热尔曼曲率：为何应以索菲·热尔曼之名命名曲面的平均曲率

Douglas P.Holmes[1] *Mechanical Engineering, Boston University, Boston, MA, 02215, USA*（日期：2023年3月27日）

arXiv:2303.13615v1 [math.HO] 23 Mar 2023

我们如何刻画曲面的形状？如今人们已经充分认识到，曲面的形状取决于对其每一点的弯曲程度进行测量。根据这些测量，我们可以确定曲率最大和最小的方向，即主曲率，并通过求主曲率的平均值和乘积，构造出两个曲面不变量。主曲率的乘积描述了曲面的内蕴曲率，在微分几何中具有深远的重要性，高斯的绝妙定理和高斯–博内定理便是明证。这种曲率通常以卡尔·弗里德里希·高斯的名字命名为高斯曲率，以纪念他在1828年著作 [1]中对新兴微分几何领域作出的重大贡献。主曲率的平均值，即平均曲率，是衡量曲面形状的外蕴指标——也就是说，必须将曲面嵌入高维空间中才能测量。打个比方，生活在一张纸上的蚂蚁，如果不从远处观察，就无法知道这张纸是平的，还是卷成了圆柱形。高斯的绝妙定理指出，内蕴曲率若不拉伸曲面就不会改变，因此，在描述曲面不经拉伸而发生的形变时，外蕴曲率是一项重要指标；细长结构中常常可以观察到这类形变。自1811年起，经过1821年和1826年的一系列研究，数学家索菲·热尔曼确定，平均曲率是描述振动板形状的适当指标。她的假设直接导出了描述薄弹性板行为的方程。在致高斯的信中，她阐述了“平均曲率球”的概念，认为可以在曲面上的每一点确定这样一个球。这项贡献推动了弹性学和几何学的快速发展，然而，热尔曼至今仍未因引入平均曲率这一概念而获得应有的认可。从下文所述的一手资料证据可以清楚看出，这种平均曲率指标应以索菲·热尔曼之名命名。

特别奖

1808年，恩斯特·克拉德尼向皮埃尔-西蒙·拉普拉斯展示了一项非凡的实验。克拉德尼取来一块薄板，在其表面撒上粉末，然后沿着板边用弓拉动，使其振动。粉末颗粒随着板的振动上下跳动，最终停留在板的节点处。在板上演奏的每一个音符，或每一种频率，都会使颗粒形成不同的图案后停下来。改变板的形状也会如此。拉普拉斯对这些令人瞩目的实验颇感兴趣，并看到了提升其门生西梅翁·德尼·泊松地位的机会，于是将克拉德尼及其实验介绍给拿破仑·波拿巴。拿破仑敦促法兰西学院第一院将这一问题列为特别奖的竞赛主题。竞赛于1809年公布，获胜者将得到3000法郎，颁给能够提供数学分析以解释薄弹性板振动的学者。最终，奖项由索菲·热尔曼（1776—1831年）获得；她是一位来自法国巴黎的自学成才的数学家。



图1：索菲·热尔曼

竞赛作品的提交截止日期是1811年。作为研究院成员，拉普拉斯、约瑟夫-路易·拉格朗日和阿德里安-马里·勒让德将担任评审。后来在弹性理论发展中发挥重要作用的数学家——泊松、约瑟夫·傅里叶、克洛德-路易·纳维和奥古斯丁-路易·柯西——都没有参加这场竞赛。热尔曼的贡献是唯一的参赛作品。热尔曼从一个“巧妙的假设”出发，并通过类比莱昂哈德·欧拉的振动梁模型来推导这一假设 [2]。她推测，板中的弹性力与其两个主曲率的平均值成正比，也就是它的平均曲率。正如我们将看到的，这一假设既挑战了当时盛行的观念，也敏锐地预见了曲面几何中的某些方面，而这些方面几十年后才得到充分发展。虽然热尔曼根据这一假设推导出的方程有误，但假设本身直接导向了正确的方程，

