arXiv:2303.13673v2 [math.AC] 3 Apr 2023

关于约当型与约当次数型的注记

NASRIN ALTAFI

摘要。我们探讨约当次数型是否比线性形式的约当型包含更多关于分次阿廷-戈伦斯坦代数的信息。我们证明，在余维二的情形下，约当型决定约当次数型。我们还给出一些例子，说明在更高余维的情形下这一结论不再成立。

1. 引言

对于标准分次阿廷代数 $A = K[x_1, \ldots, x_n]/I$和线性形式 $\ell \in A_1$，约当型$P_{\ell,\ A}$ 是 $\dim_K A$ 的一个分拆，它决定了乘以 ℓ 在 A上的乘法映射的若尔当块分解。约当型决定了阿廷代数是否具有弱勒夫谢茨性质和强勒夫谢茨性质。若分次阿廷代数 A 中，线性形式的乘法映射在每个次数上都具有最大秩，则称 A 满足弱勒夫谢茨性质（WLP）。如果线性形式的所有幂次都满足这一条件，则称代数 A 具有强勒夫谢茨性质（SLP）。众所周知，若存在一个线性形式 ℓ，使得 $P_{\ell,\ A}$ 中的部分数等于 A的斯佩纳数（即希尔伯特函数 h_A的最大值），则阿廷代数 A 具有 WLP。此外，若存在一个线性形式 ℓ，使得$P_{\ell,\ A} = h_A^\vee$ 是 h_A的共轭分拆，则 A 具有 SLP；精细版本参见 [6] 和 [9]。阿廷代数中线性形式的约当型所包含的信息，比弱勒夫谢茨性质和强勒夫谢茨性质更多。关于约当型的近期论文及其参考文献，见 [8, 9, 10]。

近年来，对阿廷戈伦斯坦代数 Lefschetz 性质的研究已成为交换代数和代数几何领域最引人关注的课题之一。阿廷戈伦斯坦（AG）

2010 数学主题分类。主要分类：13E10、13D40；次要分类：13H10、05A17、05E40。关键词和短语。Artinian 戈伦斯坦代数、希尔伯特函数、催化矩阵、Hessian 矩阵、麦考利对偶生成元、Jordan 型、分拆。作者获得了 VR2021-00472 项目资助。作者谨向 2022年7月18日至22日在格勒诺布尔举行的 AMS-EMS-SMF会议组织者，以及“Artinian 代数的形变与 Jordan 型”专题会议的组织者致谢。计算机软件 Macaulay2 [**M2**] 对本文的计算至关重要。1

代数结构良好，并与组合学、代数几何等其他领域有诸多联系。近年来，对这类代数的 Jordan 型的研究也备受关注。Costa 和 Gondim 在 [3] 中通过计算相关 Hessian 矩阵和混合 Hessian 矩阵的秩，研究 AG 代数在一般线性形式下的 Jordan 型；这些矩阵分别由 [12] 和 [5] 引入。

Iarrobino、Macias Marques 和 McDaniel 在 [9]研究了分次阿廷代数和局部阿廷代数的约当型。他们引入了约当次数型，它不仅能确定约当型，还能确定与不同部分相关的初始次数。他们通过给出两个希尔伯特函数为 (1，3，5，4，2，1) 的阿廷代数，证明约当次数型并不等同于约当型：这两个代数具有相同的约当型，但约当次数型不同。本文探讨阿廷-戈伦斯坦代数中，每种约当型是否对应唯一的约当次数型。在定理 3.1 中，我们证明，对于余维二的阿廷-戈伦斯坦代数，约当型与约当次数型等价。接着我们证明，对于余维至少为三的阿廷-戈伦斯坦代数，约当次数型是比约当型更精细的不变量。在例 4.2 中，我们给出两个希尔伯特函数为 (1，3，6，9，9，9，6，3，1) 的阿廷-戈伦斯坦代数；它们对于某个线性形式具有相同的约当型，但约当次数型不同。经计算验证，这个例子在三余维阿廷-戈伦斯坦代数中具有最小的底元次数。我们还给出了余维四的一个类似例子，其中阿廷-戈伦斯坦代数的希尔伯特函数为 (1，4，7，7，4，1)，见例 4.4。

