arXiv:2303.13603v1 [math.NT] 23 Mar 2023

岩泽理论中的无条件等变主猜想及其应用

RUSIRU GAMBHEERA 和 CRISTIAN D. POPESCU

Abstract. 我们证明了 Dasgupta-Kakde [6] 关于某些塞尔默模 $Sel_S^T(H)^-$ 的 $\mathbb{Z}[G(H/F)]^-$–Fitting 理想的关键结果的一个更强版本。这些模与全实数域 F 的阿贝尔 CM 扩张 H/F 相关。我们利用这一结果计算这些塞尔默模的岩泽模类比 $Sel_S^T(H_\infty)^-_p$ 的 $\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F)]]^-$–Fitting 理想；其中，对于奇素数 p， H_∞ 是 H的分圆 $\mathbb{Z}_p$–扩张。我们的岩泽理论主结果指出， $\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F]]^-$–模 $Sel_S^T(H_\infty)^-_p$的投射维数为 1（不同于可能具有无限投射维数的 $\mathbb{Z}[G(H/F)]^-$–模 $Sel_S^T(H)^-$），它有二次呈示，且其 Fitting 理想是主理想，由一个等变p–进 L–函数 $\Theta_S^T(H_\infty/F)$生成。此外，我们建立了 $Sel_S^T(H_\infty)^-_p$与某个 $\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F)]]^-$–模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-$之间的完美对偶配对。该模本质上由 Greither 和第二作者在[11]中引入。因此，我们重新得到关于塔特模 $T_p(\mathrm{M}_S^T(H_\infty))^-$的等变主猜想；同上，该猜想是在假设与 H 和 p 相关的经典岩泽 μ–不变量为零的条件下证明的。进一步，我们无条件证明了精化 Coates–Sinnott 猜想；同上，该猜想是在相同的 $\mu = 0$ 假设下证明的。Johnston–Nickel 也在 [14], 中以不同方法无条件证明了该猜想，涉及所有 $n \geq 2$的高阶 Quillen K–群$K_{2n-2}(\mathrm{O}_{H,S})$的 $\mathbb{Z}[G(H/F)]$–Fitting 理想。最后，我们将研究过程中发展出的技术与“Taylor–Wiles 素数”方法（由 Wiles 在 [26] 中提出，并由 Greither 在 [8]中加以改进）结合起来，进一步加强了 [6] 中的关键结果，并由此证明了 Burns–Kurihara–Sano 关于 CM 数域塞尔默群的 Fitting 理想的猜想。

1. Introduction

设 H/F 是全实数域 F 的有限阿贝尔 CM 扩张，并设 S 和 T 是 F 中有限的不相交素点集，满足 S 包含 F 中阿基米德素点的集合 $S_\infty(F)$。令 $G := \mathrm{Gal}(H/F)$。根据数据 $(K/k, S, T)$，可以构造一个亚纯的 G–等变 Artin L–函数

$$\Theta_{S,H/F}^T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[G],$$

该函数在 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上全纯；还可以构造 Selmer $\mathbb{Z}[G]$–模 $Sel_S^T(H)$，其定义见 Burns–Kurihara–Sano 的[3]。Selmer $\mathbb{Z}[G]$–模是有限生成的，其中包含关于 H 的 T–射线类群 $Cl^T(H)$ 的微妙信息。特别地，存在一个典范的满射态射和一个同构

$$Sel_S^T(H)^- \twoheadrightarrow Sel_{S_\infty}^T(H)^- \simeq Cl^T(H)^{-,\vee},$$

其中， $M^\vee$ 表示 Pontrjagin 对偶， M^- 表示关于唯一的复共轭自同构 j 对 H 在 $M \otimes \mathbb{Z}[1/2]$, 上的作用的 (-1)–特征子空间，对任意 $\mathbb{Z}[G]$–模 M 均如此。

令 $p > 2$ 为一个素数，并分别用 $S_{ram}(H/F)$、 $S_\infty(F)$、 $S_p(F)$表示 H/F的分歧轨迹、无穷素点集合以及 F 中的 p–进素点。我们对集合 T作如下假设:

假设 $\mathbf{T_p(H/F)}$: $T \nsubseteq S_{ram}(H/F)$，且 H中不存在非平凡的 p–次单位根，使其模 $T \setminus S_{ram}(H/F)$中的所有素数都同余于 1。

[6] 中的关键结果（同上中的定理 3.3）可表述如下。

定理 1.1（Dasgupta–Kakde, [6]）。如果 S 和 T 满足以下性质

$$S = S_\infty(F) \cup (S_{ram}(H/F) \cap S_p(F)), \quad S_{ram}(H/F) \subseteq S \cup T, \quad \mathrm{Hyp}_p^T(H/F), \tag{1.2}$$

Date: 2023年3月27日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 11R23、11R29、11R34、11R42、11R70。
Key words and phrases. 岩泽理论、 p–进 L–函数、Artin L–函数、塞尔默模、等变主猜想、Coates–Sinnott 猜想。

那么 t 该 $\mathbb{Z}_p[G]^-$–模 $Sel_S^T(H)_p^- := (Sel_S^T(H) \otimes \mathbb{Z}_p)^-$ 是二次呈示的，并且我们有 ve

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-} Sel_S^T(H)_p^- \simeq (\Theta_{S,H/F}^T(0)).$$

这是一个强有力的结果，它蕴含 Kurihara 猜想的 p–主部分，该猜想断言

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Cl^T(H)_p^{-,\vee}) = \mathrm{SKu}^T(H/F)_p^- \tag{1.3}$$

其中右侧是 Sinnott–Kurihara 理想，它可用等变 L–函数的特殊值明确描述（参见同上定理 3.5）。此外，这还蕴含强 Brumer-Stark 猜想的 p–主部分，该猜想断言：若另外有 $S_{ram}(H/F) \subseteq S$，则

$$\Theta_{S,H/F}^T(0) \in \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Cl^T(H)_p^{-,\vee}). \tag{1.4}$$

（参见同上推论 3.8。） [6] 中发展的方法和技术并非 Iwasawa 理论性质。它们依托于 Ritter–Weiss 关于广义 Tate 序列的理论 [19] 、由 Wiles 在 [25] 引入并由 [6] 和 [22], 进一步发展的、取群环值的希尔伯特模形式理论，以及 Ribet 方法的推广 [18] ，以构造 CM 数域的大型非分歧扩张。

在 [6], 发表之前，对于所有素数 $p > 2$，强 Brumer–Stark 猜想 (1.4) 的 p–主部分一直通过岩泽理论方法加以研究，并在附加假设 $S_p(F) \subseteq S$ 成立，且与圆分 $\mathbb{Z}_p$–扩张 H_∞/H相关的岩泽 μ–不变量 $\mu_{H,\ p}$ 为零的条件下得到证明；这一零值正如岩泽所猜想的那样。（参见 [11]。）假设 $\mu_{H,\ p} = 0$ 是必要的，这样本质上在 [11] 中定义的某个岩泽模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-$（更一般情形下的定义见下文第 7 节）才是 p–可除的，并且（自动）具有有限的 $\mathbb{Z}_p$–余秩。这意味着存在一个典范同构，将 Pontrjagin 对偶与 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-$ 的塔特模的 $\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F)]]^-$–对偶联系起来

$$\mathcal{M}_S^T(H_\infty)_p^{-,\vee} \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(H_\infty)^-)^* \tag{1.5}$$

结果 [11] 表明，模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^{-,\vee}$ 一般而言是 $G(H_\infty/F_\infty)$–上同调平凡的（无需 $\mu_{H,p} = 0$ 假设）。这一事实结合其 $\mathbb{Z}_p$–自由性（假设 $\mu_{H,p} = 0$）表明，模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^{-,\vee}$ 是 $\mathbb{Z}_p[G(H_\infty/F_\infty)]$–投射的，因此其在等变岩泽代数 $\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F)]]^-$ 上的投射维数为 1。这一结果使得可以运用 [10] 中发展的同调代数方法，计算该模在等变岩泽代数上的 Fitting 理想。将这些方法与 $T_p(\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-)$ 和经典岩泽模 $\mathfrak{X}_S$ 之间的联系，以及 Wiles 于 [25] 为 $\mathfrak{X}_S$证明的非等变主猜想结合起来， [11] 的作者得到了等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F]]^-} \mathcal{M}_S^T(H_\infty)^{-,\vee} = (\Theta_S^T(H_\infty/F)), \tag{1.6}$$

其中， $\Theta_S^T(H_\infty/H) = \{\Theta_{S,\ H_n/F}^T(0)\}_n$ 是等变的 p–进 L–函数，通过在岩泽代数中对塔 H_∞/F 的有限层 H_n/F 处的特殊值 $\Theta_{S,\ H_n/F}^T(0)$ 取射影极限而得。

等式 (1.6) 是关于模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)_p^{-\vee,}$ 的等变主猜想（EMC），在假设 $\mu_{H,\ p} = 0$ 成立的条件下，已在 [11], 中得到证明。此外， [11] 中证明了，通过岩泽下降，(1.6) 蕴含强 Brumer–Stark 猜想 (1.4) 和精化 Coates–Sinnott 猜想的 p–主部分，其中指出：

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(K_{2n-1}(\mathcal{O}_{H,S})_p^{tors})\Theta_S^T(1-n) = e_n \cdot \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(K_{2n-2}(\mathcal{O}_{H,S})_p), \qquad \text{for all } n \geq 2, \tag{1.7}$$

若 $S_p(F) \subseteq S$，这是 (1.4) 的一个严重（非本原性）假设，但对 (1.7) 并不重要。上文中，$K_i(O_{H,\ S})$ 表示环 $\mathrm{O}_{H,\ S}$ 中 S–整数的第 i 个 Quillen K 群，以及 H 中的 $e_n = 1/2(1 + (-1)^n j)$。

注记 1.8. 在 [11], 中，作者为岩泽模 $T_p(\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-)$ 证明了一个 EMC；但考虑到同构 (1.5) 以及这些模的有限投射维数（这使得 $T_p(\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-)$ 与其 $\mathbb{Z}_p$–对偶的 Fitting 理想相等），这等价于为模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^{-,\ \vee}$ 证明一个 EMC。

本文的主要目标是通过放宽关于 S 和 T的假设（1.2），改进 Dasgupta-Kakde 的定理 1.1，并利用改进后的版本，无条件地证明一个具有 [11] 风格的等变主猜想，该猜想针对与圆分 $\mathbb{Z}_p$–扩张 H_∞/H相关联的塞尔默模：

$$Sel_S^T(H_\infty)_p^- := \varprojlim_n Sel_S^T(H_n)_p^-,$$

其中，射影极限是相对于某些典范限制映射取得的，因此具有自然的 $\mathbb{Z}_p[[G(H_\infty/F)]]^-$–模结构。下文中，我们令 $\mathsf{G} := G(H_\infty/F)$。

第一种优势 （见下文定理 6.28）如下 .

定理 1.9。若 S 和 T 满足以下性质

$$S_\infty(F) \cup S_p(F) \subseteq S, \quad S_{ram}(H/F) \subseteq S \cup T, \qquad \mathrm{Hyp}_p^T(H/F), \tag{1.10}$$

那么， $\mathbb{Z}_p[G]^-$–模 $Sel_S^T(H)_p^-$ 具有二次呈示，并且我们有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-) = (\Theta_{S,H/F}^T(0)).$$

请注意，旧假设 (1.2) 与新假设 (1.10) 之间的主要区别在于，新假设允许 S 中出现非 p–进素数（无论是否分歧）。在上面的定理中，将非 p–进分歧素数从 T 移至 S 是一项技术上相当困难的任务。下文第6节通过定理 6.3、6.15 和 6.28 分几个阶段完成了这项工作。其关键在于为两个阿贝尔 CM 扩张 H'/F 和 H/F 的塞尔默模 $Sel_S^T(H')_{\bar{p}}^-$ 与 $Sel_S^T(H)_{\bar{p}}^-$ 的二次呈示构造典范映射，其中 $H \subseteq H'$；这一构造在第5节中完成，尤其见定理 5.37。借此我们进一步证明，在某些假设下，相关塞尔默群在取伽罗瓦余不变量时具有良好的性质（确切陈述见下文关键的推论 5.38）。第5节中发展的结果与技巧本身也颇具价值，并将在我们即将发表的关于 Ritter–Weiss 模的岩泽理论的论文中进一步使用。

还值得注意的是， [6] 的方法无法（至少不能直接）用于证明定理 1.9。例如，当集合 S （在 [6]的记号中为 Σ ）包含非 p–进分歧素数时， [6], 中命题 9.5 的证明（这是关键部分）将不再适用。

本文的主要结果是如下关于岩泽模 $Sel_S^T(H_\infty)_p^-$ 的无条件等变主猜想，其精神与 [11]一脉相承。（见下文定理 6.30。）

定理 1.11（EMC）。假设 S 和 T 满足假设（1.10）。那么，以下结论成立 .

(1) 我们有如下 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]^-$–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(Sel_S^T(H_\infty)_p^-) = (\Theta_S^T(H_\infty/F)).$$

(2) *The* $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]^-$–模 $Sel_S^T(H_\infty)_{\bar{p}}^-$ 是二次呈示的，且投射维数为 1 .

上述定理的（1）部分是通过将定理 1.9 应用于所有扩张 H_n/F ，并借助 Greither 和 Kurihara 的一个定理 [9] （见下文命题 3.16），在 $n \to \infty$ 时取射影极限而得到的。（2）部分由（1）部分推出，前提是先证明重要事实： $\Theta_S^T(H_\infty/F)$ 是 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]^-$ 中的非零因子（见下文命题 4.6），并应用对 Cornacchia 和 Greither 的一项同调代数结果 [5] 的略微改进（见下文命题 4.9）。

本文最后一节（§7）探讨上述结果的应用，尤其关注如何联系塞尔默模 $Sel_S^T(H_\infty/H)_p^-$ 与 [11] 中引入的岩泽模（在同上称为抽象 Picard 1–动机），并在无条件下证明同上在假设 $\mu_{H,\,p} = 0$ 下证明的结果。更准确地说，在 §7.1 中，我们在（较弱的）假设 $S \cap T = \varnothing$ 和 $S_p(F) \cup S_\infty(F) \subseteq S$ 下开展工作，并构造一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模 $\mathsf{M}_S^T(H_\infty)$；该模是 $\mathbb{Z}_p$–扭的，而在较强假设 $S_{ram}(H_\infty/F) \subseteq S$ 和 $\mu_{H,\,p} = 0$ 下，它已在 [11] 中基本构造出来。通过一个显式的完美对偶配对（见 §7.1 ），我们建立了如下 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]^-$– 模之间的同构

$$Sel_S^T(H_\infty)_p^- \simeq \mathcal{M}_S^T(H_\infty)^{\vee,-}, \tag{1.12}$$

（见下文命题 7.10。）在附加假设 $\mu_{H,p} = 0$ （使 $\mathbb{Z}_p$–模 $\mathsf{M}_S^T(H_\infty)^{\vee,-}$ 成为有限余秩的可除模）下，上述同构变为

$$Sel_S^T(H_\infty)_p^- \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(H_\infty)^-)^*, \tag{1.13}$$

由此得到模 $T_p(\mathsf{M}_S^T(H_\infty)^-)$（抽象 Picard 1–动机 $\mathsf{M}_S^T(H_\infty)^-$的 p–进实现），该模在 [11]中进行了研究。将定理 1.11 与同构 (1.12)（分别为 (1.13)）结合，我们便能无条件地证明（分别证明） [11], 中的主要结果，且对 S 和 T 的假设弱于同上中的假设。（见下文推论 7.11 和定理 7.13；请注意，在同上中有 $S_{ram}(H_\infty/F) \subseteq S$.）

此外，在第7.3节中，我们在假设 $S_{ram}(H_\infty/F) \subseteq S$ 的条件下工作，并结合 [11] 第6节中发展出的技术工具与同构 (1.12)，建立塞尔默模 $Sel_S^T(H_\infty)_{\bar{p}}^-$之间的联系

以及 ´etale 上同调群 $\mathrm{H}^i_{et}(\mathrm{O}_K,\ S,\mathbb{Z}_p(n))$，其中 $i = 1,2$。（参见命题 7.17 以及正合列 (7.20) 和 (7.25)。）结合定理 1.11 和 [11]，第6节中发展出的策略，这些联系促成了对精化 Coates–Sinnott 猜想 (1.7) 的无条件证明。（参见下文定理 7.14。）等式 (1.7) 已在 [11]，第6节中，在假设 $\mu_{H,\ p} = 0$ 下得到证明。

最后，在 §7.4 中，我们结合证明定理 1.9 过程中发展的技巧与“Taylor–Wiles 素数”方法（采用 Greither 的精细版本 [8]），进一步强化定理 1.9：将假设 $S_p(F) \subseteq S$ 替换为较弱的 $S_p(F) \cap S_{ram}(H/F) \subseteq S$，并由此证明 Burns–Kurihara–Sano 猜想。具体而言，我们得到以下结果。（见下文定理 7.26。）

定理 1.14. 以下结论成立。

(1) 若 p是奇素数，且 S 和 T 满足假设

$$S_\infty(F) \cup (S_p(F) \cap S_{ram}(H/F)) \subseteq S, \quad S_{ram}(H/F) \subseteq S \cup T, \qquad \mathrm{Hyp}^T_p(H/F),$$

则 $\mathbb{Z}_p[G]^-$–模 $Sel^T_S(H)^-_p$ 是二次呈示的，并且有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel^T_S(H)^-_p) = (\Theta^T_{S,H/F}(0)).$$

(2)（Burns–Kurihara–Sano 猜想。）若 S 和 T 对所有奇素数 p 均满足上述假设（例如，若 $S_{ram}(H/F) \subseteq S$，且 $H^\times_T$ 没有与 2 互素的扭），则有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(Sel^T_S(H)^-) = (\Theta^T_{S,H/F}(0)).$$

我们以此结束引言，并提醒读者，Johnston 和 Nickel 最近的工作 [14], 也给出了 Refined Coates–Sinnott 猜想 (1.7) 的无条件证明，这是他们在同上证明无条件等变主猜想的推论；该主猜想的思路与我们的定理 1.11 不同。我们的工作和方法独立于且不同于同上所述的工作和方法。

2. Notations

2.1. 类群与单位。设 H/F 是伽罗瓦群为 G 的数域伽罗瓦扩张。令 O_H 为 H 中的代数整数环。对于 H 的任意有限位 w （即 O_H 的任意极大理想），令 $\mathrm{ord}_w : H^\times \to \mathbb{Z}$ 表示与 w 相关联的赋值，并将其标准化，使得 $\mathrm{ord}_w(H^\times) = \mathbb{Z}$。若 S 和 T 是 F 的有限不相交素点集，且无限位集合 $S_\infty(F)$ 包含于 S，则令 S_H 和 T_H 分别表示 H 中位于 S 和 T 上方的素点集合。为简化记号，在不会引起混淆时，我们分别用 S、T 和 S_∞ 表示 S_H、T_H 和 $S_\infty(H)$。令

$$\mathcal{O}^\times_{H,S,T} := \{x \in H^\times; \mathrm{ord}_w(x) = 0, \text{ for all } w \notin S_H, \quad \mathrm{ord}_w(x-1) > 0, \text{ for all } w \in T_H\}.$$

这是 H 的 S–单位群 $\mathrm{O}^\times_{H,\ S}$ 的一个有限指数子群。我们令

$$H^\times_T := \{x \in H^\times; \mathrm{ord}_w(x-1) > 0, \text{ for all } w \in T_H\}.$$

下文中，$Cl^T(H)$ 表示 H的导子为 $(\prod_{w\in T_H} w)$ 的射线类群，而 $Cl^T_S(H)$ 表示商 $Cl^T(H)$，即除以由 $S_H \smallsetminus S_\infty(H)$ 中理想类生成的子群所得的商。我们令 $Y_S(H)$ 和 $Y_{\overline{S}}(H)$ 分别表示 H 的除子自由 $\mathbb{Z}$–模（带整数系数），其支撑分别位于 $S_H \smallsetminus S_\infty(H)$ 中的素数和 S_H 之外的素数处。

根据定义，我们有一个显然的规范 $\mathbb{Z}[G]$–模正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{H,S,T} \longrightarrow H^\times_T \xrightarrow{div_{\overline{S\cup T}}} Y_{\overline{S\cup T}}(H) \longrightarrow Cl^T_S(H) \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

上文中的映射 $div_{\overline{S\cup T}}(*) := \sum_{w\notin S_H\cup T_H} \mathrm{ord}_w(*)\cdot w$ 是通常的（$S\cup T$–剔除）除子映射，最右侧的非零映射是除子类映射。

2.2. L–函数。进一步假设 G 是阿贝尔的。对于 F的一个赋值 v，分别用 G_v 和 I_v 表示它在 G中的分解群和惯性群，并固定 $\sigma_v \in G_v$ 作为对应于 v的一个弗罗贝尼乌斯元素。I_v 在 $\mathbb{Q}[I_v]$ 中的平凡特征所对应的幂等元为

$$e_v := \frac{1}{|I_v|}N_{I_v} := \frac{1}{|I_v|}\sum_{\sigma\in I_v}\sigma$$

于是 $e_v\sigma_v^{-1} \in \mathbb{Q}[G]$ 与 σ_v的选取无关。与 [6], 中一样，与 $(H/F,S,T)$ 相关联的复变量 s的 $\mathbb{C}[G]$值（G 等变） L函数，由下列全纯函数在整个复平面上的亚纯延拓给出

$$\Theta_{S,H/F}^T(s) := \prod_{v\notin S}(1-e_v\sigma_v^{-1}\cdot Nv^{-s})^{-1}\cdot\prod_{v\in T}(1-e_v\sigma_v^{-1}\cdot Nv^{1-s}),\qquad \mathrm{Re}(s)>0.$$

由此得到的亚纯延拓（也记为 $\Theta_{S,\ H/F}^T(s)$) 在 $\mathbb{C}\smallsetminus\{1\}$ 上全纯。容易看出，若 H'/F 是阿贝尔扩张、有限扩张，伽罗瓦群为 G' 且 $H\subseteq H'$，则

$$\Theta_{S,H/F}^T(s)=\pi_{G'\to G}(\Theta_{S,H'/F}^T(s)),\qquad \text{for all } s\in\mathbb{C}\smallsetminus\{1\},\tag{2.2}$$

其中 $\pi_{G'\to G}:\mathbb{C}[G']\to\mathbb{C}[G]$ 是由伽罗瓦限制诱导的通常的 $\mathbb{C}$–代数态射。

Klingen–Siegel（[16] 和 [21]）与 Shintani [20] 独立证明的经典结果表明

$$\Theta_{S,H/F}^T(1-n)\in\mathbb{Q}[G],\qquad \text{for all } n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}.\tag{2.3}$$

此外，若选择 T 使得 $H_T^\times$ 是 $\mathbb{Z}$–扭无挠的（因此必有 $T\neq\varnothing$），且 S 包含 H/F 的分歧轨迹 $S_{ram}(H/F)$，那么，另一项由 Pi. Cassou–Nogu`es [4] 与 Deligne–Ribet [7], 独立得到的经典结果表明

$$\Theta_{S,H/F}^T(1-n)\in\mathbb{Z}[G],\qquad \text{for all } n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}.\tag{2.4}$$

设 $p>2$为素数， $S_p(F)$ 为 F 中的 p–进素数集合。对 $n=1$ 而言，(2.4) 的一个 p–进改进如下，这一结果主要归功于 Kurihara。

引理 2.5. 设 F 中非空且互不相交的素数集合 S 和 T 满足以下假设，其中 $p>2$ 为素数。

$$\mathrm{Hyp}(H/F)_p:\begin{cases}S_{ram}(H/F)\subseteq S\cup T;\\ (S_{ram}(H/F)\cap S_p(F))\cup S_\infty(F)\subseteq S;\\ T\notin S_{ram}(H/F)\ \textit{and}\ (H_{T\smallsetminus S_{ram}(H/F)})^\times\ \textit{has no } p\textit{–torsion.}\end{cases}$$

那么，我们有 $\Theta_S^T(H/F):=\Theta_{S,H/F}^T(0)\in\mathbb{Z}_p[G]$

证明。参见 [6] 中引理 3.4 和注记 3.6 的证明。注意，若 $T\nsubseteq S_{ram}(H/F)\cup S_p(F)$，则上述第三个假设成立。当 H 中含有 p 阶单位根时，这也是一个等价条件。□

现在，进一步假设 H 是 CM 域， F 是全实域，并设 j 为 H 的复共轭自同构，将其视为 G 中的一个元素。若 $\chi(j)=+1$，则称 G 的一个 $\mathbb{C}$–值特征 χ 为偶特征；若$\chi(j)=-1$，则称其为奇特征。以下是 $\Theta_{S,H/F}^T(s)$ 的函数方程以及当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时 $\Theta_{S,H/F}^T(s)\in\mathbb{C}[G]^\times$ 这一事实的一个众所周知的推论。

引理 2.6. 沿用上述记号，以下结论成立。

(1) 若 χ是 G的偶特征，则 $\chi(\Theta_S^T(H/F))=0$。(2) 若 χ是 G的奇特征，则 $\chi(\Theta_S^T(H/F))=0$当且仅当存在一个素数 $v\in S\smallsetminus S_\infty(F)$，使得 $\chi(G_v)=\{1\}$。

证明。见 [23]。 □

2.3. 交换环上的模。若 G 是一个（前）有限阿贝尔群，且 M 是一个 $\mathbb{Z}[G]$–模，则赋予其 $\mathbb{Z}$–对偶和 Pontrjagin 对偶

$$M^*:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}),\qquad M^\vee:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

以协变的 G–作用 $gf(x)=f(gx)$，其中 $g\in G$。此外，若 G含有一个阶为 2 的典范元素 j（通常是复共轭自同构），则令

$$M^-:=\frac{1}{2}(1-j)\cdot(M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/2]).$$

这是 j作用下 $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/2]$ 的（–1）特征子空间。它具有自然的 $\mathbb{Z}[1/2][G]^-$–模结构。若 p 是奇素数，则令

$$M_p:=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p,\qquad M_p^-:=\frac{1}{2}(1-j)M_p=M^-\otimes_{\mathbb{Z}[1/2]}\mathbb{Z}_p,$$

分别视为 $\mathbb{Z}_p[G]$ 和 $\mathbb{Z}_p[G]^-$ 上的模。显然，$(* \to *^-)$ 和 $(* \to *_p^-)$ 是正合函子。我们默认通过乘以 $_{1\,2}(1-j)$ 给出的同构，分别将环 $\mathbb{Z}_p[G]/(1+j)$ 与 $\mathbb{Z}_p[G]^-$，以及 $\mathbb{Z}[1/2][G]/(1+j)$ 与 $\mathbb{Z}[1/2][G]^-$ 视为相同。

稍作滥用地，若 N 是一个 $\mathbb{Z}_p[[G]]$–模，我们沿用上文的记号

$$N^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(N, \mathbb{Z}_p), \qquad N^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(N, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

to 表示其 $\mathbb{Z}_p$–对偶和 Pontrjagin 对偶，且始终赋予协变的 G–作用。

若 $\phi : R \to R'$ 是交换环的一个态射，且 M 是一个 R–模，我们令

$$M_{R'} := M \otimes_R R'.$$

提醒读者，若 R–模 M 有限表示，则其第 0 个 R–Fitting 理想 $\mathrm{Fitt}_R(M)$ 定义良好，并且有等式

$$\phi(\mathrm{Fitt}_R(M))R' = \mathrm{Fitt}_{R'}(M \otimes_R R'). \tag{2.7}$$

此外，若 M 和 N 是有限表示的 R–模，且 $\psi : M \twoheadrightarrow N$ 是一个满射的 R–线性映射，则有 R–理想的包含映射

$$\mathrm{Fitt}_R(M) \subseteq \mathrm{Fitt}_R(N). \tag{2.8}$$

定义 2.9. 有限表示的 R–模 M 称为二次呈示的，如果存在一个 $k \geq 1$ 以及一个 R–模的正合列

$$R^k \longrightarrow R^k \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

给定一个二次呈示后，我们称 M 为其秩。

以下关于 Fitting 理想的结果将在我们的讨论中非常有用。

引理 2.10（Johnston–Nickel）。若有一个短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

由有限表示的 R–模构成，且 C 是二次呈示的，那么

$$\mathrm{Fitt}_R(B) = \mathrm{Fitt}_R(A) \cdot \mathrm{Fitt}_R(C).$$

证明。见 [15]中的引理 2.13。 □

引理 2.11（Burns–Greither）。假设 R 是有限生成的 $\mathbb{Z}_p$–代数，它是 $\mathbb{Z}_p$–自由的，并且在某个素数 p 上相对戈伦斯坦。则对于任意有限 R–模的正合列

$$0 \to A \to P \to P' \to A' \to 0,$$

满足 $\mathrm{pd}_R P \leq 1$ 和 $\mathrm{pd}_R P' \leq 1$，有

$$\mathrm{Fitt}_R(A^\vee) \cdot \mathrm{Fitt}_R(P') = \mathrm{Fitt}_R(A') \cdot \mathrm{Fitt}_R(P).$$

证明。参见 [2] 中第 179 页的引理 5。另见 [11] 中的命题 7.3。 □

关于其他 全文所需的 Fitting 理想的基本性质，读者可参阅 [11] 和 [6].