$$\ddot{w} = k^2 \nabla^4 w, \tag{1}$$

正确运用变分法之后 [3]。拉格朗日本人担任竞赛评委时，将此

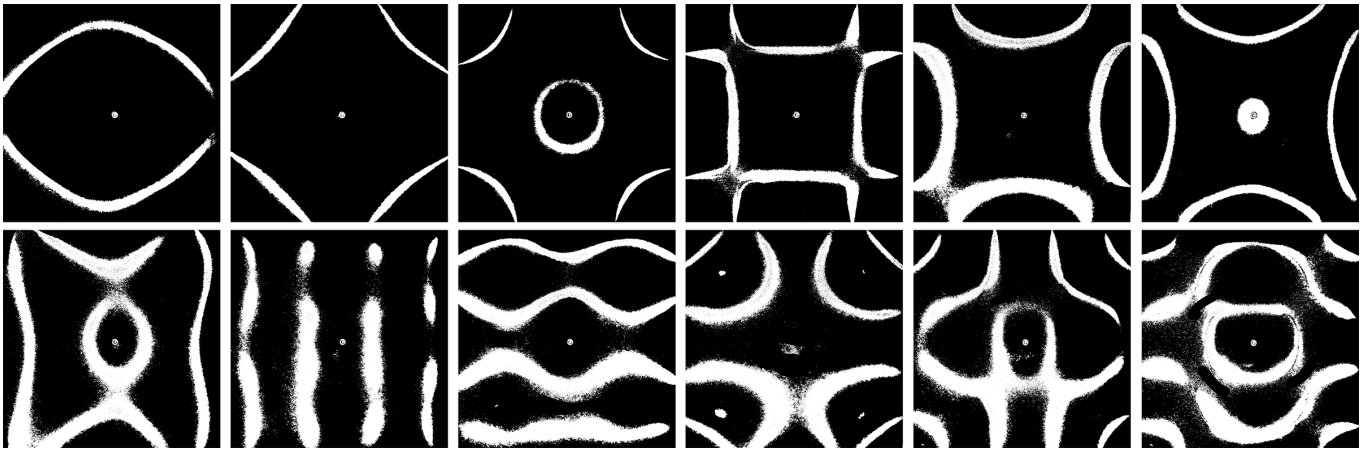

图2：不同频率下振动的方形板（30.5mm x 30.5mm x 0.37mm）所形成的克拉德尼图形实验图像。频率从100 Hz（左上）到650 Hz（右下），每幅图递增50 Hz。板面上撒有盐，以显示节点。

视为热尔曼假说正确时的正确方程 如果 热尔曼假说成立。当时，几乎没有理由相信热尔曼假说，也没有理由相信拉格朗日由此推导出的方程，因此没有颁发任何奖项。

这项竞赛一直延长到1813年。当时正与热尔曼通信的勒让德 [2],将拉格朗日的方程分享给热尔曼，并建议她如何推导该方程：“……请遵循拉格朗日在新版《分析力学》中的方法（《分析力学》），见第148页，并调整表示弹性所产生作用力的相应项”（勒让德致热尔曼，1811年12月） [2, 4]。热尔曼无法采纳这一建议。这正是问题的核心：“……所有证据都表明，索菲·热尔曼拥有非凡的数学才华，却因缺乏只有男性才能获得的严格训练而未能充分施展。”热尔曼熟悉拉格朗日的《分析力学》（《分析力学》），但她只能通过从巴黎综合理工学院拉格朗日门下学生那里获得的笔记来学习这部著作。她基本上是在孤立无援的情况下研究弹性问题，只有时断时续地与勒让德通信。她在将拉格朗日的变分法应用于板的数学表述中出现的二重积分时遇到了困难；这显然可以归因于她因性别而面临的学术壁垒与孤立处境。

她第二次尝试角逐奖项，不再只是试图重新推导方程 1。她找出了部分相关的边界条件，并运用拉格朗日根据她的假设推导出的方程，准确预测了方形板和矩形板的一些节点形状与频率。然而，她的努力再次未能正确推导出控制方程，而且她对假设的论证也未能令评审满意 [5]。正如我们将看到的，若要接受她的假设，当时就必须大幅转变思维方式。尽管如此，她对节点形状的准确预测使这一假设更引人入胜；虽然奖项当时仍未颁发，热尔曼获得了荣誉提名，奖项的颁发时间也第二次延期。

