arXiv:2303.13701v2 [math.MG] 7 Jan 2024

粗凸空间的自由积与粗鲍姆–康涅猜想

深谷智宏与 TAKUMI MATSUKA

Abstract. 第一作者与 Oguni 引入了一大类称为粗凸空间的度量空间。其中包括 Gromov 双曲度量空间、CAT(0) 空间、收缩复形和适当单射度量空间。我们引入度量空间自由积的概念，并证明对称测地粗凸空间的自由积仍是对称测地粗凸空间。作为应用，可以推出对称测地粗凸空间的自由积满足粗 Baum–Connes 猜想。

Introduction

第一作者与 Oguni [8] 引入了一大类称为粗凸空间的度量空间。在粗几何中，粗凸空间可视为单连通、完备且具有非正截面曲率的黎曼流形的对应物。这一类包含许多度量空间类别。特别是，对称测地粗凸空间 是粗凸空间的一个重要子类。

设 (X, d_X) 是一个测地度量空间。设 $E \geq 1$ 和 $C \geq 0$ 为常数。设 $\mathcal{L}$ 是一族测地线段。若 E、C 和 $\mathcal{L}$ 满足以下条件，则度量空间 X 是一个对称的测地 $(E, C, \mathcal{L})$-粗凸空间：

i). 对任意 $u, v \in X$，存在一条测地线段 $\gamma \in \mathcal{L}$，满足 $\gamma\colon [0, a] \to X$，使得 $\gamma(0) = u$ 且 $\gamma(a) = v$。 ii). 设 $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ 为测地线段，满足 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 和 $\eta\colon [0, b] \to X$。令 $\gamma(0) = \eta(0)$。对于任意 $t \in [0, a]$、$s \in [0, b]$ 和 $c \in [0, 1]$，有

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq cEd_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

iii). 对于映射 $\gamma\colon [a, b] \to X$，我们用 γ^{-1} 表示由 $\gamma^{-1}(t) := \gamma(b - (t - a))$（$t \in [a, b]$）定义的映射 $\gamma^{-1}\colon [a, b] \to X$。对于每个 $\gamma \in \mathcal{L}$，测地线段 γ^{-1} 都包含在 $\mathcal{L}$ 中。

2020年 数学主题分类。主要分类：51F30；次要分类：20F65、58B34。关键词和短语。 自由积、粗凸空间、粗 Baum–Connes 猜想。第一作者获得了日本学术振兴会科研补助金（项目编号 JP19K03471）的资助。第二作者获得了 JST“面向科学技术创新的大学奖学金设立”项目（项目编号 JPMJFS2139）的资助。

如果存在 E、 C 以及一族测地线段 $\mathcal{L}$，使得 X 是一个对称测地（E， C， $\mathcal{L}$）-粗凸空间，则称 X 为对称测地粗凸空间 。粗凸群 是一个适当地且余紧地作用在粗凸空间上的群 G 。表 1 中列出的度量空间类别都是对称测地粗凸空间的例子。

- 测地 Gromov 双曲度量空间。
- CAT(0)空间。
- 收缩复形 [14]。
- 适当单射度量空间 [5], ，尤其是局部有限粗 Helly 图的单射包 [3]。

TABLE 1. 对称测地粗凸空间的例子。

Pisanski 和 Tucker [15] 引入了凯莱图的自由积，Bridson 和 Haefliger [2, 定理 II.11.18] 构造了群可以在其上适当地且余紧地作用的度量空间。通过对他们的构造稍作修改，我们定义了带网的度量空间的自由积，并得到以下结果。

THEOREM 0.1. 设 X 和 Y 是带网的度量空间。若 X 和 Y 是对称测地粗凸空间，则自由积 $X * Y$ 也是对称测地粗凸空间。

设 X 是一个真度量空间。粗组装映射 是从 X 的粗 *K*-同调 到 X的*Roe* 代数 的 K-理论的同态。粗 *Baum– Connes* 猜想 指出，对于“良好”的真度量空间，粗组装映射是同构。第一作者和 Oguni [8, 定理 1.3] 证明了，对于真粗凸空间，粗 Baum–Connes 猜想成立。结合这一结果和定理 0.1，我们得到以下

THEOREM 0.2. 设 X 和 Y 是带有网的恰当度量空间。若 X 和 Y 是对称测地粗凸空间，则自由积 $X*Y$满足粗 *Baum–Connes* 猜想。

设 G 和 H 是分别在 X 和 Y上适当地余紧作用的群。我们可以根据它们的作用构造自由积 X 和 Y 。此外，$G * H$ 在其上适当地余紧作用。因此，结合定理 0.2 和施瓦茨–米尔诺引理，我们得到以下结论。

THEOREM 0.3. 设 X 和 Y 是带有网的恰当度量空间。我们假设 X 和Y 是对称测地粗凸空间。设 G 和 H 分别是适当地且余紧地作用在 X 和 Y 上的群。那么 $G*H$ 满足粗 *Baum–Connes* 猜想。

1. Free products of metric spaces

为定义度量空间的自由积，我们先引入若干记号。

Definition 1.1. 设 (X, d_X) 是一个度量空间， X_0 是一个集合。指标映射是一个映射 $i_X : X_0 \to X$ ，使得对于任意紧子集 $K \subset X$，其原像 $i_X^{-1}(K)$ 是有限集。我们选取一个基点 $e_X \in i_X(X_0)$。我们称 (X_0, i_X, e_X) 为 X 的一个网。对于 $x_0 \in X_0$，我们用 x_0 表示其像 $i_X(x_0)$。 —

Example 1.2. 设 (X, d_X, e_X) 是一个带基点 e_X 的度量空间。设 G 是一个作用于 X 上的群，其作用为等距变换。若对于任意紧子集 $B \subset X$，集合

$$\{g \in G \mid g(B) \cap B \neq \emptyset\}$$

是有限集。若存在一个紧子集 $K \subset X$ 使得 G 余紧地作用于 X ，则称该作用为余紧的。

$$\bigcup_{g \in G} g(K) = X.$$

当群 G 在 X 上适当地且余紧地作用时，轨道映射 $o(e_X) : G \to X, g \mapsto g(e_X)$ 是 X 的指标映射。因此，$(G, o(e_X)\ e_X)$ 是 X 的一个网。我们称 $(G, o(e_X)\ e_X)$ 为 G-网。

Remark 1.3. 在定义 1.1 的网的定义中，我们不要求指标映射是单射。事实上，设 G 是一个作用在度量空间 X 上的群，其基点为 e_X，如例 1.2 所示。那么轨道映射 $o(e_X) : G \to X$ 是单射，当且仅当 e_X 的稳定子群是平凡的。

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是带有网的度量空间，且 (X_0, i_X, e_X) 和 (Y_0, i_Y, e_Y) 分别是 X 和 Y 的网。我们选取 ϵ_X 和 ϵ_Y，使得 $i_X(\epsilon_X) = e_X$ 和 $i_Y(\epsilon_Y) = e_Y$ 分别成立。设 $X_0^* = X_0 \setminus \{\epsilon_X\}$ 和 $Y_0^* = Y_0 \setminus \{\epsilon_Y\}$。$X_0^* \sqcup Y_0^*$ 上的一个 正规词 是一个有限序列

$$w_0 w_1 \cdots w_n \quad (n \geq 0, w_i \in X_0^* \sqcup Y_0^*)$$

使得对于所有的 i，我们有

$$w_i \in X_0^* \Rightarrow w_{i+1} \in Y_0^*,$$
$$w_i \in Y_0^* \Rightarrow w_{i+1} \in X_0^*.$$

设 $\omega = w_0 w_1 \cdots w_n$ 是一个正规词。我们将 ω 的 长度 定义为 $n+1$。我们用 ϵ 表示 <styIe id='7'>空词。我们规定空词的长度为零。

我们将 W 定义为由空词 ϵ 和所有正规词组成的集合。我们将 W_X 定义为 W 的子集，该子集由 ϵ 和末字母不属于

不属于 X_0^*的正规词组成，也就是说，

$$W_X := \{w_0 w_1 \cdots w_n \in W \mid w_n \notin X_0^*\} \bigsqcup \{\epsilon\},$$

并且我们类似地定义 W_Y，也就是说，

$$W_Y := \{w_0 w_1 \cdots w_n \in W \mid w_n \notin Y_0^*\} \bigsqcup \{\epsilon\}.$$

我们使用以下不交并 $X * Y$，

$$\begin{aligned}\widetilde{X * Y} :=& (W_X \times X) \bigsqcup (W_Y \times Y) \\ & \bigsqcup (W_X \times X_0^* \times [0,1]) \bigsqcup (W_Y \times Y_0^* \times [0,1]) \bigsqcup (\epsilon \times [0,1]).\end{aligned}$$

我们在 $X * Y$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下:

- $(\epsilon,\ e_X) \sim (\epsilon,\ 0)$ 和 $(\epsilon,\ 1) \sim (\epsilon,\ e_Y)$。
- 设 $\omega \in W_X$ 和 $x_0 \in X_0^*$。

$$\{\omega\} \times X \ni (\omega, \overline{x_0}) \sim (\omega, x_0, 0) \in \{\omega\} \times \{x_0\} \times [0,1],$$
$$\{\omega x_0\} \times Y \ni (\omega x_0, e_Y) \sim (\omega, x_0, 1) \in \{\omega\} \times \{x_0\} \times [0,1].$$

- 令 $\tau \in W_Y$和 $y_0 \in Y_0^*$。我们定义

$$\{\tau\} \times Y \ni (\tau, \overline{y_0}) \sim (\tau, y_0, 0) \in \{\tau\} \times \{y_0\} \times [0,1],$$
$$\{\tau y_0\} \times X \ni (\tau y_0, e_X) \sim (\tau, y_0, 1) \in \{\tau\} \times \{y_0\} \times [0,1].$$

DEFINITION 1.4. 自由积 $X * Y$是 $X * Y$关于等价关系 $\sim$的商集。

自由积 ct $X * Y$由以下两种类型的分支组成（见图 1） .