2. 阿廷-戈伦斯坦代数的 Jordan 型与 Jordan 次数型

设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个定义在特征零域 K 上、带有标准分次的多项式环。设 $A = S/I$ 是一个分次 Artin 代数（其 Krull 维数为零），其中 I 是一个齐次理想。分次 Artin 代数 $A = S/I$ 的希尔伯特函数是一个由非负整数构成的向量，记为 $h_A = (1, h_1, \ldots, h_d)$，其中 $h_A(i) = h_i = \dim_K(A_i)$。整数 d 称为 A 的底元次数，也就是说，它是满足 i 的最大整数，使得 $h_A(i) > 0$。设 $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ 为 S 的 Macaulay 对偶环。给定一个齐次理想 $I \subset S$， I 的逆系统定义为一个分次 S-模 $M \subset R$，使得 S 通过求导作用于 R。关于 Macaulay 逆系统的更多细节，请参见 [4] 和 [7]。根据 Macaulay 的一个结果 [11]，已知 Artin 标准分次 K-代数 $A = S/I$ 是戈伦斯坦的，当且仅当存在 $F \in R_d$ 使得 $I = \mathrm{Ann}_S(F)$。换言之，其逆系统

一个分次 Artin 戈伦斯坦（AG）代数仅由一个形式生成。我们回顾约当次数型的定义， [9, 定义 2.28]。

定义 2.1（约当次数型）。设 A 是一个分次 Artin 代数，且 $\ell \in A_1$。假设 $P_{\ell,A} = (p_1, \dots, p_t)$ 是 ℓ 和 A 的约当型，则存在一些元素 $z_1, \dots z_t \in A$，它们依赖于 ℓ，使得 $\{\ell^i z_k \mid 1 \le k \le t, 0 \le i \le p_k - 1\}$ 是 A 的一个 K-基。由 ℓ 诱导的乘法映射的约当块由链 $\mathsf{s}_k = \{z_k, \ell z_k, \dots, \ell^{p_k-1} z_k\}$ 确定，且 A 是直和 $A = \langle \mathsf{s}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathsf{s}_t \rangle$。记 z_k 的次数为 d_k。则 约当次数型 定义为带指标的分拆 $\mathcal{S}_{\ell,A} = (p_{1d_1}, \dots, p_{td_t})$。

我们回顾阿廷-戈伦斯坦代数的秩矩阵的定义，并简要说明它与 Jordan 次数型的关系；更多细节见 [1] 。我们约定，本文中矩阵的行列指标从零开始。

定义 2.2。设 $A = S/\operatorname{Ann}(F)$ 是一个顶点次数为 d 的阿廷-戈伦斯坦代数。对线性形式 $\ell \in A$，定义秩矩阵 $M_{\ell,\ A}$，它由 A 和ℓ 确定，是一个大小为 $d+1$ 的上三角方阵，其元素如下：

$$(M_{\ell,A})_{i,j} = \operatorname{rk}\left(\times \ell^{j-i} : A_i \longrightarrow A_j\right),$$

对每个 $i \le j$ 均成立。对于 $i > j$，我们令 $(M_{\ell,\ A})_{i,\ j} = 0$。

给定秩矩阵 $M_{\ell,\ A}$，我们将由 A 和 ℓ 确定的约当次数型矩阵$J_{\ell,\ A}$定义为一个大小为 $d+1$ 的上三角矩阵，其元素非负，如下所示：

$$(J_{\ell,A})_{i,j} := (M_{\ell,A})_{i,j} + (M_{\ell,A})_{i-1,j+1} - (M_{\ell,A})_{i-1,j} - (M_{\ell,A})_{i,j+1},$$