3. Selmer modules and class–groups

3.1. 有限扩张中的塞尔默模与类群。设 H/F 是数域的有限阿贝尔扩张，其伽罗瓦群为 G，其中 F 全实，而 H 是一个 CM 域。设 S 和 T 是 F的有限不相交素点集，且 $S_\infty \subseteq S$。我们回顾 Burns-Kurihara-Sano 在 [3] 中定义、并由 Burns 在 [1]中进一步研究的塞尔默模。读者也可参阅 [6]中的 §3.1。对正合列 (2.1) 取 $\mathbb{Z}$– 对偶，可得一个 $\mathbb{Z}[G]$– 模的典范单射态射

$$Y_{\overline{S \cup T}}(H)^* \hookrightarrow (H_T^\times)^*.$$

若按显然的方式将 $\prod_{w \notin S_H \cup T_H} \mathbb{Z} \simeq Y_{\overline{S \cup T}}(H)^*$ 视为同一对象，则上述单射将元组 $(x_w)_w \in \prod_w \mathbb{Z}$ 映射为同态 $* \to \sum_w x_w \mathrm{ord}_w(*)$。

定义 3.1. 对于数据 $(H/F, S, T)$，Selmer $\mathbb{Z}[G]$–模定义为

$$\mathrm{Sel}_S^T(H) := (H_T^\times)^* / Y_{\overline{S \cup T}}(H)^* \simeq (H_T^\times)^* / \prod_{w \notin S_H \cup T_H} \mathbb{Z},$$

其中，同构由上述所述的识别给出。

注 3.2. 假设 S' 是 F 中包含 S 且与 T 不相交的有限素数集。那么，由于 $Y_{\overline{S\cup T}} = Y_{S'\setminus S} \oplus Y_{\overline{S'\cup T}}$，我们得到一个 $\mathbb{Z}[G]$–模的短正合列

$$0 \to Y_{S'\setminus S}(H)^* \to Sel_{S'}^T(H) \to Sel_S^T(H) \to 0. \tag{3.3}$$

以下是 [3], 中引理 3.1 的一个更一般且更明确的版本，给出了类群与塞尔默群之间的联系。

引理 3.4. 对于上述 $(H/F, S, T)$，以下结论成立。

(1) 存在一个典范的 $\mathbb{Z}[G]$–模正合列

$$0 \longrightarrow Cl_S^T(H)^\vee \xrightarrow{i} Sel_S^T(H) \xrightarrow{j} (O_{H,T,S}^\times)^* \longrightarrow 0,$$

其中，i 将 $\phi \in Cl_S^T(H)^\vee$ 映到 $Sel_S^T(H)$ 中 $[a \mapsto \sum_{w\notin T\cup S} \widetilde{\phi\ [w]}()ord_w(a)]$ 的陪集（视为 $(H_T^\times)^*$ 中的元素）；$\tilde{x} \in \mathbb{Q}$ 表示 $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的任意提升；j 是限制映射；$[w]$ 是 w 在 $Cl_S^T(H)$ 中的理想类。

(2) 特别地，如果 $S = S_\infty$，那么 i 诱导出一个 $\mathbb{Z}[G]^-$–模同构

$$i : Cl^T(H)^{\vee,-} \simeq \mathrm{Sel}_{S_\infty}^T(H)^-,$$

如上文 (1) 中所作的明确描述。

证明。我们将正合函子 $* \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(*, \mathbb{Q})$ 应用于正合列 (2.1)。由于 $Cl_S^T(H)$ 是有限的，我们得到如下 $\mathbb{Z}[G]$–模的正合列。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_{\overline{S\cup T}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_T^\times, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_{H,T,S}^\times, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

No通过对 (2.1) 取 Pontryagin 对偶，我们得到一个 $\mathbb{Z}[G]$–模的正合列。

$$0 \longrightarrow Cl^T(H)^\vee \longrightarrow (Y_{\overline{S\cup T}})^\vee \longrightarrow (H_T^\times)^\vee \longrightarrow (O_{H,T,S}^\times)^\vee \longrightarrow 0$$

现在考虑如下 $\mathbb{Z}[G]$–模的交换图，其各行均为正合行。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & Cl_S^T(H)^\vee \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & (Y_{\overline{S\cup T}})^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_{\overline{S\cup T}}, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & (Y_{\overline{S\cup T}})^\vee \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & (H_T^\times)^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_T^\times, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & (H_T^\times)^\vee \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & Sel_S^T(H) & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_{H,T,S}^\times, \mathbb{Q}) & & (O_{H,T,S}^\times)^\vee
\end{array}$$

现在，蛇引理给出如下 $\mathbb{Z}[G]$–模的正合列。

$$0 \longrightarrow Cl_S^T(H)^\vee \xrightarrow{i} Sel_S^T(H) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_{H,T,S}^\times, \mathbb{Q}) \xrightarrow{f} (O_{H,T,S}^\times)^\vee$$

显然，$\ker f = (O_{H,\ T,\ S}^\times)^*$。因此我们得到以下短正合列。

$$0 \longrightarrow Cl_S^T(H)^\vee \xrightarrow{i} Sel_S^T(H) \xrightarrow{j} (O_{H,T,S}^\times)^* \longrightarrow 0$$

其中 j 是限制映射。现在我们来明确给出同构 i。如果 $\phi \in Cl_S^T(H)^\vee$，那么与上述蛇引理设置相对应的图追逐给出如下结果。

$$\begin{array}{ccc} & & \phi \\ & & \downarrow \\ & (\widetilde{\phi([w])})_w & \longmapsto & (\phi([w]))_w \\ & \downarrow & \\ (a \mapsto \sum_{w\notin T\cup S_\infty} \widetilde{\phi([w])} ord_w(a)) & \longmapsto & (a \mapsto \sum_{w\notin T\cup S_\infty} \widetilde{\phi([w])} ord_w(a)) \\ \downarrow & & \\ [a \mapsto \sum_{w\notin T\cup\ S_\infty} \widetilde{\phi([w])} ord_w(a)] & & \end{array}$$

这就完成了 (1) 部分的证明。

(2) 现在，由于 H 是一个 CM 域，群 $(O^\times_{H,\ T,\ S_\infty})^-$ 是有限的。因此，$(O^\times_{H,\ T,\ S_\infty})^{*,\ -} = 0$。于是，对 (1) 部分中的短正合列取负部，即得所需的同构。这就完成了 (2) 部分的证明。□

注 3.5. 假设 S' 是 F 中的一个有限赋值集，与 T 不相交，包含 S，且足够大，使得 $Cl^T_S(H)$ 由 $S'_H \setminus S_H$ 中的理想生成。那么，我们有如下显然类似于正合列 (2.1) 的结果。

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{H,S,T} \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{H,S',T} \xrightarrow{\mathrm{d}iv_{S'\setminus S}} Y_{S'\setminus S}(H) \longrightarrow Cl^T_S(H) \longrightarrow 0.$$

When 结合上述引理 (1) 部分的证明，可得一个同构 m

$$Sel^T_S(H) \simeq \frac{(O^\times_{H,S',T})^*}{(Y_{S'\setminus S}(H))^*}, \tag{3.6}$$

由限制映射 $(H^\times_T)^* \to (O^\times_{H,\ S',\ T})^*$. 诱导

设 $H \subseteq H'$，其中 H' 是 F 的 CM 阿贝尔扩张，其伽罗瓦群为 G'。自然态射 $H^\times_T \hookrightarrow H'^\times_T$、$Y_{\overline{S\cup T}}(H) \hookrightarrow Y_{\overline{S\cup T}}(H')$ 以及 $Cl^T_S(H) \twoheadrightarrow Cl^T_S(H')$ 诱导出 G'- 等变限制映射

$$res : Sel^T_S(H') \to Sel^T_S(H), \qquad \widetilde{res} : Cl^T_S(H)^\vee \to Cl^T_S(H')^\vee.$$

引理 3.7. 有如下交换图，其中的模为 G'

$$\begin{array}{ccc} Cl^T_S(H')^\vee & \xrightarrow{i'} & Sel^T_S(H') \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{res}} & & \downarrow{\scriptstyle res} \\ Cl^T_S(H)^\vee & \xrightarrow{i} & Sel^T_S(H) \end{array}$$

其中的水平映射是引理 3.4 (1) 中给出的单射 i。

证明。设 $\phi \in Cl^T_S(H')^\vee$。那么，若 v 和 w 分别表示 H 和 H' 中的素数，则引理 3.4 给出如下结果。

$$res(i'(\phi)) = res([a \mapsto \sum_{w\notin T\cup\ S_\infty} \widetilde{\phi([w])} ord_w(a)]) = [a \mapsto \sum_{v\notin T\cup\ S_\infty} \sum_{w|v} \widetilde{\phi([w])} ord_w(a)].$$

另一方面，$i(\widetilde{res}(\phi)) = [a \mapsto \sum_{v\notin T\cup\ S_\infty} \phi([v]) ord_v(a)]$. 然而，若 e 是 v 在 H'/H 中的分歧指数，由于 $ord_v(*) = e \cdot ord_w(*)$，我们有

$$\sum_{w|v} \widetilde{\phi([w])} ord_w(a) = \sum_{w|v} \widetilde{\phi([w^e])} ord_v(a) = \widetilde{\phi(\prod_{w/v} [w^e])} ord_v(a) = \widetilde{\phi([v])} ord_v(a),$$

使上面的图表可交换。 □

我们以一个关于塞尔默限制满射性的引理结束本节。

引理 3.8. 采用上述记号，假设 $(H'_T)^\times$ 没有 p–扭，其中 p 是某个素数。那么限制映射 $res : Sel^T_S(H')_p \twoheadrightarrow Sel^T_S(H)_p$ 是满射。

证明。令 S' 为 F 中包含 S、与 T 不相交且足够大的有限素数集，使得 $Cl_S^T(H)$ 和 $Cl_S^T(H')$ 均由 S'–支撑理想的类生成。那么，由上文注 3.5 可知，只需证明限制映射

$$res : (O^\times_{H',S',T})^*_p \to (O^\times_{H,S',T})^*_p$$

i是满射。对有限生成 $\mathbb{Z}$–模的正合列取 $\mathbb{Z}$–对偶

$$0 \to O^\times_{H,S',T} \to O^\times_{H',S',T} \to O^\times_{H',S',T}/O^\times_{H,S',T} \to 0,$$

然后与 $\mathbb{Z}_p$ 张量积，这相当于证明 $O^\times_{H',S',T}/O^\times_{H,S',T}$ 没有 p–扭，这一点我们将在下文证明。

设 $x \in O^\times_{H',S',T}$ 使得 $x^p \in O^\times_{H,S',T}$。那么，对于所有 $g \in Gal(H'/H)$，我们有 $1 = (x^p)^{g-1} = (x^{g-1})^p$。但是，由于 $(H'_T)^\times$ 是 p–无扭的，$O^\times_{H',S',T}$也如此。因此，对于所有 $g \in Gal(H'/H)$，我们有 $x^{g-1} = 1$。于是，$x \in O^\times_{H,S',T}$。因此，$O^\times_{H',S',T}/O^\times_{H,S',T}$没有 p–扭，证明得证。□

推论 3.9. 在引理 3.8 的假设下，若 $\pi : \mathbb{Z}_p[G'] \to \mathbb{Z}_p[G]$ 是由伽罗瓦限制诱导的 $\mathbb{Z}_p$–代数态射，则有

$$\pi(\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G']} Sel_S^T(H')_p) \subseteq \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]} Sel_S^T(H)_p.$$

证明. 注意，满射限制映射 $res : Sel_S^T(H')_p \twoheadrightarrow Sel_S^T(H)_p$ （见引理 3.8）诱导出一个满射的 $\mathbb{Z}_p[G]$–模态射

$$\widehat{res} : (Sel_S^T(H')_p)_{G(H'/H)} \twoheadrightarrow Sel_S^T(H)_p.$$

因此，应用 Fitting 理想的性质 (2.7) 和 (2.8)，可得

$$\pi(\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G']} Sel_S^T(H')_p) = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(Sel_S^T(H')_p)_{G(H'/H)} \subseteq \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]} Sel_S^T(H)_p,$$

证毕。 □

3.2. 岩泽塔中的塞尔默模与类群。设 H/F、 S 和 T 如上一节所述。记 H_∞ 为 H 的分圆 $\mathbb{Z}_p$–扩张。令 H_n 为其第 n 层，其由通常的等式 $[H_n : H] = p^n$ 刻画。于是， H_n 和 H_∞ 也是 CM 域，且 H_n 的复共轭自同构是 H_∞ 的复共轭自同构的限制。令 $G_n := Gal(H_n/F)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，并令 G := $Gal(H_\infty/F)$。

我们考虑对应于 H_{n+1}/H_n 的 G_{n+1} 等变限制映射

$$res_n : Sel_S^T(H_{n+1}) \to Sel_S^T(H_n), \qquad \widehat{res_n} : Cl_S^T(H_{n+1})^\vee \to Cl_S^T(H_n)^\vee,$$

并定义岩泽塔 H_∞/H 顶端的 p 主塞尔默群如下 .

定义 3.10。我们定义 $\mathbb{Z}_p[[G]]$–模

$$Sel_S^T(H_\infty)_p = \varprojlim_n Sel_S^T(H_n)_p,$$

其中，射影极限是关于上述定义的映射 res_n 取的。

下面的引理表明，$Sel_S^T(H_\infty)_p$ 仅取决于数据 $(H_\infty/F, S, T, p)$，而与中间 CM 域 H 无关。

引理 3.11。设 H, H' 是全实数域 F 的两个 CM 阿贝尔扩张，且满足 $H_\infty = H'_\infty$。则有以下结论。

(1) 我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[G]]$–模的同构

$$\varprojlim_n Sel_S^T(H_n)_p \cong \varprojlim_n Sel_S^T(H'_n)_p,$$

它与限制映射相容（以显然的方式）。

(2) 我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[G]]$–理想的等式

$$\varprojlim_n \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G_n]} Sel_S^T(H_n)_p \cong \varprojlim_n \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G'_n]} Sel_S^T(H'_n)_p,$$

其中 $G'_n := G(H'_n/F)$，对所有 n 均成立；Fitting 理想层级上的过渡映射由伽罗瓦限制映射诱导，如推论 3.9 所示。

证明。显然，留给读者完成。 □

定义 3.12. 对所有 n，令 $A_n^T := Cl^T(H_n)_p$，并定义 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模

$$A_\infty^T := \varinjlim_n A_n^T,$$

其中归纳极限是相对于类群层面的自然映射取得的。

显然，我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模的同构

$$A_\infty^{T,\vee} := \varprojlim_n A_n^{T,\vee},$$

其中射影极限是相对于映射 $\widehat{res_n}$取得的。

为简化记号，在下文中，对于任意 n 以及 F 中包含 S_∞的任意有限素数集R，我们令 $Y_{n,R} := Y_R(H_n)$。我们令

$$Y_{\infty,R} = \varinjlim_n Y_{n,R},$$

其中，归纳极限是相对于因子层上通常的单射映射取得的。由于 F 中位于 p 之上的素数（其集合记为 S_p）在 H_∞/H 中全分歧，对于 $n \gg 0$，我们有一个 $\mathbb{Z}$–模的同构

$$Y_{\infty,S_p} \simeq \bigoplus_{w\in S_p(H_\infty)} \mathbb{Z}[1/p].$$

特别地$Y_{\infty,\ S_p}$ 是 p–可除的，因此我们有

$$\varprojlim_n Y^*_{n,S_p} \simeq Y^*_{\infty,S_p} = 0, \qquad \varprojlim_n Y^*_{n,S} \simeq Y^*_{\infty,S} = Y^*_{\infty,S\setminus S_p}, \tag{3.13}$$

对于 F 中任意有限个素数 S。

命题 3.14. 我们有如下 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的短正合列。

$$0 \longrightarrow (Y^*_{\infty,S\setminus S_p}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^- \longrightarrow Sel_S^T(H_\infty)_p^- \xrightarrow{\lambda} A_\infty^{T,\vee,-} \longrightarrow 0$$

证明。（竖直）限制映射给出如下交换图，且各行正合（参见注 3.2，并注意对所有 n，$(Y_{n,\ S}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^- = (Y_{n,\ S\setminus S_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^-$），这些图均属于 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模范畴，对所有 $n \geq 0$。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (Y^*_{n+1,S}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^- & \longrightarrow & Sel_S^T(H_{n+1})_p^- & \longrightarrow & Sel_{S_\infty}^T(H_{n+1})_p^- & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (Y^*_{n,S}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^- & \longrightarrow & Sel_S^T(H_n)_p^- & \longrightarrow & Sel_{S_\infty}^T(H_n)_p^- & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

注意，上述所有模都是有限生成的 $\mathbb{Z}_p$–模，因此在 p–进拓扑下是紧的，并且涉及的所有态射都是连续的。因此，关于限制映射取射影极限时，得到一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的短正合列。结合 (3.13) 和引理 3.4(2) 中的同构，该正合列与定理陈述中的正合列完全相同。□

推论 3.15. $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模 $Sel_S^T(H_\infty)_p^-$ 是有限生成的扭模。特别地，其 Fitting 理想 $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-} Sel_S^T(H_\infty)_p^-$是良定义的。

证明. 根据上述命题，我们需要证明 $A^{T,\ \vee,\ \infty\ -}$和 $(Y^*_{\infty,\ S\setminus S_p}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^-$ 都是有限生成的扭 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模。

由 [11] (见正合列 (11) 及引理 2.8 的证明)，存在非负整数 δ 和 δ_T，以及一个由 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模组成的正合列：

$$0 \to (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\delta(1) \to (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\delta_T}(1) \to A_\infty^{T,-} \to A_\infty^{\varnothing,-} \to 0.$$

取 Pontryagin 对偶后，我们得到一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的正合列

$$0 \to A_\infty^{\varnothing,\vee,-} \to A_\infty^{T,\vee,-} \to \mathbb{Z}_p^{\delta'}(1) \to \mathbb{Z}_p^{\delta}(1) \to 0.$$

然而，库默尔对偶给出了一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的同构

$$A_\infty^{\varnothing,\vee,-} \cong X_{S_p}^+(-1),$$

其中 $X_{S_p} = Gal(M_{S_p}^{ab}/H_\infty)$，而 $M_{S_p}^{ab}$是 H_∞的最大阿贝尔 pro-p扩张，在 S_p之外非分歧。（参见 [24], 命题 13.32。）因此，由于 $X_{S_p}^+$ 作为 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$– 模是有限生成且为扭的（参见 [24], §13.5 ），最后显示的正合列和同构表明， $A^{T,\vee,\infty}$ 也作为 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模有限生成且为扭。

现在，若令 G_v 表示 $v \in S \setminus (S_\infty \cup S_p)$ 在 H_∞/F中的分解群，则容易看出我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的同构

$$(Y_{\infty,S\setminus S_p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^- \simeq \bigoplus_{v\in S\setminus(S_\infty\cup S_p)} \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}/\mathcal{G}_v]]^-.$$

由于对于所有如上所述的 v ，群 G/G_v 都是有限的，模 $(Y_{\infty,S\setminus S_p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^-$ 在 $\mathbb{Z}_p$上有限生成。因此，它的 $\mathbb{Z}_p$–对偶也在 $\mathbb{Z}_p$上有限生成，故它在 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$上有限生成且为扭。□

命题 3.16. 若$H_{\infty,T}^\times$ 没有 p–扭，则有以下 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–理想的等式

$$\varprojlim_n \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G_n]^-} Sel_S^T(H_n)_p^- = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-} Sel_S^T(H_\infty)_p^-.$$

证明. 首先，我们从 [11] 知道，存在一个 CM 数域 H'，使得

$$F \subseteq H' \subseteq H_\infty, \quad H'_\infty = H_\infty, \quad H' \cap F_\infty = F.$$

若令 $G' := G(H'/F)$，则有 $\mathrm{G} \simeq G' \times \Gamma$，其中 $\Gamma = G(F_\infty/F)$。因此，我们有以下拓扑 $\mathbb{Z}_p$–代数的同构

$$\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^- \simeq \mathbb{Z}_p[G']^-[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[G']]^-[[T]].$$

现在，引理 3.11 允许我们在要证明的等式中用 H' 替换 H 。令 $X_n := Sel_S^T(H'_n)_p^-$，并令 $X := \varprojlim_n X_n = Sel_S^T(H_\infty)_p^-$，再回想过渡映射 $X_{n+1} \to X_n$ 是满射（见引理 3.8），且 X 是 $R = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$ 上的有限生成扭模（见推论 3.15），那么我们可以在 [9] 中应用定理 2.1，从而得到

$$\mathrm{Fitt}_R(X) = \varprojlim_n \mathrm{Fitt}_{R_n}(X_n),$$

其中 $R_n := \mathbb{Z}_p[G_n]^-$，对所有 n 均成立。证毕。 □

本文的主要结果之一（等变岩泽主猜想）以某些等变的 p–adic L–函数来描述 Fitting 理想 $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-} Sel_S^T(H_\infty)_p^-$，这些函数将在下一节末尾定义并研究。

4. 代数结果

本节将证明本文其余部分所需的一些代数结果。我们还将定义相关的等变 p–adic L–函数，并证明它们在相应的岩泽代数中不是零因子。

引理 4.1. 设 $(A_n)_n$ 是一个 R–模的射影系统，其中 R 是主理想整环。假设这些模A_n 是 R–自由的，且秩有限并有界。那么， R–模

$$A_\infty := \varprojlim_n A_n$$

是有限秩自由模。

证明。对于每个 n，我们都有典范投影映射 $\pi_n : A_\infty \twoheadrightarrow A_n$。对于所有 n，令 $B_n := Image(\pi_n)$。显然，$(B_n)_n$ 构成一个由自由 R–模组成的射影系统，其秩有限且有界（因为它们是 A_n's 的 R–子模），其过渡映射是满射，并且

$$A_\infty = \varprojlim_n B_n.$$

因此，我们可以从一开始就假设过渡映射 $A_{n+1} \twoheadrightarrow A_n$ 都是满射。于是，对于所有 n，都有 $rank_R(A_n) \leq rank_R(A_{n+1})$。由于递增序列 $(rank_R(A_n))_n$ 有界，它对某个 $n \gg 0$ 是稳定的。因此，过渡映射给出同构 $A_{n+1} \cong A_n$，其中 $n \gg 0$。因此，对于 $k \gg 0$，有 $A_\infty \cong A_k$。所以， A_∞ 是一个有限秩自由 R-模，证毕。□

接下来，我们固定一个素数 $p > 2$，并取分圆 $\mathbb{Z}_p$–扩张 H_∞/H。我们沿用上一小节的记号。特别地，$G_n := G(H_n/F)$ 和 $\mathsf{G} := G(H_\infty/F)$。注意，若 $G = G' \times G_p$，其中 G_p 是 G 的 Sylow p–子群，则对所有 n，都有群同构 $G_n \cong G' \times G_{p,\,n}$，其中 $G_{p,\,n}$ 是 G_n 的 Sylow$p$–子群。我们假设 F 中的有限素数集 S 和 T 满足引理 2.5 中的假设。

我们有群同构

$$\mathcal{G} \cong G' \times G_{p,\infty}, \quad G_{p,\infty} \cong t(G_{p,\infty}) \times \Gamma,$$

其中 $G_{p,\,\infty} = \varprojlim_n G_{p,\,n}$, $t(G_{p,\,\infty})$ 是 $G_{p,\,\infty}$ 的挠子群（一个有限群，通过伽罗瓦限制同构于 G_p 的子群），且 $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$。因此，我们有如下连续的 $\mathbb{Z}_p$–代数同构

$$R_n := \mathbb{Z}_p[G_n] \simeq \mathbb{Z}_p[G'][G_{p,n}], \quad R_\infty := \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]] \simeq \mathbb{Z}_p[G'][[G_{p,\infty}]] \simeq \mathbb{Z}_p[G'][t(G_{p,\infty})][[\Gamma]].$$

对于有限阿贝尔群 A，我们将其 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 值特征群记为 $\widehat{A}$。令 $[\widehat{A}]$ 表示这类特征关于如下等价关系所得的等价类集合：若存在 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ 使得 $\chi' = \sigma \circ \chi$，则 $\chi \sim \chi'$。对于特征 $\chi \in \widehat{G'}$，我们令

$$R_n^\chi := \mathbb{Z}_p[\chi][G_{p,n}], \qquad R_\infty^\chi := \mathbb{Z}_p[\chi][[G_{p,\infty}]].$$

Th在 en 中，我们有由通常的特征求值映射给出的拓扑环同构 s

$$R_n \cong \bigoplus_{[\chi] \in [\widehat{G'}]} R_n^\chi, \qquad R_\infty \cong \bigoplus_{[\chi] \in [\widehat{G'}]} R_\infty^\chi, \qquad R_\infty^\chi \cong \varprojlim_n R_n^\chi. \tag{4.2}$$

现在，固定一个特征 $\chi \in \widehat{G'}$，并令 $\mathsf{O}_\chi =: \mathbb{Z}_p[\chi]$。这是 $\mathbb{Z}_p$ 的一个有限非分歧扩张。我们还固定 F 中的一个有限非阿基米德赋值集 $\mathbb{S}$，并且对每个 $v \in \mathbb{S}$，令 $G_{n,\,v}$ 和 G_v 分别表示 v 在 G_n 中的分解群，对所有 n，以及 G。特征求值映射 ι_n^χ（单射）和投影 π_n^χ（满射）给出以下 $\mathsf{O}\chi$–代数的态射

$$f_n^{\chi,\mathbb{S}} : R_n^\chi \xrightarrow{\iota_n^\chi} \bigoplus_{\substack{\psi_n|_{G'}=\chi \\ \psi_n \in \widehat{G_n}}} \mathcal{O}_\chi[\psi_n] \xrightarrow{\pi_n^{\chi,\mathbb{S}}} \bigoplus_{\substack{\psi_n|_{G'}=\chi \\ \psi_n(G_{n,v}) \neq 1 \\ \forall v \in \mathbb{S}}} \mathcal{O}_\chi[\psi_n] := R_n^{\chi,\mathbb{S}}.$$

引理 4.3. 沿用上述记号，令 $R^{\chi}{}_{,\infty}{}^{\mathbb{S}} := \varprojlim_n R^{\chi}{}_{,n}{}^{\mathbb{S}}$，其中射影极限是关于典范过渡映射取得的。则下述

$$f_\infty^{\chi,\mathbb{S}} := \varprojlim_n f_n^{\chi,\mathbb{S}} : R_\infty^\chi \longrightarrow R_\infty^{\chi,\mathbb{S}}$$

是一个 $\mathsf{O}\chi$–代数的单射态射。

证明。由于 ι_n^χ 是单射，我们可以将 R_n^χ 视为 $\bigoplus_{\substack{\psi|_{G'}=\chi \\ \psi \in \widehat{G_n}}} \mathsf{O}_\chi[\psi_n]$的子环。于是

$$ker(f_n^{\chi,\mathbb{S}}) \subseteq ker(\pi_n^{\chi,\mathbb{S}}) = \bigoplus_{\substack{\psi_n|_{G'}=\chi \\ \psi_n(G_{n,v})=1 \\ \text{for some } v \in \mathbb{S}}} \mathcal{O}_\chi[\psi_n].$$

现在注意，右侧的特征 ψ_n 通过 $G_n/G_{n,v_0}$ 分解，因此借助满射群态射 $\mathsf{G}/\mathsf{G}_{v_0} \to G_n/G_{n,v_0}$，它们是 $\mathsf{G}/\mathsf{G}_{v_0}$ 的特征，其中 $v_0 \in \mathbb{S}$。因此，对于所有 n，我们有以下不等式

$$rank_{\mathcal{O}_\chi}(ker(f_n^{\chi,\mathbb{S}})) \leq rank_{\mathcal{O}_\chi}\Big(\bigoplus_{\substack{\psi_n|_{G'}=\chi \\ \psi_n(G_{n,v})=1 \\ \text{for some } v \in \mathbb{S}}} \mathcal{O}_\chi[\psi_n]\Big) \leq rank_{\mathcal{O}_\chi}\Big(\bigoplus_{v \in \mathbb{S}} \mathcal{O}_\chi[\mathcal{G}/\mathcal{G}_v]\Big) = K < \infty, \tag{4.4}$$

其中，最后一个不等式是因为对于任意非阿基米德素数 v，G/G$_v$ 是一个有限群。注意，整数 K 不依赖于 n。现在注意，对于每个 n，我们有如下有限生成 Oχ–模的交换图，其各行均为正合的。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & ker(f_{n+1}^{\chi,\mathbb{S}}) & \longrightarrow & R_{n+1}^{\chi} & \xrightarrow{f_{n+1}^{\chi,\mathbb{S}}} & R_{n+1}^{\chi,\mathbb{S}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & ker(f_{n}^{\chi,\mathbb{S}}) & \longrightarrow & R_{n}^{\chi} & \xrightarrow{f_{n}^{\chi,\mathbb{S}}} & R_{n}^{\chi,\mathbb{S}} \end{array}$$