- 片由 $\{\omega\} \times X$和 $\{\tau\} \times Y$组成，其中 $\omega \in W_X$和 $\tau \in W_Y$。为简单起见，我们分别将 $\{\omega\} \times X$和 $\{\tau\} \times Y$记作 ωX和 τY。我们将X 以及 Y 分别与 ϵX 和 ϵY 相识别。我们称 ω 和 τ 为指标词。对于每个片，片的高度就是指标词的长度。

- 边分为以下三种：– 存在一条边 $\{\epsilon\} \times [0,1]$，连接 $(\epsilon, e_X) \in \{\epsilon\} \times X$和 $(\epsilon, e_Y) \in \{\epsilon\} \times Y$– 设 $\omega \in W_X$和 $x_0 \in X_0^*$。则存在一条边 $\{\omega\} \times \{x_0\} \times [0,1]$，连接 $(\omega, x_0) \in \{\omega\} \times X$和 $(\omega x_0, e_Y) \in \{\omega x_0\} \times Y$。– 设 $\tau \in W_Y$和 $y_0 \in Y_0^*$。则存在一条边 $\{\tau\} \times \{y_0\} \times [0,1]$，连接 $(\tau, y_0) \in \{\tau\} \times Y$和 $(\tau y_0, e_X) \in \{\tau y_0\} \times X$。

—

NOTATION 1.5. 每个点 $p \in X * Y$都可以自然地与满足以下条件的三元组 (ω, z, t) 对应，其中 $\omega \in W$, $z \in X \sqcup Y$和 $t \in [0,1)$:

- 如果 $\omega \in W_X$，那么 $z \in X$,

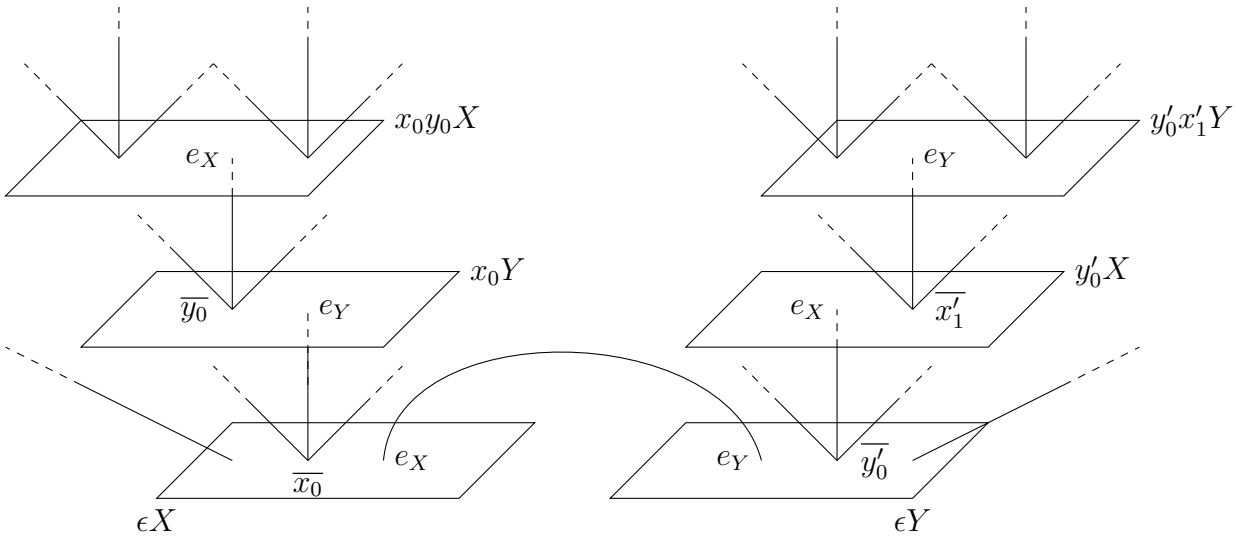


FIGURE 1. 自由积 $X * Y$。其中， x_0， $x_1' \in X_0^*$和 y_0， $y_0' \in Y_0^*$。

• 如果 $\omega \in W_Y$，那么 $z \in Y$，

若 $z \notin i_X(X_0) \sqcup i_Y(Y_0)$，则 $t = 0$。

我们将 (ω, z, t) 称为 p 的坐标。若 $t = 0$，则称 p 属于片；若 $t > 0$，则称p 属于边。当 p 属于某个片时，我们将 $(\omega, z, 0)$ 简记为 (ω, z)。

NOTATION 1.6. 我们使用以下记号。

• 对于 $z \in X \sqcup Y$，令

$$\|z\| \coloneqq \begin{cases} d_X(e_X, z) & \text{if } z \in X, \\ d_Y(e_Y, z) & \text{if } z \in Y. \end{cases}$$

• 对于 $u, v \in X \sqcup Y$，定义

$$d_{X\sqcup Y}(u, v) \coloneqq \begin{cases} d_X(u, v) & \text{if } \{u, v\} \subset X, \\ d_Y(u, v) & \text{if } \{u, v\} \subset Y, \\ \infty & \text{else.} \end{cases}$$

我们将在自由积 $X * Y$ 上构造度量 d_*。首先，定义一个对称函数 D_*：$W \times W \to \mathbb{R}$。设 $\omega = uw_0 \cdots w_n \in W$ 和 $\omega' = uw_0' \cdots w_m' \in W$，其中 $u = u_0 \dots u_k \in W$是最长公共前缀，即有 $w_0 \neq w_0'$。我们定义

$$D_*(\omega, \omega') \coloneqq d_{X\sqcup Y}(\overline{w_0}, \overline{w_0'}) + \sum_{i=1}^{n} \|\overline{w_i}\| + \sum_{j=1}^{m} \|\overline{w_i'}\| + n + m + 2.$$

对于 $\omega = w_0 \cdots w_n \in W$，我们定义

$$D_*(\epsilon, \omega) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \|\overline{w_i}\| + n + 1.$$

最后，我们定义 $D_*(\epsilon,\epsilon) = 0$。

现在我们将定义 d_* 在 $X*Y$上的度量。首先，我们定义 d_* 在片上的度量。设 p, $q \in X*Y$。假设 p和 q属于片。令 $(\omega, u, 0)$ 和 $(\tau, v, 0)$ 分别为p 和 q的坐标。这里， ω, $\tau \in W$和 $u, v \in X \sqcup Y$，如记号 1.5 中所示。我们考虑以下三种情况。

(I) ω 和 τ 相等。

在这种情况下，首先，假设 $\omega = \tau \neq \epsilon$。然后我们定义

$$d_*(p,q) \coloneqq d_{X\sqcup Y}(u,v).$$

接下来，假设 $\omega = \tau = \epsilon$。然后我们定义

$$d_*(p,q) \coloneqq \begin{cases} d_{X\sqcup Y}(u,v) & \text{if } \{u,v\} \subset X \text{ or } \{u,v\} \subset Y, \\ \|u\| + \|v\| + 1 & \text{else} \quad (\text{see Figure 2}). \end{cases}$$

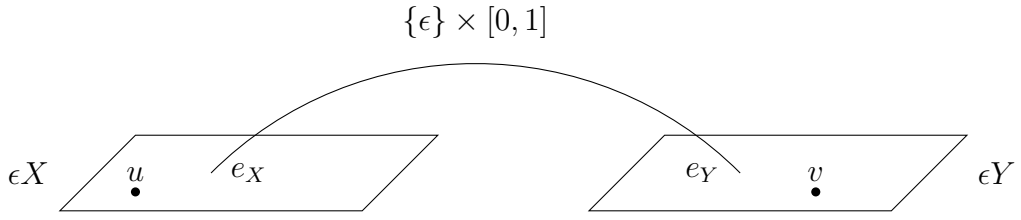


FIGURE 2. 情况 (I) 的一个例子。令 $p = (\epsilon, u)$ 和 $q = (\epsilon, v)$，其中 $u \in X$，且 $v \in Y$。

(II) ω 是 τ的真子词。

在这种情况下，存在 $\tau' \in W \setminus \{\epsilon\}$ 使得 $\tau = \omega\tau'$。令 z为 τ'的首字母。首先，我们假设 ω 不是空词。见图 3。在此图中， $z = x'_0$。然后我们定义

$$d_*(p,q) \coloneqq d_{X\sqcup Y}(u,\overline{z}) + D_*(\epsilon,\tau') + \|v\|.$$

接下来，我们假设 ω是空词。如果 $\{u,z\} \subset X$或 $\{u,z\} \subset Y$成立，那么我们定义

$$d_*(p,q) \coloneqq d_{X\sqcup Y}(u,\overline{z}) + D_*(\epsilon,\tau') + \|v\|.$$

否则，我们定义

$$d_*(p,q) \coloneqq \|u\| + \|\overline{z}\| + D_*(\epsilon,\tau') + \|v\| + 1.$$

(III) (I)和(II)均不成立。

在这种情况下，存在最长公共前缀 $\rho \in W$ （可能是空词）和 ω', $\tau' \in W \setminus \{\epsilon\}$，使得 $\omega = \rho\omega'$ 且 $\tau = \rho\tau'$。令 z_0 和 w_0 为

ω' 和 τ' 的首字母，分别如此。见图4。在此图中，$z_0 = x_0$ 和 $w_0 = x'_0$。于是我们定义

$$d_*(p,q) \coloneqq d_*((\rho,\overline{z_0}),(\rho,\overline{w_0})) + D_*(\epsilon,\omega') + D_*(\epsilon,\tau') + \|u\| + \|v\|\,.$$

