用，也就是说，对于所有满足 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ 的 $n \geq p$ 和 $F = I_n(f)$，有：

$$\nabla^p_{t_1,\ldots,t_p}(I_n(f)) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} I_{i_1-1}\otimes I_{i_2-i_1-1}\otimes\ldots\otimes I_{n-i_p}(f^{i_1,\ldots,i_n}_{t_1,\ldots,t_p}) \tag{87}$$

并且对于几乎所有的 $t_1,\ldots,t_p \geq 0$，以及任意 $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$，我们有：

$$f(s_1,\ldots,s_{i_1-1},\underbrace{t_1}_{i_1},s_{i_1+1},\ldots,s_{i_2-i_1},\underbrace{t_{p-1}}_{i_{p-1}},\ldots,\underbrace{t_p}_{i_p},s_{i_p+1},\ldots,s_n)$$

$$= f^{i_1,\ldots,i_p}_{t_1,\ldots,t_p}(s_1,\ldots,s_{i_1-1},s_{i_1+1},\ldots,s_{i_2-1},\ldots s_n)$$

并且这里将几乎所有固定的 $t_1\ldots,t_p$ 以及所有 $i_1\ldots i_p$ 视为：
$f^{i_1,\ldots,i_n}_{\ldots,t_1\ldots,\ldots}$ 视为 $L^2(\mathbb{R}_+^{i_1-1})\otimes\ldots\otimes L^2(\mathbb{R}_+^{n-i_p})$ 中的一个元素。
当 $p > n$ 时，自由 Malliavin 导数的作用是平凡的：$\nabla^p_{|\mathcal{P}_n} = 0$。

证明：为说明该公式，首先注意到，对于 $n \geq 1$，公式可直接从初等多重维格纳积分 $U_n(S(e_j)) = I_n(e_j^{\otimes n})$ 推导得出；如前所述，$(e_j)_{j=1}^\infty$ 是 $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 的完备正交归一系。

事实上，在一阶情形下，我们有：

$$\nabla_{t_1}(U_n(S(e_j))) = e_j(t_1)\sum_{1\leq i_1\leq n} U_{i_1-1}(S(e_j))\otimes U_{n-i_1}(S(e_j)) \tag{88}$$

因此（还要注意，所考虑的切比雪夫多项式的次数较高，记为“$n-2$”，因为 $U_{n-1}(S(e_j))\otimes 1$，$1\otimes U_{n-1}(S(e_j))$ 的导数对应于求和项 $k\in\{1,n\}$，并且平凡地为零），由几乎处处成立的余结合关系可得（在第二个等式中，我们使用求和变量替换 $i_2 \to i_2+i_1$）

$$\begin{aligned}\nabla^2_{t_1,t_2}(U_n(S(e_j))) &= e_j^{\otimes 2}(t_1,t_2)\sum_{1\leq i_1\leq n}\sum_{1\leq i_2\leq n-i_1} U_{i_1-1}(S(e_j))\otimes U_{i_2-1}(S(e_j))\otimes U_{n-i_1-i_2}(S(e_j))\\ &= e_j^{\otimes 2}(t_1,t_2)\sum_{1<i_1<i_2\leq n} U_{i_1-1}(S(e_j))\otimes U_{i_2-i_1-1}(S(e_j))\otimes U_{n-i_2}(S(e_j))\end{aligned}$$

一般情形也可以通过验证以初等张量表示的多重 Wigner 积分所满足的关系得出。

对于 $p=1$，这归结为自由 Malliavin 导数作用于多重 Wigner 积分，这由命题 6 可知。

由稠密性和线性性可知，由于 ∇^p 是可闭的，只需对某个 $I_n(f)$证明该结果，其中f 为如下形式的初等（实值）张量：取 $f=f_1\otimes\ldots\otimes f_n$，其中每个 $f_i\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$。

我们先得到一阶情形：

$$\nabla_{t_1}(I_n(f))=\sum_{1\le i_1\le n} f_{i_1}(t_1)I_{i_1-1}(f_1\otimes\ldots\otimes f_{i_1-1})\otimes I_{n-i_1}(f_{i_1+1}\otimes\ldots\otimes f_n)$$

然后通过反复应用 $id\otimes\nabla_{t_j}$，得到：

$$\nabla^2_{t_1,t_2}(I_n(f))=\sum_{1\le i_1<i_2\le n} f_{i_1}(t_1)f_{i_2}(t_2)I_{i_1-1}(f_1\otimes\ldots\otimes f_{i_1-1})\otimes I_{i_2-i_1-1}(f_{i_1+1}\otimes\ldots\otimes f_{i_2-1})$$
$$\otimes I_{n-i_2}(f_{i_2+1}\otimes\ldots\otimes f_n)$$