中间的竖直映射是伽罗瓦限制，其余所有竖直映射均由它们诱导。由于所涉及的所有映射在 p–进拓扑下都是连续的，因此这些是拓扑紧致 Oχ–模范畴中的交换图。因而，取射影极限后，我们得到一个紧致 Oχ–模的正合列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n} ker(f_{n}^{\chi,\mathbb{S}}) \longrightarrow R_{\infty}^{\chi} \xrightarrow{f_{\infty}^{\chi,\mathbb{S}}} R_{\infty}^{\chi,\mathbb{S}}.$$

现在注意到，Oχ 是一个主理想整环，而 Oχ–模的射影系统 $(ker(f^{\chi,\ }_{n\ }{}^{\mathbb{S}}))_n$ 满足引理 4.1 的条件。因此，我们可以得出结论：$ker(f^{\chi,\ }_{\infty}{}^{\mathbb{S}}) = \varprojlim_n ker(f^{\chi,\ }_{n\ }{}^{\mathbb{S}})$ 是一个有限秩自由 Oχ–模。然而，由于映射 $f^{\chi,\ }_{n\ }{}^{\mathbb{S}}$ 是环同态，$f^{\chi,\ }_{\infty}{}^{\mathbb{S}}$ 也因此是环同态，所以 $ker(f^{\chi,\ }_{\infty}{}^{\mathbb{S}})$ 实际上是环中的一个理想

$$R_{\infty}^{\chi} = \mathcal{O}_{\chi}[[G_{p,\infty}]] \cong \mathcal{O}_{\chi}[t(G_{p,\infty})][[T]],$$

其中，通常所说的（非典范）同构将 Γ 的一个固定拓扑生成元映至 $(1+T)$。不难看出，环 O$_\chi[G_p][[T]]$ 中唯一具有有限 Oχ–秩的理想是零理想。因此$ker(f^{\chi,\ }_{\infty}{}^{\mathbb{S}}) = 0$，至此证明完成。□

现在，我们取两个有限不相交集 S 和 T，它们是 F 中的素数集，并且对所有 n，都满足引理 2.5 关于 H_n/F 的假设。特别要注意，$S_p(F) \subseteq S$，其中 $S_p(F)$ 是 F 中所有 p–进素数的集合。引理 2.5 和引理 2.6(1) 推出，对所有 n，$\Theta_S^T(H_n/F) \in \mathbb{Z}_p[G_n]^-$。此外，等式 (2.2) 表明，我们有一个定义良好的元素

$$\Theta_S^T(H_\infty/F) := \left(\Theta_S^T(H_n/F)\right)_n \in \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-.$$

定义 4.5。上文定义的元素 $\Theta_S^T(H_\infty/F) \in \mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]^-$ 称为与数据 $(H/F, S, T, p)$ 相关联的 S–不完全、T–光滑、G–等变 p–进 L–函数。

命题 4.6。在上述假设下，p–进 L–函数 $\Theta_S^T(H_\infty/F)$ 不是 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]^-$ 中的零因子。

证明。令 $\mathbb{S} := S \smallsetminus S_\infty$。注意，$\mathbb{S}$ 是 F 中非空的有限素点集合，因为它包含 $S_p(F)$。引理 2.6(2) 表明，对于所有奇特征 $\chi \in \widehat{G'}$，元素 $f^{\chi,\ }_{n\ }{}^{\mathbb{S}}(\Theta_S^T(H_n/F)^\chi)$ 对所有 n 都不是 $R^{\chi,\ }_{n\ }{}^{\mathbb{S}}$ 中的零因子。这说明

$$f_{\infty}^{\chi,\mathbb{S}}(\Theta_S^T(H_\infty/F)^\chi) = (f_n^{\chi,\mathbb{S}}(\Theta_S^T(H_n/F)^\chi))_n$$

不是 $R^{\chi,\ }_{\infty}{}^{\mathbb{S}}$ 中的零因子。然而，由于 $f^{\chi,\ }_{\infty}{}^{\mathbb{S}}$ 是单射环同态（见引理 4.3），这意味着对于 G' 的所有奇特征 χ，$\Theta_S^T(H_\infty/F)^\chi$ 都不是 R_∞^χ 中的零因子。根据定义，我们有

$$\Theta_S^T(H_\infty/F) = (\Theta_S^T(H_\infty/F)^\chi)_{[\chi]\,\mathrm{odd}} \quad \text{in} \quad \bigoplus_{[\chi]\,\mathrm{odd}} R_\infty^\chi = \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-,$$

这就得到了所需结果。□

接下来，我们证明一个关于拓扑紧环的射影极限中理想的引理。这类系统的典型例子是上文定义的 $(R_n)_n$ 和 $(R_n^\chi)_n$，它们赋有各自的 p–进拓扑以及由伽罗瓦限制给出的通常过渡映射。

引理 4.7. 假设 $(S_n)_n$ 是一个拓扑紧环的射影系统，其过渡映射$\pi_n^{n+1} : S_{n+1} \to S_n$ 连续。令 $S_\infty := \varprojlim_n S_n$。假设 I_n 是 S_n 中的一个理想，由生成元 $(x_n^1, \ldots, x_n^k)$ 生成，使得

$$\pi_n^{n+1}(x_{n+1}^i) = x_n^i, \qquad \textit{for all } i = 1, \ldots, k \textit{ and all } n \geq 0.$$

那么， S_∞–理想 $I_\infty := \varprojlim_n I_n$ 由 $(x_\infty^1 := (x_n^1)_n, \dots, x_\infty^k := (x_n^k)_n)$ 生成。

证明。考虑由紧 S_n–模构成的正合列射影系统

$$0 \longrightarrow \ker(\rho_n) \longrightarrow S_n^k \xrightarrow{\rho_n} I_n \longrightarrow 0,$$

其中 $\rho_n((\alpha_i)_i) := \sum_i \alpha_i \cdot x_n^i$，且过渡映射由 π_n^{n+1} 给出。由于上述所有模都是紧的，射影极限

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n \ker(\rho_n) \longrightarrow S_\infty^k \xrightarrow{\rho_\infty} I_\infty \longrightarrow 0,$$

仍然正合。显然， $\rho_\infty((\alpha_i)_i) := \sum_i \alpha_i \cdot x_\infty^i$，由此得证。 □

最后，我们给出几个关于 Fitting 理想的技术性结果，这些结果将在后续章节中用到。

引理 4.8。设 S 是 F 中的一个非阿基米德素数有限集。以下结论成立。

(1) 存在一个 $\mathbb{Z}[G]$–模的典范同构

$$Y_S(H)^\sharp \simeq Y_S(H)^*,$$

其中， $Y_S(H)^\sharp$ 是赋予了由 $\mathbb{Z}$–线性对合 $\sharp : \mathbb{Z}[G] \simeq \mathbb{Z}[G]$ 所诱导的 $\mathbb{Z}[G]$–作用的 $Y_S(H)$，该对合将 $g \mapsto g^{-1}$映至 $g \in G$，对所有 $g \in G$均成立。

(2) 我们有以下 $\mathbb{Z}[G]$–理想等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]} Y_S(H)^* = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]} Y_S(H) = \prod_{v \in S} I_{G_v} = \prod_{v \in S} (1 - \sigma_v, 1 - \tau \mid \tau \in I_v),$$

其中， G_v 和 I_v 分别是 v 在 G中的分解群和惯性群， I_{G_v} 是$\mathbb{Z}[G]$ 中由$\{\sigma - 1 \mid \sigma \in G_v\}$生成的理想，而 σ_v 是 v 在 G_v处的任意一个弗罗贝尼乌斯元。

证明。由于我们有 $\mathbb{Z}[G]$–模的直和分解 $Y_S(H) = \oplus_{v \in S} Y_v(H)$，只需对单元素集合 $S = \{v\}$证明上述结论。在此情形下，映射

$$Y_v(H)^\sharp \xrightarrow{\sim} Y_v(H)^*, \quad w \to w^*, \quad \text{for all } w \text{ in } H \text{ with } w|v, \quad \text{where } w^*(w') = \begin{cases} 1, & \text{if } w' = w, \\ 0, & \text{if } w' \neq w, \end{cases}$$

是一个 $\mathbb{Z}[G]$–模同构，读者不难验证这一点。这就证明了第 (1) 部分 .

（2）由（1）、显然的 $\mathbb{Z}[G]$–模同构

$$Y_v(H) \simeq \mathbb{Z}[G/G_v] \simeq \mathbb{Z}[G]/I_{G_v},$$

以及等式 $\sharp(I_{G_v}) = I_{G_v}$和 $I_{G_v} = (\sigma_v - 1, 1 - \tau \mid \tau \in I_v)$ 立即得出，验证起来也很容易。 □

下一个结果本质上归功于 Cornacchia–Greither [5]。

命题 4.9. 设 R 是交换半局部环（即局部环的有限直和），且M 是有限表示的 R–模。以下条件等价。

（1）存在一个 $n \geq 1$，以及一个 R–模的短正合列

$$0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{\phi} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

（2）Fitting 理想 $\mathrm{Fitt}_R(M)$ 是主理想，由 R 中的一个非零因子生成 .

证明。这实质上是将 [5]，命题 4.2 中的等价关系 (2) ⇔ (3) 推广到一般半局部情形；该命题只讨论局部环的一种特殊类型。我们将简要概述证明。

若 (1) 成立，则 (2) 显然成立，因为 $\mathrm{Fitt}_R(M)$ 由 $\det(\phi)$ 生成，而 $\det(\phi)$ 是 R 中的非零因子，因为 ϕ 是单射。

为了证明 (2) ⇒ (1)，注意到由于 $R = \oplus_i R_i$ 是 R_i 局部的，因此 $M = \oplus_i M_i$，其中$M_i := M \otimes_R R_i$ 且 $\mathrm{Fitt}_{R_i}(M_i) = \pi_{R \to R_i}(\mathrm{Fitt}_R(M))$ 是一个主理想，由 R_i 中的一个非零因子生成，对所有 i 均成立。命题 4.2 中蕴含关系 (3) ⇒ (2) 的证明见 [5], ；该证明仅用到同上中的环是局部环这一事实，而未用到该环的特殊形式，因此同样适用于此处，并给出以下短正合列：

$$0 \longrightarrow R_i^{n_i} \xrightarrow{\phi_i} R^{n_i} \xrightarrow{\pi_i} M_i \longrightarrow 0,$$

对所有 i 均成立。现在，我们取 $n := \max\{n_i | i\}$，得到一个 R 模的正合列：

$$0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{\phi} R^n \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

其中 $\phi|_{R_i^n} = \phi_i \oplus \mathrm{id}^{n-n_i}$ 和 $\pi|_{R_i^n} = \pi_i \oplus 0_{n-n_i}$，对所有 i均成立。 □

注记 4.10. 与我们的研究背景相关的半局部环 R 例如如下。

$$\mathbb{Z}_p[G_n], \quad \mathbb{Z}_p[G_n]^-, \quad \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]], \quad \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-$$

事实上，在直和分解 (4.2) 中，环 R_n^χ 和 R_∞^χ 是局部环，其极大理想分别为

$$\mathfrak{m}_n^\chi := pR_n^\chi + I_{G_{n,p}}, \qquad \mathfrak{m}_\infty^\chi := pR_\infty^\chi + I_{G_{\infty,p}},$$

其中 $I_{G_{n,\,p}}$ 和 $I_{G_{\infty,\,p}}$ 分别是 R_n^χ 和 R_∞^χ中的增广理想。

5. Quadratic Presentations of Selmer Modules

本节讨论如上所述的有限伽罗瓦扩张 H/F 中塞尔默模及相关的（Ritter–Weiss）模的二次表示。第一小节简要概述 [19] 和 [6] 中得到的结果。第二小节旨在研究给定基域 F 的扩张塔中这些二次表示之间的过渡映射，以期最终在岩泽塔 H_∞/F 中取射影极限。

5.1. 有限扩张中塞尔默模的二次表示。本节将回顾 [19] 和 [6] 的附录 A 中的一些记号、构造和结果。我们以 §3 中引入的记号为基础。特别地， H/F 是一个全实数域的有限阿贝尔 CM 扩张，其伽罗瓦群为 G； S 和 T 是 F 中两个有限的不相交素点集，满足 $S_{ram}(H/F) \subseteq S \cup T$ 且 $S_\infty(F) \subseteq S$。

下文中，若 w 是 H 中的一个素数，则 H_w 表示 H 在其 w–进拓扑下的完备化。若 w 是有限的，则 O_w 表示 H_w 中的整数环，而 U_w 表示 $\mathsf{O}_w^\times$ 中主单位构成的子群。此外， J_H 和 C_H 分别表示 H 的幂零元群和幂零元类群这两个拓扑群。我们用 G_w 表示 w 在 H/F 中的分解群。我们分别记 ΔG 和 ΔG_w 为 $\mathbb{Z}[G]$ 和 $\mathbb{Z}[G_w]$ 的增广理想。

定义 5.1. 若 S' 是 F 中由赋值构成的有限集，则称其为一个 $(H/F, S, T)$–大集合，条件是：

- $S \subseteq S'$ 和 $S' \cap T = \phi$
- $Cl_{S'}^T(H) = 1$
- $\bigcup_{w \in S'(H)} G_w = G$。

本节余下部分中，我们固定一个 $(H/F, S, T)$–大集合 S'。

固定 F 的一个赋值 v，以及 H 中位于 v 之上的一个赋值 w。按照 Ritter 和 Weiss [19], , 我们将 G_w–模 V_w 定义为由 $H_w^\times$ 扩张 ΔG_w 得到的

$$0 \to H_w^\times \xrightarrow{s} V_w \to \Delta G_w \to 0, \tag{5.2}$$

其扩张类 α_w 通过典范同构（见 [19]）对应于

$$Ext^1_{G_w}(\Delta G_w, H_w^\times) = H^1(G_w, Hom(\Delta G_w, H_w^\times)) \overset{\delta'_w}{\simeq} H^2(G_w, H_w^\times), \qquad \alpha_w \to u_{H_w/F_v},$$

局部基本类 $u_{H_w/F_v} \in H^2(G_w, H_w^\times)$。此外，单射 $\mathsf{O}_w^\times \subseteq H_w^\times \overset{s}{\hookrightarrow} V_w$ 的复合映射导出如下 G_w–模的正合列

$$0 \to O_w^\times \to V_w \to W_w \to 0, \tag{5.3}$$

其中 $W_w \simeq V_w/s(\mathsf{O}_w^\times)$。此外，由于 $H_w^\times/O_w^\times \simeq \mathbb{Z}$ （ G_w 在 $\mathbb{Z}$ 上平凡作用），我们有如下 G_w–模的正合列。

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} W_w \xrightarrow{j} \Delta G_w \to 0. \tag{5.4}$$

类似的论证导出正合列 (5.2) 的整体类比

$$0 \to C_H \to D \to \Delta G \to 0, \tag{5.5}$$

其扩张类 α 通过典范同构（见 [19]）对应于

$$Ext^1_G(\Delta G, C_H) = H^1(G, Hom(\Delta G, C_H)) \overset{\delta'}{\simeq} H^2(G, C_H), \qquad \alpha \to u_{H/F}$$

全局基本类 $u_{H/F} \in H^2(G, C_H)$。

定义 5.6。假设 R 是 F 中有限位的集合，并且对于每个 $v \in R$，我们固定 H 中位于 v 之上的一个赋值 w，以及一个 G_w–模 M_w。那么，我们定义如下 G–模

$$\widetilde{\prod_{v\in R}} M_w := \prod_{v\in R} Ind_{G_w}^{G} M_w,$$

其中 $Ind_{G_w}^{G} M_w := M_w \otimes_{\mathbb{Z}[G_w]} \mathbb{Z}[G]$ 是通常的诱导模。

现在，我们可以定义如下 G–模

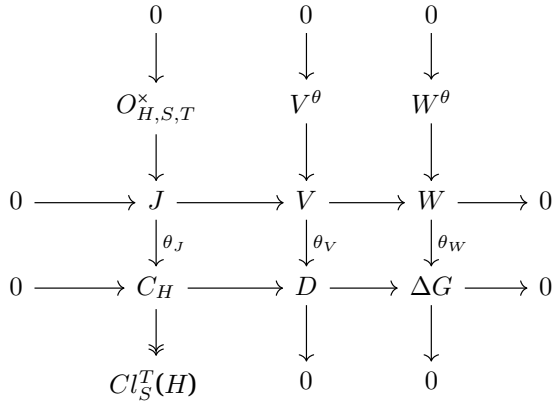
$$J := \tilde{\prod_{v\notin S\cup T}} O_w^{\times} \times \tilde{\prod_{v\in S}} H_w^{\times} \times \tilde{\prod_{v\in T}} U_w, \qquad J' := \tilde{\prod_{v\notin S'\cup T}} O_w^{\times} \times \tilde{\prod_{v\in S'}} H_w^{\times} \times \tilde{\prod_{v\in T}} U_w$$

$$V := \tilde{\prod_{v\notin S'\cup T}} O_w^{\times} \times \tilde{\prod_{v\in S'}} V_w \times \tilde{\prod_{v\in T}} U_w, \qquad W := \tilde{\prod_{v\in S'\setminus S}} W_w \times \tilde{\prod_{v\in S}} \Delta G_w, \qquad W' := \tilde{\prod_{v\in S'}} \Delta G_w.$$

结合 (5.2)–(5.4)，我们得到如下 G–模的短正合列

$$0 \to J \to V \to W \to 0, \qquad 0 \to J' \to V \to W' \to 0. \tag{5.7}$$

现在，[19] 中的定理 1 给出了如下 G–模的交换图



其中 θ_J 和 θ_W 是显然的映射，而 θ_V 的存在性和唯一性直接来自局部和全局基本类之间的相容性。蛇引理给出一个 G–模的正合列

$$0 \to O_{H,S,T}^{\times} \to V^{\theta} \to W^{\theta} \to Cl_S^T(H) \to 0. \tag{5.8}$$

采用相同的论证思路，以 J' 和 W' 代替 J 和 W，可得以下 G–模的正合列。

$$0 \to O_{H,S',T}^{\times} \to V^{\theta} \to W'^{\theta} \to 0. \tag{5.9}$$

此外，映射 θ_W 和 $\theta_{W'}$ 的定义结合 (5.4) 给出一个G–模的短正合列

$$0 \to Y_{S'\setminus S} \to W^{\theta} \to W'^{\theta} \to 0. \tag{5.10}$$

现在，我们定义另外两个 G–模

$$B := \tilde{\prod_{v\in S'}} \mathbb{Z}[G_w] \simeq \prod_{v\in S'} \mathbb{Z}[G], \qquad Z := \tilde{\prod_{v\in S}} \mathbb{Z}.$$

然后， [6] 的附录 A1 给出了一个由 G- 模构成的交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W^\theta & \longrightarrow & B^\theta & \longrightarrow & Z^\theta & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\gamma} & B & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \theta_W} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_B} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Z} & & \\
0 & \longrightarrow & \Delta G & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{5.11}
$$

其中， W^θ、 B^θ和 Z^θ分别是 θ_W、 θ_B和 θ_Z的核。（有关上述图表中涉及的映射的精确定义，请参见同上出处。）

De定义 5.12。将与数据（H/F， S， T）相关联的 Ritter-Weiss 模定义为

$$\nabla_S^T(H) := coker(V^\theta \to W^\theta \to B^\theta)$$

若将（5.8）和（5.11）结合起来，我们得到以下 G-模正合序列。

$$0 \to O_{H,S,T}^\times \to V^\theta \to B^\theta \to \nabla_S^T(H) \to 0, \qquad 0 \to Cl_S^T(H) \to \nabla_S^T(H) \to Z^\theta \to 0. \tag{5.13}$$

引理 5.14（附录 A， [6]）。以下结论成立。

(1) $\nabla_S^T(H)$ 不依赖于辅助素数集 S'。(2) 若 $p > 2$ 是一个素数，且 $S_p(F) \cap S_{ram}(H/F) \subseteq S$，则 $(B^\theta)_p$ 和 $(V^\theta)_p$ 是自由 $\mathbb{Z}_p[G]$- 模，局部秩均为 $(|S'| - 1)$

证明。见同上。 □

现在，可以按 [13] 的意义定义转置 Ritter-Weiss 模如下 s.

定义 5.15。数据 $(H/F, S, T)$ 对应的转置 Ritter–Weiss 模定义为

$$\nabla_S^T(H)^{tr} := coker((B^\theta)^* \to (V^\theta)^*) = coker((W^\theta)^* \to (V^\theta)^*),$$

其中，相关的 $\mathbb{Z}$–对偶按惯例赋予逆变 G–作用，而上面的等式是 $(B^\theta)^* \to (W^\theta)^*$ 显然满射的结果。

现在，对 (5.8)–(5.10) 取 $\mathbb{Z}$–对偶，我们得到一个 G–模的交换图。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (W'^\theta)^* & \longrightarrow & (V^\theta)^* & \longrightarrow & (O_{H,S',T}^\times)^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (W^\theta)^* & \longrightarrow & (V^\theta)^* & \longrightarrow & \nabla_S^T(H)^{tr} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & (Y_{S'\smallsetminus S})^* & & 0 & & & &
\end{array}
\tag{5.16}
$$

Th将蛇引理应用于上图，可得到一个 G–模的正合列 s

$$0 \to (Y_{S'\smallsetminus S})^* \to (O_{H,S',T}^\times)^* \to \nabla_S^T(H)^{tr} \to 0.$$

结合 (3.6)，这个正合列给出了一个 G–模的同构 s

$$Sel_S^T(H) \simeq \nabla_S^T(H)^{tr}. \tag{5.17}$$

（更多细节请参见 [6] 附录 A。）因此，我们得到如下结果。

引理 5.18. 对于上述任意 $(H/F, S, T, S')$，以及任意素数 $p > 2$，我们有如下结论。

(1) 相应的 Ritter–Weiss 模和塞尔默模均有 $\mathbb{Z}[G]$–模表示

$$V^\theta \to B^\theta \to \nabla_S^T(H) \to 0, \qquad (B^\theta)^* \to (V^\theta)^* \to Sel_S^T(H) \to 0.$$

(2) 如果 $S_p(F) \cap S_{ram}(H/F) \subseteq S$，那么由此得到的 $\mathbb{Z}_p[G]$–模呈示

$$(V^\theta)_p \to (B^\theta)_p \to \nabla_S^T(H)_p \to 0, \qquad (B^\theta)_p^* \to (V^\theta)_p^* \to Sel_S^T(H)_p \to 0$$

是 $\mathbb{Z}_p[G]$–自由的二次呈示，秩为 $(|S'| - 1)$。

证明。参见 [6] 中的附录 A。 □

引理 5.18(2) 中的二次呈示将在证明本文主要结果时发挥非常重要的作用。我们将在下一节进一步研究这些呈示。

5.2. 二次呈示之间的过渡映射。本节中，我们考虑全实数域 F 的两个有限阿贝尔 CM 扩张 K_1 和 K_2，使得 $K_1 \subseteq K_2$。我们取 F 中的素点集合 S、T，满足 $S_{ram}(K_2/F) \subseteq S \cup T$ 和 $S_\infty(F) \subseteq S$，并取 F 中的辅助素点集合 S'，使其对 $(K_2/F, S, T)$ 和 $(K_1/F, S, T)$ 均满足所需的“充分大”条件（参见定义 5.1）。

我们的主要目标是构造映射，在引理 5.18 给出的塞尔默群 $Sel_S^T(K_2)$ 和 $Sel_S^T(K_1)$ 及其 p–主部分的表示之间建立映射，并使其与限制映射相容

$$res : Sel_S^T(K_2) \to Sel_S^T(K_1).$$

本节相当技术性，因此建议读者先跳到最后的结果（定理 5.36 和 5.37，尤其是推论 5.38），之后再阅读技术细节。

在下文中，我们令 $G_1 := Gal(K_1/F)$、$G_2 := Gal(K_2/F)$、$G_{2,1} := G(K_2/K_1)$，并令 $\pi : G_2 \twoheadrightarrow G_1$ 为伽罗瓦限制态射。所有 $\mathbb{Z}[G_1]$–模都视为经由 π 的 $\mathbb{Z}[G_2]$–模。在全文中，若 M 是上一节引入的模 J、J'、V、W、W' 等之一，我们用 M_1 和 M_2（有时也用 M^1 和 M^2）表示相应的模在层级 K_1 和 K_2 上的对象。

我们从一个局部构造开始。为此，固定 u 在 F中的一个赋值、v 在 K_1 中位于 u 之上的一个赋值，以及 w 在 K_2 中位于 v之上的一个赋值。令 F_u, $K_{1,v}$ 和 $K_{2,w}$ 分别表示相对于这些赋值的完备化。那么，u 在 K_1/F和 K_2/F中的分解群分别为 $G_v := Gal(K_{1,v}/F_u)$和 $G_w := Gal(K_{2,w}/F_u)$。此外，令 $G_{w/v} := G_w \cap G_{2,1}$。所有 $\mathbb{Z}[G_v]$–模均通过伽罗瓦限制$\pi_v : G_w \twoheadrightarrow G_v$视为 $\mathbb{Z}[G_w]$–模。定义 $\mathbb{Z}[G_w]$–模态射

$$\psi_v : \mathbb{Z}[G_v] \to \mathbb{Z}[G_w], \qquad \psi_v(g) = \sum_{\pi_v(\tilde{g})=g} \tilde{g}.$$

在增广理想的层次上，我们有 $\psi_v(\Delta G_v) \subseteq \Delta G_w$。下文给出了层级 $K_{1,v}$ 和 $K_{2,w}$处的短正合列 (5.2) 之间的映射。

命题 5.19. 存在唯一的 $\mathbb{Z}[G_w]$–模态射 f_v，使下图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{2,w}^\times & \longrightarrow & V_w^2 & \longrightarrow & \Delta G_w & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle i_v} & & \uparrow{\scriptstyle f_v} & & \uparrow{\scriptstyle \psi_v} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_{1,v}^\times & \longrightarrow & V_v^1 & \longrightarrow & \Delta G_v & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

交换，其中 i_v 是通常的包含映射，ψ_v 是上文定义的映射。

证明。我们有如下由 $\mathbb{Z}[G_w]$–模构成的交换图，且各行正合。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{2,w}^\times & \longrightarrow & V_w^2 & \longrightarrow & \Delta G_w & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (K_{2,w}^\times)^{G_{w/v}} & \longrightarrow & (V_w^2)^{G_{w/v}} & \longrightarrow & (\Delta G_w)^{G_{w/v}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_{1,v}^\times & \longrightarrow & V_v^1 & \longrightarrow & \Delta G_v & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这里，第二行与第一行之间的映射由包含映射诱导。第三行与第二行之间的映射由 [6] 中的图（163）给出。特别地（参见同上），映射

$$\Delta G_v \to (\Delta G_w)^{G_{w/v}} \hookrightarrow \Delta G_w$$

是我们的主 ψ_v。因此，所需的映射 f_v 是中间垂直映射的复合 □

注 5.20。对于素数 $v \in S'$，由于 $i_v(\mathcal{O}_v^\times) \subseteq \mathcal{O}_w^\times$，映射 $f_v : V_v^1 \to V_w^2$ 显然诱导出映射 $f'_v : W_v^1 \to W_w^2$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} V_w^2 & \longrightarrow & W_w^2 & \longrightarrow & \Delta G_w \\ {\scriptstyle f_v}\uparrow & & {\scriptstyle f'_v}\uparrow & & {\scriptstyle \psi_v}\uparrow \\ V_v^1 & \longrightarrow & W_v^1 & \longrightarrow & \Delta G_v \end{array}$$

其中各行由给定模之间的典范态射给出。

引理 5.21。设 M_v 是一个 $\mathbb{Z}[G_v]$-模，M_w 是一个 $\mathbb{Z}[G_w]$-模，且 $\xi : M_v \to M_w$ 是一个 $\mathbb{Z}[G_w]$-线性映射。那么，我们有一个定义良好的 $\mathbb{Z}[G_2]$-线性态射

$$\widetilde{\xi} : M_v \otimes_{\mathbb{Z}[G_v]} \mathbb{Z}[G_1] \to M_w \otimes_{\mathbb{Z}[G_w]} \mathbb{Z}[G_2], \qquad \widetilde{\xi}(m \otimes \sigma) := \xi(x) \otimes (\tilde{\sigma} \cdot \sum_\tau \tau),$$

其中 $\tilde{\sigma} \in G_2$ 是 $\sigma \in G_1$ 的提升，而 τ 遍历 $G_{2,1}$ 的一组完备的 $G_{w/v}$-陪集代表元。

证明。This is 包含映射 $\xi(M_v) \subseteq M^{G_{w,w}}{}^{v}$ 的结果。细节留给读者补充。 □

注 5.22。注意，通过引理中描述的过程，上文定义的局部映射 $\psi_v : \mathbb{Z}[G_v] \to \mathbb{Z}[G_w]$ 导出了 $\mathbb{Z}[G_2]$-线性整体映射

$$\widetilde{\psi_v} : Ind_{G_v}^{G_1} \mathbb{Z}[G_v] \cong \mathbb{Z}[G_1] \longrightarrow Ind_{G_w}^{G_2} \mathbb{Z}[G_w] \cong \mathbb{Z}[G_2], \qquad \widetilde{\psi_v}(g) = \sum_{\tilde{g} \twoheadrightarrow g} \tilde{g},$$

其中 $g \in G_1$ 和 $G_2 \quad \sim \quad \twoheadrightarrow G_1$ 是伽罗瓦限制。注意，ψ_v 不依赖于 v，且 $\psi_v(\Delta G_1) \subseteq \Delta G_2$.