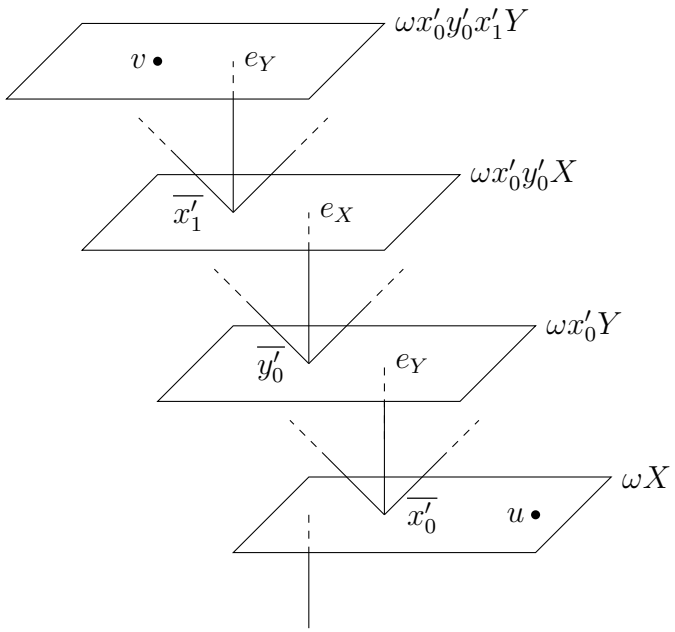


FIGURE 3. 情形 (II) 的一个例子。设 $p = (\omega,\ u)$ 和 $q = (\omega x'_0 y'_0 x'_1,\ v)$，其中 $\omega \in W_X \setminus \{\epsilon\}$, $x'_i \in X_0^*$, $y'_0 \in Y_0^*$, $u \in X$ 和 $v \in Y$。

最后，以显然的方式将 d_* 扩展到边上。从构造可知，d_* 是对称的、非退化的，并且满足三角不等式。由此完成了自由积 $X * Y$ 上度量 d_* 的构造。

EXAMPLE 1.7. 设 G 和 H 为有限生成群，且 S_G 和 S_H 分别为 G 和 H 的有限生成集。设 $\Gamma(G,S_G)$ 和 $\Gamma(H,S_H)$ 分别为 G 和 H 的凯莱图。相对于 (G,ι_G,e_G) 和 (H,ι_H,e_H)，我们可以构造自由积 $\Gamma(G,S_G)$ 和 $\Gamma(H,S_H)$，其中 ι_G 和 ι_H 为包含映射。所得空间 $\Gamma(G,S_G) * \Gamma(H,S_H)$ 与 Pisanski 和 Tucker 意义下的凯莱图自由积 [15] 一致。

下面的例子表明，自由积的粗几何取决于网的选择。

EXAMPLE 1.8. 对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $G_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。我们假设 G_m 通过旋转作用于 $\mathbb{R}^2$，即，

$$[l]\cdot(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(r\cos\left(\theta+\frac{2\pi l}{m}\right), r\sin\left(\theta+\frac{2\pi l}{m}\right)\right).$$

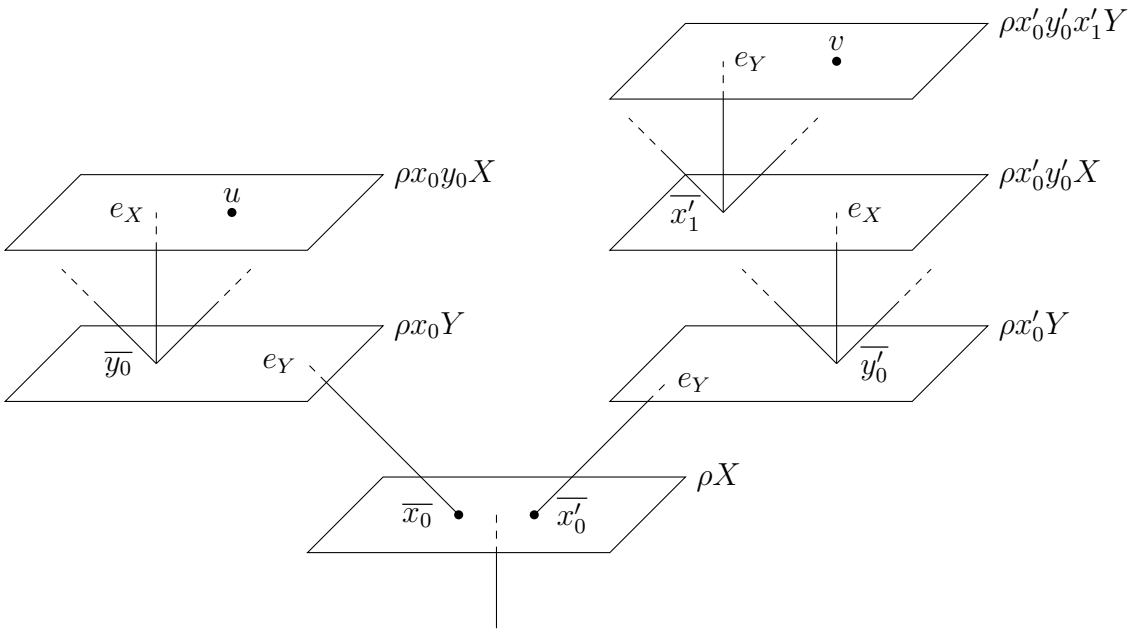


FIGURE 4. (III) 的一个例子。设 $p = (\rho x_0 y_0, u)$ 和 $q = (\rho x_0' y_0' x_1', v)$，其中 $x_i, x_i' \in X_0^*$, $y_0, y_0' \in Y_0^*$, $u \in X$ 和 $v \in Y$。这里，$\rho \in W_X$ 和 $x_0 \neq x_0'$。

令 $o((1,0))$ 为在此作用下 $(1,0)$ 的轨道映射。三元组 $(G_m, o((1,0)), (1,0))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个网。对于 $m, n \in \mathbb{N}$，我们考虑关于 $(G_m, o((1,0)), (1,0))$ 和 $(G_n, o((1,0)), (1,0))$ 的自由积 $\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$。我们将看到 $\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$ 的增长类型如何取决于网的选择。

我们用 $V(R)$ 表示闭球中形如 $(\omega,(p,q))$ 的点的个数，该闭球的半径为 R，中心为 $(\epsilon,(0,0))$；其中 ω 是一个词，p, q 是整数。

令 $G_m^* = G_m \setminus \{0\}$，并设 W 为 $G_n^* \sqcup G_m^*$ 上的正规词集合，空词为 ϵ。

(1) 假设 $m = 1$。此时，G_m^* 为空，因此正规词只由单个字母组成，即 $W = G_n^* \sqcup \{\epsilon\}$。那么，片的数量为 $n+1$。我们在图5中展示了 $\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$ 的形状。我们可以如下估计 $V(R)$:

$$V(R) \leq (n+1) \cdot 2\pi R^2.$$

因此，在这种情况下，$\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$ 具有多项式增长。

(2) 假设 $m = 2$ 和 $n = 2$。此时，字母集合 $G_2^* \sqcup G_2^* = \{1\} \sqcup \{1\}$包含两个元素。我们在图6中展示了 $\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$ 的形状。我们可以估计 $V(R)$:

$$V(R) \leq R \cdot 2\pi R^2.$$

因此，在这种情况下，$\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$ 具有多项式增长。

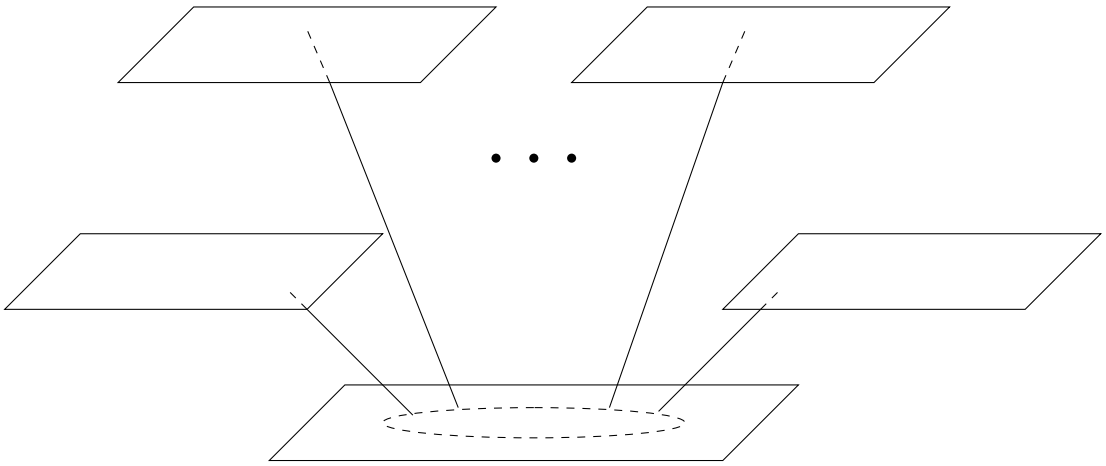


FIGURE 5. $m = 1$.

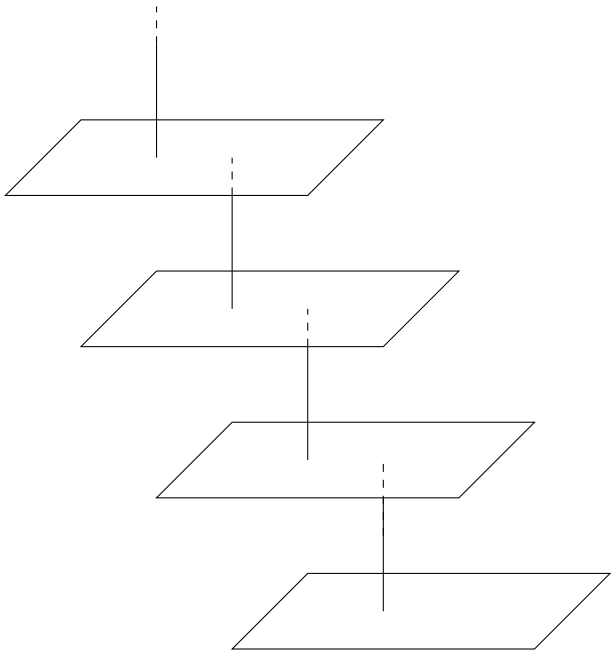


FIGURE 6. $m = 2$ 和 $n = 2$。

(3) 假设 $m \geq 3$ 和 $n \geq 2$。在这种情况下，G_m^* 至少有两个元素。此时，自由积具有树状结构。由于群 $G_m * G_n$ 的自由积具有指数增长，片的数量会呈指数增长。因此，在这种情况下，$\mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2$ 具有指数增长。