对高阶 Malliavin 导数进行类似计算，可得结果 . ■

注 13. 为简便起见，我们通常将张量积 $I^{\otimes(i_1,\ldots,i_p)n}:=I_{i_1-1}\otimes\ldots\ldots\otimes I_{n-i_p}$ 简写，以缩短记号。

与经典情形一样，我们可以通过混沌分解刻画属于这些L^2-Sobolev 空间的维格纳泛函。这里我们只考虑对称化版本，因为它会产生与经典混沌刻画中相同的组合结构（即错排的数量）。

命题 21. 令 $F=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_n)\in L^2(\mathcal{SC})$，则对于任意整数 $p\ge 1$， F 属于 $\mathbb{D}^{p,\,2,\,\sigma}$，当且仅当：

$$\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{B}^{+\,n})}<\infty \tag{89}$$

并且在这种情况下：

$$\|D^pF\|_{\mathbb{M}_2^{p,p+1}}=\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{B}^{+\,n})}<\infty \tag{90}$$

证明：读者或许也会注意到，正如对一个 $p\ge 1$ 阶导子所预期的那样，阶数严格小于“p”的有限维格纳混沌元素均为零。因此，只需考虑 $F=I_n(f)$， $f\in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ $n\ge p$ 的情形。

通过逼近论证，并利用作用于齐次维格纳混沌上的 $p \geq 1$ 阶自由 Malliavin 导数，只需说明：给定任意 $1 \leq i_1 \ldots < i_p \leq n$，并固定 $t_1 \ldots$、t_p，根据多重Wigner-Ito积分的 Wigner-Ito 等距（显然可推广到张量情形），由 $\tau^{\otimes(p+1)}$ 给出的 L^2-范数为：

$$\left\| I_{i_1-1} \otimes I_{i_2-i_1-1} \otimes \ldots \otimes I_{n-i_p}(f^{i_1,\ldots,i_n}_{t_1,\ldots,t_p}) \right\|^2_{L^2(\tau^{\otimes(p+1)})} = \| f^{i_1,\ldots,i_n}_{t_1,\ldots,t_p} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-p}_+)} \tag{91}$$

这里，函数 $f^{i_1,\ldots,t_1 \ldots {}^{i_n},,t_p} \in L^2(\mathbb{R}^{n-p}_+)$ 被视为关于 $n-p$ 个变量的平方可积函数。对 $\mathbb{R}^p_+$ 积分后，对于每个固定的 $i_1, \ldots, i_p$，所得贡献相同，且恰好等于函数 f 的 L^2 范数。

$$\int_{\mathbb{R}^p_+} \left\| I_{i_1-1} \otimes I_{i_2-i_1-1} \otimes \ldots \otimes I_{n-i_p}(f^{i_1,\ldots,i_n}_{t_1,\ldots,t_p}) \right\|^2_{L^2(\tau^{\otimes(p+1)})} dt_1 \ldots dt_p = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{92}$$

接下来我们 只需计算 $\sharp\{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$ 的基数，它等于 $\binom{n}{p}$
现在只需指出 $p!\binom{n}{p} = n(n-1)...(n-p+1)$，由此即得结论。 。 ■
作为前两个命题的一个简单推论，我们有：

命题22。设 $F \in \mathbb{D}^{2,\ p,\ \sigma}$，若 $\nabla^p(F) = 0$，则 $F \in \mathcal{P}_{p-1}$。

现在我们将陈述本节的主要定理，它是著名的 Wiener 空间上的“Stroock”公式的自由类比。该公式最初由 Stroock 在 [47], 中证明，并显式地给出了无限光滑 L^2-泛函关于其迭代 Malliavin 导数的混沌分解。

定理11。（自由 Stroock 公式）
设 $F \in \mathbb{D}^{\infty,\ 2}$，其混沌展开为 $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$，则对所有 $n \geq 0$ 以及几乎所有（相对于勒贝格测度）t_1，.....，$t_n \geq 0$：

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \tau^{\otimes(n+1)} \left(\nabla^n_{t_1,\ldots,t_n} F \right) \tag{93}$$

或者采用对称化版本

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!} \tau^{\otimes(n+1)} \left(D^n_{t_1,\ldots,t_n} F \right) \tag{94}$$