接下来，我们 构造层级 K_1 和 K_2 之间短正合列 (5.9) 的（整体）映射。

命题 5.23. 我们有一个由 $\mathbb{Z}[G_2]$-模构成、各行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & O_{K_2,S',T}^\times & \longrightarrow & V_2^\theta & \longrightarrow & W_2'^\theta & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \iota} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{f}} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}} & & \\ 0 & \longrightarrow & O_{K_1,S',T}^\times & \longrightarrow & V_1^\theta & \longrightarrow & W_1'^\theta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\sim \quad \sim$其中左侧的垂直映射是包含映射，而 f 和 ψ 则由上文定义的映射 $\{f_v\}_v$ 和 $\{\psi_v\}_v$ 按引理 5.21 逐分量诱导得到。

*Pro*的。根据模 W_i' 和 V_i 的定义，我们有一个 $\mathbb{Z}[G_2]$-线性态射 m

$$\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi_v}\}_{v \in S'} : W_1' \to W_2', \qquad \widetilde{f} = \{\widetilde{f_v}\}_v : V_1 \to V_2.$$

现在，命题 5.19 得到以下由 $\mathbb{Z}[G_2]$-模构成的交换图 les

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J_2' & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & W_2' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \iota} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{f}} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}} & & \\ 0 & \longrightarrow & J_1' & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & W_1' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.24}$$

其中左侧的竖直箭头是通常的包含映射。现在注意，我们有以下 $\mathbb{Z}[G_2]$-模的交换图

$$\begin{array}{ccc} W_1' & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & W_2' \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{W_1'}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{W_2'}} \\ \Delta G_1 & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \Delta G_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J_1' & \xrightarrow{\iota} & J_2' \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{J_1'}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{J_2'}} \\ C_{K_1} & \longrightarrow & C_{K_2} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & V_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{V_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{V_2}} \\ D_1 & \longrightarrow & D_2 \end{array} \tag{5.25}$$

其中，前两个图根据定义显然是交换的，第三个图实质上是 [6] 的图（164）。这立即意味着 $\widetilde{\psi}(W_1{}^{\theta}) \subseteq W_2{}^{\theta}$ 和 $\widetilde{f}(V_1^{\theta}) \subseteq V_2^{\theta}$，并且还意味着 ι 诱导了包含映射 $J_1^{\theta} = \mathrm{O}^{\times}_{K_1,S',T} \to \mathrm{O}^{\times}_{K_2,S',T} = J_2^{\theta}$。因此，（5.24）和（5.25）给出了命题陈述中所需的交换图。□

接下来，我们将上述过渡映射与塞尔默模之间的限制映射联系起来。采用 [6], 中的记号，若 G 是有限阿贝尔群，M 是一个 $\mathbb{Z}[G]$–模，且 p 是素数，则令

$$F(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}) = M^*, \qquad F_p(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M \otimes \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = (M_p)^*,$$

并像往常一样赋予其协变的 G–作用。

命题 5.26. 我们有如下由 $\mathbb{Z}[G_2]$–模构成、带有正合行的交换图表 s

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(W_2^{\theta}) & \longrightarrow & F(V_2^{\theta}) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle F(\widetilde{f}')} & & \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{f})} & & \downarrow{\scriptstyle res} & & \\ 0 & \longrightarrow & F(W_1^{\theta}) & \longrightarrow & F(V_1^{\theta}) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_1) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

~ ~ ⁀e 如图表 (5.16) 所示，且 $f' := (f'_v)_{v\in S'\smallsetminus S} \oplus (\psi_v)_{v\in S}$，其中 f'_v 在注 5.20 中定义。

其中各行是

证明。将函子 F 应用于命题 5.23 中的图表。注意，由于 W_1^{θ} 和 W_2^{θ} 是 $\mathbb{Z}$–自由的，各行仍将保持正合，且右侧的垂直映射是限制映射。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(W_2^{'\theta}) & \longrightarrow & F(V_2^{\theta}) & \longrightarrow & F(O^{\times}_{K_2,S',T}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{\psi})} & & \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{f})} & & \downarrow{\scriptstyle F(\iota)} & & \\ 0 & \longrightarrow & F(W_1^{'\theta}) & \longrightarrow & F(V_1^{\theta}) & \longrightarrow & F(O^{\times}_{K_1,S',T}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.27}$$

因此，我们得到下面这个具有交换方块的图表，

$$\begin{array}{ccccc} F(V_2^{\theta}) & \longrightarrow & F(O^{\times}_{K_2,S',T}) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_2) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{f})} & & \downarrow{\scriptstyle F(\iota)} & & \downarrow{\scriptstyle res} \\ F(V_1^{\theta}) & \longrightarrow & F(O^{\times}_{K_1,S',T}) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_1) \end{array}$$

其中左侧方块由 (5.27) 可交换；右侧方块则根据塞尔默群的定义以及 $F(\iota)$ 是限制映射这一事实而可交换。因此，我们刚刚证明了命题陈述中的图表最右侧方块的交换性。

接下来，注意到注 5.20 给出了一个由 $\mathbb{Z}[G_2]$–模构成且具有交换方块的图表

$$\begin{array}{ccccc} V_2 & \longrightarrow & W_2 & \xrightarrow{\theta_{W_2}} & \Delta G_2 \\ \widetilde{f}\uparrow & & \widetilde{f}'\uparrow & & \widetilde{\psi}\uparrow \\ V_1 & \longrightarrow & W_1 & \xrightarrow{\theta_{W_1}} & \Delta G_1. \end{array} \tag{5.28}$$

另一方面，若 $* \in \{1,2\}$，我们也有如下图表，其中水平映射是典范的。

$$\begin{array}{ccc} V_* & \longrightarrow & W_* \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{V_*}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{W_*}} \\ D_* & \longrightarrow & \Delta G_* \end{array}$$

因此，取 θ–　　核，最后两个交换图给出了如下交换图　　.

$$\begin{array}{ccc} V_2^{\theta} & \longrightarrow & W_2^{\theta} \\ \widetilde{f}\uparrow & & \widetilde{f}'\uparrow \\ V_1^{\theta} & \longrightarrow & W_1^{\theta} \end{array}$$

将函子 F 应用于上述图表后，我们得到命题中图表左侧方块的交换性。由 (5.16) 可知各行的正合性是显然的。□

现在，让我们考察图表 5.11 中层级 K_1 和 K_2上的映射 $\gamma: W \to B$，然后构造这两个层级之间的映射。为此，我们先更具体地理解模 W。这里我们使用 [12]中的描述。我们聚焦于一个层级，设为 K_1。令 $\overline{G_v} = F$ 为对应于 $K_{1,v}/F_u$ 的剩余域扩张的伽罗瓦群，其中 F 是弗罗贝尼乌斯自同构。于是，我们有

$$W_v = \{(x, y) \in \Delta G_v \bigoplus \mathbb{Z}[\overline{G_v}] \,|\, \bar{x} = (F-1)y\}$$

其中， $\bar{x}$ 是 x 在投影$\mathbb{Z}[G_v] \to \mathbb{Z}[\overline{G_v}]$下的像。显然， W_v 是一个以 $\mathbb{Z}$为基的自由模

$$\{w_g := (g-1, \sum_{i=0}^{a(g)-1} F^i) \,|\, g \in G_v\}, \qquad \text{where } \bar{g} = F^{a(g)} \text{ and } 0 < a(g) \le l_v := |\overline{G_v}|.$$

采用（5.4）中的记号，我们有

$$i(1) = w_1, \qquad j(w_g) = g - 1, \quad \text{for all } g \in G_v.$$

G_v在这些基元素上的作用由下式给出

$$g \cdot w_h = w_{gh} - w_g + a_{g,h} w_1, \qquad \text{where } a(g) + a(h) = a(gh) + l_v a_{g,h},$$

对所有 g、 $h \in G_v$均成立。注意，对每个 $h \in G_v$.， $a_{1,\ h} = 1$

接下来，我们证明一个关于上述量 $a(g)$ 和 $a_{g,\ h}$ 的技术性结果。

~命题 5.29。设 $h \in G_w$ 是 $h \in G_v$ 的一个提升，且 $g \in G_v$。设 l 为扩张 $K_{2,\ w}/K_{1,\ v}$ 的剩余类次数， e 为其分歧指数。那么，以下结论成立。

(1) $a(\tilde{h}) = a(h) + k_{\tilde{h}} l_v$, *for some* $k_{\tilde{h}} \in \{0, 1, 2, \ldots\ l-1\}$.

(2) $\sum_{\tilde{g} \to g} a_{\tilde{g},\tilde{h}} = e(a_{g,h} + k_{\tilde{h}})$

~证明。(1) 若 F_w 和 F_v 分别是层级 K_2 和 K_1 处的弗罗贝尼乌斯态射，则有 $\overline{\tilde{h}} = F_w^{a(h)}$~和 $\overline{h} = F_v^{a(h)}$。然而，在伽罗瓦限制下， F_w 映射到 F_v。因此，我们有 $F^{a}(_{v}{}^{h} = F_v^{a(h))}$。于是，~ ~$a(h)$ $= a(h) + k_{\tilde{h}} l_v$.，其中 $k_{\tilde{h}} \in \mathbb{Z}$。但是，由于 $0 < a(h) \le l_w$ 且 $l = l_w/l_v$，我们得到所需的 $0 \le k_{\tilde{h}} < l$。

(2) 若 $\tilde{g} \in G_w$ 是 g的一个提升，根据 $a_{\tilde{g},\tilde{h}}$ 的定义，我们有

$$a(\tilde{g}) + a(\tilde{h}) = a(\tilde{g}\tilde{h}) + l_w a_{\tilde{g},\tilde{h}}.$$

应用 (1) 的结论，我们得到

$$a(g) + k_{\tilde{g}} l_v + a(h) + k_{\tilde{h}} l_v = a(gh) + k_{\tilde{g}\tilde{h}} l_v + l_w a_{\tilde{g},\tilde{h}}.$$

在上面的等式中，对 $\tilde{g}$ 遍历 g 的所有提升时求和。由于当 $\tilde{g}$ 遍历 g 的所有提升时， $k_{\tilde{g}}$ 均匀分布在 {0, 1, … $l-1$} 的各个元素中，因此求和后，项 $k_{\tilde{g}}$ 和 $k_{\tilde{g}\tilde{h}}$ 相互抵消。于是，我们有

$$m \cdot a(g) + m \cdot (a(h) + k_{\tilde{h}} l_v) = m \cdot a(gh) + l_w \sum_{\tilde{g} \to g} a_{\tilde{g},\tilde{h}}, \qquad m l_v (a_{g,h} + k_{\tilde{h}}) = l_w \sum_{\tilde{g} \to g} a_{\tilde{g},\tilde{h}},$$

其中 $m = [K_{2,w} : K_{1,v}]$。由于 $m = el$，所需结论得证。 □

Ne接下来，我们给出注 5.20 中定义的 $\mathbb{Z}[G_w]$–线性映射 f'_v 的显式描述 .

命题 5.30。映射 $f'_v : W_v^1 \to W_w^2$ 由下式给出

$$f'_v(w_g) = \sum_{\tilde{g} \to g} w_{\tilde{g}} - \sum_{\tilde{g} \to 1} w_{\tilde{g}} + e w_{\tilde{1}}$$

其中 e 是扩张$K_{2、\ w}/K_{1、\ v}$的分歧指数。

证明。由命题 5.19 可得如下交换图，其行分别是在层级 K_1 和 K_2处的正合序列 (5.4)。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_2} & W_w^2 & \xrightarrow{j_2} & \Delta G_w & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \times e} & & \uparrow{\scriptstyle f'_v} & & \uparrow{\scriptstyle \psi_v} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_1} & W_v^1 & \xrightarrow{j_1} & \Delta G_v & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.31}$$

注意，对于任意 $g \in G_v$，由右侧方块的交换性可得

$$j_2(f'_v(w_g)) = \psi_v(j_1(w_g)) = \psi_v(g-1) = \sum_{\tilde{g}\to g} \tilde{g} - \sum_{\tilde{g}\to 1} \tilde{g}, \qquad j_2(\sum_{\tilde{g}\to g} w_{\tilde{g}} - \sum_{\tilde{g}\to 1} w_{\tilde{g}}) = \sum_{\tilde{g}\to g} \tilde{g} - \sum_{\tilde{g}\to 1} \tilde{g}.$$

因此，由上述图表中上方行的正合性可得

$$f'_v(w_g) = \sum_{\tilde{g}\to g} w_{\tilde{g}} - \sum_{\tilde{g}\to 1} w_{\tilde{g}} + e_g w_{\tilde{1}}$$

˜其中某个 $e_g \in \mathbb{Z}$ 满足此式。这里，1 是群 G_w 的单位元。

˜我们需要证明，对于所有 $g \in G_v$，都有 $e_g = e$。由 f'_v 的 $\mathbb{Z}[G_w]$线性性，如果 g，$h \in G_v$并且如果 h 是 G_w 中 h 的任意一个提升 ˜，那么我们有 $h \cdot (f'_v(w_g)) = f'_v(h \cdot w_g)$。此外，注意到

$$\begin{aligned} \tilde{h} \cdot (f'_v(w_g)) &= \sum_{\tilde{g}\to g} (w_{\tilde{g}\tilde{h}} - w_{\tilde{h}} + a_{\tilde{g},\tilde{h}} w_{\tilde{1}}) - \sum_{\tilde{g}\to 1} (w_{\tilde{g}\tilde{h}} - w_{\tilde{h}} + a_{\tilde{g},\tilde{h}} w_{\tilde{1}}) + e_g w_{\tilde{1}} \\ &= \sum_{\tilde{g}\tilde{h}\to gh} w_{\tilde{g}\tilde{h}} - \sum_{\tilde{h}\to h} w_{\tilde{h}} + (\sum_{\tilde{g}\to g} a_{\tilde{g},\tilde{h}} - \sum_{\tilde{g}\to 1} a_{\tilde{g},\tilde{h}} + e_g) w_{\tilde{1}}. \end{aligned}$$

利用命题 5.29(2)，我们可以进一步化简：

$$\begin{aligned} \tilde{h} \cdot (f'_v(w_g)) &= \sum_{\tilde{g}\tilde{h}\to gh} w_{\tilde{g}\tilde{h}} - \sum_{\tilde{h}\to h} w_{\tilde{h}} + e w_{\tilde{1}}[(a_{g,h} + k_{\tilde{h}}) - (a_{1,h} + k_{\tilde{h}})] + e_g w_{\tilde{1}} \\ &= \sum_{\tilde{g}\tilde{h}\to gh} w_{\tilde{g}\tilde{h}} - \sum_{\tilde{h}\to h} w_{\tilde{h}} + (e a_{g,h} - e + e_g) w_{\tilde{1}}. \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} f'_v(h.w_g) &= f'_v(w_{gh} - w_h + a_{g,h} w_1) \\ &= (\sum_{\tilde{g}\tilde{h}\to gh} w_{\tilde{g}\tilde{h}} - \sum_{\tilde{g}\to 1} w_{\tilde{g}} + e_{gh} w_{\tilde{1}}) - (\sum_{\tilde{h}\to h} w_{\tilde{h}} - \sum_{\tilde{g}\to 1} w_{\tilde{g}} + e_h w_{\tilde{1}}) + e a_{g,h} w_{\tilde{1}} \\ &= \sum_{\tilde{g}\tilde{h}\to gh} w_{\tilde{g}\tilde{h}} - \sum_{\tilde{h}\to h} w_{\tilde{h}} + (e_{gh} - e_h + e a_{g,h}) w_{\tilde{1}} \end{aligned}$$

因此，对于所有的 $g, h \in G_v$，我们有 $e_g - e = e_{gh} - e_h$。现在，对 h 遍历 G_v中的所有元素时求和，便得到所需的 $e_g = e$。证明至此完成。□

现在我们回顾一下 [6] 和 [12] 中图 (5.11) 里映射 $\gamma : W \twoheadrightarrow B$ 的描述。它在 K_1 层面的逐分量定义如下。

- 对于 $v \in S$， γ_v 由包含映射 $\Delta G_v \subseteq \mathbb{Z}[G_w]$诱导
- 对于 $v \in S_f \setminus S$， γ_v 由映射 s 诱导，其中该映射定义为

$$s(w_g) = \sum_{h \in G_v} (r(g) + 1 - a_{g^{-1},h}) h, \qquad \text{where } r(g) = \begin{cases} 1 & if \quad g \in I_v \\ 0 & if \quad g \notin I_v \end{cases}, \qquad \text{for all } g \in G_v,$$

并且 I_v 是分歧群。

由交换图 (5.31) 的右侧方块可知，映射 f' 与映射 j 和 ψ相容。接下来，我们证明关于 s 映射在 $K_{1,v}$ 和 $K_{2,w}$层次上的类似结果。

命题 5.32. 我们有一个 $\mathbb{Z}[G_w]$-模的交换图

$$\begin{array}{ccc} W_w^2 & \xrightarrow{s_2} & \mathbb{Z}[G_w] \\ \uparrow{\scriptstyle f'_v} & & \uparrow{\scriptstyle e\psi_v} \\ W_v^1 & \xrightarrow{s_1} & \mathbb{Z}[G_v], \end{array}$$

其中 $e := e(w/v)$ 是分歧指数。

证明。注意，对于任意的 $g \in G_v$，我们有

$$\begin{aligned} e\psi_v(s_1(w_g)) &= e\psi_v\Big(\sum_{h\in G_v}(r(g)+1-a_{g^{-1},h})h\Big) \\ &= e\sum_{h\in G_v}(r(g)+1-a_{g^{-1},h})\cdot\sum_{\tilde{h}\to h}\tilde{h} \\ &= e\sum_{\tilde{h}\in G_w}(r(g)+1-a_{g^{-1},h})\tilde{h}. \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} s_2(f'_v(w_g)) &= s_2\Big(\sum_{\tilde{g}\to g}w_{\tilde{g}}-\sum_{\tilde{g}\to 1}w_{\tilde{g}}+ew_{\tilde{1}}\Big) \\ &= \sum_{\tilde{g}\to g}\sum_{\tilde{h}\in G_w}(r(\tilde{g})+1-a_{\tilde{g}^{-1},\tilde{h}})\tilde{h}-\sum_{\tilde{g}\to 1}\sum_{\tilde{h}\in G_w}(r(\tilde{g})+1-a_{\tilde{g}^{-1},\tilde{h}})\tilde{h}+e\sum_{\tilde{h}\in G_w}(r(\tilde{1})+1-a_{\tilde{1},\tilde{h}})\tilde{h}. \end{aligned}$$

~令 $m=[K_{2,w}:K_{1,v}]$。显然， $r(1)=1$ 且 $\sum_{\tilde{g}\to g} r(\tilde{g}) = e\cdot r(g)$。现在，将这些等式与命题 5.29(2)结合并进一步化简，可得

$$\begin{aligned} s_2(f'_v(w_g)) &= \sum_{\tilde{h}\in G_w}\tilde{h}[(e\cdot r(g)+m-e(a_{g^{-1},h}+k_{\tilde{h}}))-(e\cdot 1+m-e(1+k_{\tilde{h}}))+e] \\ &= e\sum_{\tilde{h}\in G_w}(r(g)+1-a_{g^{-1},h})\tilde{h}. \end{aligned}$$

因此，我们有 $e\psi_v\bigcirc\ s_1 = s_2\bigcirc f'_v$。证明完毕。 □

命题 5.32 中局部映射的相容性以及此前的讨论给出了整体映射的相容性，下面将对此作出精确表述。

命题 5.33。我们有一个由 $\mathbb{Z}[G_2]$-模构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} W_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & B_2 \\ \widetilde{f'}\uparrow & & \widetilde{\psi'}\uparrow \\ W_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & B_1 \end{array},$$

~其中 f' 是 ~ ~ ~由命题 5.26 定义，而 ψ' 由 $\psi=(\psi_v)_{v\in S'}$（定义于注记 5.2）诱导 2.)
d

接下来，我们聚焦于图 (5.11) 中的映射 $\theta_B : B := \prod_{v\in S'}\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$。在 [6], 中，此映射按分量定义如下。

- 对于 $v\in S$， θ_B 是 $\mathbb{Z}[G]$上的恒等映射。
- 对于 $v\in S\wedge S$，对所有 $x\in\mathbb{Z}[G]$， $\theta_B(x)=(\sigma_v-1)x$，其中 σ_v 是弗罗贝尼乌斯自同构。（注意，在此情形下 v 是非分歧的。）

注 5.34。注意，由于 θ_B 是满射，其核 B^θ 总是一个秩为 $|S'|-1$ 的自由 $\mathbb{Z}[G]$-模。此外，注意将函子 $F(*)$ 限制到 $\mathbb{Z}[G]$-模范畴后，它等价于$F_G(*) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(*,\mathbb{Z}[G])$，且该等价由 $\phi\mapsto(m\mapsto\sum_{g\in G}\phi(gm)g^{-1})$ 给出。因此，我们有一个$\mathbb{Z}[G]$-模同构

$$\beta_G : F(\mathbb{Z}[G]) \cong F_G(\mathbb{Z}[G]) \cong \mathbb{Z}[G], \qquad \beta_G(\phi)=\sum_{g\in G}\phi(g)g^{-1}.$$

这意味着右 边上的 $\mathbb{Z}[G]$-模 $F(B)$ 和 $F(B^\theta)$ 分别是秩为 $|S'|$ 和 $|S'|-1$ 的自由模 .

命题 5.35。我们有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\tilde{\psi}'} & B_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\theta_{B_1}} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_{B_2}} \\ \mathbb{Z}[G_1] & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathbb{Z}[G_2] \end{array}$$

证明。上述图表的交换性是对每个 $v \in S'$ 逐分量证明的。当 $v \in S$ 时显然成立。在 $v \in S' \smallsetminus S$ 的情况下（因此 v 和 w 是非分歧的），我们有

$$\theta_{B_2}(\tilde{\psi}'(g)) = \theta_{B_2}(\sum_{\tilde{g}\twoheadrightarrow g} \tilde{g}) = (\sigma_w - 1)\sum_{\tilde{g}\twoheadrightarrow g} \tilde{g} = \sum_{\tilde{h}\twoheadrightarrow \sigma_v g} \tilde{h} - \sum_{\tilde{g}\twoheadrightarrow g} \tilde{g}, \qquad \text{for all } g \in G_1.$$

另一方面，我们还有

$$\tilde{\psi}(\theta_{B_1}(g)) = \tilde{\psi}((\sigma_v - 1)g) = \sum_{\tilde{h}\twoheadrightarrow \sigma_v g} \tilde{h} - \sum_{\tilde{g}\twoheadrightarrow g} \tilde{g}, \qquad \text{for all } g \in G_1.$$

证明至此完成。 □

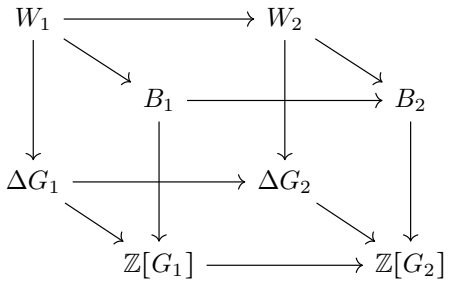
接下来，我们终于构造出所需的映射，它们连接了引理 5.18(1) 中所描述的、位于层级 K_2 和 K_1 的塞尔默模的表示。

定理 5.36. 我们有一个 $\mathbb{Z}[G_2]$–模的交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} F(B_2^\theta) & \longrightarrow & F(V_2^\theta) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_2) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi' := F(\tilde{\psi}')} & & \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{f})} & & \downarrow{\scriptstyle res} & & \\ F(B_1^\theta) & \longrightarrow & F(V_1^\theta) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_1) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中，左侧的竖直映射 π' 由伽罗瓦限制诱导；对于适当选取的基，秩为 $(|S'| - 1)$ 的自由 $\mathbb{Z}[G_i]$–模 $F(B_i^\theta)$，其中 $i = 1, 2$。

证明。命题 5.33 和 5.35、(5.11) 中左下方的方块以及 (5.28) 中右侧的方块给出了如下由 $\mathbb{Z}[G_2]$–模组成的交换图，其垂直映射分别为 θ_W 和 θ_B。



现在，取上述垂直映射的核后，我们得到一个由 $\mathbb{Z}[G_2]$–模组成的交换图

$$\begin{array}{ccc} W_2^\theta & \longrightarrow & B_2^\theta \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_1^\theta & \longrightarrow & B_1^\theta \end{array}$$

将函子 F 应用于上述图表，再与命题 5.26 中的图表结合，我们便得到定理陈述中所需的交换图。根据 [6]，各行都是正合的。

现在，我们来证明映射 π' 是由伽罗瓦限制诱导的，这里要为自由 $\mathbb{Z}[G_i]$–模 $F(B_i^\theta)$ 选取适当的基，其中 $i = 1, 2$。我们知道，在 $B_i = \mathbb{Z}[G_i]^{|S'|}$ 的标准基下，$\tilde{}$ $\tilde{}$ 映射 $\psi' : B_1 \twoheadrightarrow B_2$ 由 $(\psi_v)_{v\in S'}$ 给出，其中

$$\tilde{\psi_v} : \mathbb{Z}[G_1] \to \mathbb{Z}[G_2], \qquad \tilde{\psi_v}(g) = \sum_{\tilde{g}\twoheadrightarrow g} \tilde{g}, \qquad \text{for all } v \in S', g \in G_1.$$

在没有 如注 5.34 中所述，我们声称有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{Z}[G_2]) & \xrightarrow{F(\tilde{\psi_v})} & F(\mathbb{Z}[G_1]) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_{G_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{G_1}} \\ \mathbb{Z}[G_2] & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}[G_1], \end{array}$$

对所有 $v \in S'$，其中下方的水平映射是伽罗瓦限制。事实上，注意到我们有

$$\pi(\beta_{G_2}(\phi)) = \pi(\sum_{\tilde{g}\in G_2} \phi(\tilde{g})\tilde{g}^{-1}) = \sum_{g\in G_1}\sum_{\tilde{g}\to g} \phi(\tilde{g})g^{-1}.$$

另一方面，我们还有

$$\beta_{G_1}(F(\tilde{\psi_v})(\phi)) = \sum_{g\in G_1} F(\tilde{\psi_v})(\phi)(g)g^{-1} = \sum_{g\in G_1} \phi(\tilde{\psi}(g))g^{-1} = \sum_{g\in G_1}\sum_{\tilde{g}\to g} \phi(\tilde{g})g^{-1},$$

~这就证明了该断言。因此，映射 $F(\psi') : F(B_2) \to F(B_1)$ 在标准基 $\mathbf{e}^i$ 下由伽罗瓦限制给出，其中 $F(B_i) = F(\mathbb{Z}[G_i])^{|S'|}$，对 $i = 1, 2$。由于图表 $\mathbb{Z}[G_2]$–模

$$\begin{array}{ccc} F(B_2) & \xrightarrow{F(j_2)} & F(B_2^\theta) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{\psi}')} & & \downarrow{\scriptstyle F(\tilde{\psi}')} \\ F(B_1) & \xrightarrow{F(j_1)} & F(B_1^\theta), \end{array}$$

是交换的（这里 $j_i : B_i^\theta \to B_i$ 是包含映射，且 $F(j_i)$ 是满射），这意味着 $F(\tilde{\psi}')$ 在 $\mathbb{Z}[G_i]$–生成元集合 $\mathbf{e}^{i,\theta} := F(j_i)(\mathbf{e}^i)$ 下由伽罗瓦限制给出，其中 $F(B_i^\theta)$，对 $i = 1, 2$。这意味着

$$F(\tilde{\psi}')(\sum_{k=1}^{|S'|} \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k^{2,\theta}) = \sum_{k=1}^{|S'|} \pi(\alpha_k)\cdot \mathbf{e}_k^{1,\theta}, \qquad \text{for all } \alpha_1, \ldots, \alpha_{|S'|} \in \mathbb{Z}[G_2].$$

现在，$\mathbb{Z}[G_2]$–线性性意味着 $F(\tilde{\psi}') : F(B_2^\theta) \to F(B_1^\theta)$ 这一映射在任意形如 $\mathbf{f}^{2,\theta}$ 和 $F(\tilde{\psi}')(\mathbf{f}^{2,\theta})$ 的基下，分别由 $F(B_2^\theta)$ 和 $F(B_1^\theta)$ 的伽罗瓦限制给出。

现在，是满射完成证明。注意到由于映射 j_i 是 $\mathbb{Z}[G_i]$–自由的，秩为 $|S'| - 1$，且 $\mathbb{Z}[G_1]$ 的全分式环是有限个域的直和。对于 $F(B_2^\theta)$ 的任意 $\mathbb{Z}[G_2]$–基 $\mathbf{f}^{2,\theta}$，集合 $F(\tilde{\psi}')(\mathbf{f}^{2,\theta})$ 是一组 $\mathbb{Z}[G_1]$–生成元，因此也是 $F(B_1^\theta)$ 的一组 $\mathbb{Z}[G_1]$–基。在基 $\mathbf{f}^{2,\theta}$ 和 $F(\tilde{\psi}')(\mathbf{f}^{2,\theta})$ 下，映射 $F(\tilde{\psi}')$ 由伽罗瓦限制给出。□

在 wh at 中，若 G 是有限群，p 是素数，且 M 是一个 $\mathbb{Z}[G]$–模，我们令

$$F_p(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p),$$

视为带有协变 G作用的 $\mathbb{Z}_p[G]$模。容易看出，对于所有有限秩自由 $\mathbb{Z}$模 M，都有 $\mathbb{Z}_p[G]$模的同构

$$F_p(M) \simeq F(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p.$$

The定理 5.37. 对于上述的$(K_2/K_1/F, S, T, S')$及任意素数 $p >$，有以下结论 2.