她第三次角逐奖项时，将自己的假设拓展到浅壳，主张弹性力与“……变形曲面和未变形曲面形状之差”成正比，也就是说，与曲面的平均曲率变化成正比。她还通过实验研究了浅圆柱壳的振动。尽管她未能找到令委员会满意的假设论证，但委员会对她求得的特解以及所做的实验工作印象深刻，因此她于1816年1月获得了奖项。

要理解热尔曼假说的重要意义，必须了解两件事。首先，它与分子观念直接对立；当时大多数学者都坚信这一假说，评判她作品的拉普拉斯和泊松也不例外。其次，曲面的微分几何尚未建立。综合来看，热尔曼的研究有力地证明，将平均曲率 称为热尔曼曲率是理所当然的。

分子观念

分子观念认为，必定存在“在不可感知的距离上作用的可感知力”，因此人们相信，热尔曼假说以弹性曲面的形变为基础，不过是通往基于“分子作用”的理论道路上的一个中间步骤。泊松并不认同拉格朗日在其

《分析力学》中引入的变分方法，并着手从分子原理推导方程1。结果，泊松从一个不包含弯曲的模型中，推导出了一个描述板弯曲的错误非线性方程 [2]。热尔曼对自己的假说充满信心，她认为“无论曲面内部发生什么，弹性行为都由变形来衡量。” [2], 有人认为，她的工作“.....尽管存在缺陷，却成为批评这种分子观念的若干（其中之一）集结点” [2]。热尔曼的努力引起了傅里叶和纳维的注意，后来也引起了柯西的注意，他们各自提出了处理这一问题的方法。1818年，傅里叶展示了如何运用如今以他命名的数学方法求解板方程——也就是说，他将板的运动表示为一系列三角函数之和。他致力于解决一个具体问题：无限板对初始扰动的响应 [6]。纳维则采取了更务实的方法来理解板的弯曲。他考察了边缘受支撑的板在静载荷作用下的情况。在回忆录的开篇，纳维承认了热尔曼工作的重要性（着重号为我所加）：

> “克拉德尼先生关于板振动所做的有趣实验，促使人们将微积分应用于这些实验所揭示的运动规律：这正是研究院学院一等所设特别奖的主题，热尔曼小姐赢得了该奖项。获奖研究建立在**一个巧妙的假设之上**，即弯曲会在弹性板的每一点产生一种力，其大小与两个主曲率半径倒数之和成正比。热尔曼小姐给出了弹性平面的平衡与运动微分方程，以及这些方程的一些积分，类似于欧拉为弹性薄片所给出的方程。”——纳维 [2, 7]

尽管纳维和傅里叶都十分尊重热尔曼 [8], ，但在描述弹性板行为时，他们仍保留了分子观念的某些方面。这些研究激发了柯西对这一问题的兴趣 [9], ，他从连续体视角着手研究。事实上，在评述纳维的工作时，柯西提出了应力的定义，推导了平衡方程，定义了应变，推导了运动学方程，并提出了若干本构模型 [2, 10, 11]。至此，显而易见，数学家已不再局限于振动板这一具体问题，而是开始研究形状任意的弹性固体更普遍的行为。热尔曼获得了特别奖，但她仍被排除在科学界之外；除与傅里叶的友谊外，她几乎与世隔绝。正如她的传记作者所指出的，

> “弹性问题如今已进入一个她不属于、也不可能属于的群体，尽管她并不知道这一点，而且那个群体也不愿或无法真正如此告知她。这个困境完全独立于她在数学上的不足，尽管这些不足源于同一个原因，即她是女性，因此被排除在正规教育之外.....当弹性成为专业人士感兴趣的课题时，女性在他们中间没有立足之地。”——L. Bucciarelli 和 N. Dworsky [2]。