其中，当 $i < 0$ 或 $j < 0$ 时，我们令 $(M_{\ell,A})_{i,j} = 0$。

矩阵 $J_{\ell,A}$ 编码了与约当次数型 $\mathcal{S}_{\ell,A}$ 相同的信息，后者在 (3) 中有详细描述。

对于每个底元次数为 d 且线性形式为 ℓ 的阿廷-戈伦斯坦代数 $A = S/\operatorname{Ann}(F)$，定义新的阿廷-戈伦斯坦代数 $A_\ell^{(i)} := S/\operatorname{Ann}(\ell^i \circ F)$，其中所有 $0 \le i \le d$ 均成立。

对于每个 $0 \le i \le d$，我们将 $M_{\ell,A}$ 的第 i 条对角线定义为以下向量

$$\operatorname{diag}(i, M_{\ell,A}) := \left((M_{\ell,A})_{0,i}, (M_{\ell,A})_{1,i+1}, \dots, (M_{\ell,A})_{d-i,d}\right).$$

根据 [1, 命题 3.4], ，我们知道，对于每个 $0 \le i \le d$，$\operatorname{diag}(i, M_{\ell,A}) = h_{A^{(i)}}$。

考虑递减序列

$$\mathbf{d} := (\dim_K A_\ell^{(0)}, \dim_K A_\ell^{(1)}, \dots, \dim_K A_\ell^{(d)}),$$

并回想一下，$\mathbf{d}$ 的二阶差分序列记为 $\Delta^2\mathbf{d}$，其第 i 项为

$$\Delta^2\mathbf{d}(i) = \dim_K A_\ell^{(i)} + \dim_K A_\ell^{(i+2)} - 2\dim_K A_\ell^{(i+1)}, \tag{1}$$

其中我们令 $\dim_K A_\ell^{(i)} = 0$ 表示 $i > d$。然后根据命题 3.14]，得到A和 ℓ的约当型。

$$P_{\ell,A} = \big(\underbrace{d+1,\dots,d+1}_{n_d},\underbrace{d,\dots,d}_{n_{d-1}},\dots,\underbrace{2,\dots,2}_{n_1},\underbrace{1,\dots,1}_{n_0}\big), \tag{2}$$

使得$\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_d) = \Delta^2\mathbf{d}$。

可以看出，对于每个 $0 \le i \le d$，$n_i = \sum_{k-j=i}(J_{\ell,\ A})_{j,\ k}$。此外，要得到约当次数型，可以根据$J_{\ell,\ A}$中非零元素的行指标，读出$P_{\ell,\ A}$中各项的次数。更确切地说，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\ell,A} = \big(&\underbrace{d+1_0,\dots,d+1_0}_{n_{d,0}},\underbrace{d_0,\dots,d_0}_{n_{d-1,0}},\underbrace{d_1,\dots,d_1}_{n_{d-1,1}},\\ &\underbrace{d-1_0,\dots,d-1_0}_{n_{d-2,0}},\dots,\underbrace{d-1_2,\dots,d-1_2}_{n_{d-2,2}},\\ &\vdots\\ &\underbrace{2_0,\dots,2_0}_{n_{1,0}},\dots,\underbrace{2_d,\dots,2_d}_{n_{1,d-1}},\underbrace{1_0,\dots,1_0}_{n_{0,0}},\dots,\underbrace{1_{d+1},\dots,1_{d+1}}_{n_{0,d}}\big),\end{aligned} \tag{3}$$

其中$n_{i,\ j} = (J_{\ell,\ A})_{j,\ i+j}$ 以及$n_i = \sum_{j=0}^{d-i} n_{i,\ j}$。

例 2.3。令 $A = S/\operatorname{Ann}(F) = K[x,y,z]/\operatorname{Ann}(F)$，使得 $F = X^4 + XY^2Z$。令 $\ell = y$ 并注意到

$$\begin{aligned}&A_y^{(0)} = A, \qquad h_A = (1,3,5,3,1),\\ &A_y^{(1)} = S/\operatorname{Ann}(2XYZ), \qquad h_{A_y^{(1)}} = (1,3,3,1),\\ &A_y^{(2)} = S/\operatorname{Ann}(2XZ), \qquad h_{A_y^{(1)}} = (1,2,1), \text{ and}\\ &h_{A_y^{(3)}} = h_{A_y^{(4)}} = (0).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$M_{y,A} = \begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\0&3&3&2&0\\0&0&5&3&1\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}, \text{ and } J_{y,A} = \begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此，利用方程（2）和（3），我们得到

$$P_{y,A} = (3,3,3,3,1), \text{ and } \mathcal{S}_{y,A} = (3_0, 3_1, 3_1, 3_2, 1_2).$$