(1) 若 $S_{ram}(K_2/F) \subseteq S \cup T$，则有 $\mathbb{Z}_p[G_2]$模的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} F_p(B_2^\theta) & \longrightarrow & F_p(V_2^\theta) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_2)_p & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle res} & & \\ F_p(B_1^\theta) & \longrightarrow & F_p(V_1^\theta) & \longrightarrow & Sel_S^T(K_1)_p & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中左侧的垂直映射 π' 由伽罗瓦限制诱导。

(2) 此外，若 $S_p(F) \cap S_{ram}(K_2/F) \subseteq S$，则有

$$F_p(B_2^\theta) \simeq F_p(V_2^\theta) \simeq \mathbb{Z}_p[G_2]^k, \qquad F_p(B_1^\theta) \simeq F_p(V_1^\theta) \simeq \mathbb{Z}_p[G_1]^k,$$

其中可以选取 $k = |S'| - 1$ 以及 $F_p(B_2^\theta)$和 $F_p(B_1^\theta)$的适当基，使得 π' 由这些基下通常的伽罗瓦限制 $\mathbb{Z}_p[G_2] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[G_1]$ 诱导。

证明。第 (1) 部分可直接由定理 5.36 与 $\mathbb{Z}_p$ 作张量积得到。第 (2) 部分由第 (1) 部分和引理 5.18(2) 推出。□

上述定理的主要推论如下，它将在证明等变主猜想的过程中发挥重要作用。

推论 5.38. 设 H_0 是一个伽罗瓦群为 G_0 的阿贝尔 CM 扩张， F。设 S_0、T_0 是 F 中满足假设 Hyp(H_0/F)$_p$ 的两个有限不相交集素点。若 I 是 G_0 的任意一个不包含 H_0 的复共轭的子群，且 R 是 $\mathbb{Z}_p[G_0/I]$ 的一个商，使得 $Fitt_R(Sel_{S_0}^{T_0}(H_0^I)_R)$ 由一个非零除子生成，则

$$Sel_{S_0}^{T_0}(H_0)_R \simeq Sel_{S_0}^{T_0}(H_0^I)_R,$$

其中，同构由塞尔默限制映射诱导。

证明。由于 H_0 的复共轭不属于 I， H_0^I 也是一个 CM 域。然后，应用定理 5.37，并将其陈述中的交换图与 R 作张量积，我们得到一个具有正合行的 R–模交换图

$$\begin{array}{ccccccc} R^k & \xrightarrow{\alpha} & R^k & \longrightarrow & Sel_{S_0}^{T_0}(H_0)_R & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle res_R} & & \\ R^k & \xrightarrow{\beta} & R^k & \longrightarrow & Sel_{S_0}^{T_0}(H_0^I)_R & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中， k 是定理 5.37 中两个二次表示的共同秩。左侧的竖直映射是恒等映射，因为在定理 5.37 中，该映射由伽罗瓦限制诱导。

若 A、 B 和 C 分别是在标准基下与映射 α、 β 和 γ 对应的矩阵，则有 $B = CA$。因此， $det(B) = det(C) \cdot det(A)$。然而， $det(B)$ 是 $Fitt_R(Sel_{S_0}^{T_0}(H_0^I)_R)$ 的生成元。因此， $det(B)$ 是 R 中的非零因子。因此， $det(C)$ 和 $det(A)$ 也都是非零因子，这意味着 α、β 和 γ 都是单射。因此，上述图表中的各行均正合。现在，引理 3.8 表明 res_R 是满射。因此，应用上述图表中的蛇引理可知， γ 也是满射。因此， γ 是同构。由此，映射 res_R 是同构，证毕。□

注 5.39. 上述陈述适用的典型商 R of $\mathbb{Z}_p[G_0/I]$ to 的形式为$R := R_\Psi$，其中 $\Psi \subseteq G_0/I$ and

$$R_\Psi := \mathrm{Im}(\mathbb{Z}_p[G_0/I] \xrightarrow{\mathrm{ev}_\Psi} \bigoplus_{\psi\in\Psi} \mathbb{Z}_p[\psi]), \qquad \mathrm{ev}_\Psi(x) = (\psi(x))_{\psi\in\Psi}.$$

环 R_Ψ 在 [6]中称为特征群环。

6. The Equivariant Main Conjecture

下面，固定一个全实数域 F的阿贝尔 CM 扩张 H/F，其伽罗瓦群为 G。固定一个素数 $p > 2$，并照例令 H_∞ 和 F_∞ 分别为 H 和 F的圆分 $\mathbb{Z}_p$–扩张。与之前一样，对于 $n \geq 0$， G := $G(H_\infty/F)$ 和 $G_n := G(H_n/F)$。令 G_p 和 G' 分别表示 G的 p–Sylow 子群及其补群。对所有 n，同样的记号约定也适用于$G_{n,\ p}$ 和 G'_n。

我们考虑 F中的两个有限素数集 S_0 和 T_0，使得

$$S_0 \cap T_0 = S_{ram}(H_\infty/F) \cap S_0 = S_{ram}(H_\infty/F) \cap T_0 = \varnothing, \qquad T_0 \neq \varnothing.$$

为简便起见，我们将 $S_{p\infty}(F) := S_\infty(F) \cup S_p(F)$ 记作。进一步地，我们令

$$\Sigma := S_{p\infty}(F) \cup S_0, \qquad \Sigma' := (S_{ram}(H_\infty/F) \setminus S_{p\infty}(F)) \cup T_0. \tag{6.1}$$

注意，(Σ, Σ') 满足假设集合 Hyp(H_∞/F)$_p$，$(\Sigma' \setminus J, \Sigma \cup J)$ 也满足，对所有子集$J \subseteq (S_{ram}(H_\infty/F) \setminus S_{p\infty}(F))$ 均如此。

以下结论可由 [6] 中的定理 3.3 直接推出。

定理 6.2. 对于上述所有 $(H/F, S_0, T_0)$ 以及所有 $n \gg 0$，有一个等式

$$Fitt_{\mathbb{Z}_p[G_n]^-}(Sel_\Sigma^{\Sigma'}(H_n)_p^-) = (\Theta_\Sigma^{\Sigma'}(H_n/F)).$$

证明。取任意足够大的 $n > 0$，使得 $S_{ram}(H_\infty/F) = S_{ram}(H_n/F)$。对于任意这样的 n 和 $S_0 = \varnothing$，上面的陈述恰好就是 [6] 中的定理 3.3。若 $S_0 \neq \varnothing$，根据注 3.2，我们有一个$\mathbb{Z}_p[G_n]^-$–模的正合列

$$0 \longrightarrow Y_{S_0}(H_n)^{*,-} \longrightarrow Sel_\Sigma^{\Sigma'}(H_n)_p^- \longrightarrow Sel_{\Sigma\setminus S_0}^{\Sigma'}(H_n)_p^- \longrightarrow 0.$$

由于上面最右边的非零模是二次呈示的，由引理 2.10、引理 4.8 以及 [6] 中的定理 3.3 可得等式

$$Fitt_{\mathbb{Z}_p[G_n]^-}(Sel_{\Sigma}^{\Sigma'}(H_n)_p^-) = (\Theta_{\Sigma\setminus S_0}^{\Sigma'}(H_n/F)\cdot\prod_{v\in S_0}(1-\sigma_v^{-1})) = (\Theta_{\Sigma}^{\Sigma'}(H_n/F)),$$

由此完成证明。 □

接下来的结果旨在加强上述定理。在以下所有讨论中，务必牢记：与使用伽罗瓦模的对偶上的反变伽罗瓦作用的 [6], 不同，我们使用协变伽罗瓦作用。

定理 6.3. 对于上述所有 $(H/F,S_0,T_0)$、所有 $J\subseteq(S_{ram}(H_\infty/F)\setminus S_{p\infty}(F))$ 以及所有 $n\gg 0$，我们有如下 $\mathbb{Z}_p[G_n]^-$–理想等式

$$Fitt_{\mathbb{Z}_p[G_n]^-}(Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n)_p^-) = (\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n/F)\cdot u_n(J)),$$

其中，对于所有奇特征 $\psi\in\widehat{G_n}$，$u_n(J)\in\mathbb{Q}_p[G_n]^-$ 且 $\psi(u_n(J))\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$。

证明。我们固定素数 $p>2$ 和全实数域 F，并对 $|J|$ 使用归纳法，证明上述命题对所有如上所述的 $(H/F,S_0,T_0)$ 均成立。当 $J=\varnothing$ 时，基例对所有 $n\gg 0$ 均成立，具体为 $u_n(\varnothing)=1$，如定理 6.2 所示。现在假设对于所有 $(H/F,S_0,T_0,J)$，结果均成立，其中 J 的大小固定。

对于上述固定数据，令 $v\in(S_{ram}(H_\infty/F)\setminus S_{p\infty}(F))\setminus J$。我们需要证明数据 $(H/F,S_0,T_0,J_v:=J\cup\{v\})$ 满足该结果。

根据 (4.2)，我们知道，只需在与下式作张量积后证明所需的等式

$$R_n^\chi := \mathbb{Z}_p[\chi][G_{n,p}],$$

$\widehat{\ }$ 对所有奇特征 $\chi\in G'$ 均成立。我们固定这样一个奇特征 χ。令 I_v 为 v 在 G_n 中的分歧群。注意，由于 H_∞/H 在 v 处非分歧，I_v 与 n 无关，并且可以视为 G 的子群。令 $I_v\cong I_{v,\,p}\times I_v'$，其中 $I_{v,\,p}$ 是 I_v 的 p–Sylow 子群。显然，我们有 $I_v'\subseteq G'$。我们将归纳步骤的证明分为两种情况，取决于 χ 在 I_v' 上是否为平凡特征。

● 情形 (1)：$\chi(I_v)\neq\{1\}$。固定 $n\gg 0$。在我们的情形中，将 [6] 中的正合列 (40) 与 R_n^χ 张量后，得到一个 R_n^χ–模同构

$$Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi}\cong Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n)_{R_n^\chi}. \tag{6.4}$$

由于右模是二次呈示的 R_n^χ–模（见引理 5.18(2)），左模也如此。现在，由 (3.3)，对所有 $\chi\in\widehat{G'}$，我们有一个 R_n^χ–模正合列

$$0\to Y_v(H_n)_{R_n^\chi}^*\to Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi}\to Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi}\to 0. \tag{6.5}$$

因此，将引理 2.10 应用于上述正合列，并结合 (6.4)，得到

$$\mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi} = (\mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n)_{R_n^\chi})\cdot(\mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}Y_v(H_n)_{R_n^\chi}^*). \tag{6.6}$$

然而，由引理 4.8 并结合我们的假设 $\chi(I_v')\neq\{1\}$，可得

$$\mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}Y_v(H_n)_{R_n^\chi}^* = (1-\sigma_v^{-1},1-\tau\mid\tau\in I_v)_{R_n^\chi} = R_n^\chi,$$

因为对于任意满足 $\chi(\tau)\neq 1$ 的 $\tau\in I_v'$，我们有 $(1-\chi(\tau))\in(R_n^\chi)^\times$. 因此，归纳假设结合 (6.6) 得到一个等式

$$\mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi}) = (\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n/F)\cdot u_n(J)^\chi)_{R_n^\chi},$$

其中 $u_n(J)^\chi$ 如定理所述。然而，我们在 R_n 中有一个等式：

$$\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n/F)\cdot(1-\sigma_v^{-1}e_v) = \Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F)\cdot(1-\sigma_v^{-1}e_vNv).$$

另一方面，由于 $\chi(I_v')\neq\{1\}$，我们有 $e_vR_n^\chi=0$。因此，结合最后两个显示的等式，我们得到了关于 J_v 的所需结果，其中 $u_n(J_v)^\chi=u_n(J)^\chi$。

注 6.7。注意 fr 由上述讨论可知，在情形 1 中，可以选取 $u_n(J)$ 和 $u_n(J_v)$，使得

$$u_n(J_v)^\chi = u_n(J)^\chi, \qquad \text{for all } n \gg 0.$$

因此，特别地，如果可以取 $u_n(J)^\chi = 1$ （例如 $u_n(\varnothing) = 1$），那么对于所有 $n \gg 0$，都可以取 $u_n(J_v)^\chi = 1$。

● 情形（2）： $\chi(I_v) = \{1\}$。与上文一样，固定 $n \gg 0$。对于适当的素点集合， [6] 中的短正合列 (40) 写作

$$0 \longrightarrow Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi} \longrightarrow Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n)_{R_n^\chi} \longrightarrow R_n^\chi/(\tau_v - 1, \sigma_v - Nv) \longrightarrow 0,$$

其中 τ_v 是循环群 $I_{v,p}$ 的生成元（回忆一下， $v \nmid p$，因此 $I_{v,p}$ 是循环群），而 σ_v 是 G_n中 v 处弗罗贝尼乌斯元素的一种选取。因此， [6] 中的方程 (42) 写作

$$Fitt_{R_n^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi})(\sigma_v - Nv) = Fitt_{R_n^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J}(H_n)_{R_n^\chi})(NI_v, \sigma_v - Nv),$$

其中 $NI_v := \sum_{\tau\in I_v}\tau$。由归纳假设可得

$$Fitt_{R_n^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi})(\sigma_v - Nv) = (\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F)\cdot u_1)_{R_n^\chi}(1 - e_v\sigma_v^{-1}Nv)(NI_v, \sigma_v - Nv),$$

其中 $u_1 := u_n(J)^\chi$ 如定理所述。现在，由于 $(\sigma_v - Nv)^{-1} \in \mathrm{Frac}(R_n)$，在 $\mathrm{Frac}(R_n)$ 中作简单计算可得如下 R_n^χ–理想等式

$$(\sigma_v - Nv)^{-1}(1 - e_v\sigma_v^{-1}Nv)(NI_v, \sigma_v - Nv)R_n^\chi = (NI_v, 1 - \sigma_v^{-1}e_v)R_n^\chi = (NI_v, 1 - \sigma_v^{-1}e_v)R_n^\chi.$$

将最后两个展示出的等式与 (6.5) 中的满射结合起来，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi}) &\subseteq \mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi} = \\ &= (\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F)\cdot u_1)_{R_n^\chi}(NI_v, 1 - \sigma_v^{-1}e_v). \end{aligned} \tag{6.8}$$

然而， R_n^χ–模 $Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_n^\chi}$ 是二次呈示的。因此，它的 Fitting 理想是主理想。记 θ 为一个生成元。最后一个包含关系表明

$$\begin{aligned} \theta &= \Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F)\cdot u_1\cdot(aNI_v + b(1 - \sigma_v^{-1}e_v)) \\ &= \Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F)\cdot u_1\cdot(aNI_v) + \Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F)\cdot(bu_1) \quad \text{for some } a, b \in R_n^\chi. \end{aligned} \tag{6.9}$$

现在考虑 G_n 的以下特征标集合：

$$\begin{aligned} \Psi' = \Psi'(G_n) &:= \{\psi \in \widehat{G_n/I_v} \mid \psi|_{G'} = \chi\}, \\ \Omega = \Omega(G_n) &:= \{\psi \in \widehat{G_n} \mid \psi|_{G'} = \chi, \psi(G_{v_0,n}) \neq 1, \forall v_0 \in \Sigma\cup J_v\}, \\ \Psi := \Psi'\cap\Omega, &\qquad \Omega^c := \{\psi \in \widehat{G_n} \mid \psi|_{G'} = \chi\}\setminus\Omega. \end{aligned} \tag{6.10}$$

注意，将注 5.39 中定义的求值映射延拓为 $\mathbb{Q}_p$–线性映射后，可得到一个单射的 $\mathbb{Q}_p$–代数态射

$$\mathrm{ev}^\chi := \mathrm{ev}_\Psi \oplus \mathrm{ev}_{\Omega\setminus\Psi} \oplus \mathrm{ev}_{\Omega^c} : \mathbb{Q}_p(R_n^\chi) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p(R_n)_\Psi \oplus \mathbb{Q}_p(R_n)_{\Omega\setminus\Psi} \oplus \mathbb{Q}_p(R_n)_{\Omega^c}.$$

接下来，我们将逐个分量研究 θ 经此求值映射得到的像。

步骤 1：$\mathrm{ev}_\Psi(\theta)$。注意，由于 χ 是奇的且 $\chi(I_v') = 1$， I_v 不可能包含复共轭态射。因此， H^{I_v}/F 是一个 CM 阿贝尔扩张，其中 v 是非分歧的。显然， $H_n^{I_v}$是 H^{I_v}的分圆 $\mathbb{Z}_p$扩张中的第 n 层。因此，我们可以将归纳假设应用于以下数据

$$(H^{I_v}/F, S_0', T_0', J), \quad S_0' = S_0\cup\{v\}, \quad T_0' = T_0\cup(S_{ram}(H_\infty/F)\setminus S_{ram}(H_\infty^{I_v}/F).$$

由于对这组新数据而言，集合 Σ和 Σ'变为 $\Sigma\cup\{v\}$ 和 $\Sigma\setminus\{v\}$，在对 $\mathbb{Z}_p[G_n/I_v]$上的 R_Ψ取张量积后，我们得到等式

$$\mathrm{Fitt}_{R_\Psi}(Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n^{I_v})_{R_\Psi}) = (\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n^{I_v}/F)\cdot u_2')_{R_\Psi}, \qquad \text{for all } n \gg 0,$$

其中 $u_2' \in \mathbb{Q}_p[G_n/I_v]^\chi$，使得对所有满足 $\psi|_{G'} = \chi$的 $\psi \in G_n/I_v$， $\psi(u_2') \in \mathbb{Z}_p[\psi]^\times$。注意，为简洁起见，我们在记号中省略了 u_2' 对 n 和 J的依赖。

由于 $\Psi \subseteq \Omega$，元素 $\mathrm{ev}_\Psi(\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n^{I_v}/F)\cdot u_2')$ 是 R_Ψ 中的非零因子。（参见引理 2.6。）因此，根据推论 5.38，我们有一个 R_Ψ–模同构

$$Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n)_{R_\Psi} \cong Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n^{I_v})_{R_\Psi}.$$

因此，我们有一个 R_Ψ–理想的等式

$$\theta R_\Psi = \mathrm{Fitt}_{R_\Psi}(Sel^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n)_{R_\Psi}) = (\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot u_2)_{R_\Psi},$$

对于 u_2'的 $\mathbb{Q}_p[G_n]^\chi$ 中的任意提升 u_2。因此，通过在相应的环中乘以适当选取的单位 u_2 和 u_2'，我们得到以下等式

$$\mathrm{ev}_\Psi(\theta) = \mathrm{ev}_\Psi(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot u_2), \tag{6.11}$$

其中，对于所有 $\psi\in\Psi$， $u_2\in\mathbb{Q}_p[G_n]^\chi$ 和 $\psi(u_2)=\psi(u_2')\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$。

步骤 2：$\mathrm{ev}_{\Omega\setminus\Psi}(\theta)$。注意，由于对于所有 $\psi\in\Omega\setminus\Psi$， $\psi(NI_v)=0$，等式 (6.9) 得出 to

$$\mathrm{ev}_{\Omega\setminus\Psi}(\theta) = \mathrm{ev}_{\Omega\setminus\Psi}(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot(bu_1)) \tag{6.12}$$

步骤 3：$\mathrm{ev}_{\Omega^c}(\theta)$。 [6] 中的引理 3.2 意味着，在此情况下，我们有

$$\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)R_{\Omega^c} = \mathrm{Fitt}_{R_{\Omega^c}}(Sel^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n)_{R_{\Omega^c}}) = 0.$$

因此，我们在 R_{Ω^c}中有一个等式：

$$\mathrm{ev}_{\Omega^c}(\theta) = \mathrm{ev}_{\Omega^c}(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)) = 0. \tag{6.13}$$

结合 (6.11)、(6.12)、(6.13) 以及 ev^χ 是单射这一事实，我们得到

$$\theta = \Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot u_3, \qquad \text{where } u_3 = (e_v\cdot u_2 + (1-e_v)\cdot bu_1)\in\mathbb{Q}_p[G_n]^\chi. \tag{6.14}$$

为了完成证明，我们需要证明对于所有满足 $\psi|_{G'}=\chi$ 的 $\psi\in\widehat{G}_n$，都有 $\psi(u_3)\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$。现在注意，对任意这样的特征 ψ，我们有

$$\psi(u_3) = \begin{cases}\psi(u_2), & \text{if } \psi(I_v)=1;\\ \psi(b)\psi(u_1), & \text{if } \psi(I_v)\neq 1.\end{cases}$$

由于 $\psi(u_1)\ \psi(u_2)\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$，我们需要证明

$$\psi(b)\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times,$$

对于所有满足 $\psi|_{G'}=\chi$ 且 $\psi(I_v)\neq 1$ 的 ψ。注意，若 $|I_{v,\ p}|=1$，则不存在这样的特征 ψ，因为根据假设， $\psi(I_v)=\chi(I_v')=1$。因此，我们假设

$$|I_{v,p}|>1$$

并且我们接下来证明，在这一假设下，更强得多的陈述 t

$$b\in(R_n^\chi)^\times$$

成立。首先注意，由于 R_n^χ 是极大理想为 $\mathfrak{m}_n^\chi=(p,1-\sigma\mid\sigma\in G_{n,\ p})$ 的局部环，当且仅当存在满足 $\psi|_{G'}=\chi$ 的 $\psi\in\widehat{G_n}$，使得 $\psi(b)\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$ 时，才有 $b\in(R_n^\chi)^\times$。取足够大的 $n\gg 0$，使得$\Psi\neq\varnothing$，并取 $\psi\in\Psi$。首先注意，

$$u_v^\psi := \psi(1-\sigma_v^{-1}e_v) = (1-\psi(\sigma_v^{-1}))\in\mathbb{Z}_p[\psi]\setminus 0, \qquad \text{and } (u_v^\psi)^{-1}|I_{v,p}|\in\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p[\psi]},$$

其中 $\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p[\psi]}$ 是 $\mathbb{Z}_p[\psi]$中的极大理想。现在，利用 (6.9) 和 (6.11)，等式

$$\psi(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J}(H_n/F)) = \psi(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F))\cdot(u_v^\psi)^{-1},$$

以及 $\psi(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F))$ 是非零因子这一事实，可得到 $\mathbb{Z}_p[\psi]$中的一个等式：

$$\psi(u_2) = \psi(u_1)\psi(a)|I_v'|\cdot(|I_{v,p}|(u_v^\psi)^{-1}) + \psi(b)\psi(u_1).$$

由于 $\psi(u_1)\ \psi(u_2)\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$ 且 $|I_{v,p}|(u_v^\psi)^{-1}\in\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p[\psi]}$，我们必有 $\psi(b)\in\mathbb{Z}_p[\psi]^\times$，由此定理得证。□

接下来，在对扩张 H/F作出一些额外假设的情况下，我们将上述定理中的项 u 去掉。令 F_∞ 表示 F的分圆 $\mathbb{Z}_p$–扩张。

定理 6.15。假设数据 $(H/F,S_0,T_0)$ 如上所述，且 $H\cap F_\infty=F$。那么，对于所有集合 $J\subseteq(S_{ram}(H_\infty/F)\setminus S_{p\infty}(F)$，我们有如下 $\mathbb{Z}_p[G_n]^-$–理想的等式

$$Fitt_{\mathbb{Z}_p[G_n]^-}(Sel^{\Sigma'\setminus J}_{\Sigma\cup J}(H_n)^-_p) = (\Theta^{\Sigma'\setminus J}_{\Sigma\cup J}(H_n/F)), \qquad for\ all\ n\gg 0.$$

证明。在下文中，我们令 $\Gamma = G(F_\infty/F)$。由于 F_∞/F 和 H/F 不相交，伽罗瓦限制给出同构 $G(H_\infty/H) \simeq \Gamma$ 以及 $\mathsf{G} = Gal(H_\infty/F) \cong G \times \Gamma$。因此，我们得到如下拓扑紧 $\mathbb{Z}_p$–代数的同构

$$\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]] \simeq \mathbb{Z}_p[G][[\Gamma]] = \mathbb{Z}_p[G'][G_p][[\Gamma]] \simeq \bigoplus_{[\chi]\in[\widehat{G'}]} R_\infty^\chi,$$

其中，最后一个同构由通常的 χ–求值映射以及 $R_\infty^\chi = \mathbb{Z}_p[\chi][G_p][[\Gamma]]$ 的直和给出。显然，我们有

$$R_\infty^\chi \simeq \varprojlim_n R_n^\chi,$$

其中环 $R_n^\chi = \mathbb{Z}_p[\chi][G_{n,p}]$ 与前面相同。

证明策略与定理 6.3 相同。也就是说，我们固定域 F，并对 $|J|$ 作归纳，对所有如上所述的数据 $(H/F, S_0, T_0)$ 均成立。基础情形 $J = \varnothing$ 即为上面的定理 6.2。归纳步骤的证明，即从给定的 J 推进到 $J_v = J \cup \{v\}$，其中 $v \in (S_{ram}(H_\infty/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \smallsetminus J$，同样是$\widehat{\ }$针对所有奇特征 $\chi \in G'$ 逐个特征进行的。对于这样一个给定的特征χ，证明再次分为两种情形，情形 1：$\chi|_{I'_v} \neq 1$；情形 2：$\chi|_{I'_v} = 1$。根据注 6.7，情形 1 中归纳步骤的蕴含成立。因此，我们需要在归纳假设 $u_n(J) = 1$ 下，证明情形 2 中的这一蕴含，其中 $n \gg 0$，记号与定理 6.3 的证明中相同。

由定理 6.3 中情形 2 的证明可知，由于在新的归纳假设 $u_1 = u_2 = 1$ 下，我们有$u_3 = e_{v,\ p} + (1 - e_{v,\ p})b_n$。因此，对所有 $n \gg 0$，我们有等式

$$\mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}(Sel^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n)^-_{R_n^\chi}) = (\Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n))_{R_n^\chi},$$

其中 $b_n \in R_n^\chi$，使得

$$\psi(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n)) \in \mathbb{Z}_p[\psi]^\times, \qquad \text{for all } \psi \in \widehat{G_n}. \tag{6.16}$$

此外，由 (6.9) 和 (6.14) 可知，存在 $a_n \in R_n^\chi$，使得

$$\Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n) = \Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J}(H_n/F)\cdot(a_n N I_{v,p}) + \Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot b_n.$$

由于 $\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(\Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J}(H_n/F))$ 在 $R_{\Omega(G_n)}$ 中不是零因子，这意味着

$$\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}((1 - \sigma_v^{-1}e_{v,p})(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n)) = \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(a_n N I_{v,p} + (1 - \sigma_v^{-1}e_{v,p})b_n) \tag{6.17}$$

在 $|I_v^{\ 1}{}_{,p}|R_{\Omega(G_n)}$ 中，对所有 $n \gg 0$ 均成立。

接下来，我们考察岩泽塔 H_∞/H 中的上述数据。由于限制映射

$$Sel^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_{n+1})^-_p \to Sel^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n)^-_p$$

是满射（见引理 3.8），若 $\pi_n^{n+1} : R_{n+1}^\chi \twoheadrightarrow R_n^\chi$ 表示由伽罗瓦限制诱导的环同态，则我们有 R_n^χ-理想的包含映射

$$\pi_n^{n+1}(\mathrm{Fitt}_{R_{n+1}^\chi}(Sel^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_{n+1})^-_{R_{n+1}^\chi}) \subseteq \mathrm{Fitt}_{R_n^\chi}(Sel^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n)^-_{R_n^\chi}), \qquad \text{for all } n \gg 0.$$

因此，对于所有 $n \gg 0$，都存在 $x_n \in R_n^\chi$，使得

$$\Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})\pi_n^{n+1}(b_{n+1})) = x_n \cdot \Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n).$$

现在，若将上面的等式作用于特征 $\psi \in \Omega(G_n)$，如（6.10）所示，可以看到 $\psi(x_n) \in \mathbb{Z}_p[\psi]^\times$。因此，$x_n \in (R_n^\chi)^\times$。因此，对于 x_n 的任意提升 $x_{n+1} \in (R_{n+1}^\chi)^\times$，在 R_n^χ 中有以下等式：

$$\pi_n^{n+1}(\Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_{n+1}/F)(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_{n+1})x_{n+1}^{-1}) = \Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)(e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n).$$