REMARK 1.9. 令 X、X' 和 Y 为度量空间。假设 X 与 X' 拟等距。一般而言，$X * Y$ 与 $X' * Y$ 不一定拟等距。例如，令 Γ_2 为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的某个生成集对应的凯莱图，Γ_3 为 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的凯莱图。显然，Γ_2 与 Γ_3 拟等距。根据命题4.1，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

在 $\Gamma_2 * \Gamma_2$ 上适当地且余紧地作用， $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $\Gamma_3 * \Gamma_2$ 上也如此。由于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 有两个端，而 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 有无穷多个端，因此 $\Gamma_2 * \Gamma_2$ 与 $\Gamma_3 * \Gamma_2$ 不拟等距。

2. Coarsely convex spaces

本节简要回顾粗几何与粗凸空间。

2.1. 测地度量空间与恰当度量空间。 若度量空间 (X, d_X) 对任意 $x, x' \in X$，都存在映射 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 使得 $\gamma(0) = x$， $\gamma(a) = x'$，且对所有 $t, t' \in [0, a]$，均有 $d_X(\gamma(t)\ \gamma(t')) = |t - t'|$，则称其为测地度量空间 。

若度量空间 (X, d_X) 中的每个有界闭子集都是紧集，则称其为恰当度量空间 。

2.2. 粗等价与拟等距。 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 为度量空间。若映射 $f\colon X \to Y$ 存在一个非递减函数 $\rho_+\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得不等式

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x'))$$

对于任意 x， $x' \in X$ 都成立；对于任意有界子集 $B \subset Y$，其原像 $f^{-1}(B)$ 也是有界的。

我们还称映射 $f\colon X \to Y$ 是粗嵌入 ，如果存在非递减函数 ρ_-， $\rho_+\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得

$$\lim_{t \to \infty} \rho_-(t) = \infty,$$

且不等式

$$\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x'))$$

对于任意 x， $x' \in X$ 都成立。当我们可以选取 ρ_- 和 ρ_+ 为仿射映射时，就称映射 f 为拟等距嵌入。

设 $X' \subset X$。对于 $M \geq 0$，若 $X = B_M(X')$，其中$B_M(X')$ 是 X' 的闭 M-邻域，则称 X' 在 X 中是 M-稠密的。若存在粗嵌入映射 $f\colon X \to Y$ 和 $M \geq 0$，使得 $f(X)$ 在 Y 中是 M-稠密的，则称 X 和 Y 粗等价。若存在拟等距嵌入映射 $f\colon X \to Y$ 和 $M \geq 0$，使得 $f(X)$ 在 Y 中是 M-稠密的，则称 X 和 Y 拟等距 。

设 $\lambda \geq 1$ 和 $k \geq 0$。(λ, k)-拟测地线段 是一个(λ, k)-拟等距嵌入 $\gamma\colon [0, a] \to X$，也就是说，不等式

$$\lambda^{-1}|t - t'| - k \leq d_X(\gamma(t), \gamma(t')) \leq \lambda|t - t'| + k$$

对所有 $t, t' \in [0, a]$ 均成立。

2.3. **粗凸空间**。

DEFINITION 2.1. 设 (X, d_X) 是一个度量空间。设 $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1$ 和 $C \geq 0$ 为常数。设 $\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个非递减函数。设 $\mathcal{L}$ 是由 (λ, k)-拟测地线段构成的族。如果 $\mathcal{L}$ 满足以下条件，则度量空间 X 是 $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$-粗凸：

(CC1) 对任意 $v, w \in X$，存在一条拟测地线段 $\gamma \in \mathcal{L}$，满足 $\gamma\colon [0, a] \to X$,$\gamma(0) = v$ 且 $\gamma(a) = w$。(CC2) 设 $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ 为拟测地线段，满足 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 且 $\eta\colon [0, b] \to X$。那么对所有 $t \in [0, a], s \in [0, b]$和 $c \in [0, 1]$，有

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq (1 - c)Ed_X(\gamma(0), \eta(0)) + cEd_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

我们称这个不等式为粗凸不等式。

(CC3) 设 $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ 为拟测地线段，满足 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 且 $\eta\colon [0, b] \to X$。

那么对所有 $t \in [0, a]$ 和 $s \in [0, b]$，有

$$|t - s| \leq \theta(d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\gamma(t), \eta(s))).$$

满足 (CC1)、(CC2) 和 (CC3) 的族 $\mathcal{L}$ 称为良拟测地线段系统，其元素 $\gamma \in \mathcal{L}$ 称为良拟测地线段。

如果存在常数 λ, k, E, C，一个非递减函数 $\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及一个 (λ, k)-拟测地线段族 $\mathcal{L}$，使得 X 是 $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$-粗凸的，则称度量空间 X 为粗凸空间 。

如果族 $\mathcal{L}$ 仅由测地线段组成，那么根据三角不等式，$\mathcal{L}$ 总是满足 (CC3)。

LEMMA 2.2. 设 (X, d_X) 为一个度量空间。设 $\mathcal{L}$ 为一个测地线段族。那么 $\mathcal{L}$ 满足 (CC3)。特别地，我们可以取一个满足(CC3)的非递减函数作为恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$。

PROOF. 设 (X, d_X) 是一个度量空间，且 $\mathcal{L}$ 是一族测地线段。设 $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ 为测地线段，其中 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 且 $\eta\colon [0, b] \to X$。令 $t \in [0, a]$ 和 $s \in [0, b]$。我们假设 $t > s$。由于 γ 和 η 是测地线段，因此有

$$|t - s| = d_X(\gamma(0), \gamma(t)) - d_X(\eta(0), \eta(s)).$$

由三角不等式可得

$$\begin{aligned} &d_X(\gamma(0), \gamma(t)) - d_X(\eta(0), \eta(s)) \\ &\leq d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\eta(0), \eta(s)) + d_X(\eta(s), \gamma(t)) - d_X(\eta(0), \eta(s)) \\ &= d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\gamma(t), \eta(s)). \end{aligned}$$

因此，族 $\mathcal{L}$ 满足 (CC3)。 □

设 X 为一个度量空间。对于映射 $\gamma\colon [a,b]\to X$，我们用 γ^{-1} 表示由 $\gamma^{-1}(t):=\gamma(b-(t-a))$（$t\in[a,b]$）定义的映射 $\gamma^{-1}\colon [a,b]\to X$。对于 $c\in[a,b]$，我们用 $\gamma|_{[a,c]}$ 表示 γ 在 $[a,c]$ 上的限制。设 $\mathcal{L}$ 为 X 中一个拟测地线段族。若对所有 $\gamma\in\mathcal{L}$ 都有 $\gamma^{-1}\in\mathcal{L}$，则称族 $\mathcal{L}$ 为对称；若对所有满足 $\gamma\colon [a,b]\to X$ 的 $\gamma\in\mathcal{L}$ 以及所有 $c\in[a,b]$，都有 $\gamma|_{[a,c]}\in\mathcal{L}$，则称 $\mathcal{L}$ 为前缀闭。

下面的命题 2.3 在主要结果的证明中发挥着重要作用。

PROPOSITION 2.3. 设 (X,d_X) 是一个度量空间。设 $E\geq 1$ 和 $C\geq 0$ 为常数。设 $\mathcal{L}$ 是测地线段族。假设 $\mathcal{L}$ 是对称的，且 $\mathcal{L}$ 满足以下 (sgCC1) 和 (sgCC2)，则 X 是$(1,0,E,3C,\mathrm{id}^{\mathbb{R}_{\geq 0}},\mathcal{L})$-粗凸的。

(sgCC1) 对于任意 $v,w\in X$，存在一条测地线段 $\gamma\in\mathcal{L}$，使得 $\gamma\colon [0,a]\to X$,$\gamma(0)=v$ 且 $\gamma(a)=w$。

(sgCC2) 设 $\gamma,\eta\in\mathcal{L}$ 是满足 $\gamma\colon [0,a]\to X$ 和 $\eta\colon [0,b]\to X$ 的测地线段。令$\gamma(0)=\eta(0)$。那么对于所有 $t\in[0,a]$, $s\in[0,b]$和 $c\in[0,1]$，有

$$d_X(\gamma(ct),\eta(cs))\leq cEd_X(\gamma(t),\eta(s))+C.$$

PROOF. 假设 (sgCC1) 蕴含 (CC1) 成立。由引理 2.2，测地线段族 $\mathcal{L}$ 满足 (CC3)。

我们将证明 $\mathcal{L}$ 满足 (CC2)。设 $\gamma,\eta\in\mathcal{L}$ 为测地线段，其中 $\gamma:[0,a]\to X$ 且 $\eta\colon [0,b]\to X$。设 $t\in[0,a], s\in[0,b]$，以及 $c\in[0,1]$。由 (sgCC1)，存在 $\omega\in\mathcal{L}$，使得 $\omega\colon [0,u]\to X$，且 $\omega(0)=\gamma(0)$ 以及 $\omega(u)=\eta(s)$；并存在 $\xi\in\mathcal{L}$，使得 $\xi\colon [0,v]\to X$，且 $\xi(0)=\eta(0)$ 以及 $\xi(v)=\eta(s)$。由于测地线段族 $\mathcal{L}$ 是对称的，ω^{-1} 和 ξ^{-1} 属于 $\mathcal{L}$。注意，$\gamma(0)=\omega(0)$，且 $\omega^{-1}(0)=\xi^{-1}(0)$。于是，由 (sgCC2)，我们有

$$\begin{aligned}
&d_X(\gamma(ct),\xi(cv))\\
&\leq d_X(\gamma(ct),\omega(cu))+d_X(\omega(cu),\xi(cv))\\
&\leq cEd_X(\gamma(t),\omega(u))+C+d_X(\omega^{-1}((1-c)u),\xi^{-1}((1-c)v))\\
&\leq cEd_X(\gamma(t),\omega(u))+C+(1-c)Ed_X(\omega^{-1}(u),\xi^{-1}(v))+C\\
&=cEd_X(\gamma(t),\eta(s))+(1-c)Ed_X(\gamma(0),\eta(0))+2C, \qquad (1)
\end{aligned}$$

并且我们有

$$\begin{aligned}
&d_X(\xi(cv),\eta(cs))\\
&\leq cEd_X(\xi(v),\eta(s))+C\\
&=cEd_X(\eta(s),\eta(s))+C\\
&=C. \qquad (2)
\end{aligned}$$