注 2.4. 文献 [1]进一步研究了秩矩阵，并给出了三个必要条件，用于判定一个元素非负的上三角方阵能否作为某个阿廷-戈伦斯坦代数及某个线性形式的秩矩阵。

3. 余维二阿廷-戈伦斯坦代数

本节将证明，对于余维二的阿廷-戈伦斯坦代数（即完全交叉），约当型唯一确定约当次数型。文献 [2]给出了这类代数可能出现的约当型的完整刻画。

定理 3.1. 设 $P = (P_1, \ldots, P_t)$ 是某个余维二、底元次数为 d 的阿廷-戈伦斯坦代数及某个线性形式的约当型。那么，与 P 相关联的约当次数型唯一确定。

证明. 注意到 P 具有方程 (2) 中的形式。利用方程 (1)，可得 $\dim_K A_\ell^{(d)} = n_d$、$\dim_K A_\ell^{(d-1)} = n_{d-1} - n_d$，并递归地得到对于每个 $0 \le i \le d-2$，$\dim_K A_\ell^{(i)}$ 如下

$$\dim_K A_\ell^{(i)} = n_i + 2\dim_K A_\ell^{(i+1)} - \dim_K A_\ell^{(i+2)}.$$

我们断言，对于每个 $0 \le i \le d$，秩矩阵 $M_{\ell,A}$ 的第 i 条对角线 $\mathrm{diag}(i, M_{\ell,A})$，也就是 $A_\ell^{(i)}$ 的希尔伯特函数，可由 $\dim_K A_\ell^{(i)}$ 和 $A_\ell^{(i)}$ 的底元次数唯一确定，且该次数等于 $d-i$。为证明这一断言，设 B 是一个底元次数为 s 且 $\dim_K B = t$ 的任意阿廷 - 戈伦斯坦代数。显然有 $t \ge s+1$；并且由于 h_B 在每个次数上至多增加一，我们有 $t = \sum_{i=0}^{r}(s+1-2i)$，其中 r 是满足 $h_B(i) = i+1$ 的最大次数 i。因此，

$$h_B(i) = \begin{cases} i+1, & 0 \le i \le r, \\ r+1, & r+1 \le i \le \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, \end{cases}$$

利用对称性，我们得到 B 的希尔伯特函数。因此，由式（3）可知，约当次数型矩阵 $J_{\ell,A}$ 被唯一确定，约当次数型 $\mathcal{S}_{\ell,A}$ 也随之唯一确定。□

4. 高余维阿廷-戈伦斯坦代数

本节将证明，对于余维至少为三的阿廷-戈伦斯坦代数，约当次数型是比 Jordan 型更精细的不变量。在此之前，我们将在下面的例子中介绍一种算法，它可以找到一个三余维阿廷-戈伦斯坦代数和一个线性形式，使得

其关联的秩矩阵等于给定矩阵，该矩阵满足 [1,推论 3.9] 中给出的必要条件。

我们先简要回顾与 $F \in R_d$ 相关的催化矩阵，其中 $F \in R_d$ 是 $A = S/\mathrm{Ann}(F)$ 的 Macaulay 对偶生成元。相对于 S_j 和 S_{d-j} 的 K-基 $\mathcal{B}_j = \{\alpha_u^{(j)}\}_u$和 $\mathcal{B}_{d-j} = \{\beta_v^{(d-j)}\}_v$，$F$ 的第 j 次催化矩阵的元素定义为