接受板的行为在很大程度上可以由其变形决定这一观念，需要摆脱分子观念。测量这种变形，则需要理解曲面几何；这是一门当时正在同步发展的数学分支。

请思考一下测量板如何弯曲的难题 [2]:

> “要为曲面的曲率建立一个表达式，并不是一个简单的问题。以索菲·热尔曼引用来支持其论点的梁为例，情况并不困难；变形后的梁可以用一条空间曲线表示，并具有一个曲率半径。然而，弹性变形曲面则不同，在曲面上的任意一点，都有无数条可能通过该点的曲线。”

曲面几何

事实上，泊松反对她的假设，主要原因之一就是不愿接受热尔曼的观点：主曲率能够度量曲面上一点处的曲率。泊松指的是欧拉“.....关于这样一个问题的讨论：经过曲面上给定点的不同平面与曲面相交，会得到无数条不同的曲线” [2]。热尔曼研读过欧拉著作 [2], ，因此熟悉欧拉所发展出的、用于计算曲面上一点处曲率的方法 [12, 13]。在首次参加特别奖评选时，热尔曼便已直觉地认识到主曲率的重要性；她为自己选择平均曲率辩护时指出：“.....$(1/r)\cdot(1/r')$，例如，相对于$((1/r)+(1/r')$，总是可以忽略不计” [2][14]。

当然，话题中绕不开的人物是卡尔·弗里德里希·高斯；如今，热尔曼上述提到的第一种曲率度量以他的名字命名，即也就是说$(1/r) \cdot (1/r')$就是内蕴曲率或高斯曲率。在投身弹性研究之前，热尔曼读过高斯的《算术研究》后，便对数论产生了兴趣。她化名为安托万-奥古斯特·勒布朗——一名就读于巴黎综合理工学院的学生——并于1804 [15]开始与高斯通信。这些信件的内容展现出一位数学家，她急切地希望能与人探讨高斯的“高等算术”。热尔曼总是立即回复高斯的来信，而高斯只有一次及时作了回复：得知通信对象是一位女性之后 [2, 16]。在这个故事中，拿破仑再次扮演了关键角色。1806年，拿破仑的军队与普鲁士军队交战之际，热尔曼想起了阿基米德的遭遇 [17][18]，便向一位担任驻普鲁士法军炮兵指挥官的世交求助：打探高斯的下落，并确保他平安无事 [19]。高斯对此感到困惑，因为他不知道巴黎有一位名叫热尔曼的女性。热尔曼承认：“.....我担心女性科学家会遭到嘲笑，因此此前在向您寄送那些无疑不值得您宽容以待的笔记时，冒用了勒布朗先生的名字” [2]。高斯立即回信，真诚地感谢热尔曼为确保他的安全所采取的行动，并对她的数学好奇心和才能表达了敬意与钦佩 [16]，

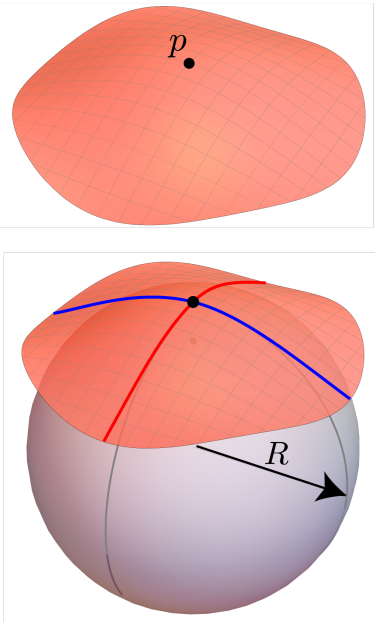

图 3 *sphere of mean curvature*：A 在曲面上的一点 p 处。

> “.....一位女性由于性别、习俗和偏见，在熟悉那些棘手问题时遇到的障碍远远多于男性，但她仍能挣脱这些束缚，探究最隐秘之处；毫无疑问，她拥有最崇高的勇气、非凡的才能和卓越的天赋。”——高斯致热尔曼，4月 1807 [2]。