结合（1）和（2）可得

$$\begin{aligned} d_X(\gamma(ct),\eta(cs)) &\le d_X(\gamma(ct),\xi(cv)) + d_X(\xi(cv),\eta(cs)) \\ &\le (1-c)Ed_X(\gamma(0),\eta(0)) + cEd_X(\gamma(t),\eta(s)) + 3C. \end{aligned}$$

因此， $\mathcal{L}$ 满足 (CC2)。证毕。 □

我们称 X 为对称测地粗凸空间，如果存在常数 E、C以及一族测地线段 $\mathcal{L}$，使得 $\mathcal{L}$ 是对称的，并满足 (sgCC1) 和 (sgCC2)。

3. Main results

本节将讨论对称测地粗凸空间的自由积。

Theorem 3.1. 设 X 和 Y 是带有网的度量空间。若 X 和 Y 是对称测地粗凸空间，则自由积 $X * Y$ 是对称测地粗凸空间。

在本节余下部分，我们给出定理 3.1 的证明。首先，我们在 $X * Y$ 中构造测地线段族 $\mathcal{L}_*$。设 (X_0, i_X, e_X) 和 (Y_0, i_Y, e_Y) 分别是 X 和 Y 的网，并设 $\mathcal{S}$ 为 $X * Y$ 的片。由于 X 和 Y 是对称的测地粗凸空间，我们可以假设 X 和 Y 分别是 $(1, 0, E_X, C_X, \mathrm{id}^{\mathbb{R}_{\ge 0}}, \mathcal{L}_X)$-粗凸和 $(1, 0, E_Y, C_Y, \mathrm{id}^{\mathbb{R}_{\ge 0}}, \mathcal{L}_Y)$-粗凸。我们定义

$$\begin{aligned} E &\coloneqq \max\{E_X, E_Y\}, \\ C &\coloneqq \max\{C_X, C_Y\}. \end{aligned}$$

对于任意 $S \in \mathcal{S}$ 以及任意 $x, y \in S$，我们在 S 中选取一条从 x 到 y 的良测地线，记作 $\gamma_S(x, y)$。令 E 为边集。对于 $e \in E$ 以及 $v, w \in e$，令 $\gamma_e(v, w)$ 为 e 上从 v 到 w 的测地线段。

由于 X和 Y是对称的，我们可以将其选为 $\gamma_S(y, x) = \gamma_S(x, y)^{-1}$。注意，$e \in E$ 是一个单位区间。于是，对于 $e \in E$ 和 $v, w \in e$，我们有 $\gamma_e(w, v) = \gamma_e(v, w)^{-1}$。我们定义

$$\mathcal{L} \coloneqq \{\gamma_S(x,y) \mid S \in \mathcal{S},\ x, y \in S\} \bigsqcup \{\gamma_e(v,w) \mid e \in E, v, w \in e\}$$

对于 $a, b \in X * Y$，我们通过连接识别点处的 $\gamma \in \mathcal{L}$，定义一条从 a 到 b 的测地线段，记为 $\Gamma(a, b)$。首先，假设 a 和 b 分别属于片 S_1 和 S_2。设 e_{S_1} 和 e_{S_2} 分别为 S_1 和 S_2 的基点，并设 (ω, u) 和 (τ, v) 分别为 a和 b的坐标。这里， $\omega, \tau \in W$和 $u, v \in X \sqcup Y$，如记号 1.5 所示。我们考虑以下三种情况。

(I) ω 和 τ 相等。

在这种情况下，首先，我们假设 $\omega = \tau \neq \epsilon$ 或 $S_1 = S_2$。然后我们定义

$$\Gamma(a,b)(t) \coloneqq \gamma_{S_1}(u,v)(t).$$

接下来，我们假设 $\omega = \tau = \epsilon$ 和 $S_1 \neq S_2$。令 $e_\epsilon = \{\epsilon\} \times [0,1]$。然后我们定义

$$\Gamma(a,b)(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_{S_1}(u, e_{S_1})(t) & \text{for } 0 \leq t \leq \|u\|, \\ \gamma_{e_\epsilon}(e_{S_1}, e_{S_2})(t - t_1) & \text{for } t_1 \leq t \leq t_1 + 1, \\ \gamma_{S_2}(e_{S_2}, v)(t - t_2) & \text{for } t_2 \leq t \leq t_2 + \|v\|, \end{cases}$$

其中 $t_1 = \|u\|$ 和 $t_2 = t_1 + 1$。

(II) ω 是 τ的真子词。

在这种情况下，存在 $\tau' \in W \setminus \{\epsilon\}$ 使得 $\tau = \omega\tau'$。令 z为 τ'的首字母。我们根据 τ'的长度，归纳定义从 a 到 b 的测地线段。首先，假设 ω不是空词，且 τ'的高度等于 **1**，即 $\tau' = z$。令 $e = \{\omega\} \times \{z\} \times [0,1]$ 然后我们定义

$$\Gamma(a,b)(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_{S_1}(u, \overline{z})(t) & \text{for } 0 \leq t \leq d_*(u, \overline{z}), \\ \gamma_e(\overline{z}, e_{S_2})(t - t_1) & \text{for } t_1 \leq t \leq t_1 + 1, \\ \gamma_{S_2}(e_{S_2}, v)(t - t_2) & \text{for } t_2 \leq t \leq t_2 + \|v\|, \end{cases}$$

其中 $t_1 = d_*(u, z)$ 且 $t_2 = t_1 + 1$。接下来，我们假设 ω 是空词且 $\tau' = z$。设 $e' = \{\epsilon\} \times \{z\} \times [0,1]$。若 $\{u, z\} \subset X$ 或 $\{u, \overline{z}\} \subset Y$ 成立，则定义

$$\Gamma(a,b)(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_{S_1}(u, \overline{z})(t) & \text{for } 0 \leq t \leq d_*(u, \overline{z}), \\ \gamma_{e'}(\overline{z}, e_{S_2})(t - t_1) & \text{for } t_1 \leq t \leq t_1 + 1, \\ \gamma_{S_2}(e_{S_2}, v)(t - t_2) & \text{for } t_2 \leq t \leq t_2 + \|v\|, \end{cases}$$

其中 $t_1 = d_*(u, z)$ 且 $t_2 = t_1 + 1$。否则，定义

$$\Gamma(a,b)(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_{S_1}(u, e_{S_1})(t) & \text{for } 0 \leq t \leq \|u\|, \\ \gamma_{e_\epsilon}(e_{S_1}, e_{S_0})(t - t_1) & \text{for } t_1 \leq t \leq t_1 + 1, \\ \gamma_{S_0}(e_{S_0}, \overline{z})(t - t_2) & \text{for } t_2 \leq t \leq t_2 + \|\overline{z}\|, \\ \gamma_{e'}(\overline{z}, e_{S_2})(t - t_3) & \text{for } t_3 \leq t \leq t_3 + 1, \\ \gamma_{S_2}(e_{S_2}, v)(t - t_4) & \text{for } t_4 \leq t \leq t_4 + \|v\|, \end{cases}$$

其中 $t_1 = \|u\|$, $t_2 = t_1 + 1$, $t_3 = t_2 + \|z\|$ 和 $t_4 = t_3 + 1$。这里，$S_0 = \epsilon X$ 或 $S_0 = \epsilon Y$。我们用 e_{S_0} 表示 S_0 的基点。由构造可知，$\Gamma(a,b)$ 是一条测地线段。此外，由于对于任意$S \in \mathcal{S}$，$\gamma_S(y,x) = \gamma_S(x,y)^{-1}$，且对于任意 $e \in E$，$\gamma_e(w,v) = \gamma_e(v,w)^{-1}$，因此我们有 $\Gamma(b,a) = \Gamma(a,b)^{-1}$。

最后，我们假设 τ' 的长度大于 1。令 $\tau' = l_0 l_1 l_2 \dots l_n$，并令 $a' = (\omega l_0 l_1 \dots l_{n-1}, l_n)$。令 $\hat{e} = \{\overline{\omega} l_0 l_1 \dots l_{n-1}\} \times \{l_n\} \times [0,1]$。根据归纳假设，$\Gamma(a, a')$ 有定义。于是我们如下定义 $\Gamma(a,b)$：

$$\Gamma(a,b) \coloneqq \begin{cases} \Gamma(a,a')(t) & \text{for } 0 \le t \le d_*(a,a'), \\ \gamma_{\hat{e}}(\overline{l_n}, e_{S_2})(t - t_1) & \text{for } t_1 \le t \le t_1 + 1, \\ \gamma_{S_2}(e_{S_2}, v)(t - t_2) & \text{for } t_2 \le t \le t_2 + \|v\|, \end{cases}$$

其中 $t_1 = d_*(a, a')$，$t_2 = t_1 + 1$。

(III) 既非 (I) 也非 (II)。

在这种情况下，存在最长公共前缀 $\rho \in W$（可能是空词）和 ω'，$\tau' \in W \setminus \{\epsilon\}$，使得 $\omega = \rho\omega'$ 且 $\tau = \rho\tau'$。令 z_0 和 w_0 分别为 ω' 和 τ' 的首字母。设 $a' = (\rho, z_0)$ 和 $b' = (\rho, w_0)$。然后我们定义

$$\Gamma(a,b) \coloneqq \begin{cases} \Gamma(a,a')(t) & \text{for } 0 \le t \le d_*(a,a'), \\ \Gamma(a',b')(t - t_1) & \text{for } t_1 \le t \le t_1 + d_*(\overline{z_0}, \overline{w_0}), \\ \Gamma(b',b)(t - t_2) & \text{for } t_2 \le t \le t_2 + d_*(b',b), \end{cases}$$

其中 $t_1 = d_*(a, a')$ 和 $t_2 = t_1 + d_*(\overline{z_0}, \overline{w_0})$。

最后，我们以显而易见的方式将 $\Gamma(a, b)$ 延拓到边上。我们用 $[a,b]$ 表示测地线段 $\Gamma(a, b)$ 的像。定义

$$\mathcal{L}_* \coloneqq \{\Gamma(a,b) \mid a, b \in X * Y\}.$$

根据 $\Gamma(a,b) \in \mathcal{L}_*$ 的定义，我们有 $\Gamma(b,a) = \Gamma(a,b)^{-1}$。因此，测地线段族 $\mathcal{L}_*$ 是对称的。