证明：由线性性和稠密性可知，由于 $\nabla^p, p \geq 1$ 是一个定义在稠密定义域上的无界可闭算子，只需证明任意阶 $n \geq 1$的多重 Wigner-Ito 积分满足该结论。根据命题 6,

$$\nabla^p_{t_1,\ldots,t_p} \left(I_n(f) \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} I_{i_1-1} \otimes I_{i_2-i_1-1} \otimes \ldots \otimes I_{n-i_p}(f^{i_1,\ldots,i_n}_{t_1,\ldots,t_p}) \tag{95}$$

然后对所有 $p < n$ 应用 $\tau^{\otimes(p+1)}$，很容易看出，对于任意 $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$，序列 $i_1 - 1$, $i_2 - i_1 - 1, \ldots, n - i_p$ 中至少有一个非零整数，因此，由于 Wigner 积分

是中心化的，所有项都消失了。
现在，对于 $p > n$，高阶Malliavin导数显然为零，这正如预期： $\nabla^p_{|\mathcal{P}_n} = 0$。而对于唯一有贡献的（非平凡）情形，即 $p = n$，不难验证，唯一的项为（对于几乎所有的 $t_1, \dots, t_n \geq 0$）

$$\nabla^n_{t_1,\dots,t_n}(I_n(f)) = f(t_1, \dots, t_n).1^{\otimes(n+1)} \tag{96}$$

结论由此得出。 ■
作为前述结果的直接应用，我们还得到了 Ornstein-Uhlenbeck半群与高阶Malliavin导数之间的广义交换关系。
命题 23. 设 k 为正整数且 $F \in \mathbb{D}^{k,\,2}$，则对任意 $t > 0$，以下关系成立：

$$\nabla^k P_t F = e^{-kt} P_t^{\otimes(k+1)} \nabla^k F \tag{97}$$

7 维格纳空间上的方差公式

这个自由 Stroock 公式还给出了无穷光滑维格纳泛函的方差展开式的一个简单自由对应形式，其展开为无穷级数。感兴趣的读者可参阅 Nourdin 和 Peccati [36] 第 1 章第 1.5 节，了解经典情形下的类似结果。事实上，这个公式与自由数算子 $N := -L$ 密切相关，后者是自由 Ornstein-Uhlenbeck 算子的相反算子。

我们先从一个涉及自由奥恩斯坦-乌伦贝克半群的方差公式开始：引理 9

- 对所有 $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$，

$$cov(F, G) := \tau\Big[(F - \tau(F))(G - \tau(G))\Big] = \int_0^\infty e^{-t} \langle P_t^{\otimes 2}(\nabla F), \nabla G^* \rangle_{\mathcal{B}_2} dt \tag{98}$$

证明：记连续函数 $h(t) := -\tau(P_t F G)$，则 $h(0) = \tau(FG)$；由 $(P_t)_{t\geq 0}$ 的遍历性可知，固定点子代数：

$$\mathcal{N} := \{F \in \mathcal{SC}, P_t F = F, \text{for all } t \geq 0\} = \mathbb{C}.1 \tag{99}$$

是平凡的（这很容易证明），因此 $\lim_{t\to\infty} h(t) = -\tau(F)\tau(G)$。
因此，根据微积分基本定理：

$$\begin{aligned} cov(F, G) &= \int_0^\infty -\frac{d}{dt} h(t) dt \\ &= \int_0^\infty \tau\Big(-\frac{dP_t F}{dt} G\Big) dt \\ &= \int_0^\infty \tau(L(P_t F) G) dt \\ &= \int_0^\infty \langle \nabla P_t F, \nabla G^* \rangle_{\mathcal{B}_2} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \langle P_t^{\otimes 2}(\nabla F), \nabla G^* \rangle_{\mathcal{B}_2} dt \end{aligned} \tag{100}$$

命题 24. 设 $F \in \mathbb{D}^{\infty,2,\sigma}$，则：

$$var(F) := \|F - \tau(F)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\tau^{\otimes(n+1)}(\nabla^n F)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \tag{101}$$

其中，$\tau^{\otimes(n+1)}(\nabla^n F)$ 在乘积勒贝格测度意义下几乎处处逐点理解。

证明：该结论可由前述 Stroock 公式与 Wigner-Ito 等距直接推出。

■

请注意，这些最后的公式并非唯一一种用自由 Malliavin 算子表示的方差估计；还有一种广为人知的公式，它是 Wiener 空间上分部积分公式的自由对应形式，涉及 ∇、L^{-1}，其中最后一个算子是自由 Ornstein-Uhlenbeck 算子的伪逆。令人惊讶的是，这个公式似乎并不适合作为维格纳空间上的方差公式，尤其是在与自由 Stein 方法结合使用时。C´ebron（ [8] 中的引理 3.9）发现了一个强大得多的公式，它似乎能更好地体现这一微分演算的性质。我们首先回顾该公式，并给出涉及高阶自由 Malliavin 导数的推广版本。