现在，让我们固定 $n \gg 0$。根据上述讨论，我们可以归纳地构造元素 $v_m \in {}_{|I_v^{\ 1}{}_{,p}|}R_m^\chi$，对所有 $m \geq n$ 均如此，使得

$$\begin{aligned} v_n &= (e_{v,p} + (1 - e_{v,p})b_n), \\ (\Theta^{\Sigma'\smallsetminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_m/F)\cdot v_m)_{R_m^\chi} &= \mathrm{Fitt}_{R_m^\chi}(Sel^{\Sigma'\cup J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_m)^-_{R_m^\chi}), \quad \text{for all } m \geq n, \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\pi_m^{m+1}(\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_{m+1}/F)\cdot v_{m+1}) = (\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_m/F)\cdot v_m), \qquad \text{for all } m\geq n.$$

因此，由命题 3.16 和引理 4.7 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Fitt}_{R_\infty^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty)^\vee_{R_\infty^\chi}) &= \varprojlim_{m\geq n}(\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_m/F)v_m)\\ &= (\varprojlim_{m\geq n}\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_m/F)v_m)\\ &= (\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty/F)\cdot u_\infty),\end{aligned} \tag{6.19}$$

其中，可以选取 $u_\infty\in {}^1_{|I_v,p|}R_\infty^\chi$，使得若 $\pi_m: R_\infty^\chi\to R_m^\chi$ 是由伽罗瓦限制诱导的 $\mathbb{Z}_p[\chi]$-代数态射，且 $u_m:=\pi_m(u_\infty)$，则

$$\begin{aligned}\pi_m(\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty/F)\cdot u_\infty) &= \Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_m/F)v_m, \qquad \text{for all } m\geq n,\\ \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(u_n) &= \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(e_{v,p}+(1-e_{v,p})b_n), \qquad \text{in } \frac{1}{|I_{v,p}|}R_{\Omega(G_n)},\end{aligned} \tag{6.20}$$

其中，最后一个等式直接由 (6.18) 以及 $\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(\Theta_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_n/F))$ 在 $R_{\Omega(G_n)}$ 中不是零因子这一事实得出。

现在，在 (6.8) 中取极限（请记住 $u_1=1$），并应用命题 3.16 和引理 4.7，得到以下 R_∞^χ–理想之间的关系

$$\begin{aligned}Fitt_{R_\infty^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J_v}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty)^\vee_{R_\infty^\chi}) &\subseteq Fitt_{R_\infty^\chi}(Sel_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty)^\vee_{R_\infty^\chi}) =\\ &= (\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty/F)(NI_{v,p},1-\sigma_v^{-1}e_{v,p}))_{R_\infty^\chi},\end{aligned} \tag{6.21}$$

其中，σ_v 是 G 中 v 的一个弗罗贝尼乌斯元的选取。

等式 (6.19) 与 (6.21) 相结合，再加上 $\Theta_{\Sigma\cup J}^{\Sigma'\setminus J_v}(H_\infty/F)$ 在 R_∞^χ 中不是零因子这一事实（见命题 4.6），可推出存在 $\alpha,\beta\in R_\infty^\chi$，使得

$$(1-\sigma_v^{-1}e_{v,p})\cdot u_\infty=\alpha NI_{v,p}+\beta(1-\sigma_v^{-1}e_{v,p}), \tag{6.22}$$

视为 ${}^1_{|I_v,p|}R_\infty^\chi$ 中的一个等式。现在，令 $\alpha_n:=\pi_n(\alpha)$，$\beta_n:=\pi_n(\beta)$。若将 $\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}\bigcirc\ \pi_n$ 作用于上述等式，并与 (6.17) 结合，便得到

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}((1-\sigma_v^{-1}e_{v,p})\cdot u_n) &= \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(a_nNI_{v,p}+b_n(1-\sigma_v^{-1}e_{v,p}))\\ &= \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(\alpha_nNI_{v,p}+\beta_n(1-\sigma_v^{-1}e_{v,p})),\end{aligned} \tag{6.23}$$

视为 ${}^1_{|I_v,p|}R_{\Omega(G_n)}$ 中的等式。

假设同构 $G\simeq G'\times G_p\times\Gamma$ 将 $\sigma_v\mapsto(\sigma_v',\sigma_{v,p},\gamma_v)$ 映射到 γ_v。那么 γ_v 是与 v 在 $G(F_\infty/F)$ 中相关联的弗罗贝尼乌斯自同态（回顾一下，$v\notin S_p$，因此 v 在 F_∞/F 中是非分歧的。）于是，由 γ_v^{-1} 在 Γ 中生成的闭子群 γ_v^{-1} 的指数有限，因此它等于某个 $k\geq 0$ 对应的 Γ^{p^k}。于是，我们可以选取 Γ 的一个拓扑生成元 γ，使得 $\gamma_v^{-1}=\gamma^{p^k}$。按此方式选定 γ 后，我们得到紧 $\mathbb{Z}_p[\chi][G_p]$-代数之间的一个同构

$$R_\infty^\chi=\mathbb{Z}_p[\chi][G_p][[\Gamma]]\simeq\mathbb{Z}_p[\chi][G_p][[T]], \qquad \gamma\mapsto(T+1),$$

它将 σ_v^{-1} 在 R_∞^χ 中的像 $(\chi(\sigma_v')\sigma_{v,p}\cdot\gamma_v)^{-1}$ 映射到 $\chi(\sigma_v')^{-1}\sigma_{v,p}^{-1}\cdot(1+T)^{p^k}$。因此，在接下来的、在 R_∞^χ 内进行的计算中，我们可以并将会认定

$$R_\infty^\chi=\Lambda[G_p], \qquad \Lambda=\mathbb{Z}_p[\chi][[T]], \quad \sigma_v^{-1}=c\cdot h\cdot(1+T)^{p^k},$$

其中 $h:=\sigma_{v,p}^{-1}\in G_p$ 和 $c:=\chi'(\sigma_v')^{-1}\in\mathbb{Z}_p[\chi]^\times$。

现在，将等式 (6.22) 通过伽罗瓦限制投影到 ${}^1_{|I_v,p|}\Lambda[G_p/I_{v,p}]$ 上，得到

$$(\overline{u_\infty}-\overline{\beta})(1-c\cdot\overline{h}\cdot(1+T)^{p^k})=\overline{\alpha}|I_{v,p}|, \qquad \text{in } \frac{1}{|I_{v,p}|}\Lambda[G_p/I_{v,p}]. \tag{6.24}$$

接下来，我们在 $\frac{1}{|I_v\ ,\ p|}\Lambda[G_p/I_{v,\ p}]$ 中求解关于 $(\overline{u_\infty}-\overline{\beta})$ 的方程。为此，假设

$$\overline{u_\infty}-\overline{\beta}=\sum_{g\in G_p/I_{v,p}}a_g g,\qquad \overline{\alpha}=\sum_{g\in G_p/I_{v,p}}b_g g,$$

其中 $a_g\in\frac{1}{|I_{v\ ,p}|}\Lambda$ 和 $b_g\in\Lambda$，对所有 $g\in G_p/I_{v,p}$均成立。现在，固定 $g\in G_p/I_{v,p}$，比较等式（6.24）两边 $g\overline{h}^{-i}$ 的系数，得到

$$a_{g\overline{h}^{-i}}-a_{g\overline{h}^{-i-1}}c(1+T)^{p^k}=|I_{v,p}|b_{g\overline{h}^{-i}},\qquad \text{for all } i=0,1,2,\dots,\mathrm{ord}(\overline{h})-1,$$

其中 $\mathrm{ord}(\overline{h})$ 是 $\overline{h}$ 在 $G_p/I_{v,p}$ 中的阶。现在，将上面的等式乘以 $c^i(1+T)^{p^k\cdot i}$，并对所有上述的 i 求和，得到 Λ 中的一个等式

$$(|I_{v,p}|a_g)(1-c^{ord(\overline{h})}(1+T)^{p^k ord(\overline{h})})=|I_{v,p}|^2\sum_{1=0}^{ord(\overline{h})-1}b_{g\overline{h}^{-i}}c^i(1+T)^{p^k\cdot i}.$$

然而， Λ 是唯一分解整环，且 $p\in\Lambda$ 是素数。因此，通过比较上述等式两边被 p 整除的幂次，可以立即得出 $a_g\in|I_{v,p}|\Lambda$。因此，我们有

$$\overline{u_\infty}-\overline{\beta}=|I_{v,p}|\overline{\alpha'},\qquad \text{with } \alpha'\in\Lambda[G_p].$$

因此，若 τ 是循环群 $I_{v,p}$ 的生成元，则有

$$u_\infty-\beta=|I_{v,p}|\cdot\alpha'+(1-\tau)\alpha'',\qquad \text{with } \alpha'\in\Lambda[G_p],\quad \alpha''\in\frac{1}{|I_{v,p}|}\Lambda[G_p].$$

将 $\Lambda[G_p]$ 重新认作 R^χ_∞，并将 π_n 应用于上述等式后，我们得到 $\frac{1}{|I_v\ \ ,p|}R^\chi_n$ 中的下列等式。

$$u_n-\beta_n=|I_{v,p}|\cdot\alpha'_n+(1-\tau)\alpha''_n,\qquad \text{with } \alpha'_n\in R^\chi_n,\quad \alpha''_n\in\frac{1}{|I_{v,p}|}R^\chi_n. \tag{6.25}$$

现在，(6.23) 中的第二个等式给出如下结果

$$\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(e_{v,p}(1-b_n))=\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}([(\alpha_n-a_n)|I_{v,p}|+\beta_n-b_n]\sigma+(1-\beta_n)e_{v,p}). \tag{6.26}$$

现在，注意到由 (6.20) 可得

$$\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(u_n e_{v,p})=\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}((e_{v,p}(1-b_n)+b_n)e_{v,p})=\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(e_{v,p}).$$

因此，由于 $(1-\tau)e_{v,p}=0$，根据 (6.25) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}((1-\beta_n)e_{v,p})=\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}((u_n-\beta_n)e_{v,p}) &= \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}((|I_{v,p}|\alpha'_n+(1-\tau)\alpha''_n)e_{v,p})\\ &= \mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(|I_{v,p}|\alpha'_n)\in R_{\Omega(G_n)}.\end{aligned}$$

与 (6.26) 结合后，可得

$$\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(b_n+e_{v,p}(1-b_n))\in R_{\Omega(G_n)}.$$

与 (6.16) 结合后，可得

$$\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}(b_n+e_{v,p}(1-b_n))\in R^\times_{\Omega(G_n)}.$$

现在，映射 $\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)}:R^\chi_n\to R_{\Omega(G_n)}$ 显然将单位群 $(R^\chi_n)^\times$ 满射到单位群 $R^\times_{\Omega(G_n)}$。因此，存在 $\xi_n\in(R^\chi_n)^\times$ 和 $\rho_n\in\ker(\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)})$，使得

$$b_n+e_{v,p}(1-b_n)=\xi_n+\rho_n,\qquad \text{in } R^\chi_n.$$

因此，由于 $\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot\ker(\mathrm{ev}_{\Omega(G_n)})=0$，我们得到以下 R^χ_n–理想的等式

$$\begin{aligned}\mathrm{Fitt}_{R^\chi_n}(Sel^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n)_{R^\chi_n}) &= (\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot(b_n+e_{v,p}(1-b_n))\\ &= (\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F)\cdot\xi_n)=(\Theta^{\Sigma'\setminus J_v}_{\Sigma\cup J_v}(H_n/F))_{R^\chi_n},\end{aligned}$$

这就完成了归纳步骤，从而证明了该定理。 □

上述定理的一个推论如下。

定理 6.27. 设 F_∞ 是 F 的分圆 $\mathbb{Z}_p$-扩张。假设 $F_\infty \cap H = F$。设 S 和 T 是 F 中满足引理 2.5 中假设 Hyp$(H_\infty/F)^p$ 的两个有限的不相交素点集。那么，我们有如下 $\mathbb{Z}_p[G_n]^-$–理想的等式

$$Fitt_{\mathbb{Z}_p[G_n]^-}(Sel_S^T(H_n)_p^-) = (\Theta_S^T(H_n/F)), \qquad for\ all\ n \gg 0.$$

证明。将定理 6.15 应用于数据集 $(H/F, S_0, T_0, J)$，其中

$$S_0 := S \setminus S_{ram}(H_\infty/F), \quad T_0 := T \setminus S_{ram}(H_\infty/F), \quad J := (S_{ram}(H_\infty/F) \setminus S_{p\infty}(F)) \setminus T,$$

并注意到，对于 (6.1) 中定义的 Σ 和 Σ'，有集合等式

$$\Sigma \cup J = S, \qquad \Sigma' \setminus J = T,$$

由此完成证明。 □

此外，在 [6]（同上中的关键结果）中，当 $S_p(F) \subseteq S$ 时，我们得到定理 3.3 的以下加强形式。这将推出我们的主结果。下面的定理将在 §7.4 中进一步大幅加强。（参见 §7.4 中的定理 7.26。）

定理 6.28. 设 H/F 是数域的有限阿贝尔扩张，其中 $G = Gal(H/F)$，F 是全实的，而 H 是一个 CM 域。设 $p > 2$ 是素数，且 S 和 T 是 F 中不相交的有限非空素点集合，满足假设 Hyp$(H_\infty/F)^p$。那么，我们有

$$Fitt_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-) = (\Theta_S^T(H/F))$$

证明. 下文中，若 k 是一个数域，则 k_∞ 表示其分圆 $\mathbb{Z}_p$ 扩张。如前所述，存在一个 CM 域 H'，使得 $H' \cap F_\infty = F$ 和 $H'_\infty = H_\infty$。现在，令 H'_n 表示 H_∞/H' 的第 n 层。由于 $\bigcup_{n=1}^\infty H'_n = H_\infty$，存在 $n \gg 0$ 使得 $H \subseteq H'_n$。固定一个具有此性质的 n。A
s in 在定理 6.15 的证明中，我们考虑 G 的 p 进特征集合

$$\Omega := \Omega(G) := \{\psi \in \widehat{G} \,|\, \psi(\Theta_S^T(H/F)) \neq 0\}.$$

那么，对所有 $n \geq 0$，我们都有典范的满射环态射

$$\pi_n : \mathbb{Z}_p[G'_n]^- \xrightarrow{res_n} \mathbb{Z}_p[G]^- \xrightarrow{\mathrm{ev}_\Omega} R_\Omega,$$

使得 $\pi_n(\Theta_S^T(H'_n/F)) = \pi_0(\Theta_S^T(H/F))$ 在 $R := R_\Omega$ 中不是零因子。我们在塞尔默模层面上有如下满射限制态射

$$(Sel_S^T(H'_n)_p^-)_R \to (Sel_S^T(H)_p^-)_R \tag{6.29}$$

因此，根据 Fitting 理想的性质和定理 6.27，我们有

$$(\pi_n(\Theta_S^T(H'_n/F))) = Fitt_R((Sel_S^T(H'_n)_p^-)_R) \subseteq Fitt_R((Sel_S^T(H)_p^-)_R) = (\pi_0(\theta)), \qquad 对于\ n \gg 0.$$

这里，θ 是 $Fitt_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-)$ 的任意一个生成元。我们知道它是主理想，因为 $Sel_S^T(H)_p^-$ 在 $\mathbb{Z}_p[G]^-$ 上有二次表示。（见引理 5.18(2)。）现在，由于我们知道 $\pi_n(\Theta_S^T(H'_n/F))$ 在 R 中是非零因子，因此 $\pi_0(\theta)$ 也是如此。于是，根据推论 5.38，态射 (6.29) 是同构。因此，我们得到 Fitting 理想的一个等式

$$Fitt_R((Sel_S^T(H)_p^-)_R) = Fitt_R((Sel_S^T(H'_n)_p^-)_R) = (\pi_0(\Theta_S^T(H/F)))$$

然而，若 $R' = R_{\Omega^c}$ 且 $\pi'_0 : \mathbb{Z}_p[G]^- \to R'$ 是相应的满射，根据 [6], 中的引理 3.2，我们有

$$Fitt_{R'}((Sel_S^T(H)_p^-)_{R'}) = (0) = (\pi'_0(\Theta_S^T(H/F)))$$

最后两个等式以及映射 $\pi_0 \oplus \pi'_0 : \mathbb{Z}_p[G]^- \to R \oplus R'$ 的单射性给出了所需结果。 □

现在，我们准备陈述并证明本文的主要定理。

定理 6.30（EMC）。设 H/F 是全实数域的阿贝尔 CM 扩张。设 H_∞ 是 H的分圆 $\mathbb{Z}_p$–扩张，其中 $p > 2$为素数。令 G := $Gal(H_\infty/F)$。假设 S 和 T 是 F的有限的不相交素点集，并满足引理 2.5 中的假设 Hyp$(H_\infty/F)^p$。则以下结论成立。

(1) 我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(Sel_S^T(H_\infty)_p^-) = (\Theta_S^T(H_\infty/F)).$$

(2) $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模 $Sel_S^T(H_\infty)_p^-$ 位于一个短正合列中

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-)^k \longrightarrow (\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-)^k \longrightarrow Sel_S^T(H_\infty)_p^- \longrightarrow 0,$$

for some $k > 0$. *In particular,* $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-} Sel_S^T(H_\infty)_p^- = 1$.

证明。(1) 将定理 6.28 应用于 H_n/F，对所有 $n \geq 0$，并结合命题 3.16，可得 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–理想间的一个等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(Sel_S^T(H_\infty)_p^-) = \varprojlim_n (\mathbb{Z}_p[G_n]^- \cdot \Theta_S^T(H_n/F)).$$

结合引理 4.7，可得 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–理想间的另一个等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(Sel_S^T(H_\infty)_p^-) = \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^- \cdot \Theta_S^T(H_\infty/F),$$

由此完成了第 (1) 部分的证明。

(2) 由于环 $R := \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$ 是半局部的（见注记 4.10），且 $\Theta_S^T(H_\infty/F)$ 在 R 中不是零因子（见命题 4.6），我们可以对有限表示的扭 R–模 $Sel_S^T(H_\infty)_p^-$ 应用命题 4.9，从而结合第 (1) 部分可知，第 (2) 部分也成立。□

我们以该定理的一个推论结束本节，它给出了关于一种更为经典的岩泽模的信息；该模是通过对岩泽塔 H_∞/H 中的射线类群取射影极限得到的。

推论 6.31。在上述记号下，假设

$$S := S_{p\infty}(F), \qquad T = (S_{ram}(H_\infty/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \cup T_0,$$

对于 F 中的一个有限非空素数集合 T_0，满足 $T_0 \cap S_{ram}(H_\infty/F) = \varnothing$. 则

(1) 我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(A^{T,\vee,-}) = (\Theta_S^T(H_\infty/F)).$$

(2) $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模 $A^{T,\vee,-}$ 位于一个短正合列中

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-)^k \longrightarrow (\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-)^k \longrightarrow A^{T,\vee,-} \longrightarrow 0,$$

对于某个 $k > 0$。特别地，投射维数 $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-} A^{T,\vee,-} = 1$.

*Pro*的。在我们的假设下，命题 3.14 给出了 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的一个同构 s

$$Sel_S^T(H_\infty)_p^- \cong A^{T,\vee,-}.$$

因此，上述陈述可由前面的定理推出。 □

7. Applications

本节将介绍我们的主要结果定理 6.30 的若干应用。记号与上文相同。此外，我们用 $\mu := \mu_{H,\,p}$ 表示与 $\mathbb{Z}_p$–扩张 H_∞/H 相关的经典岩泽 μ–不变量。在 §7.1 中，我们建立塞尔默模 $Sel_S^T(H_\infty)^-$ 与某个模 $\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-$之间的完美 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–双线性对偶配对；该模本质上由 [11] 引入。因此，在 §7.2 中，我们推导出 [11], 的主要结果（作为定理 6.30 的推论），即关于塔特模 $T_p(\mathrm{M}_S^T(H_\infty)^-)$ 的等变主猜想；该结果在同上中是在假设 $\mu = 0$ 成立的条件下证明的（这是岩泽的一个经典猜想）。此外，在 §7.3 中，我们无条件地证明了 Coates–Sinnott 猜想的一个加强版本，该版本在 [11] 中是在假设 $\mu = 0$ 成立的条件下证明的。最后，在 §7.4 中，我们通过将假设 $\mathrm{Hyp}(H_\infty/F)_p$ 替换为较弱的 $\mathrm{Hyp}(H/F)_p$，证明了定理 6.28 的一个大幅加强版本，并由此证明了 Burns–Kurihara–Sano 猜想。

在开始之前，回顾一下，Iwasawa 的 $\mu = 0$ 猜想（目前已知当 $H/\mathbb{Q}$ 为阿贝尔群时成立）等价于群 $A_\infty^{T,-}$ 的 p–整除性，其中 F 中任意有限集 T（包括空集）都由非阿基米德素数组成。一般而言，存在群同构

$$A_\infty^T \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\lambda_T} \bigoplus (A_\infty^T)_{nd}, \qquad A_\infty^{T,\pm} \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\lambda_T^\pm} \bigoplus (A_\infty^{T,\pm})_{nd},$$

其中 λ_T、$\lambda_T^\pm \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $(A_\infty^T)_{nd}$ 以及 $(A_\infty^{T,-})_{nd}$ 是指数分别为 p^μ 和 $p^{\mu^\pm}$ 的扭 p–群，其中 μ 和 $\mu^\pm$ 与 T 无关。由上面的同构可知，$\mu = 0$ 当且仅当 $\mu^- = 0$，而这又当且仅当 $A_\infty^{T,-}$ 可除。（更多细节见 [11] 中的 §2。）

从现在起，为了简化记号，对于 F 中所有由非阿基米德素数组成的有限集 T，我们令 $\mathbf{H} := H_\infty$ 和 $A^T := A^T_\infty$。

7.1. 对偶配对。设 S 和 T 是 F中的两个有限不相交的素数集合，且 $S_{p\infty}(F) \subseteq S$。集合$T$可以为空。对于 F中所有满足 $S_p \cap X = \varnothing$（因此 $\mathbf{H}/H$在 X处非分歧）的非阿基米德素数集合 X，我们有单射过渡映射

$$Y_X(H_n) \longrightarrow Y_X(H_{n+1}), \qquad v \mapsto \sum_{w|v} w, \tag{7.1}$$

这些映射以显然的方式与除子映射 $div_X^{H_i} : H_i^\times \to Y_X(H_i)$（其中 $i = n$、$n+1$）以及包含映射 $H_n^\times \subseteq H_{n+1}^\times$相容。因此，我们得到一个除子映射

$$div_X^{\mathcal{H}} := \varinjlim_n div_X^{H_n} : \mathcal{H}^\times \to Y_X(\mathcal{H}) := \varinjlim_n Y_X(H_n).$$

按照 [11], 对所有 $m \geq 1$的做法，我们定义 $\mathbf{H}_T^\times$的以下子群:

$$\mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)} = \{f \in \mathcal{H}_T^\times \mid div_{\overline{S_{p\infty}}}^{\mathcal{H}}(f) = p^m \cdot D + y, \text{ with } y \in Y_{S \smallsetminus S_{p\infty}}(\mathcal{H}),\, D \in Y_{\overline{S}}(\mathcal{H})\}.$$

定义 7.2. 对所有 $m > 0$，我们定义 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–线性态射

$$\iota_m : \mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^m} \longrightarrow \mathcal{H}_{S,T}^{(p^{m+1})}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^{m+1}}, \qquad \iota_m(\widehat{f}) = \widehat{f^p}, \text{ for all } f \in \mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)},$$

并令 $\mathbf{M}_S^T(\mathbf{H}) := \varprojlim_m \mathbf{H}^{(p^m)}{}_{S,T}/(\mathbf{H}_T^\times)^{p^m}$，其中归纳极限是关于上文定义的过渡映射$\iota_m$ 取的。

以类似方式可以定义所有 $n \geq 1$ 的 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模 $\mathbf{M}_S^T(H_n)$，并且不难验证，包含关系 $H_n^\times \subseteq H_{n+1}^\times \subseteq \mathbf{H}^\times$ 诱导出单射态射

$$\mathcal{M}_S^T(H_n) \xrightarrow{j_n} \mathcal{M}_S^T(H_{n+1}) \longrightarrow \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H}).$$

此外，容易验证我们有 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模同构

$$\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H}) \simeq \varinjlim_n \mathcal{M}_S^T(H_n), \qquad \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^\vee \simeq \varprojlim_n \mathcal{M}_S^T(H_n)^\vee, \tag{7.3}$$

其中，归纳极限是关于单射态射 j_n 取的，而射影极限则是关于它们的满射对偶映射 $j_n^\vee$取的。

注 7.4. 容易验证映射 ι_m 是单射，因此我们可以将 $\mathbf{H}^{(p^m)}{}_{S,T}/(\mathbf{H}_T^\times)^{p^m}$ 视为 $\mathbf{M}_S^T(\mathbf{H})$ 的子模。事实上，ι_m 诱导出一个同构

$$\mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^m} \simeq \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})[p^m],$$

对所有 $m > 0$ 均成立，这一点可以验证。（圆分 $\mathbb{Z}_p$–扩张 $\mathbf{H}$ 中的单位根群总是p–可除的！）此外，显然这些同构适合于交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{S,T}^{(p^{m+1})}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^{m+1}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})[p^{m+1}] \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_m} & & \downarrow{\scriptstyle \times p} \\ \mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^m} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})[p^m], \end{array}$$

其中，左侧的垂直映射由包含映射 $\mathbf{H}_{(p^{m+1})\ S,T} \subseteq \mathbf{H}^{(p^m)}{}_{S,T}$ 诱导，右侧的垂直映射则是乘以 p。这表明存在一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模的同构

$$\varprojlim_m \mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^m} \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})),$$

其中，逆极限是相对于映射 π_m 和 T_p 取得的（$\mathbf{M}_S^T(\mathbf{H})$ 表示 p–群 $\mathbf{M}_S^T(\mathbf{H})$ 的 p–进塔特模。

描述 注 7.4 中的 f $M_S^T(H)[p^m]$ 导出 $\mathbb{Z}_p[[G]]^-$–模的典范正合列 s

$$0 \longrightarrow A^T[p^m]^- \xrightarrow{\tau_m} \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})[p^m]^- \xrightarrow{d_m} Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^-/p^m, \tag{7.5}$$

其中 τ_m 将除子类 $\widehat{D}$ 映到 $M_S^T(H)[p^m]$ 中的类 $\widehat{f}$，使得对于某个 $f \in H_T^\times$，有 $p^m D = \mathrm{div}(f)$，且对所有 $g \in H^{(p^m)_{S,T}}$，$d_m(\widehat{g}) = (div_{S\setminus S_{p\infty}}^{\mathcal{H}}(g) \bmod p^m Y_{S\setminus S_p}(H)\bar{p})$。我们将映射 τ_m 和 d_m 定义良好、且上面的序列正合这一点留给读者验证。此外，我们有如下 $\mathbb{Z}_p[[G]]^-$–模的交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A^T[p^{m+1}]^- & \xrightarrow{\tau_{m+1}} & \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})[p^{m+1}]^- \xrightarrow{d_{m+1}} Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^-/p^{m+1} \\ & & \uparrow & & \iota_m\uparrow \qquad\qquad \times p\uparrow \\ 0 & \longrightarrow & A^T[p^m]^- & \xrightarrow{\tau_m} & \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})[p^m]^- \xrightarrow{d_m} Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^-/p^m \end{array}$$

其中，左侧竖直映射是包含映射，右侧竖直映射由乘以 p 给出。特别地，所有竖直箭头都是单射。

引理 7.6. 若我们对上面的交换图关于 m 取归纳极限，则得到一个 $\mathbb{Z}_p[[G]]^-$–模的正合列

$$0 \longrightarrow A^{T,-} \xrightarrow{\tau} \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^- \xrightarrow{d} Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^- \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0, \tag{7.7}$$

其中 $\tau := (\tau_m)_m$，且 $d := (d_m)_m$。

证明。只需证明映射 d 是满射（尽管一般而言，映射 d_m 未必是满射）。这等价于证明：对于所有 m 和所有 $y \in Y_{S\setminus S_p}(H)\bar{p}$，都存在一个 $n \geq 0$，使得

$$p^n y \mod p^{m+n} Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^- \in \mathrm{Im}(d_{m+n}).$$

固定上述的 m 和 y。由于 $p^\mu A^{T,-}$ 是一个 p–可除群，因此存在一个除子 D，属于 $Y_{\overline{S_{p\infty}}}(H)_p^-$，使得我们在 $A^{T,-}$. 中有如下除子类等式

$$p^\mu \widehat{y} = p^{m+\mu}\widehat{D}.$$

等价地，存在一个元素 $g \in H_T^\times$，使得

$$div^{\mathcal{H}}(g) = p^\mu y - p^{m+\mu} D.$$

注意，这意味着 $g \in H^{(p^{m+\mu})_{S,T}}$，并且

$$d_{m+\mu}(\widehat{g}) = p^\mu y \mod p^{m+n} Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})^-,$$

这意味着 $(p^\mu y$ 模 $p^{m+\mu} Y_{S\setminus S_p}(H)_p^-) \in \mathrm{Im}(d_{m+\mu})$，证毕。 □