在接下来的几年里，高斯和热尔曼仍保持通信；随着热尔曼的研究重点从数论转向弹性学，两人的通信也逐渐淡去。不过，这段往来仍是这个故事的重要部分，因为历史学家认为，高斯很可能因此了解到热尔曼关于克拉德尼图形及其曲率度量的研究 [2]。热尔曼仍在努力为自己的假设寻找论证依据，于是于1821年和1826年发表了论文，进一步详述如何测量曲面上一点处的曲率。在这些著作中，她引入了参考球的概念：球面的半径决定曲面上一点处的平均曲率，正如参考圆的半径决定曲线上某一点处的曲率。1829年初，热尔曼得知了高斯的几何学论著 [1]；当时，高斯建议他的学生巴德尔先生在访问巴黎期间拜会热尔曼。

> “在与巴德先生谈论我当前的研究课题时，我给了他一个机会，让他与我交谈，随后还向我展示了您那篇颇有学术价值的回忆录，其中您将曲面曲率与球面的曲率作了比较.....先生，我无法向您形容，得知一位著名数学家几乎同时也想到了这种类比时，我有多么惊讶，同时又有多么欣慰。在我看来，这种类比如此合乎情理，以至于我既不明白为何此前无人想到，也不明白为何迄今无人愿意关注我在这方面已经发表的内容。”——热尔曼致高斯，三月 1829 [2]。

在这封信的其余部分，热尔曼展现了她对这一曲率度量的深刻理解。针对泊松对她的假设提出的异议，她向高斯指出，当

> “.....将两条法截线的曲率半径的倒数相加时，只需选取位于两个相互垂直的平面内的法截线，就能得到一个常量，等于两条主曲率线的曲率半径倒数之和。此外，我还指出，如果所选的两个相交平面与包含主曲率线的平面成45度角，那么这些所选平面内曲线的曲率半径彼此相等，并且等于一个球面的半径；该球面与曲面的相交方式是，两个象限位于曲面下方，另外两个位于曲面上方。我将这个球面称为平均曲率球。”——热尔曼致高斯，三月 1829 [2][20] 。

正是热尔曼明确引入的这一平均曲率球概念，才应该以她的名字命名。

热尔曼曲率

似乎每隔几十年，人们就会再次想起索菲·热尔曼，尽管只是短暂一刻。每当人们想起她，随之而来的总是沮丧与难以置信。1913年，传记作者大胆地评论了热尔曼贡献的重要性——“……综合来看，她是法国所孕育的最具深刻思想的女性” [21]。Jesse A. Fernandez Martinez 在 1946 [22],中写道

> “她大胆地着手研究一个当时完全超出数学处理范围的物理问题，而其中更复杂的情况在当时尚未经过分析……一位如此值得肯定的女性竟未能获得更多认可，实在令人诧异。”

她在数论方面的工作受到的争议要少得多 [15]。然而，尽管欧拉、拉格朗日、拉普拉斯、傅里叶、纳维、柯西和高斯等名字为数学、物理学和工程学的所有学生所熟知，热尔曼的贡献却仍鲜为人知，或遭到误解。热尔曼本人对自己的工作能否获得认可并不在意，

> “即使看到自己的思想偶尔被其他采纳者发扬光大，她也会感到欣喜。她一再表示，最先提出某个想法的人是谁并不重要；重要的是这个想法能走多远。她欣慰地说，她的思想已为科学结出了果实，却未给她带来任何声誉…… ”——Guillaume Libri [2, 23]

今天，我们完全可以、也应该比她的同时代人做得更好。三十多年前，Amy Dalm`edico 对热尔曼的作品将如何被看待持乐观态度，并指出热尔曼“……相信，正如她读过的那些百科全书派一样，她对科学的贡献自会经受住时间与社会偏见的考验。” [24]。

尽管欧拉因找到了计算曲面主曲率的方法而受到赞誉——也就是我们如今所说的平均曲率——但热尔曼既认识到平均曲率背后的数学原理，也认识到它对于解决弹性学中一项重要未决问题的价值。我邀请大家和我一起，将这一量称为“热尔曼曲率”。