引理 10. 对于所有 A、$B \in \mathcal{P}_n$，例如 $\tau(A) = 0$ 或 $\tau(B) = 0$：

$$\tau(AB) = \tau\left(\int_{\mathbb{R}_+} id \otimes \tau(\nabla_t A).(\tau \otimes id(\nabla_t B))dt\right), \tag{102}$$

现在我们可以陈述一个更有趣的方差公式，它可视为 C´ebron 所发现公式的推广，并且与高阶自由 Malliavin 导数相关。

引理 11.（C´ebron 公式的推广）设 $b \geq a \geq p > 1$ 为正整数，则对所有 A、$B \in \bigoplus_{k=a}^{b} \mathcal{H}_k$：

$$\tau(AB) = \tau\left(\int_{\mathbb{R}_+^p} (id \otimes \tau^{\otimes p})(\nabla^p_{t_p,\ldots,t_1} A).(\tau^{\otimes p} \otimes id)(\nabla^p_{t_1,\ldots,t_p} B)dt_1 \ldots dt_p\right), \tag{103}$$

证明：首先需要注意，在项 $(id \otimes \tau^{\otimes p})(\nabla^p_{t_p,\ldots,t_1})$ 中，变量 t_1、...、t_p 是按逆序排列的（熟悉通常的 Malliavin 微积分和自由 Malliavin 微积分的读者会注意到，为了能够交换变量，必须假设所考虑的多重 Wigner 积分具有完全对称性）。

由自由 Malliavin 导数的线性性，只需证明该命题对初等多重维格纳积分成立。

此外，由于 $\mathcal{H}_k$、$k \geq 1$ 是中心化的（这并非假设），我们有 $\tau(A) = \tau(B) = 0$。

因此，只需考虑满足 n、$m \geq p$ 的 $a \leq n$、$m \leq b$，以及
$A = I_n(f)$ $B = I_m(f)$，其中 $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ 和 $g = g_1 \otimes \ldots \otimes g_m$，且每个 f_i，$g_j \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$（当 $i = 1$，...，n 和 $j = 1$，...，m 时）。

于是我们有：

$$\nabla^p_{t_p,\ldots,t_1}(I_n(f)) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} f_{i_1}(t_p)\ldots f_{i_p}(t_1)I_{i_1-1}(f_1\otimes\ldots\otimes f_{i_1-1})\otimes\ldots\otimes I_{n-i_p}(f_{i_p+1}\otimes\ldots\otimes f_n) \tag{104}$$

现在应用 $id\otimes\tau^{\otimes p}$，我们得到：

$$(id\otimes\tau^{\otimes p})(\nabla^p_{t_p,\ldots,t_1}A) = f_n(t_1)\ldots f_{n-p+1}(t_p)I_{n-p}(f_1\otimes\ldots\otimes f_{n-p}) \tag{105}$$

事实上，由于阶数为 $k\ge 1$ 的 Wigner 积分均值为零，除非$i_p=n$、$i_{p-1}=n-1$、.....、$i_2-i_1-1=0$，所有项都为零。这递归地推出 $i_1=n-p+1$。同理，我们有：

$$(\tau^{\otimes p}\otimes id)(\nabla^p_{t_1,\ldots,t_p}B) = g_1(t_1)\ldots g_p(t_p)I_{m-p}(g_{p+1}\otimes\ldots\otimes g_m) \tag{106}$$

Now,

$$\begin{aligned}
&\tau\left(\int_{\mathbb{R}^p_+}(id\otimes\tau^{\otimes p})(\nabla^p_{t_p,\ldots,t_1}A).(\tau^{\otimes p}\otimes id)(\nabla^p_{t_1,\ldots,t_p}B)dt_1\ldots dt_p\right)\\
&=\int_{\mathbb{R}^p_+} f_n(t_1)\ldots f_{n-p+1}(t_p)g_1(t_1)\ldots g_p(t_p)\tau\left(I_{n-p}(f_1\otimes\ldots\otimes f_{n-p}).I_{m-p}(g_{p+1}\otimes\ldots\otimes g_m)\right)dt_1\ldots dt_p\\
&=\int_{\mathbb{R}^p_+} f_n(t_1)\ldots f_{n-p+1}(t_p)g_1(t_1)\ldots g_p(t_p)\delta_{n-p,m-p}(f_1\otimes\ldots\otimes f_{n-p})\overset{p}{\frown}(g_{p+1}\otimes\ldots\otimes g_m)dt_1\ldots dt_p\\
&=\delta_{n,m}.f\overset{n}{\frown}g\\
&=\tau(AB)
\end{aligned}$$