$$\mathrm{Cat}_j(F) = \left(\alpha_u^{(j)}\beta_v^{(d-j)} \circ F\right).$$

对于每个 j，$\mathrm{Cat}_j(F)$ 的秩等于 $h_A(j)$，即 A 在次数 j时的希尔伯特函数，见 [7]。

例 4.1（构造具有给定秩矩阵的 A 和 $\ell \in A_1$）。考虑

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并注意到它满足 [1, 推论 3.9]中的必要条件。因此，我们要确定 M 是否能作为某个阿廷-戈伦斯坦代数 A 及某个线性形式 ℓ的秩矩阵。通过线性坐标变换，不妨设 $\ell = x$。设 $M = M_{x,\ A}$ 对于 $A = S/\mathrm{Ann}(F)$ $= K[x, y, z]/\mathrm{Ann}(F)$。形式 F可写为

$$F = X^5G_0 + X^4G_1 + \cdots + G_5,$$

使得 G_i 是 $K[Y, Z]$ 中次数为 i 的形式。我们将递归地求出 G_i。M 的最后两个对角线分别等于 $h_{A_x^{(5)}}$ 和 $h_{A_x^{(4)}}$，由于它们等于零向量，因此我们得到 $G_0 = G_1 = 0$。$A_x^{(3)}$ 的对偶生成元是 $x^3 \circ F = G_2$。我们有 $h_{A_x^{(3)}} =$(1，1，1)，因此 G_2 是 $K[Y, Z]$ 中一个线性形式的二次幂，故可取为等于 $G_2 = Y^2$。因此，

$$F = X^3Y^2 + X^2G_3 + XG_4 + G_5.$$

继续这一过程，我们得到 $h_{A_x^{(2)}} =$(1，2，2，1)，其中 $A_x^{(2)}$ 的对偶生成元等于 $x^2 \circ F = 6XY^2 + 2G_3$。注意，对于 $G_3 = 0$，我们得到 $A_x^{(2)}$ 所需的希尔伯特函数。为得到 G_4，我们计算 $x \circ F = 3X^2Y^2 + G_4$；而要得到 $h_{A_x^{(1)}} =$(1，2，3，2，1)，我们选择 $G_4 = 0$。因此我们有

$$F = X^3Y^2 + G_5$$

接下来需要找到一个多项式 G_5，使我们得到 h_A =(1，3，4，4，3，1)。我们通过计算 F 的催切矩阵来实现这一点。回顾一下， A 在次数为 1 和 2 时的希尔伯特函数分别等于第一催切矩阵和第二催切矩阵的秩。记 $G_5 = \sum_{i=0}^{5} a_i Y^{5-i} Z^i$。对于每个 j，令 $\mathcal{B}_j$ 为 S_j 按字典序排列的单项式基。那么 F 的第一和第二催切矩阵是分块矩阵。

$$\mathrm{Cat}_1(F) = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}\right],$$

and

$$\mathrm{Cat}_2(F) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}\right].$$

容易看出，对于 $G_5 = (Y + Z)^5$，我们有 $\mathrm{rkCat}_1(F) = 3$，且 $\mathrm{rkCat}_2(F) = 4$。由此可得， M 是阿廷-戈伦斯坦代数 $A = S/\operatorname{Ann}(F)$ 和 $\ell = x$ 的秩矩阵，其中

$$F = X^3Y^2 + (Y + Z)^5.$$

此外，利用方程 (2) 和 (3)， A 和 $\ell = x$ 的约当型与约当次数型分别为 $P_{x,\ A}$ =(4，4，4，1，1，1，1) 以及 $\mathcal{S}_{x,\ A}$ = $(4_0, 4_1, 4_2, 1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$。

利用上述方法，我们证明，对于余维至少为三的阿廷-戈伦斯坦代数，约当次数型比约当型包含更多信息。

例 4.2 （一个 Jordan 型对应的两种 Jordan 次数型）。 以下矩阵满足 [1, 推论 3.9] 中给出的必要条件。因此，它们可以作为阿廷-戈伦斯坦代数的秩矩阵，并且