注记 7.8. 仿照上述引理证明中的步骤，可以很容易地证明，若 $\mu = 0$，则对于所有 m，映射 d_m 都是满射。

对 (7.7) 取 Pontrjagin 对偶，并注意到由于 $Y_{S\setminus S_p}(H)_p$ 是 $\mathbb{Z}_p$–自由的，我们有自然同构 $(Y_{S\setminus S_p}(H)_p^- \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee \simeq Y_{S\setminus S_p}(H)^{*,}{}_p^-$，从而得到一个 $\mathbb{Z}_p[[G]]^-$–模的正合列

$$0 \longrightarrow Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^{*,-} \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^{\vee,-} \xrightarrow{\tau^\vee} A^{T,\vee,-} \longrightarrow 0. \tag{7.9}$$

结合命题 3.14，上述正合列表明，塞尔默模 $Sel_S^T(H)_p^-$ 与模 $M_S^T(H)^{\vee,-}$ 之间应当存在密切联系。

In事实上，可以验证，对于所有 $n \geq 1$，我们都有定义良好的 $\mathbb{Z}_p[[G]]^-$–双线性配对 gs

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n : Sel_S^T(H_n)_p^- \times \mathcal{M}_S^T(H_n)^- \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \qquad \langle \widehat{\phi}, \widehat{f_m} \rangle := \frac{\phi(f_m)}{p^m},$$

对所有 $\phi \in (H_{n,T}^\times)_p^*$ 以及所有 $f_m \in H^{(p^m)_{n,S,T}}$· 上述双线性配对自然地诱导出 $\mathbb{Z}_p[[G]]^-$–线性态射

$$\Phi_{n,S}^T : Sel_S^T(H_n)_p^- \longrightarrow \mathcal{M}_S^T(H_n)^{\vee,-}, \qquad \Phi_{n,S}^T(\widehat{\phi})(\widehat{f_m}) := \frac{\phi(f_m)}{p^m},$$

对所有 $n \geq 1$, al l $\phi \in (H_n^{\times})_p^*$ 以及所有 $f_m \in H^{(p^m)}{}_{n,\ S,\ T}$· 对所有 $n \geq 1$，我们有显然的交换图

$$\begin{array}{ccc} Sel_S^T(H_{n+1})_p^- & \xrightarrow{\Phi_{n+1,S}^T} & \mathcal{M}_S^T(H_{n+1})^{\vee,-} \\ \downarrow{\scriptstyle res_n} & & \downarrow{\scriptstyle j_n^\vee} \\ Sel_S^T(H_n)_p^- & \xrightarrow{\Phi_{n,S}^T} & \mathcal{M}_S^T(H_n)^{\vee,-} \end{array}$$

现在，若我们对上面的图表关于 n 取射影极限，并考虑同构（7.3），便得到一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–线性态射

$$\Phi_S^T : Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- \longrightarrow \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})_p^{\vee,-}, \qquad \Phi_S^T := (\Phi_{n,S}^T)_n,$$

其性质列于以下命题中。

命题 7.10. 对所有满足 $S_{p\infty}(F) \subseteq S$ 的有限不相交集 S和 T，以下结论成立。

(1) 我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的交换图，其各行均为正合行

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^{*,-} & \longrightarrow & Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- & \longrightarrow & A^{T,\vee,-} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle =}\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_S^T} & & {\scriptstyle =}\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^{*,-} & \xrightarrow{d^\vee} & \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^{\vee,-} & \xrightarrow{\tau^\vee} & A^{T,\vee,-} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中，顶行为命题 3.14 中的正合列，底行为上文的 (7.9)。

(2) 映射 Φ_S^T 诱导出 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的一个自然同构

$$\Phi_S^T : Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- \simeq \mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^{\vee,-}.$$

(3) 若 $\mu := \mu_{H,p} = 0$，则我们有一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的自然同构

$$Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^-)^*.$$

证明。(1) 部分可以 通过使用所有相关映射的显式定义即可轻易验证。我们将其留给读者 t
作为一项 练习。第（2）部分是由蛇引理和第（1）部分直接得到的推论。

现在，假设 $\mu = 0$。由于 $A^{T,-}$ 是 p–可除的、扭的且具有有限余秩，(7.7) 表明 $\mathrm{M}_S^T(\mathrm{H})^-$ 也具有这些性质（即它同构于有限多个 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 的副本的直和。）因此，存在一个自然同构，将 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模

$$\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^{-,\vee} \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^-)^*, \qquad \phi \mapsto \overline{\phi}, \quad \overline{\phi}((x_m)_m) = (p^m \widetilde{\phi(x_m)} \mod p^m)_m,$$

对所有 $\phi \in \mathrm{M}_S^T(\mathrm{H})^{-,\vee}$ 以及所有 $(x_m)_m \in \varprojlim_m \mathrm{M}_S^T(\mathrm{H})^-[p^m] = T_p(\mathrm{M}_S^T(\mathrm{H})^-)$ 均成立，其中 $\widetilde{\phi(x_m)}$ 是 $\phi(x_m)$ 到 $\frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p$ 的一个提升。现在，第（3）部分由第（2）部分推出。□

推论 7.11. 若 $S_{p\infty}(F) \subseteq S$, $S_{ram}(\mathrm{H}/F) \subseteq S \cup T$且 $T \not\ni S_{ram}(\mathrm{H}/F)$，则以下结论成立。

(1) $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模 $\mathrm{M}_S^T(\mathrm{H})^\vee$, – 是二次呈示的，且投射维数为 1。(2) Fitting 理想$_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(\mathrm{M}_S^T(\mathrm{H})^\vee,\ -) = (\Theta_S^T(H_\infty/F))$。

证明。此结论直接由定理 6.30 和命题 7.10 的第 (2) 部分得出。 □

7.2. Greither–Popescu 等变主猜想。在 [11], 假设 $\mu = 0$ 成立并且 $S_{ram}(\mathrm{H}/F) \subseteq S$ 且 $T \neq \varnothing$ 的条件下，作者引入抽象的 p–adic 1–动机

$$\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-} := [Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{H})_p^- \xrightarrow{\widehat{\mathrm{div}}} A^{T,-}],$$

（相关定义见同上 §3。）并证明其 p–进塔特模 $T_p(\mathrm{M}^{\mathcal{H}}{}_{,S\ T\ ,})$ 的一个等变主猜想，其中该模被视为 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模。（见同上定理 4.6 和 5.6。）本节中，我们建立模 $T_p(\mathrm{M}^{\mathcal{H}}{}_{,S\ T\ ,})$ 与 $Sel_S^T(\mathrm{H})_p^-$ 之间的联系，并证明同上定理 4.6 和 5.6 是定理 6.30 的直接推论。本节中，我们始终假设 $\mu = 0$,$S_{ram}(\mathrm{H}/F) \subseteq S$ 和 $T \neq \varnothing$。

Pr命题 7.12. 若 $\mu = 0$, $S_{ram}(\mathrm{H}/F) \subseteq S$ 且 $T \neq \varnothing$，则有一个典范同构

$$Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- \simeq T_p(\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-})^*$$

在 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的范畴中。

证明。由 [11]，中的推论 3.4 可知，我们有如下 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的交换图

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}_{S,T}^{(p^{m+1})}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^{m+1}})^- & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-}[p^{m+1}] \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_m} & & \downarrow{\scriptstyle \times p} \\ (\mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^m})^- & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-}[p^m], \end{array}$$

其中，映射 π_m 在注 7.4 中有描述，而水平同构（及其逆映射）则在同上文献的命题 3.2 中得到显式构造。结合注 7.4 中最后一个同构，可得 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$–模的典范同构

$$\varprojlim_m (\mathcal{H}_{S,T}^{(p^m)}/(\mathcal{H}_T^\times)^{p^m})^- \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^-) \simeq T_p(\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-}).$$

结合命题 7.10(3)，上面的最后一个同构给出

$$Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- \simeq T_p(\mathcal{M}_S^T(\mathcal{H})^-)^* \simeq T_p(\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-})^*,$$

由此完成证明。 □

现在，我们已准备好从定理 6.30 推导出 [11] 的主要结果。

定理 7.13（Greither-Popescu, [11] 中的定理 4.6、5.6）。若 $\mu = 0$, $S_{ram}(\mathrm{H}/F) \subseteq S$ 且 $T \neq \varnothing$，则以下结论成立。

(1) 投射维数$_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}T_p(\mathrm{M}^{\mathcal{H},S\,\bar{T}},) = 1$.(2)

Fitting 理想$_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}T_p(\mathrm{M}^{\mathcal{H},S\,\bar{T}},) = (\Theta_S^T(\mathrm{H}/F))$。

证明。由定理 6.30(1)、命题 7.12 以及 [11]，中的命题 7.2(3)，我们有 e

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}T_p(\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-}) = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}T_p(\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-})^* = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}Sel_S^T(\mathcal{H})_p^- = (\Theta_S^T(\mathcal{H}/F)).$$

此外，由于 $\Theta_S^T(\mathrm{H}/F)$ 在 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$ 中不是零因子（见命题 4.6），命题 4.9 推出

$$\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}T_p(\mathcal{M}_{S,T}^{\mathcal{H},-}) = 1,$$

证毕。 □

7.3. 精化 Coates–Sinnott 猜想。设 K/k 是数域的阿贝尔扩张，其伽罗瓦群为 G。我们固定 k 中满足通常的 $S_{ram}(K/k) \cup S_\infty(k) \subseteq S$ 条件的有限集 S，并令 $K_i(\mathrm{O}_{K,\,S})$ 表示环 $\mathrm{O}_{K,\,S}$ 的 S 整数的 Quillen K 群，对所有 $i \geq 0$ 均如此。提醒读者（参见 [11] 中的第6节及其中的参考文献），对所有 i, $K_i(\mathrm{O}_{K,\,S})$ 都是有限生成 $\mathbb{Z}[G]$ 模，并且对所有偶数 $i \geq 2$，它都是有限的。对所有 $i \geq 0$，我们用 $K_i(\mathrm{O}_{K,\,S})^{tors}$ 表示 $K_i(\mathrm{O}_{K,\,S})$ 的挠子群。

此外，我们沿用 [11] 第6节的做法，并对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 定义幂等元 t

$$e_n(K/k) := \begin{cases} \prod_{v \in S_\infty(k)} \frac{1+(-1)^n \sigma_v}{2}, & \text{if } k \text{ is totally real,} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

在 $\mathbb{Z}[1/2][G]$ 中考察，其中 σ_v 是 G 中 v 的弗罗贝尼乌斯元素。回顾一下，

$$e_n(K/k) \cdot \Theta_{S,K/k}(1-n) = \Theta_{S,K/k}(1-n),$$

并且，对于所有 $n \geq 2$, $\Theta_{S,\,K/k}(1-n)$ 在 $e_n(K/k)\mathbb{Q}[G]$ 中不是零因子。（参见[11]第6节中的等式 (35)。）因此，如果 T 是 k 中一个非空的有限素数集，且与 $S \cup S_p(F)$ 不相交，那么$\Theta_{S,\,K/k}^T(1-n)$ 也是 $e_n(K/k)\mathbb{Z}_p[G]$ 中的非零因子，因为

$$\Theta_{S,K/k}^T(1-n) = \delta_T(1-n)\Theta_{S,K/k}(1-n), \qquad \text{for } \delta_T(1-n) := \prod_{v \in T}(1 - \sigma_v^{-1} \cdot Nv^n)$$

并且，对于所有 $n \geq 1$， $\delta_T(1-n)$ 显然是 $\mathbb{Z}_p[G]$ 中的非零因子。

本节中，我们沿用 [11] 第6节提出的策略，并利用定理 6.30，对 Coates–Sinnott 猜想的以下精化给出无条件证明，但不涉及其 2-部分。

The理 7.14（精化 Coates–Sinnott 猜想）。对于上述 $(K/k, S)$，我们有 ve

$$(Fitt_{\mathbb{Z}_p[G]} K_{2n-1}(\mathcal{O}_{K,S})_p^{tors}) \cdot \Theta_{S,K/k}(1-n) = e_n(K/k) \cdot Fitt_{\mathbb{Z}_p[G]} K_{2n-2}(\mathcal{O}_{K,S})_p$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 及所有素数 $p > 2$ 均成立。

注7.15。原始的 Coates–Sinnott 猜想断言，上述定理中等式左侧包含于 $Ann_{\mathbb{Z}_p[G]} K_{2n-2}(\mathrm{O}_{K,\ S})_p$，对所有素数 p 均成立。显然，上述定理在素数 $p > 2$ 处蕴含这一原始结论。

正如第6节中详细讨论的，Soul´e 和 Dwyer-Friedlander 的工作（20世纪70年代末至80年代初）导出了规范的满射 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–线性态射

$$ch^i_{p,n} : K_{2n-i}(O_{K,S}) \twoheadrightarrow H^i_{et}(\mathcal{O}_{K,S}[1/p], \mathbb{Z}_p(n)), \qquad \text{for all } i = 1, 2, \quad n \geq 2, \quad p > 2,$$

这些映射称为 p–进 Chern 特征映射。Quillen–Lichtenbaum 和 Dwyer–Friedlander 猜测它们是同构，而 Rost 和 Vojevodsky 最近的工作证实了这一点。因此，上述定理 7.14 等价于以下 étale 上同调版本。

定理 7.16. 对于上述 $(K/k, S, n, p)$，有等式

$$(Fitt_{\mathbb{Z}_p[G]} H^1_K(S,p,n)^{tors}) \cdot \Theta_{S,K/k}(1-n) = e_n(K/k) \cdot Fitt_{\mathbb{Z}_p[G]} H^2_K(S,p,n),$$

其中 $H^i_K(S,p,n) := H^i_{et}(\mathrm{O}_{K,S}[1/p], \mathbb{Z}_p(n))$，对所有 $i = 1,\ 2$。

在 [11] 的第6节中证明了（参见同上引理6.12、6.13、6.14、6.15），只需在以下假设下证明上述定理。

- K 是 CM域，且 k 是全实的。
- $S_p(F) \subseteq S$。
- $\boldsymbol{\mu}_p \subseteq K$，其中 $\boldsymbol{\mu}_p$ 是 p的单位根集合。（等价地，$\mathrm{K} := K(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ 是 K的圆分$\mathbb{Z}_p$扩张。）

在这些假设下，并进一步假设岩泽 μ不变量 $\mu_{K,\ p}$ 消失， [11] 的作者发展出一套技术工具，使他们能够将模 $T_p(\mathrm{M}^{\mathcal{K}}_{,\ S\ \bar{T}\ ,\ })$ 与上同调群 $H^i_K(S,p,n)$ 联系起来，并利用上述定理 7.13 针对数据 $(K/k, S, p)$ 所提供的信息以及变化的集合 T，推导出定理 7.16。

在本节中，我们去掉假设 $\mu_{K,\ p} = 0$，并不再使用模 $T_p(\mathrm{M}^{\mathcal{K}}_{,\ S\ \bar{T}\ ,\ })$ 和定理 7.13，而是将模 $Sel^T_S(\mathrm{K})_{\bar{p}}$ 和我们的定理 6.30 输入到 [11] 第6节中发展出的技术工具中，从而无条件地证明定理 7.16。为此，从现在起，我们固定上述数据 $(K/k, S, p, n)$，假设上面列出的三个假设成立，并为进一步简化记号，令:

$$e_n := \widetilde{e_n(K/k)} := \frac{1 + (-1)^n j}{2}, \qquad H^i_K := H^i_K(S,p,n), \text{ for } i = 1, 2,$$

其中 j 是 G 中的复共轭。注意，我们有环同构

$$e_n \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]] \simeq \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]/(1 + (-1)^n j), \qquad t_{1-n} : \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^- \simeq e_n \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]],$$

其中 $t_m : \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]] \simeq \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$ 是连续的 $\mathbb{Z}_p$–代数同构，使得

$$t_m(\sigma) = \kappa(\sigma)^m \cdot \sigma, \qquad \text{for all } \sigma \in \mathcal{G},\ m \in \mathbb{Z},$$

并且 $\kappa : \mathrm{G} \to \mathbb{Z}_p^\times$ 是 p–进圆分特征。请始终牢记，与之前一样，我们所有的对偶都赋予了协变伽罗瓦作用。

这一过程的第一步是建立 ´étale 上同调群 H^2_K 与塞尔默群 $Sel^{\mathcal{Q}}_S(\mathrm{K})^-_p$ 之间的联系。这由下一个命题的第 (1) 部分给出。

命题 7.17。在上述假设下，若令 $\Gamma := Gal(\mathrm{K}/K)$，则有以下典范的$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模同构。

(1) $e_n \cdot H^2_K \simeq (Sel^{\varnothing}_S(\mathsf{K})^{-}_p(n-1)_\Gamma)^\vee$。

(2) $e_n \cdot (H^1_K)^{tors} = (H^1_K)^{tors} \simeq \mathbb{Z}_p(n)_\Gamma$。

证明。第 (2) 部分即为 [11] 中的命题 6.17(2)。

为了证明第 (1) 部分，我们约定如下记号：若 M 是一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模，则 $\overline{M}$ 是一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模，它作为 $\mathbb{Z}_p$–模与 M 相同，但赋予 G 逆变作用

$$(\sigma, m) \mapsto \sigma^{-1} \cdot m, \qquad \text{for all } \sigma \in \mathcal{G},\ m \in M.$$

恒等映射诱导出 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模 $\overline{M} \simeq M$、$\overline{M^\vee} \simeq (\overline{M})^\vee$、$\overline{M^*} \simeq (\overline{M})^*$、$\overline{(M)_\Gamma} \simeq \overline{M_\Gamma}$ 和 $M(m) \simeq \overline{M}(-m)$ 之间的同构，对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 均成立。

令 $\mathfrak{X}_S$ 表示 K 的极大阿贝尔 pro-p 扩张 K_S/K 的伽罗瓦群，该扩张在 S 之外非分歧。由于 $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} \subseteq \mathsf{K}$，$\mathsf{K}_S/\mathsf{K}$ 是一个库默尔扩张，并且我们有一个完美的 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–双线性库默尔配对（另见 [11] 中的 §3.3）

$$\mathfrak{X}_S \times \mathcal{M}^{\varnothing}_S(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1) = \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}, \qquad (\sigma, \widehat{x}) \mapsto \frac{\sigma(x^{1/p^m})}{x^{1/p^m}},$$

对所有 $m \geq 1$、所有 $\widehat{x} \in \mathsf{M}^{\varnothing}_S(\mathsf{K})[p^m]$（即 $x \in \mathsf{K}^{(p^m)_{S,\varnothing}}$ 以及 $\widehat{x} \in K^{(p^m)_{S,\varnothing}}/\mathsf{K}^{\times p^m}$），以及所有 $\sigma \in \mathfrak{X}_S$。上述完美配对给出一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模同构

$$\overline{\mathfrak{X}^+_S(-1)} \simeq \mathcal{M}^{\varnothing}_S(\mathcal{K})^{-,\vee}.$$

Wh结合命题 7.10(2)，这便得到 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模同构 s

$$\overline{\mathfrak{X}^+_S(-1)} \simeq Sel^{\varnothing}_S(\mathcal{K})^{-}_p, \qquad \overline{\mathfrak{X}^+_S(-n)} \simeq Sel^{\varnothing}_S(\mathcal{K})^{-}_p(n-1).$$

结合 [11]，中命题 6.17(1) 的第一个同构，可得

$$e_n \cdot H^2_K \simeq \overline{(\mathfrak{X}^+_S(-n)_\Gamma)^\vee} \simeq \left(\left(\overline{\mathfrak{X}^+_S(-n)}\right)_\Gamma\right)^\vee \simeq (Sel^{\varnothing}_S(\mathcal{K})^{-}_p(n-1)_\Gamma)^\vee,$$

由此完成了第 (1) 部分的证明。

注意，同上文献中的命题 6.17(1) 的第一个同构写作

$$e_n \cdot H^2_K \simeq (\mathfrak{X}^+_S(-n)_\Gamma)^\vee.$$

这是因为同上文献第6节中的对偶空间赋予了反变伽罗瓦作用，而这里我们将其视为赋予了协变伽罗瓦作用。还要注意，同上文献中还指出，$(\mathfrak{X}^+(-n)_\Gamma)^\vee \simeq (\mathfrak{X}^+(-n)^*)_\Gamma$。这一同构仅在 $\mu = 0$ 时成立（证明见同上文献），而我们这里并未作此假设。□

接下来，我们固定一个位于 F 中且与 S 不相交的有限非空非阿基米德素数集合 T。为简单起见，我们假设 $T = \{v\}$，尽管以下论证对任意大小的集合 T 均成立。与 [11], 第 2 节中一样，我们考虑 $\mathbb{Z}[\mathsf{G}]$–模（在同上中记作 $\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$）

$$\Delta_T(\mathcal{K}) := \bigoplus_{w \in T(\mathcal{K})} \kappa(w)^\times \simeq \left(\kappa(\overline{v})^\times \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{G}_v]} \mathbb{Z}[\mathcal{G}]\right)$$

其中 $\kappa(w)$ 是 K 中素数 w 的剩余域，$\overline{v}$ 是 K 中一个固定的、位于 v 上方的素数，而 G_v 是 G 中 v 的分解群。注意，由于 $S_p \cap T = \varnothing$ 和 $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} \subseteq \mathsf{K}$，$\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ 通过模 w 约化映射嵌入 $\kappa(w)^\times$，且该嵌入将 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}_v]]$–模 $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ 同构地对应到 $\kappa(w)^\times$ 的 p–主部分 $\kappa(w)^\times_p$，对所有 $w \in T(\mathsf{K})$ 均成立。（参见同上中引理 2.8 的证明。）因此，我们得到一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模的同构

$$\Delta_T(\mathcal{K})_p \simeq \left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]} \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]\right).$$

因此，$\Delta_T(\mathsf{K})_p$ 是一个可除的、p–扭模，其余秩为 $|T(\mathsf{K})|$，并且包含 $\mu_{p^\infty} = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$（通过模 w 的对角嵌入，对所有 $w \in T(\mathsf{K})$均成立）。因此，我们有一个抽象群的同构

$$\Delta_T(\mathcal{K})^{-}_p \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\delta^-_{T,\mathcal{K}}}, \qquad \text{where } 1 \leq \delta^-_{T,\mathcal{K}} \leq |T(\mathcal{K})|.$$

因此，我们得到一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathsf{G}]]$–模的同构

$$\Delta_T(\mathcal{K})^{\vee,-}_p \simeq T_p(\Delta_T(\mathcal{K}))^{*,-}. \tag{7.18}$$

现在，我们有一个典范的 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模正合列（参见同上第 2 节）

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{d_T} \Delta_T(\mathcal{K})_p^- \longrightarrow A^{T,-} \xrightarrow{\pi_T} A^{\varnothing,-} \longrightarrow 0,$$

其中， π_T 将除子 D 在 $A^{T,-}$ 中的类 $\widehat{D}$ 映射到 $A^{\varnothing,-}$中的类 D ，而 d_T 是对角模w 嵌入，其中 $w \in T(\mathrm{H})$。取庞特里亚金对偶并使用（7.18）后，我们得到一个$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模的正合列

$$0 \longrightarrow A^{\varnothing,\vee,-} \xrightarrow{\pi_T^\vee} A^{T,\vee,-} \longrightarrow T_p(\Delta_T(\mathcal{K}))^{*,-} \xrightarrow{d_T^\vee} \mathbb{Z}_p(1)^* \longrightarrow 0.$$

现在，我们有一个显然的 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{K})_p^{*,-} & \longrightarrow & Sel_S^{\varnothing}(\mathcal{K})_p^- & \longrightarrow & A^{\varnothing,\vee,-} & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\| = \mathrm{id} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \pi_T^\vee & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_{S\setminus S_p}(\mathcal{K})_p^{*,-} & \longrightarrow & Sel_S^{T}(\mathcal{K})_p^- & \longrightarrow & A^{T,\vee,-} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中，中间的竖直映射由包含映射$\mathrm{K}_T^\times \subseteq \mathrm{K}^\times$. 诱导。现在，对上图应用蛇引理，将其与紧邻上方的正合列结合，并注意到 $\mathbb{Z}_p(1)^* \simeq \mathbb{Z}_p(1)$（因为对偶空间赋予协变 G 作用），我们得到一个 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模的正合列

$$0 \longrightarrow Sel_S^{\varnothing}(\mathcal{K})_p^- \longrightarrow Sel_S^{T}(\mathcal{K})_p^- \longrightarrow T_p(\Delta_T(\mathcal{K}))^{*,-} \xrightarrow{d_T^\vee} \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow 0. \tag{7.19}$$

这是同上文中正合列（15）的对偶的无条件类比。若将上述正合列与 $\mathbb{Z}_p(n-1)$张量积，我们便得到以下正合列

$$0 \longrightarrow Sel_S^{\varnothing}(\mathcal{K})_p^-(n-1) \longrightarrow Sel_S^{T}(\mathcal{K})_p^-(n-1) \longrightarrow (T_p(\Delta_T(\mathcal{K}))^-(n-1))^* \xrightarrow{d_T^\vee(n-1)} \mathbb{Z}_p(n) \longrightarrow 0, \tag{7.20}$$

这是同上文献中正合列 (39) 的对偶的无条件类比。现在，我们可以通过将正合列 (7.20) 代入 [11] 中提出的工具（同上文献中正合列 (39) 后紧接的段落），来证明定理 7.16。

定理 7.16 的证明。同上文献，思路是在正合列 (7.20) 中取 Γ–余不变量，证明由此得到的 Γ–余不变量列是正合的、所有项都是有限的，且中间两项的投射维数为 $_{\mathbb{Z}_p[G]} \le 1$ ，然后应用引理 2.11 推导出所需的 Fitting 理想等式。我们首先指出，对于所有有限生成的 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$–模 X，有以下等式:

$$e_n(X^-(n-1)) = X^-(n-1), \qquad Fitt_{e_n\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]}(X^-(n-1)) = t_{1-n}(Fitt_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}X^-), \tag{7.21}$$

其中 第一个显然成立，第二个则直接由同上文献中的引理 7.4(2) 得出。

引理 7.22. 对于上述 $(K/k, S, T, p, n)$， 令 $N := Sel_S^T(\mathrm{K})_p^-(n-1)$。则:

(1) $Fitt_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}(N_\Gamma) = (\Theta_{S,\ K/k}^T(1-n))$. (2) pd

$_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}N_\Gamma \le 1$.(3) N_Γ 在 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 上有限生成且有二次呈示。

证明。定理 6.30(1) 与上文的 (7.21) 结合，给出一个等式

$$Fitt_{e_n\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]}N = (t_{1-n}(\Theta_S^T(\mathcal{K}/k))).$$

然而，若 $\pi : \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]] \to \mathbb{Z}_p[G]$ 是由伽罗瓦限制给出的 $\mathbb{Z}_p$–代数满射，则上述等式和其中的引理 5.14(2) 给出

$$Fitt_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}(N_\Gamma) = \pi(Fitt_{e_n\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]}N) = (\pi \circ t_{1-n}(\Theta_S^T(\mathcal{K}/k))) = (\Theta_{S,K/k}^T(1-n)),$$

由此完成了 (1) 的证明。

由于 $\Theta_S^T(1-n)$ 在 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 中不是零因子， N_Γ 在 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 上有限生成（因为 N 在 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^-$ 上有限生成），且 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 是半局部环，命题 4.9 和第 (1) 部分推出第 (2) 部分以及第 (3) 部分中的二次呈示结论。

由（1）可得，$\Theta_{S,\ K/k}^T(1-n)$湮灭了 N_Γ。因此， N_Γ 同构于由有限个副本的直和取商所得的模。

$$e_n\mathbb{Z}_p[G]/(\Theta_{S,K/k}^T(1-n)),$$

由于$\Theta_{S,\ K/k}^{T}(1-n)$不是 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 中的零因子，且 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 是 $\mathbb{Z}_p$的有限整扩张，因此显然该对象是有限的。至此，部分（3）的证明完成。□

引理 7.23. 对于上文所述的 $(K/k,S,T,p,n)$，设 $M := T_p(\Delta_T(\mathrm{K}))^{-}(n-1)$。那么：

(1) $Fitt_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}(M^*)_\Gamma = (e_n\delta_T(1-n))$。(2) $\mathrm{pd}_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}(M^*)_\Gamma \le 1$.