这里我们将 δ 记作克罗内克符号。 ■

注释14. 这个引理对于理解其与自由马利亚万-斯坦方法的联系尤其有用，特别是在处理非交换多项式的高阶导数时；这一点将在我们今后的另一篇论文中研究。

8 维格纳空间上的乘积公式

我们在第一节回顾了 Biane 和 Speicher 在 [3]，中证明的乘积公式，该公式给出了两个多重 Wigner 积分乘积的混沌分解（线性化公式）。本节将证明，与经典情形一样，这个公式不过是某种莱布尼茨公式的推论（这一思想最早¨出现在 Ust¨unel [49] 的著作中）；这一公式也适用于自由马利亚万梯度。这一证明因此更能体现其与 Malliavin 微积分的联系。

在给出这个公式的证明之前，我们提醒读者，可以很容易地验证（例如参见 [53] 中 Voiculescu 第 205 页）：

引理 12. 对任意 F、$G \in \mathcal{SC}_{alg}$，几乎处处对 t_1、...、$t_n \geq 0$，有：

$$\nabla^n_{t_1,\ldots,t_n}(FG) = \sum_{k=0}^{n} (id^{\otimes k} \otimes m_1 \otimes id^{\otimes(n-k)})(\nabla^k_{t_1,\ldots,t_{n-k}}(F) \otimes \nabla^{n-k}_{t_{n-k+1},\ldots,t_n}(G)) \tag{107}$$

其中按约定，当 $k \in \{0, n\}$, $\nabla^0(F) \otimes \nabla^n(G) := F.\nabla^n(G)$ 和 $\nabla^n(F) \otimes \nabla^0(G) := \nabla^n(F).G$分别表示第一条腿和最后一条腿上的乘法。

证明：因此我们固定 $F, G \in \mathcal{SC}_{alg}$。首先说明它在前几个阶数 $n = 1$,2,3 上如何成立。一般结果只需迭代应用 Malliavin 梯度即可得到。
确实，对于 $n = 1$，这显然成立，因为它只不过是将自由 Malliavin 导数作用于 $\mathcal{SC}_{alg}$ 后得到的莱布尼茨法则。

$$\nabla_{t_1}(FG) = \nabla_{t_1}(F).G + \nabla_{t_1}(G).F$$

由此得到二阶情形 $n = 2$，其中 $t_1, t_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \nabla^2_{t_1,t_2}(FG) &:= (id \otimes \nabla_{t_2})(\nabla_{t_1}(F).G + F.\nabla_{t_1}(G)) \\ &= \nabla^2_{t_1,t_2}(F).G + (id \otimes m_1 \otimes id)(\nabla_{t_1}(F) \otimes \nabla_{t_2}(G)) + F.\nabla^2_{t_1,t_2}(G) \end{aligned} \tag{108}$$

接着在三阶情形下，我们有：

$$\begin{aligned} \nabla^3_{t_1,t_2,t_3}(FG) &:= (id \otimes \nabla_{t_3})(\nabla^2_{t_1,t_2}(F).G + (id \otimes m_1 \otimes id)(\nabla_{t_1}(F) \otimes \nabla_{t_2}(G)) + F.\nabla^2_{t_1,t_2}(G)) \\ &= \nabla^3_{t_1,t_2,t_3}(F).G + (id^{\otimes 2} \otimes m_1 \otimes id)(\nabla^2_{t_1,t_2}(F) \otimes \nabla_{t_3}(G)) \\ &+ (id \otimes m_1 \otimes id^2)(\nabla_{t_1}(F) \otimes \nabla^2_{t_2,t_3}(G)) + F.\nabla^2_{t_1,t_2,t_3}(G) \end{aligned}$$

对更高阶应用相同的步骤即可得到结果。

现在我们可以回到命题 3 的证明。

证明：（命题 3）首先注意，对于所有 $n, m \geq 0$, $I_n(f)$ $I_n(g)$ $\in \mathbb{D}^{\infty,\ 4,\ \sigma}$，都有 $I_n(f)I_m(g)$ $\in \mathbb{D}^{\infty,\ 2,\ \sigma}$。

为清晰起见，并且由于只需考虑满足 $f_i, g_j \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$（对所有 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$）的 $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ 和 $g = g_1 \otimes \ldots \otimes g_m$初等张量，我们只详细讨论这种情形；一般结果可通过逼近得到。