线性形式。

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意，这两个矩阵仅在红色条目上有所不同。类似于例 4.1 中所述的过程，但技术上更复杂，我们发现 M_1 和 M_2 都可作为秩矩阵。更准确地说，$M_1 = M_{x,\ A}$ 和 $M_2 = M_{x,\ B}$，使得 $A = S/\operatorname{Ann}(F)$、$B = S/\operatorname{Ann}(G)$，

$$F = X^6Y^2 + X^3(Y+Z)^5 + XY(Y+Z)^6 + Y^8 + Z^8,$$

and

$$G = X^6Y^2 + X^3(Y^5+Z^5) + X(Y^7+Z^7) + Y^8 + Y^7Z + YZ^7 + Z^8.$$

由于根据公式 (2)，两个矩阵中红色条目的和相等，我们得到

$$P_{x,A} = P_{x,B} = (7^3, 4^4, 2^2, 1^6).$$

另一方面，由公式 (3) 可得

$$\mathcal{S}_{x,A} = (7_0, 7_1, 7_2, 4_1, 4_2, 4_3, 4_4, 2_2, 2_5, 1_3, 1_3, 1_4, 1_4, 1_5, 1_5),$$
$$\mathcal{S}_{x,B} = (7_0, 7_1, 7_2, 4_1, 4_2, 4_3, 4_4, 2_3, 2_4, 1_2, 1_3, 1_3, 1_5, 1_5, 1_6).$$

注 4.3。使用代数软件 Macaulay2，通过计算证明，在所有底元次数小于 8 的三余维阿廷-戈伦斯坦代数中，不存在具有相同约当型但不同约当次数型的例子。换言之，上述例子在所有三余维阿廷-戈伦斯坦代数中具有最小的底元次数。另一方面，对于更高余维的阿廷-戈伦斯坦代数，存在底元次数更小的此类例子，见例 4.4。

使用与上文相同的方法，我们得到以下例子，计算留给读者完成。读者也可以使用下方提供的 Macaulay2 代码进行进一步实验。

例 4.4。设 $S = K[x,y,z,w]$ 和 $A = S/\operatorname{Ann}(F)$ 以及 $B = S/\operatorname{Ann}(G)$ 是余维为四的阿廷-戈伦斯坦代数，其中

$$F = X^4Y + X^2Y^2Z + XY^3W + Y^3W^2,$$

and

$$G = X^4Y + X^2Y^2Z + XZ^3Y + W^5.$$

我们有 $h_A = h_B =$(1，4，7，7，4，1)。对于线性形式 $\ell = x$，A 和 B 的秩矩阵相等，等于

$$M_{\ell,A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ and } M_{\ell,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用方程 (2) 和 (3)，我们得到

$$P_{\ell,A} = P_{\ell,B} = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1),$$

and

$$\mathcal{S}_{\ell,A} = (5_0, 5_1, 3_1, 3_2, 2_1, 2_3, 1_2, 1_2, 1_3, 1_3),$$
$$\mathcal{S}_{\ell,B} = (5_0, 5_1, 3_1, 3_2, 2_2, 2_2, 1_1, 1_2, 1_3, 1_4).$$

Macaulay 2 代码：我们提供本研究中主要用于计算的 Macaulay2 代码。设 F 是 Macaulay 对偶环中次数为 d 的一个形式，$R = K[x, y, z]$（这里我们滥用一下记号，用 x，y，z 表示对偶环中的变量）。下面给出一些用于计算 F 的催化矩阵的代码；利用该矩阵，我们可以计算与 F 相关的阿廷-戈伦斯坦代数 A 的希尔伯特函数，而无需计算 A。接着，对于给定的线性形式 ℓ，我们计算阿廷-戈伦斯坦代数 $A_\ell^{(i)}$ 的对偶生成元，再计算其希尔伯特函数，这些函数构成秩矩阵 $M_{\ell,\ A}$ 的对角线，即 diag(i，$M_{\ell,\ A}$)。请注意，以下计算适用于任意数量的变量，只需调整 R 和 ℓ 中的变量数量，其余部分均保持不变。

R = QQ[x,y,z]Cat = (i,F) ->(diff(transpose basis(i,R), diff(basis(first degree F-i,R),F))) Hilb = (F) -> for i to first degree F list rank Cat(i,F) l = a*x+b*y+c*z; f = (i,l,F) -> diff(l^i,F) diag = (i,l,F) -> Hilb(diff(l^i,F))