(3) $(M^*)_\Gamma$ 在 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 上有限且为二次呈示。

证明。首先注意，将上面的陈述中的 M^* 替换为 M 后，(1)、(2) 和 (3) 都成立。这些结论都直接源于 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$–模的同构

$$M_\Gamma \simeq e_n\mathbb{Z}_p[G]/e_n\delta_T(1-n). \tag{7.24}$$

以及 $e_n\delta_T(1-n)$ 在 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 中不是零因子这一事实。参见 [11] 第6节中 (39) 正下方所示的同构及其中由此得到的论证。) 现在，由于 M 是 $\mathbb{Z}_p$–自由的且 M_Γ 有限，loc.cit 中的引理 6.16 给出了 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$–模的一个同构

$$(M^*)_\Gamma \simeq (M_\Gamma)^\vee.$$

另一方面，环 $R := e_n\mathbb{Z}_p[G]/e_n\delta_T(1-n)$ 是一个有限的半局部戈伦斯坦 $\mathbb{Z}_p$–代数（作为 $\mathbb{Z}_p[G]$ 的有限商）。因此，我们有如下 R–模的同构

$$(M_\Gamma)^\vee \simeq \mathrm{Hom}_R(M_\Gamma, R) \simeq R,$$

其中，第一个同构由 [17] 的附录中的命题 4 得出，第二个同构由 (7.24) 得出。最后列出的三个同构表明

$$(M^*)_\Gamma \simeq M_\Gamma$$

作为 R–模，并因此也作为 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$–模，这就完成了证明。 □

接下来，我们将在正合列 (7.20) 中取 Γ–余不变量。采用前两条引理中的记号，注意到由于 M^* 和 $\mathbb{Z}_p(n)$ 是有限秩 $\mathbb{Z}_p$–自由模，且 $(M^*)_\Gamma$ 和 $\mathbb{Z}_p(n)_\Gamma$ 是有限的，我们有

$$(M^*)^\Gamma = 0, \qquad \mathbb{Z}_p(n)^\Gamma = 0, \qquad (\ker d_T^\vee(n-1))^\Gamma = 0,$$

前两个等式由 [11] 的引理 6.16 得出，第三个等式则由第一个等式得出。结合这一事实与命题 7.17 可立即推出，在 (7.20) 中取 Γ–余不变量时，我们得到一个 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$–模的长正合列

$$0 \to (e_nH_K^2)^\vee \to N_\Gamma \to (M^*)_\Gamma \to (H_K^1)^{tors} \to 0, \tag{7.25}$$

其各项均为有限的，且中间两项的投射维数为 $\mathrm{pd}_{e_n\mathbb{Z}_p[G]} \le 1$ （见引理 7.22 和引理 7.23）。现在，由于环 $R := e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 是一个 $\mathbb{Z}_p$–代数，它作为 $\mathbb{Z}_p$–模是有限秩自由的，并且相对于 $\mathbb{Z}_p$ 是戈伦斯坦的，因此我们可以将引理 2.11 应用于上述正合列，并结合引理 7.22(1) 和引理 7.23(1)，得到

$$\text{拟}\text{会}_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}(e_nH_K^2)\cdot(e_n\delta_T(1-n)) = (\mathrm{Fitt}_{e_n\mathbb{Z}_p[G]}(H_K^1)^{tors})\cdot\Theta_{S,K/k}(1-n)\cdot(e_n\delta_T(1-n))$$

由于 $e_n\delta_T(1-n)$ 在 $e_n\mathbb{Z}_p[G]$ 中不是零因子，我们可以将其约去，得到

$$e_n\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(H_K^2) = (\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(H_K^1)^{tors})\cdot\Theta_{S,K/k}(1-n),$$

rec由此可知 $e_n\Theta_{S,\ K/k}(1-n) = \Theta_{S,\ K/k}(1-n)$。定理 7.16 得证。 . □

7.4. Burns–Kurihara–Sano 猜想。本节中，我们证明定理 6.28 的一个更强版本，该版本蕴含 Burns–Kurihara–Sano 猜想。在下文中，$(H/F,S,T,p)$ 与定理 6.28 中的定义相同。我们的主要目标是将假设 $\mathrm{Hyp}(H_\infty/F)_p$ 替换为较弱的假设 $\mathrm{Hyp}(H/F)_p$，区别在于，只要求 S 包含在 H/F 中分歧的 p–进素数集 $S_p^{ram}(H/F) := S_p(F)\cap S_{ram}(H/F)$，而非整个 p–进素数集 $S_p(F) = S_p(F)\cap S_{ram}(H_\infty/F)$。更确切地说，我们的目标是证明以下结论。

定理 7.26。以下结论成立。

(1) 若 p 是奇素数，且 $(H/F,S,T,p)$ 满足 $\mathrm{Hyp}(H/F)_p$，则有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-) = (\Theta_S^T(H/F)).$$

(2)（Burns–Kurihara–Sano 猜想。）若 $(H/F,S,T)$ 对所有奇素数p 均满足 Hyp$(H/F)_p$（例如，若 $S_{ram}(H/F)\subseteq S$，且 $H_T^\times$ 没有与 2 互素的扭），则有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(Sel_S^T(H)^-)=(\Theta_S^T(H/F)).$$

证明。显然，(2) 是 (1) 的推论。为证明 (1)，固定满足假设 Hyp$(H/F)_p$ 的 $(K/k,S,T,p)$。令 $S_p^{ur}(H/F):=S_p(F)\smallsetminus S_{ram}(H/F)$。注意，只需在假设 $T\cap S_p^{ur}(H/F)=\varnothing$. 的情况下证明所要求的理想等式。事实上，若并非如此，则令 $T':=T\smallsetminus S_p^{ur}(H/F)$，并注意到 $(K/k,S,T',p)$ 仍满足 Hyp$(H/F)_p$。现在，引理 4.1 在[6] 表明，我们有理想等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-)=\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^{T'}(H)_p^-),\qquad(\Theta_S^T(H/F))=(\Theta_S^{T'}(H/F)),$$

这表明，对于 $(H/F,S,T',p)$，(1) 中的等式等价于对于 $(H/F,S,T,p)$ 的同一等式。因此，从现在起，我们假设 $T\cap S_p^{ur}(F)=\varnothing$。

令 $S_*:=S\cup S_p^{ur}(H/F)$ 和 $u_p(S,H/F):=\prod_{v\in S_*\smallsetminus S}(1-\sigma_v^{-1})$。由于 $(H/F,S_*,T,p)$ 满足 Hyp$(p)(H_\infty/F)$，定理 6.28 给出了 $\mathbb{Z}_p[G]^-$–理想的一个等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_{S_*}^T(H)_p^-)=(\Theta_{S_*}^T(H/F))=u_p(S,H/F)\cdot(\Theta_S^T(H/F)).\tag{7.27}$$

另一方面，我们有一个 $\mathbb{Z}_p[G]^-$–模的正合列

$$0\to(Y_{S_*\smallsetminus S}(H)_p^-)^*\to Sel_{S_*}^T(H)_p^-\to Sel_S^T(H)_p^-\to 0,$$

（见 (3.3)），其中最右边的非零模是二次呈示的。（见引理 5.18。）因此，引理 2.10 和引理 4.8(2) 给出了一个等式

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_{S_*}^T(H)_p^-)=u_p(S,H/F)\cdot\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-).\tag{7.28}$$

$\mathbb{Z}_p[G]^-$–理想的等式 (7.27) 和 (7.28) 表明

$$u_p(S,H/F)\cdot\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-)=u_p(S,H/F)\cdot(\Theta_S^T(H/F)).\tag{7.29}$$

因此，要证明第 (1) 部分中的等式，就需要约去上述等式中的 $u_p(S,H/F)$–因子。遗憾的是，一般而言，这个因子是 $\mathbb{Z}_p[G]^-$ 中的零因子，使得这个问题相当困难。我们将运用如今称为“Taylor–Wiles 素数方法”的方法来消去这个因子；该方法最初由 Wiles 在 [26] 提出，随后由 Greither 在 [8] 第 §4 节中进一步完善。我们分两步进行。

步骤 1。 首先，我们打算证明，在上述假设下，总有一个包含关系 n

$$(\Theta_S^T(H/F))\subseteq\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(Sel_S^T(H)_p^-).\tag{7.30}$$

沿用 [8], 第 4 节的做法，我们给出以下定义。

定义 7.31。若存在 $v\in S_p(F)$，使得 $j\notin G_v(H/F)$，或者等价地，若存在一个在 H/H^+ 中完全分裂的 $v\in S_p(F)$，其中 $H^+:=H^{j=1}$，则称奇素数 p 为 H/F–坏的。不属于 H/F–坏的奇素数称为 H/F–好的。

注 7.32。注意，若素数 $p>2$ 是 H/F–好的，那么对于所有 $v\in S_p^{ur}(H/F)$，$(1-\sigma_v^{-1})$ 都是 $\mathbb{Z}_p[G]^-$ 中 $(1-j)$ 的一个除子。由于 $(1-j)$ 在 $\mathbb{Z}_p[G]^-$ 中可逆， $u_p(S,H/F)$ 在 $\mathbb{Z}_p[G]^-$ 中也可逆。因此，等式 (7.29) 推出所需结论。

根据上述注记，我们可以且将假设 p 是 H/F–坏的。以下结论是在 [8], 中作为切博塔廖夫密度定理的一个应用证明的。（参见同上中的命题 4.1，并注意，证明中从未用到 H/F（同上中为 K/F）是一个“良好”扩张这一假设。）

命题 7.33（Greither [8]）。设 $N\in\mathbb{Z}_{>0}$。那么，存在无穷多个素数 $r>2$，使得：

(1) $r\equiv 1$ 模 p^N。(2) r 是 H/F–良好的。(3) 弗罗贝尼乌斯态射 $\sigma_p(E/\mathbb{Q})$ 生成 $G(E/\mathbb{Q})$，其中 $E\subseteq\mathbb{Q}(\mu_r)$ 满足 $[E:\mathbb{Q}]=p^N$。

接下来，我们固定两个整数 $N,M\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得

$$N-M\geq\mathrm{ord}_p(|G|\cdot f),\tag{7.34}$$

其中 f 是所有 $v \in S_p(F)$ 的剩余次数 $f(v/p) := [\mathsf{O}_F/v : \mathbb{F}_p]$ 的最小公倍数。此外，对于所选的整数 N，我们选取一个如命题 7.33 中所述的奇素数 r，它满足以下附加假设（仅排除有限多个选择）：

$$r \notin S_{ram}(H/\mathbb{Q}), \qquad S_r(F) \cap (S \cup T) = \varnothing.$$

作出这些选择后，我们取复合域 $H' := H \cdot E$，其中 E 是命题 7.33(3) 中所述的唯一全实域，并注意到 H'/F 是 F 的一个阿贝尔 CM 扩张，其伽罗瓦群为

$$G(H'/F) \simeq G \times \Delta, \qquad \text{where } \Delta := G(E/\mathbb{Q}) = \langle \sigma_p(E/\mathbb{Q}) \rangle \simeq \mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}.$$

也容易看出 $S_p^{ur}(H'/F) = S_p^{ur}(H/F)$，并且，若我们设

$$S' := S \cup S_r(F) \text{ (disjoint union)}, \qquad S'_* := S' \cup S_p^{ur}(F) = S_* \cup S_r(F),$$

那么 $(H'/F, S', T, p)$ 满足假设 Hyp$(H'/F)_p$，而 $(H'/F, S'_*, T, p)$ 满足假设 Hyp$(H'_\infty/F)_p$。因此，我们得到一个与 (7.29) 类似的 $\mathbb{Z}_p[G(H'/F)]^-$–理想等式：

$$u_p(S', H'/F) \cdot \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G']^-}(Sel_{S'}^T(H')_p^-) = u_p(S', H'/F) \cdot (\Theta_{S'}^T(H'/F)), \tag{7.35}$$

其中 $u_p(S', H'/F) := \prod_{v \in S'_* \smallsetminus S'} (1 - \sigma_v(H'/F)^{-1})$。

若 $\nu \in \mathbb{Z}_p[\Delta] \subseteq \mathbb{Z}_p[G(H'/F)]^-$ 由下式给出

$$\nu := 1 + \sigma_p(E/\mathbb{Q})^{p^{N-M}} + (\sigma_p(E/\mathbb{Q})^{p^{N-M}})^2 + \cdots + (\sigma_p(E/\mathbb{Q})^{p^{N-M}})^{p^M-1},$$

则由（7.34）可立即推出以下结论，证明见 [8]（参见同上命题 4.6）。

命题 7.36（Greither [8]）。将元素 $u_p(S', H'/F) \in \mathbb{Z}_p[G(H'/F)]^-$ 投影到 $\mathbb{Z}_p[G(H'/F)]^-/\nu$后，它成为一个非零因子。

为简便起见，令 $R := \mathbb{Z}_p[G]^-$, $R' := \mathbb{Z}_p[G(H'/F)]^-$。注意，作为 ν 定义的直接推论，典范满环同态 $\rho : R' \twoheadrightarrow R$（由伽罗瓦限制诱导，将 Δ 中的每个元素映为 1）诱导出一个满环同态 $\widehat{\rho} : R'/\nu \twoheadrightarrow R/p^M$。下列满环同态的交换图对此作了说明，其中竖直映射是通常的投影。

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\ \rho\ } & R \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{R'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_R} \\ R'/\nu & \xrightarrow{\ \widehat{\rho}\ } & R/p^M \end{array}$$

现在，我们将 $\pi_{R'}$应用于等式 (7.35)，并结合上文的命题 7.36（$\pi_{R'}(u_p(S', H'/F))$ 是非零因子）以及 Fitting 理想的性质 (2.7)，从而得出我们有一个 R'/ν–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{R'/\nu}(Sel_{S'}^T(H')_{R'/\nu}) = (\Theta_{S'}^T(H'/F))_{R'/\nu}.$$

接下来，我们 将 $\widehat{\rho}$ 应用于上面的等式，并再次利用 (2.7)，得到一个 R/p^M–理想的等式 ls

$$\mathrm{Fitt}_{R/p^M}(Sel_{S'}^T(H')_{R/p^M}) = (\Theta_{S'}^T(H'/F))_{R/p^M}.$$

若我们通过 π_R 取上面等式的原像，并再次利用 (2.7)，便可得到 R–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_R(Sel_{S'}^T(H')_R) + p^M R = (\Theta_{S'}^T(H'/F))_R + p^M R = (\Theta_{S'}^T(H/F)) + p^M R, \tag{7.37}$$

其中最后一个等式是 Artin L–函数 $\rho(\Theta_{S'}^T(H'/F)) = \Theta_S^T(H/F)$ 显然具有的限制性质。

推论 3.9 与 (2.7) 相结合，表明我们有一个 R–理想的包含映射

$$\mathrm{Fitt}_R(Sel_{S'}^T(H')_R) = \rho(\mathrm{Fitt}_{R'}(Sel_{S'}^T(H'))) \subseteq \mathrm{Fitt}_R(Sel_{S'}^T(H)_p^-).$$

导向 证明（7.28）的论证，应用于 S和 $S' = S \cup S_r(F)$，给出一个 R–理想的等式 s

$$\mathrm{Fitt}_R(Sel_{S'}^T(H)_p^-) = u_r(H/F) \cdot \mathrm{Fitt}_R(Sel_S^T(H)_p^-),$$

其中 $u_r(H/F) := \prod_{v \in S_r(F)} (1 - \sigma_v(H/F)^{-1})$。显然，我们还有一个等式

$$\Theta_{S'}^T(H/F) = u_r(H/F) \cdot \Theta_S^T(H/F).$$

当组合 将 (7.37) 与最后三个显示的关系式结合起来，我们得到一个 R–理想的包含映射

$$u_r(H/F) \cdot (\Theta_S^T(H/F)) \subseteq u_r(H/F) \cdot \mathrm{Fitt}_R(Sel_S^T(H)_p^-) + p^M R.$$

然而，由于辅助素数 r 是 H/F–良好的（见命题 7.33(2)），注 7.32 表明 $u_r(H/F)$ 是环 R 中的单位。因此，我们可以将其约去，从而得到一个包含映射

$$(\Theta_S^T(H/F)) \subseteq \mathrm{Fitt}_R\left(Sel_S^T(H)_p^-\right) + p^M R.$$

然而，由于整数 M 可以取为任意大（见 (7.34)），且诺特 $\mathbb{Z}_p$–代数 R 是 p–进完备的，并且其所有（有限生成）理想在 p–进拓扑下都是闭的，因此最后一个包含关系实际上意味着我们有一个 R–理想的包含关系。

$$(\Theta_S^T(H/F)) \subseteq \bigcap_{M\gg 0} \left(\mathrm{Fitt}_R\left(Sel_S^T(H)_p^-\right) + p^M R\right) = \mathrm{Fitt}_R\left(Sel_S^T(H)_p^-\right),$$

由此完成步骤 1。

步骤 2。接下来，我们证明包含关系 (7.30) 是一个等式，如定理 7.26(1) 所述。令 $G = G' \times G_p$，其中 G_p 是 G 的 p–西洛子群，且 $R := \mathbb{Z}_p[G]^-$。对于任意奇特征 $\chi \in \widehat{G'}$ 和任意特征 $\psi \in \widehat{G}$，满足 $\psi|_{G'} = \chi$（即 ψ “属于” χ），我们令 $R^\chi := \mathbb{Z}_p[\chi][G_p]$ 和 $R^\psi = \mathbb{Z}_p[\psi]$，并通过通常的满射 $\mathbb{Z}_p$–代数态射 χ 和 ψ（滥用记号！）将它们视为 R–代数；这些态射分别由特征 χ 和 ψ 诱导：

$$\psi : R \overset{\chi}{\twoheadrightarrow} R^\chi \twoheadrightarrow R^\psi.$$

由于我们有一个显然的 $\mathbb{Z}_p$–代数同构 $R \simeq \oplus_{[\chi]} R^\chi$（求和遍及所有奇特征 $\chi \in \widehat{G'}$ 的 $G(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$–共轭类），因此我们需要证明存在等式

$$(\Theta_{S,H/F}^T)_{R^\chi} = \mathrm{Fitt}_{R^\chi}(Sel_S^T(H)_{R^\chi}),$$

对所有上述特征 χ 均成立。

固定上述的 χ。[6] 中的引理 4.1 表明，若对于所有属于 χ 的 $\psi \in \widehat{G}$，我们都有 $\psi(\Theta_{S,H/F}^T) = 0$，则有双重等式

$$(\Theta_{S,H/F}^T)_{R^\chi} = (0) = \mathrm{Fitt}_{R^\chi}(Sel_S^T(H)_{R^\chi}).$$

因此，我们可以假设存在一个属于 χ 的特征 ψ，使得

$$\psi(\Theta_{S,H/F}^T) \neq 0.$$

固定这样的特征 ψ。由于 R–模 $Sel_S^T(H)_p^-$ 是二次呈示的（见引理 5.18(2)），其 Fitting 理想是主理想。因此，包含映射 (7.30) 表明存在 $x \in R$，使得

$$(\Theta_{S,H/F}^T) = (x)\cdot \mathrm{Fitt}_R(Sel_S^T(H)_p^-), \qquad (\Theta_S^T(H/F))_{R^\chi} = (\chi(x))\cdot \mathrm{Fitt}_{R^\chi}(Sel_S^T(H)_{R^\chi}).$$

因此，只要证明 $\chi(x)$ 是 R^χ 中的单位元，我们就完成了。然而，环 R^χ 和 R^ψ 都是局部环，其极大理想分别为 $\mathfrak{m}_\chi := (p, I_{G_p})$（这里 I_{G_p} 是由 $\{\sigma - 1 | \sigma \in G_p\}$ 生成的增广理想）和 $\mathfrak{m}_\psi = \psi(\mathfrak{m}_\chi)$，于是我们得到以下等价关系

$$\chi(x) \in (R^\chi)^\times \iff \psi(x) \in R_\psi^\times \iff (\psi(\Theta_S^T(H/F))) = \mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_S^T(H)_{R^\psi}). \tag{7.38}$$

接下来，我们将运用上文定理 6.3 的证明中所采用的思路，证明上述双重等价关系中最右边的断言。由此即可完成步骤 2 及定理 7.26 的证明。具体而言，我们证明以下命题。

命题 7.39。对于定理 7.26(1) 中的所有 $(H/F, S, T, p)$，令

$$\Sigma_0 := S \smallsetminus ((S_{ram}(H/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \cap S), \qquad \Sigma_0' := T \cup ((S_{ram}(H/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \cap S).$$

那么，对于所有奇特征 $\psi \in G$，以下结论成立。

(1) 对于所有集合 $J \subseteq (S_{ram}(H/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \cap S$，我们有一个 R^ψ–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_{\Sigma_0\cup J}^{\Sigma_0'\smallsetminus J}(H/F)_{R^\psi}) = (\psi(\Theta_{\Sigma_0\cup J}^{\Sigma_0'\smallsetminus J}(H/F))).$$

（2）我们有一个 R^ψ–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_S^T(H)_{R^\psi}) = (\psi(\Theta_{S,H/F}^T)).$$

证明。首先注意，若令 $J \coloneqq (S_{ram}(H/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \cap S$，则（2）由（1）推出（这正是我们直接关心的，因为它蕴含双重等价式（7.38）中最右侧的陈述）。

我们对 $|J|$ 使用归纳法，证明第 (1) 部分的断言对所有 $(H/F, \Sigma_0, \Sigma_0', J)$ 都成立，方法与定理 6.3 的证明相同。在 $J = \varnothing$ 的情况下，定理 6.2 的证明（将 $(H/F, \Sigma_0, \Sigma_0')$ 代替 $(H_n/F, \Sigma, \Sigma')$）给出了 R–理想之间的等式

$$\mathrm{Fitt}_R(Sel_{\Sigma_0}^{\Sigma_0'}(H)_p^-) = (\Theta_{\Sigma_0}^{\Sigma_0'}(H/F)).$$

这意味着 对所有奇特征 $\psi \in \widehat{G}$，在等式两边应用 ψ，即可得到所需的 R^ψ–理想之间的等式 .

现在，假设对于所有 $(H/F, \Sigma_0, \Sigma_0', J)$，当 J的大小固定时，结论均成立。对于上述固定数据，令 $v \in ((S_{ram}(H/F) \smallsetminus S_{p\infty}(F)) \cap S) \smallsetminus J$。我们需要证明该结论对数据 $(H/F, \Sigma_0, \Sigma_0', J_v \coloneqq J \cup \{v\})$ 成立。令 I_v为 v的分歧群，并令 $I_v' \coloneqq I_v \cap G'$。令 $\chi \in \widehat{G'}$，使得 $\psi|_{G'} = \chi$。与定理 6.3 的证明一样，我们分两种情况讨论。

情形（1）： $\chi(I_v') \neq \{1\}$。定理 6.3 中情形 1 的证明（将数据 $(H/F, \Sigma_0, \Sigma_0')$ 代替 $(H_n/F, \Sigma, \Sigma')$）给出了 R^χ–理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{R^\chi}(Sel_{\Sigma_0\cup J}^{\Sigma_0'\smallsetminus J}(H/F)_{R^\chi}) = \mathrm{Fitt}_{R^\chi}(Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H/F)_{R^\chi}), \qquad (\Theta_{\Sigma_0\cup J}^{\Sigma_0'\smallsetminus J}(H/F))_{R^\chi} = (\Theta_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H/F))_{R^\chi}.$$

将上述两个等式应用于 ψ，并利用归纳假设，即可得到所需的 R^ψ–理想等式。

● 情形（2）： $\chi(I_v) = \{1\}$。我们沿用定理 6.3 中情形 2 证明的初始步骤，将数据 $(H/F, \Sigma_0, \Sigma_v)$ 代替 $(H_n/F, \Sigma, \Sigma_v)$。对 ψ 求值后，包含映射 (6.8) 可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H)_{R^\psi}) &\subseteq \mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_{\Sigma_0\cup J}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H)_{R^\psi}) = \\ &= (\psi(\Theta_{\Sigma_0\cup J}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H/F))(\psi(NI_v), \psi(1-\sigma_v^{-1}e_v)),\end{aligned}$$

这里的记号与同上相同。

现在，若 ψ 在 v处分歧，则有 $\psi(NI_v) = 0$，于是上述包含关系推出 ，

$$\mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H)_\psi) \subseteq (\psi(\Theta_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H/F))$$

由于我们已经证明了反向包含，因此所需的 R^ψ 理想等式得证。接下来，假设 ψ 在 v处有分歧。因此，我们有 $\psi(I_v) = \{1\}$。令 $H_\psi \coloneqq H^{ker(\psi)}$。由 [6], 的引理 5.4 可知，存在 R^ψ 模的一个同构

$$Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H)_{R^\psi} \cong Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H_\psi)_{R^\psi}$$

该同构由自然限制映射诱导。注意， v 在 H_ψ/F 中非分歧。因此，我们可以对数据 $(H_\psi/F, \Sigma_0 \cup \{v\}\ \Sigma_0' \smallsetminus \{v\}\ J)$ 应用归纳假设，得到 R^ψ 理想的等式

$$\mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H)_{R^\psi}) = \mathrm{Fitt}_{R^\psi}(Sel_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H_\psi)_{R^\psi}) = (\psi(\Theta_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H_\psi/F))) = (\psi(\Theta_{\Sigma_0\cup J_v}^{\Sigma_0'\smallsetminus J_v}(H/F))).$$

上面的第一个等式源于前面提到的模同构，第二个等式来自归纳假设，第三个等式则源于 Artin L 函数的膨胀性质。至此，归纳步骤以及命题 7.39 的证明均告完成。□

如上所述，定理 7.26(1) 可由命题 7.39(2) 和等价关系 (7.38) 推出。 □

References

1 *On derivatives of p-adic L-series at s = 0* **762** 2020 53 104 4195656 . David Burns, , 《纯粹与应用数学杂志》（），–。MR 。David Burns 和 Cornelius Greither, *Equivariant Weierstrass preparation and values of L-functions at negative integers*, 特刊号，2003，2046598 3 157 185 Kazuya Kato 五十寿辰纪念文集，第 – 页。MR 。David Burns、Masato Kurihara 和 Takamichi Sano, *On zeta elements for $\mathbb{G}_m$*, 《数学文献》21（2016），555–626。MR 3522250 4. Pierrette Cassou-Nogu`es, *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques*, 《数学发明》51（1979），第1期，29–59。MR 524276

5. Pietro Cornacchia 和 Cornelius Greither, *Fitting ideals of class groups of real fields with prime power conductor*, 《数论杂志》 73 1658000 6 1998 2, 459 471（），第 – 期。MR 。Samit Dasgupta 和 Mahesh Kakde, *On the Brumer–Stark conjecture*, 《数学年刊》（第2辑）197（2023），第1期，289–388。MR 4513146 7. Pierre Deligne 和 Kenneth A. Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, 《数学发明》59 579702 8 1980 3, 227 286（），第 – 期。MR 。Cornelius Greither, *Some cases of Brumer's conjecture for abelian CM extensions of totally real fields*, 《数学杂志》233（2000），第3期，515–534。MR 1750935 9. Cornelius Greither 和 Masato Kurihara, *Stickelberger elements, Fitting ideals of class groups of CM-fields, and dualisation*, 《数学杂志》260 2443336 10 2008 4, 905 930（），第 – 期。MR 。Cornelius Greither 和 Cristian D. Popescu, *The Galois module structure of ℓ-adic realizations of Picard 1-motives and applications* 2012 5, 986 1036 2899958 , 《国际数学研究论文集 IMRN》（），第 – 期。MR 。, 11 ———. *An equivariant main conjecture in Iwasawa theory and applications*, 《代数几何杂志》24（2015），第4期，629–692。MR 3383600 12. K. W. Gruenberg 和 A. Weiss, *Galois invariants for local units*, 《牛津数学季刊》（第2辑）47（1996），第185期，25–39。MR 1380948 13. Uwe Jannsen, *Iwasawa modules up to isomorphism*, 《代数数论》, 《纯数学进阶研究》，第17卷，Academic Press，波士顿，马萨诸塞州，1989，第171–207页。MR 1097615 14. Henri Johnston 和 Andreas Nickel, *An unconditional proof of the abelian equivariant Iwasawa main conjecture and applications* 2010 03186 , arXiv: 。15. , ——— *Noncommutative Fitting invariants and improved annihilation results* 2 **88** 2013 1, , 《伦敦数学会杂志》（）（），第 – 期。MR 3092262 16 **145** 1961 62 265 272 133304 。Helmut Klingen, 17 *Class fields of abelian extensions of* **76** 1984 2, 179 330 *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, 《数学年刊》（/），–。MR 。B. Mazur 和 A. Wiles, Q, 《数学发明》 7428853（），第 – 期。MR 18 *A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbb{Q}$ μ_p* **34** 1976 3, 151 。Kenneth A. Ribet, （），《数学发明》（），第 –162期。MR 419403 19 ¨ *A Tate sequence for global units* **102** 1996 2, 147 178 1394524 。Jurgen 20 Ritter 和 Alfred Weiss, , 《数学汇编》（），第 – 期。MR 。Takuro Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, 《东京大学理学部纪要》第IA辑数学23（1976），第2期，393–417。MR 427231 21. Carl Ludwig Siegel, *Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen*, 《哥廷根科学院数学与物理学部通讯》1970 285488 22 1970 15 56（），–。MR 。Jesse Silliman, *Group ring valued Hilbert modular forms*, arxiv: 2009.14353。23. Jo hn Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en s = 0*, 《数学进展》，第47卷，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1984，782485 24 由 Dominique Bernardi 和 Norbert Schappacher 编订的讲义。MR 。Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, 第二版，《数学研究生教材》，第83卷，Springer-Verlag，纽约，1997。MR 1421575 25 *The Iwasawa conjecture for totally real fields* 2 **131** 1990 3, 493 540 1053488 。A. Wiles, , 《数 26 ——— 学年刊》（）（），第 – 期。MR 。, *On a conjecture of Brumer*, 《数学年刊》（）（），第3期，555–。MR 2 **131** 1990 565 1053490

Dept. of Mathematics, University of California at San Diego, San Diego, CA 92093, USA
Email address: rgambhee@ucsd.edu*Email address*: cpopescu@ucsd.edu