Example 3.2. 设 $a = (ux_0y_0, x)$ 和 $b = (ux_0', y)$，其中 $u \in W_X$ 是最长公共前缀，$x_0, x_0' \in X_0^*$, $y_0 \in Y_0^*$, $x \in X$ 和 $y \in Y$。设 $e_1 = \{ux_0\} \times \{y_0\} \times [0,1]$、$e_2 = \{u\} \times \{x_0\} \times [0,1]$ 和 $e_3 = \{u\} \times \{x_0'\} \times [0,1]$。则路径 $\Gamma(a,b)$：$[0, d_*(a,b)] \to X * Y$ 如下所示（见图7）：

$$\Gamma(a,b)(t) = \begin{cases} \gamma_{ux_0y_0X}(x, e_X)(t) & 0 \le t \le d_X(e_X, x), \\ \gamma_{e_1}(e_X, \overline{y_0})(t - t_1) & t_1 \le t \le t_1 + 1, \\ \gamma_{ux_0Y}(\overline{y_0}, e_Y)(t - (t_1 + 1)) & t_1 + 1 \le t \le t_1 + d_Y(e_Y, \overline{y_0}) + 1, \\ \gamma_{e_2}(e_Y, \overline{x_0})(t - t_2) & t_2 \le t \le t_2 + 1, \\ \gamma_{uX}(\overline{x_0}, \overline{x_0'})(t - (t_2 + 1)) & t_2 + 1 \le t \le t_2 + d_X(\overline{x_0}, \overline{x_0'}) + 1, \\ \gamma_{e_3}(\overline{x_0'}, e_Y)(t - t_3) & t_3 \le t \le t_3 + 1, \\ \gamma_{ux_0'Y}(e_Y, y)(t - (t_3 + 1)) & t_3 + 1 \le t \le t_3 + d_Y(e_Y, y) + 1, \end{cases}$$

其中 $t_1 = d_X(e_X, x)$、$t_2 = t_1 + d_Y(e_Y, \overline{y_0}) + 1$，以及 $t_3 = t_2 + d_X(\overline{x_0}, \overline{x_0'}) + 1$.

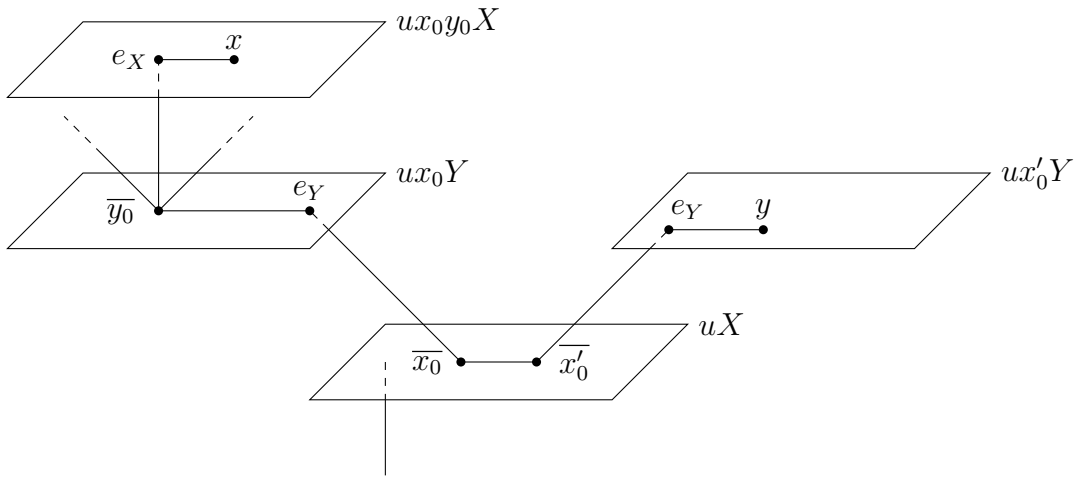


FIGURE 7. Γ（a, b）的一个示例 $\in \mathcal{L}_*$

PROPOSITION 3.3. 测地线段族 $\mathcal{L}_*$ 满足 (sgCC1) 和 (sgCC2)。

PROOF. 注意到, X 和 Y 是测地空间。因此，根据 $\mathcal{L}_*$的定义，显然 $\mathcal{L}_*$ 满足 (sgCC1)。

我们将证明 $\mathcal{L}_*$ 满足 (sgCC2)。设 $\Gamma_1 \in \mathcal{L}_*$ 满足 $\Gamma_1 \colon [0,t] \to X * Y$，并设 $\Gamma_2 \in \mathcal{L}_*$ 满足 $\Gamma_2 \colon [0,s] \to X * Y$。我们假设 $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)$。测地三角形 $\Delta(\Gamma_1(0)\ \Gamma_1(t)\ \Gamma_2(s))$具有如下形式（见图 8）：存在 $S \in \mathcal{S}$和 p, a, $b \in S$使得

$$
\begin{aligned}
[\Gamma_1(0), \Gamma_1(t)] &= [\Gamma_1(0), p] \cup [p, a] \cup [a, \Gamma_1(t)], \\
[\Gamma_1(0), \Gamma_2(s)] &= [\Gamma_1(0), p] \cup [p, b] \cup [b, \Gamma_2(s)], \\
[\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)] &= [\Gamma_1(t), a] \cup [a, b] \cup [b, \Gamma_2(s)].
\end{aligned}
$$

设

$$
\begin{aligned}
p &\coloneqq \Gamma_1(c_0 t) = \Gamma_2(c_0' s), \\
a &\coloneqq \Gamma_1(c_1 t), \\
b &\coloneqq \Gamma_2(c_1' s),
\end{aligned}
$$

其中 c_0, c_1, c_0', $c_1' \in [0,1]$。由于 Γ_1和 Γ_2是测地线，因此我们有 $c_0 t = c_0' s$。不失一般性，我们可以假设 $c_1 \le c_1'$。由于 Γ_1, Γ_2 是关于

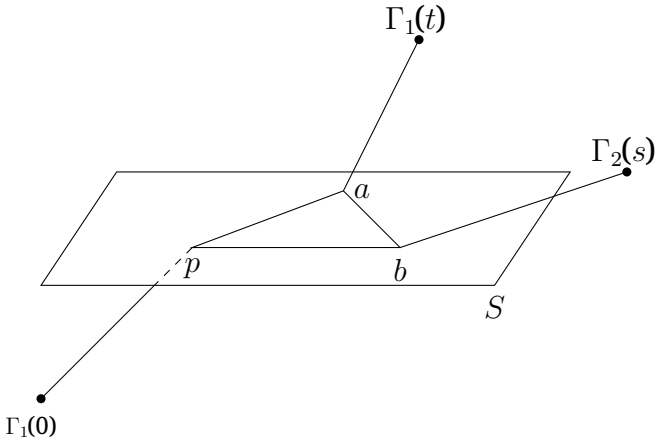


FIGURE 8. $X * Y$的测地三角形示例。

度量 d_*的测地线，因此我
们有

$$\begin{aligned}
&c_1' \cdot d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) - d_*(a,b) \\
&= c_1'\{d_*(\Gamma_1(t), a) + d_*(a,b) + d_*(b, \Gamma_2(s))\} - d_*(a,b) \\
&= c_1' d_*(\Gamma_1(t), a) + c_1' d_*(b, \Gamma_2(s)) - (1-c_1') d_*(a,b) \\
&= c_1' d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_1(c_1 t)) + c_1' d_*(\Gamma_2(c_1' s), \Gamma_2(s)) - (1-c_1') d_*(a,b) \\
&= c_1'(1-c_1) d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_1(0)) + c_1'(1-c_1') d_*(\Gamma_2(0), \Gamma_2(s)) - (1-c_1') d_*(a,b).
\end{aligned}$$

此外，根据 $c_1 \le c_1'$，此等式右侧可估计如下：

$$\begin{aligned}
&c_1'(1-c_1) d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_1(0)) + c_1'(1-c_1') d_*(\Gamma_2(0), \Gamma_2(s)) - (1-c_1') d_*(a,b) \\
&\ge c_1'(1-c_1') d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_1(0)) + c_1'(1-c_1') d_*(\Gamma_2(0), \Gamma_2(s)) - (1-c_1') d_*(a,b) \\
&= (1-c_1')\{c_1' d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_1(0)) + c_1' d_*(\Gamma_2(0), \Gamma_2(s)) - d_*(a,b)\} \\
&\ge (1-c_1')\{c_1 d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_1(0)) + c_1' d_*(\Gamma_2(0), \Gamma_2(s)) - d_*(a,b)\} \\
&= (1-c_1')\{d_*(a, \Gamma_1(0)) + d_*(\Gamma_2(0), b) - d_*(a,b)\} \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

最后一个不等式由三角不等式得出。于是，我们有

$$d_*(a,b) \le c_1' \cdot d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)). \tag{3}$$

我们将证明，存在仅依赖于 E 和 C 的 $E_* \ge 1$ 和 $C_* \ge 0$，使得对于所有 $c \in [0,1]$,

$$d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) \le c E_* d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C_*.$$

我们将证明分为以下几种情况：

I). $\Gamma_1(ct) \in [\Gamma_2(0), \Gamma_2(cs)]$, or $\Gamma_2(cs) \in [\Gamma_1(0), \Gamma_1(ct)]$.