致谢

我很感谢 Howard A. Stone、Emma Lejeune、James Bird、PaulBarbone 和 Meghan Gelardi Holmes 对本文早期草稿提出的宝贵意见。

---

[1] 卡尔·弗里德里希·高斯。 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*，第1卷。Dieterich 印刷所，1828年。[2] Louis L Bucciarelli 和 Nancy Dworsky。 *Sophie Germain: An Essay in the History of the Theory of Elasticity*。施普林格，1980年。[3] 这里， $w(x,\ y)$ 是板的面外挠度， k^2 是板的弯曲刚度与其质量之比（通常以面密度乘以厚度表示），而 $\nabla^4(\cdot) = \nabla^2\nabla^2(\cdot)$ 是双调和算子。[4] H Stupuy。 *Sophie Germain, Œuvres philosophiques*。新版。Ritti，巴黎，1896年。[5] 可能赞同她处理这一问题的拉格朗日于1813年4月去世。提交期限是1813年10月。[6] 这一问题使他得以避开当时理论中的一个难题：当时尚未确立一套普遍接受的边界条件。通过研究无限板，傅里叶完全避开了边界处情况如何这一问题。[7] 克洛德·纳维。 *Mémoire sur la flexion des plans élastiques*。1820年。[8] 傅里叶与热尔曼于1816年结为朋友，这段友谊持续了十多年。参见参考文献[2], 第87页。[9] 柯西受命审阅纳维提交给学院研究院审议的著作——两年间共三篇论文。纳维认为，柯西拖延审阅，是为了推进自己建立弹性理论的工作。后来，泊松发表了自己关于该主题的论文，却只字未提纳维。纳维对此二人都强烈不满，声称自己在弹性理论的发展上享有优先权。参见参考文献 [2], 第9章。[10] 奥古斯丁-路易·柯西。 *Résumé of lessons given àt the Royal Polytechnic School on calculus infinitésimal*，第1卷。皇家印刷所，1823年。[11] Clifford A Truesdell。柯西与现代连续介质力学。 *Revue d'histoire des sciences*，第5–24页，1992年。

[12] L. Euler. 曲面的曲率研究. *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, 16:119–143, 1767年. [13] Gabriele Bardini 和 Gian Mario Gianella. 沿着曲率概念的历史脉络漫步：从牛顿到高斯，途经欧拉. In *International Mathematical Forum*, volume 11, pages 259–278, 2016年. [14] 这里， r 和 r' 是主曲率半径. [15] Andrea Del Centina 和 Alessandra Fiocca. 索菲·热尔曼与卡尔·弗里德里希·高斯之间的通信. *Archive for history of exact sciences*, 66:585–700, 2012年. [16] Nick Mackinnon. 索菲·热尔曼：高斯是女权主义者吗? *The Mathematical Gazette*, 74(470):346–351, 1990年. [17] Eduard Jan Dijksterhuis. *Archimedes*, volume 784. 普林斯顿大学出版社, 2014年.[18] 热尔曼所知的阿基米德之死的记述表明，阿基米德在城池被攻陷时正专心致志地思考一道数学难题。据说一名罗马士兵命令他前去会见马塞卢斯，但他拒绝了，宁愿先完成手头的问题。士兵用剑杀死了阿基米德。参见参考文献 [17]。[19] 一名营长从驻地向西行进两百英里，去查看高斯的情况。[20] 她对几何的描述令人想起 Karl Culmann 和 Christian Otto Mohr 开发的图形工具；这些工具如今以“莫尔圆”之名为人所知，可用于变换任意对称的 2×2 张量矩阵，例如曲面的曲率。[21] HJ Mozans 和 John Augustine Zahm. *Woman in science: with an introductory chapter on woman's long struggle for things of the mind* 1913 .

D. Appleton, . [22] Jesse A Fernandez Martinez. 索菲·热尔曼. *The Scientific Monthly*, pages 257–260, 1946年. [23] Guillaume Libri. *Notice sur Mlle Sophie Germain*. 1832年. [24] Amy Dahan Dalmedico. 索菲·热尔曼. *Scientific American*, 265(6):116–123, 1991年.