最后，给定 F 及其次数，以下两个函数可计算与 F 和 ℓ 相关的阿廷-戈伦斯坦代数的秩矩阵和 Jordan 型：

```
M = (l,F) -> ( d = F 的首次数; L = 对 i 从 1
到 d 列表，对 j 从 1 到 d-i 列表 rank
Cat(i,diff(l~j,F)); matrix({L_0}|(for i from 1 t
o d list (for j from 1 to ilist0)|L_i)) )
```

```
P = (l,F) ->( d = F 的首次数; L1 = 对 i 从 1 到 d 求和，对 j 从 1
到 d-i 求和 rank Cat(j,diff(l~i,F)); L2 = L1|{0,0}; L3 = 对 i 从 1
到 d 列表 L2_i+L2_(i+2)-2*L2_(i+1); reverse flatten for i to d list
if L3_i!= 0then for j to L3_i-1 list i+1else continue )
```

最后，我们提出一些问题：

问题 1. 对于余维高于二的阿廷-戈伦斯坦代数，在什么条件下约当次数型与约当型等价?

问题 2。 给定一个 Jordan 型，我们能否确定可能的 Jordan 次数类型?

参考文献

[1] N. Altafi. “三余维 Artinian Gorenstein 代数中具有较小部分的 Jordan 型”。载于：线性代数及其应用646（2022），第 54–83 页。issn：0024-3795。[2] N. Altafi、A. Iarrobino 和 L. Khatami。“高度二情形下的完全交 Jordan 型”。载于：*Journal of Algebra* 557（2020），第 224–277 页。issn：0021-8693。[3] B. Costa 和 R. Gondim。“分次 Artinian Gorenstein 代数的 Jordan 型”。载于：*Advancesin Applied Mathematics* 111（2019），第 101941 卷，27 页。issn：0196-8858。[4] A. V. Geramita。“胖点的逆系统：华林问题、Veronese 簇的割线簇以及戈伦斯坦理想的参数空间”。载于：*Queen’s* 曲线研讨会10（1996），第 2–114 页。[5] R. Gondim 和 G. Zappalà。“关于混合 Hessian 与 Lefschetz 性质”。载于：*Journal of Pure and Applied Algebra* 223.10（2019），第 4268–4282 页。

[6] T. Harima、T. Maeno、H. Morita、Y. Numata、A. Wachi 和 J. Watanabe。*Lefschetz* 性质。第 1 版，2013 年。数学讲义，第 2080 卷。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，2013 年。isbn：3-642-38206-1。[7] A. Iarrobino 和 V. Kanev。幂和、戈伦斯坦代数与行列式簇。第 1721 卷。数学讲义。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，1999 年。isbn：978-3-540-66766-7。doi：10 . 1007/ BFb0093426。url：http://link.springer.com/10.1007/BFb0093426。[8] A. Iarrobino、L. Khatami、B. Van Steirteghem 和 R. Zhao。“具有给定 Jordan 型作为最大交换幂零轨道的幂零矩阵”。载于：线性代数及其应用546.C（2018），第 210–260 页。issn：0024-3795。[9] A. Iarrobino、P. Macias Marques 和 C. McDaniel。“Artinian 代数与 Jordan 型”。载于：交换代数杂志14.3（2022），第 365–414 页。[10] A. Iarrobino、P. Macias Marques 和 C. Mcdaniel。“自由扩张与 Jordan 型”。载于：*Journalof Algebra* 549（2020），第 346–364 页。issn：0021-8693。[11] F. S. Macaulay。“论处理平面曲线交点的一种方法”。载于：美国数学会会刊5.4（1904），第 385–410 页。issn：0002-9947。[12] T. Maeno 和 J. Watanabe。“Artinian Gorenstein 代数的 Lefschetz 元素与齐次多项式的 Hessian 矩阵”。载于：伊利诺伊数学杂志53.2（2009），第 591–603 页。

加拿大安大略省金斯顿女王大学数学与统计系，以及瑞典皇家理工学院数学系

电子邮箱地址：nasrinar@kth.se