II). $\Gamma_1(ct) \in [p,a]$ 和 $\Gamma_2(cs) \in [p,b]$ (见图9)。III). $\Gamma_1(ct) \in [p,a]$ 和 $\Gamma_2(cs) \in [b,\Gamma_2(s)]$ (见图 10)。IV). $\Gamma_1(ct) \in [a,\Gamma_1(t)]$ 和 $\Gamma_2(cs) \in [b,\Gamma_2(s)]$ (见图 11)。

我们考虑情形I）。注意， $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)$。在情形I）中，我们假设 $\Gamma_1(0)$、 $\Gamma_1(ct)$ 和 $\Gamma_2(cs)$位于同一条测地线段上。因此我们有

$$\begin{aligned} d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) &= c|t-s| \\ &\leq c d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)). \end{aligned}$$

在情形II）中，我们可以令

$$\begin{aligned} \Gamma_1(ct) &= \gamma_S(p,a)(ct - c_0 t), \\ \Gamma_2(cs) &= \gamma_S(p,b)(cs - c_0' s). \end{aligned}$$

设 $T := (c_1 - c_0)t$ 和 $S := (c_1' - c_0')s$。于是我们有

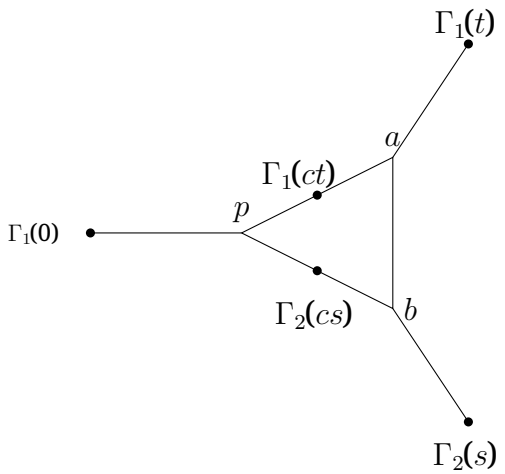


FIGURE 9. 情形II)

$$\begin{aligned} p &= \gamma_S(p,a)\,(0) = \gamma_S(p,b)\,(0)\,, \\ \Gamma_1(ct) &= \gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right), & a &= \gamma_S(p,a)\,(T)\,, \\ \Gamma_2(cs) &= \gamma_S(p,b)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}S\right), & b &= \gamma_S(p,b)\,(S)\,. \end{aligned}$$

我们定义 $a' \in [p,a]$ 为

$$a' := \gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T\right).$$

首先，由 S 中的粗凸不等式和不等式 (3)，我们得到

$$\begin{aligned} d_*(a', \Gamma_2(cs)) &= d_*\left(\gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T\right), \gamma_S(p,b)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}S\right)\right) \\ &\leq \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'} \cdot Ed_*(\gamma_S(p,a)(T), \gamma_S(p,b)(S)) + C \\ &= \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'} \cdot Ed_*(a,b) + C \\ &\leq \frac{cc_1'-c_0'c_1'}{c_1'-c_0'} \cdot Ed_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C \\ &\leq c \cdot Ed_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C. \end{aligned} \tag{4}$$

不等式 (4) 由 $c_0' \leq c \leq c_1'$ 得出。

接下来，我们考虑 a' 与 $\Gamma_1(ct)$ 之间的距离。于是

$$\begin{aligned} d_*(a', \Gamma_1(ct)) &= d_*\left(\gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T\right), \gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right)\right) \\ &= \left|\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right| \end{aligned}$$

根据三角不等式 $(c_1-c_0)\,t \leq (c_1'-c_0')\,s + d_*(a,b)$ 以及不等式 (3)，我们有

$$\begin{aligned} \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}T &= \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}(c_1-c_0)t - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}(c_1-c_0)t \\ &\leq \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}\{(c_1'-c_0')s + d_*(a,b)\} - (c-c_0)t \\ &\leq (c-c_0')s - (c-c_0)t + \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}d_*(a,b) \\ &\leq c(s-t) + cd_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) \\ &\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\}. \end{aligned}$$

类似地，由三角不等式 $(c_1'-c_0')s - d_*(a,\ b) \leq (c_1-c_0)t$ 和不等式 (3)，可得

$$\begin{aligned} \frac{c-c_0}{c_1-c_0}T - \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T &= \frac{c-c_0}{c_1-c_0}(c_1-c_0)t - \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}(c_1-c_0)t \\ &\leq (c-c_0)t - \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}\{(c_1'-c_0')s - d_*(a,b)\} \\ &= (c-c_0)t - (c-c_0')s + \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}d_*(a,b) \\ &\leq c(t-s) + cd_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) \\ &\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\}. \end{aligned}$$

于是可得

$$d_*(a', \Gamma_1(ct)) = \left| \frac{c - c_0'}{c_1' - c_0'} T - \frac{c - c_0}{c_1 - c_0} T \right| \tag{5}$$
$$\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\}.$$

结合 (4) 和 (5) 可得

$$\begin{aligned} d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) &\leq d_*(\Gamma_1(ct), a') + d_*(a', \Gamma_2(cs)) \\ &\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\} + c \cdot E d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C \\ &= c(2 + E) d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C. \end{aligned}$$

我们考虑情形 III)。在情形 III) 中，我们假设 $\Gamma_1(ct) \in [p, a]$ 和 $\Gamma_2(cs) \in [b, \Gamma_2(s)]$, 其中 $a = \Gamma_1(c_1 t)$ 且 $b = \Gamma_2(c_1' s)$。令 $t' \coloneqq c_1 t$ 且 $s' \coloneqq c_1' s$。我们定义

$$\begin{aligned} a' &\coloneqq \Gamma_1(ct'), \\ b' &\coloneqq \Gamma_2(cs'). \end{aligned}$$

由于 $a = \Gamma_1(t')$ 和 $b = \Gamma_2(s')$，我们有 $a' \in [\Gamma_1(0)\ p] \cup [p, a]$ 和 $b' \in [\Gamma_1(0)\ p] \cup [p, b]$.

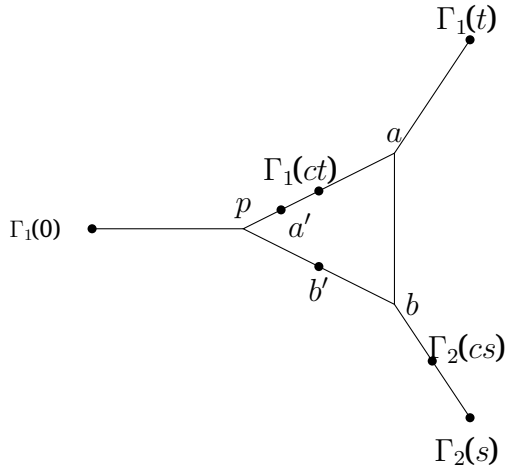


FIGURE 10. 情形 III)

由情形 I) 或情形 II) 中相同的论证可得

$$\begin{aligned} d_*(a', b') &= d_*(\Gamma_1(ct'), \Gamma_2(cs')) \\ &\leq c(2 + E) d_*(\Gamma_1(t'), \Gamma_2(s')) + C \\ &= c(2 + E) d_*(a, b) + C. \end{aligned}$$

我们指出 t 帽 $d_*(\Gamma_1(t)\ \Gamma_2(s))\ = d_*(\Gamma_1(t)\ a)\ + d_*(a,b)\ + d_*(b,\Gamma_2(s))$。然后我们有

$$\begin{aligned}
&d_*(\Gamma_1(ct),\Gamma_2(cs))\\
&\le d_*(\Gamma_1(ct),a')+d_*(a',b')+d_*(b',\Gamma_2(cs))\\
&= d_*(\Gamma_1(ct),\Gamma_1(ct'))+d_*(\Gamma_1(ct'),\Gamma_2(cs'))+d_*(\Gamma_2(cs'),\Gamma_2(cs))\\
&\le c(t-t')+c(2+E)d_*(\Gamma_1(t'),\Gamma_2(s'))+C+c(s-s')\\
&= cd_*(\Gamma_1(t),\Gamma_1(t'))+c(2+E)d_*(\Gamma_1(t'),\Gamma_2(s'))+C+cd_*(\Gamma_2(s'),\Gamma_2(s))\\
&\le c(2+E)\{d_*(\Gamma_1(t),a)+d_*(a,b)+d_*(b,\Gamma_2(s))\}+C\\
&= c(2+E)d_*(\Gamma_1(t),\Gamma_2(s))+C.
\end{aligned}$$

我们考虑情形 IV）。在情形 IV）中，我们假设 $\Gamma_1(ct)\ \in [a,\Gamma_1(t)]$ 和 $\Gamma_2(cs)\ \in [b,\Gamma_2(s)]$，，其中 $a=\Gamma_1(c_1t)$、 $b=\Gamma_2(c_1's)$，且 $c_1\le c_1'$。我们指出 $c_1\le c_1'\le c$。

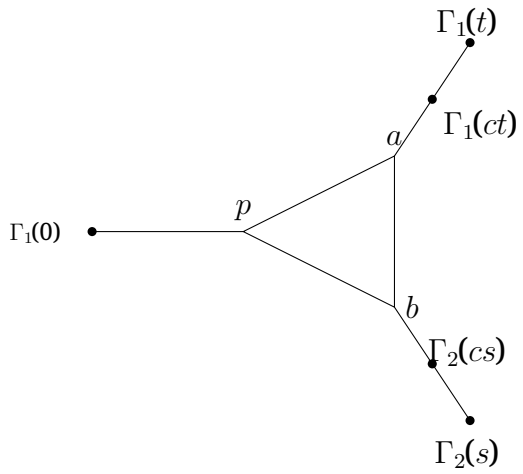


FIGURE 11. 情形 IV)

那么，根据不等式 (3)，我们有

$$\begin{aligned}
&d_*(\Gamma_1(ct),\Gamma_2(cs))\\
&= d_*(\Gamma_1(ct),a)+d_*(a,b)+d_*(b,\Gamma_2(cs))\\
&= d_*(\Gamma_1(ct),\Gamma_1(c_1t))+d_*(a,b)+d_*(\Gamma_2(c_1's),\Gamma_2(cs))\\
&\le c\left(1-\frac{c_1}{c}\right)t+c_1'd_*(\Gamma_1(t),\Gamma_2(s))+c\left(1-\frac{c_1'}{c}\right)s\\
&\le c(1-c_1)t+cd_*(\Gamma_1(t),\Gamma_2(s))+c(1-c_1')s\\
&= c\{d_*(\Gamma_1(t),a)+d_*(b,\Gamma_2(s))\}+cd_*(\Gamma_1(t),\Gamma_2(s))\\
&\le c\{2d_*(\Gamma_1(t),\Gamma_2(s))\}.
\end{aligned}$$