那么，根据自由 Stroock 公式，我们知道混沌分解为：

$$I_n(f)I_m(g) = \sum_{p=0}^{\infty} I_p\left(\tau^{\otimes(p+1)}[\nabla^p(I_n(f)I_m(g))]\right) \tag{109}$$

现在，根据前面的引理，我们知道：

$$\nabla^p(I_n(f)I_m(g)) = \sum_{k=0}^{p} (id^{\otimes k} \otimes m_1 \otimes id^{\otimes(p-k)})(\nabla^k(I_n(f)) \otimes \nabla^{p-k}(I_m(g)) \tag{110}$$

因此，利用 ∇ 在维格纳混沌上的显式作用，我们得到（请注意注 13 中使用的约定）：

$$\begin{aligned}&\nabla^p(I_n(f)I_m(g))\\&=\sum_{k=0\vee(p-m)}^{p\wedge n}\sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n\\1\le j_1<\ldots<j_{p-k}\le m}}(id^{\otimes k}\otimes m_1\otimes id^{\otimes(p-k)})(I_n^{i_1,\ldots,i_k}(f)\otimes I_m^{j_1,\ldots,j_{p-k}}(g))\end{aligned}$$

由于 Wigner-Ito积分是中心化的，通过应用 $\tau^{\otimes(p+1)}$，我们必须得到非零项：
$i_1-1=\ldots=i_k-i_{k-1}-1=j_2-j_1-1\ldots=j_{p-k}-j_{p-k-1}-1=m-j_{p-k}=0$，由此递归可得：

$i_1=1\ldots,i_{k-1}=k-1,i_k=k$和 $j_1=m+k-p+1,\ldots,j_{p-k-1}=m-1,j_{p-k}=m$.

可以看出，“中心项”（即算子 m_1 作用于其上的项）由多重积分 $I_{n-k}(f_{k+1}\otimes\ldots\otimes f_n)$ 与 $I_{m+k-p}(g_1\otimes\ldots\otimes g_{m+k-p})$ 的乘积的迹给出；根据 Wigner-Ito 等距，该项非零当且仅当 $k=(n-m+p)/2$，因此 k 和 $n+m$ 具有相同的奇偶性，且 $|n-m|\le p\le n+m$。

因此，方程110中只有一项非零，即 $k=(n-m+p)/2$，由此得到$n-k=(n+m-p)/2$ 和 $m+k-p=(n+m-p)/2$，相应的核因此为：

$$\begin{aligned}&\tau\left(I_{(n+m-p)/2}(f_{(n-m-p+2)/2}\otimes\ldots\otimes f_n)I_{(n+m-p)/2}(g_1\otimes\ldots\otimes g_{(n+m-p)/2})\right).f_1\otimes\ldots\otimes f_{(n-m+p)/2}\\&\otimes g_{(n+m-p+2)/2}\otimes\ldots\otimes g_n\\&=\langle g_1\otimes\ldots\otimes g_{(n+m-p)/2},f_n\otimes\ldots\otimes f_{(n-m+p+2)/2}\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^{(n+m-p)/2})}.f_1\otimes\ldots\otimes f_{(n-m+p)/2}\\&\otimes g_{(n+m-p+2)/2}\otimes\ldots\otimes g_n\\&:=f\overset{(n+m-p)/2}{\frown}g\end{aligned}$$

将这一事实代入方程109，并令 $r=(n+m-p)/2$，可得：

$$\begin{aligned}I_n(f)I_m(g)&=\sum_{p=|n-m|}^{n+m}I_p(f\overset{(n+m-p)/2}{\frown}g)\\&=\sum_{r=0}^{n\wedge m}I_{n+m-2r}(f\overset{r}{\frown}g)\end{aligned}\tag{111}$$

至此证明完成。 ■

¨注释15. 证明乘积公式的另一种方法是采用 Ust ¨unel 最初的方法，即利用 *[48],* 前面的莱布尼茨公式，以及以下事实：
$\delta^p(f.1^{\otimes(p+1)})=I_p(f)$ 对于 $f\in L^2(\mathbb{R}_+^p)$，最后，自由 Malliavin 导数 ∇^p的伴随为 δ^p。不过，由于记号繁多，这个证明不那么显而易见，也不够清晰。详细内容留给感兴趣的读者。

事实上，不失一般性，我们可以假设 $n < m$。通过对 $\phi \in \mathbb{D}^{\infty,\sigma}$ 进行计算，可得以下量：

$$\tau(I_n(f)I_m(g)\phi^*), \tag{112}$$

并证明它等于：

$$\sum_{r=0}^{n} \tau(I_{n+m-2r}(f \overset{r}{\frown} g)\phi^*), \tag{113}$$

得出所需结论。

参考文献

[1] Christian Bender and Robert J.Elliott，《关于赫斯特参数大于二分之一的分数布朗运动的克拉克-奥康定理札记》，《随机过程与随机过程报告》，2003年12月。[2] P. Biane，《自由超收缩性》，《数学物理通讯》184，457–474（1997年）。

[3] P. Biane and R. Speicher (1998)，《关于自由布朗运动的随机微积分及维格纳空间上的分析》，《概率论及相关领域》112，373–409。[4] P. Biane and R. Speicher (1998)，《自由扩散、自由熵与自由 Fisher 信息》，《I.H.P. 概率与统计年鉴》，第37卷（2001年）第5期，第581–606页。[5] Solesne Bourguin，《自由泊松混沌上的向量值半圆极限》，《电子概率通讯》，第21卷，第55期，1–11页，2016年。[6] Solesne Bourguin Simon Campese，《维格纳空间上的自由定量四阶矩定理》，《国际数学研究通报》（IMRN），第2018卷，第16期，4969–4990页，2018年。[7] Mireille Capitaine. Elton Hsu. Michel Ledoux，《路径空间上的鞅表示与对数索博列夫不等式的简明证明》，《电子概率通讯》2，71–81，1997年。[8] Guillaume Cébron，《自由概率论中的定量四阶矩定理》，《数学进展》，第380卷，2021年，107579。

[9] Ian Charlesworth and Dima Shlyakhtenko，《自由熵维数与非交换多项式的正则性》，《泛函分析杂志》，第271卷，第8期，2016年10月15日，第2274–2292页。

[10] Ian Charlesworth Brent Nelson，《自由斯坦不规则性与维数》，《算子理论杂志》，第85卷，第1期，ISSN：0379-4024。[11] Fabio Cipriani and Jean-Luc Sauvageot，《作为狄利克雷型平方根的导子》，《泛函分析杂志》，第201卷，第1期，2003年6月20日，第78–120页。

[12] Alain Connes Dimitri Shlyakhtenko L^2，冯·诺依曼代数的同调。J. reine angew. Math.586（2005），125—168。

[13] Yoann Dabrowski, 《在有限非微观态自由费舍尔信息假设下证明非Γ的一则札记》，《泛函分析杂志》，第258卷，第11期，2010年6月1日，第3662–3674页。[14] Yoann Dabrowski, 《平稳自由随机微分方程的非交换路径空间方法》，arXiv:1006.4351v2。
[15] Yoann Dabrowski, 《一个自由随机偏微分方程》，《I.H.P. 概率与统计年鉴》，第50卷（2014年）第4期，第1404–1455页。[16] Yoann Dabrowski
Alice Guionnet and Dima Shlyakhtenko, 《凸势的自由输运》，《新西兰数学杂志》，第52卷（2021年），259–359页。[17] Aurélien Deya Ivan Nourdin, 《维格纳积分收敛至 tetilla 分布》，ALEA, 《拉丁美洲概率与数理统计杂志》9，101–127（2012年）。
[18] Aurélien Deya Salim Norredine Ivan Nourdin, 《四阶矩定理与 q-布朗混沌》，《数学物理通讯》第321卷，第113–134页（2013年）。[19] Aurélien Deya Ivan Nourdin, 《自由随机变量齐次和的不变性原理》，《伯努利》20(2)：586–603（2014年5月）。
[20] Charles-Philippe Diez, 《自由马利亚万－斯坦－狄利克雷方法：多维半圆近似与量子马尔可夫算子的混沌》，arXiv:2211.07595v1。[21] Liming Ge, 《自由熵在冯·诺依曼代数中的应用，II》，《数学年刊》第二辑，第147卷，第1期（1998年1月），第143–157页（共15页）。
[22] Alice Guionnet Dimitri Shlyakhtenko, 《具有严格凸相互作用的自由扩散与矩阵模型》，《几何与泛函分析》18(6)：1875–1916。[23] Uffe Haagerup, 《一个具有度量逼近性质的非核 C^*代数的例子》，Invent Math 50，279–293（1978年）。
[24] Adrian Ioana with an appendix joint with Stefaan Vaes, 《融合自由积 II_1 因子的 Cartan 子代数》，Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 48（2015），第1期，71–130。
[25] David Jekel Wuchen Li and Dimitri Shlyakhtenko, 《非交换变量的迹光滑函数与自由 Wasserstein 流形》，Dissertationes Mathematicae 580（2022），1–150。
[26] Todd Kemp Ivan Nourdin Giovanni Peccati Roland Speicher, 《维格纳混沌与四阶矩定理》，《概率年刊》，2012年。[27] Michel Ledoux, 《马尔可夫算子的混沌》，《概率年刊》，2012年，第40卷，第6期，2439–2459页，数字对象标识符：10.1214/11-AOP685。
[28] Jorge.A Léon and David Nualart, 《赫斯特参数小于1/2的分数布朗运动的克拉克－奥科内公式》，《随机分析与应用》24：427–449，2006年。

[29] Tobias Mai, Roland Speicher, 关于自由循环微分演算的一则注记，《算子理论杂志》第85卷第1期，2021年冬季，第183–215页[30] Tobias Mai, Roland Speicher, Moritz Weber, 在有限非微观态自由费舍尔信息这一假设下，不存在代数关系和零因子。arXiv:1407.5715[math.OA] (2014)[31] Tobias Mai, 维格纳积分分布的正则性，arXiv 预印本 arXiv:1512.07593。[32] Paul Malliavin,《随机分析》，数学科学基础丛书第313卷。施普林格，柏林、海德堡，1997年。[33] P. A. Meyer, 奥恩斯坦–乌伦贝克过程札记。S ´概率研讨班，XVI，第95–133页。数学讲义第920卷。施普林格，1982年。[34] Evangelos A. Nikitopoulos, 论文：自由 Itô 过程的非交换函数的 Itô 公式，《数学文献》，德国数学家协会杂志，27：1447–1507。[35] Ivan Nourdin, Frederi Viens, Malliavin 演算中的密度公式与集中不等式，《电子概率杂志》14：2287–2309（2009）。数字对象标识符：10.1214/EJP.v14-707。[36] I. Nourdin and G. Peccati (2012), Malliavin 演算中的正态近似：从斯坦因方法到普适性，剑桥大学出版社。[37] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati, 自由维格纳混沌上的泊松近似，《概率年刊》41(4)：2709–2723（2013年7月）。数字对象标识符：10.1214/12-AOP815。[38] Nualart, D and Zakai, M:广义随机积分与 Malliavin 演算，《概率论及相关领域》第73卷，第255–280页（1986年）。[39] Nualart, D and Zakai, M:, 广义多重随机积分与维纳泛函的表示，《随机过程》第23卷，1988年第3期。[40] Nualart, D,《马利亚万演算及相关主题》，施普林格，第二版。[41] Sorin Popa, 关于一类具有贝蒂数不变量的 II_1 型因子，《数学年刊》163（2006），809–899。[42] Allan Sinclair, 有限冯·诺依曼代数与极大阿贝尔子代数，剑桥大学出版社，2008年。[43] Ichiro Shigekawa, 维纳泛函的导数与诱导测度的绝对连续性，《京都大学数学杂志》20(2)：263–289（1980），数字对象标识符：10.1215/kjm/1250522278。[44] Dima Shlyakhtenko, 微观态自由熵维数的下界估计，《分析与偏微分方程》2(2)：119–146（2009）。数字对象标识符：10.2140/apde.2009.2.119。[45] Dima Shlyakhtenko, 非微观态自由熵维数的一些估计及其在 q-半圆族中的应用，2003年9月，《国际数学研究通报》2004(51) 1404–1455。

[46] Charles Stein, 关于相关随机变量之和的分布正态近似误差界，伯克利数学统计与概率研讨会，1972：583–602（1972）。[47] D. W. Stroock, 齐次混沌再探，概率研讨班 XXI，第1–8页。数学讲义第1247卷。施普林格，1987年。.[48] Ali Süleyman Ustünel, 多重维纳积分乘法公式的精巧证明，arXiv:1411.4877。.[49] Ali Süleyman Ustünel,《维纳空间上的分析及其应用》，arXiv:1003.1649v2。[50] Masamichi Takesaki, 冯·诺依曼代数中的条件期望，《泛函分析杂志》第9卷第3期，1972年3月，第306–321页。[51] Dan Voiculescu, 关于循环梯度的一则注记，《印第安纳大学数学杂志》第49卷第3期（2000年秋），第837–841页。[52] Dan Voiculescu, 自由概率论中熵与费舍尔信息测度的类比 III：Cartan 子代数的不存在，《几何与泛函分析》（GAFA）6，第172–199页（1996）。[53] Dan Voiculescu, 自由概率论中熵与 Fisher 信息测度的类比 V：非交换希尔伯特变换，《数学发明》132，189±227 (1998)。