Th因此，对于所有 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{L}_*$，满足 $\Gamma_1 \colon [0,t] \to X * Y$ 且 $\Gamma_2 \colon [0,s] \to X * Y$ ，

$$d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) \leq c(2+E) d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C \tag{6}$$

对所有 $c \in [0,1]$ 均成立。

最后，我们将证明存在 $E_{**} \geq 0$ 和 $C_{**} \geq 0$ ，使得对所有 $t' \in [0,t]$、$s' \in [0,s]$ 和 $c \in [0,1]$,

$$d_*(\Gamma_1(ct'), \Gamma_2(cs')) \leq cE_{**} d_*(\Gamma_1(t'), \Gamma_2(s')) + C_{**}.$$

我们回顾一下，一般而言， $\Gamma_1|_{[0,t']}$ 不属于 $\mathcal{L}_*$。

设 $a' = \Gamma_1(t')$ 和 $S' \in \mathcal{S}$ 满足 $a' \in S'$。设 $\Gamma_1' \in \mathcal{L}_*$ 为从 $\Gamma_1(0)$ 到 a' 的测地线段。由于 Γ_1 和 Γ_1' 是测地线段，我们可以将 Γ_1' 定义为 $\Gamma_1' \colon [0,t'] \to X * Y$。设

$$T \coloneqq \max\{t \in [0,t'] \mid \Gamma_1(s) = \Gamma_1'(s) \text{ for any } s \in [0,t]\}$$

对于某个 $c_0 \in [0,1]$，我们可以令 $\Gamma_1(T) = \Gamma_1(c_0 t') = \Gamma_1'(c_0 t')$。设 $p = \Gamma_1(T)$。根据 $\mathcal{L}_*$ 的定义，我们得到 p 属于 S'。此外，存在满足以下条件的 $p' \in S' \colon$ 令 $\gamma_{S'}(p, p') \in \mathcal{L}$ 为满足 $\gamma_{S'}(p, p') \colon [0,u] \to S'$ 的测地线段，并令 $\gamma_{S'}(p, a') \in \mathcal{L}$ 为满足 $\gamma_{S'}(p, a') \colon [0,v] \to S'$ 的测地线段。使得

$$\begin{aligned} \Gamma_1([c_0 t', t']) &\subseteq \gamma_{S'}(p,p')([0,u]), \\ \Gamma_1'([c_0 t', t']) &= \gamma_{S'}(p,a')([0,v]). \end{aligned}$$

注意， $\Gamma_1([0, c_0 t']) = \Gamma_1'([0, c_0 t'])$， $u \geq v$，且 $a' = \Gamma_1(t') = \gamma_{S'}(p,p')(v)$。于是，对所有 $c \leq c_0$，都有 $\Gamma_1(ct') = \Gamma_1'(ct')$。假设 $c > c_0$。那么存在$c_1 \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned} \Gamma_1(ct') &= \gamma_{S'}(p,p')(c_1 v), \\ \Gamma_1'(ct') &= \gamma_{S'}(p,a')(c_1 v). \end{aligned}$$

由于 X 和 Y 是对称测地粗凸空间，根据粗凸不等式，有

$$\begin{aligned} d_*(\Gamma_1(ct'), \Gamma_1'(ct')) &= d_*(\gamma_{S'}(p,p')(c_1 v), \gamma_{S'}(p,a')(c_1 v)) \\ &\leq c_1 E d_*(\gamma_{S'}(p,p')(v), \gamma_{S'}(p,a')(v)) + C \\ &= c_1 E d_*(a', a') + C = C. \end{aligned} \tag{7}$$

设 $b' = \Gamma_2(s')$。我们注意到 $a = \Gamma_2(0)$。令 $\Gamma(a, b') \in \mathcal{L}_*$ 为从 a 到 b' 且满足 $\Gamma(a, b') \colon [0,s'] \to X * Y$ 的测地线段。为简便起见，我们将 $\Gamma(a, b')$ 记作 Γ_2'。用同样的论证可得，对所有 $c \in [0,1]$,

$$d_*(\Gamma_2(cs'), \Gamma_2'(cs')) \leq C. \tag{8}$$

由于 $\Gamma_1', \Gamma_2' \in \mathcal{L}_*$ 满足 $\Gamma_1' \colon [0,t'] \to X * Y$ 且 $\Gamma_2' \colon [0,s'] \to X * Y$ 时，由 (6)、(7) 和 (8) 可得，

$$\begin{aligned}
&d_*(\Gamma_1(ct'), \Gamma_2(cs')) \\
&\leq d_*(\Gamma_1(ct'), \Gamma_1'(ct')) + d_*(\Gamma_1'(ct'), \Gamma_2'(cs')) + d_*(\Gamma_2'(cs'), \Gamma_2(cs')) \\
&\leq c(2+E) d_*(\Gamma_1'(t'), \Gamma_2'(s')) + 3C \\
&= c(2+E) d_*(\Gamma_1(t'), \Gamma_2(s')) + 3C.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 (sgCC2) 成立。证明完毕。 □

定理 *3.1* 的证明。 根据构造，测地线段族 $\mathcal{L}_*$ 是对称的。因此，由命题 2.3 和 3.3 可知，自由积 $X * Y$ 是一个对称测地粗凸空间，特别地， $X * Y$ 是一个 $(1, 0, 2+E, 9C, \mathcal{L}_*, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$-粗凸空间。□

4. 群在度量空间自由积上的作用

设 (X, d_X, e_X) 和 (Y, d_Y, e_Y) 是度量空间，基点分别为 e_X 和 e_Y。设 G 和 H 是分别在 X 和 Y 上适当地且余紧地作用的群。Bridson 和 Haefliger [2, 定理 II.11.18] 构造了一个度量空间 Z，自由积 $G * H$ 在其上适当地且余紧地作用。此外，当 X 和 Y 是 CAT(0) 空间时，他们证明了 Z 是 CAT(0) 空间。本节将证明， Z 与自由积 $X * Y$ 等距，其中采用 G-网 $(G, o(e_X)\ e_X)$ 和 H-网 $(H, o(e_Y)\ e_Y)$，这里 $o(e_X)$ 和 $o(e_Y)$ 是轨道映射。

首先，我们简要回顾它们的构造。令 $\Gamma = G * H$。定义 Z 如下：

$$Z := (\Gamma \times X) \bigsqcup (\Gamma \times [0,1]) \bigsqcup (\Gamma \times Y).$$

令 $\overline{Z}$ 为 Z 关于以下生成的等价关系的商集：

$$\begin{aligned}
&(\omega g, x) \sim (\omega, g(x)), (\omega h, y) \sim (\omega, h(y)), \\
&(\omega, e_X) \sim (\omega, 0), (\omega, e_Y) \sim (\omega, 1)
\end{aligned}$$

对所有的 $\omega \in G * H$、 $g \in G$、 $h \in H$、 $x \in X$ 和 $y \in \overline{Y}$。令 X 为 $\Gamma \times X$ 关于上述等价关系限制的商集，并令 Y 为 $\Gamma \times Y$ 关于上述等价关系限制的商集。我们注意到， X 与 $(W_X \cup \{\epsilon\}) \times X$ 等距，其中 W_X 是 $G * H$ 中满足每个词 W_X 的末字母属于 H 的词集；并且 Y 与 $(W_Y \cup \{\epsilon\}) \times Y$ 等距，其中 W_Y 是 $G * H$ 中满足每个词 W_Y 的末字母属于 G 的词集。

令 $\omega = ugh$，其中 $u \in G * H$、 $g \in G$ 和 $h \in H$。根据上述等价关系，我们有 $(\omega, e_X) \sim (\omega, 0)$，并且我们有

$$\begin{aligned}(\omega, 1) &\sim (\omega, e_Y),\\ &= (ugh, e_Y),\\ &\sim (ug, h(e_Y)).\end{aligned}$$

设 $\tau = vghg'$，其中 $v \in G * H$、 g， $g' \in G$ 和 $h \in H$。根据上述等价关系，我们有 $(\tau, e_Y) \sim (\tau, 1)$，并且有

$$\begin{aligned}(\tau, 0) &\sim (\tau, e_X),\\ &= (ughg', e_X),\\ &\sim (ugh, g'(e_X)).\end{aligned}$$

注意，$(\epsilon, e_X) \sim (\epsilon, 0)$，且 $(\epsilon, 1) \sim (\epsilon, e_Y)$。因此， $\overline{Z}$由以下两类分支组成。

- 这些片由 $\{\omega\} \times X$ 和 $\{\tau\} \times Y$ 组成，其中 $\omega \in W_X \cup \{\epsilon\}$ 和 $\tau \in W_Y \cup \{\epsilon\}$。
- 这些边由以下三类组成：$-$存在一条边 $\{\epsilon\} \times [0,1]$，连接 $(\epsilon, e_X) \in \{\epsilon\} \times X$ 和 $(\epsilon, e_Y) \in \{\epsilon\} \times Y$。$-$设 $\omega \in W_X$ 和 $g \in G$。那么存在一条边 $\{\omega\} \times \{g\} \times [0,1]$，连接 $(\omega, g(e_X)) \in \{\omega\} \times X$ 和 $(\omega g, e_Y) \in \{\omega g\} \times Y$。$-$设 $\tau \in W_Y$ 和 $h \in H$。那么存在一条边 $\{\tau\} \times \{h\} \times [0,1]$，连接 $(\tau, h(e_Y)) \in \{\tau\} \times Y$ 和 $(\tau h, e_X) \in \{\tau h\} \times X$。

Bridson 和 Haefliger [2, 定理 II.11.18] 证明了 $G * H$ 在 Z上适当地且余紧地作用。

我们可以很容易地证明， Z 相对于G-网（G， $o(e_X)$ e_X）和 H-网（H， $o(e_Y)$ e_Y），与自由积 $X * Y$ 等距，其中 $o(e_X)$ 和 $o(e_Y)$ 是轨道映射。因此，我们有

Proposition 4.1 ([2, 定理 II.11.18]). 设 X 和 Y 为度量空间。设 G 和 H为群，分别在 X 和 Y上适当地且余紧地作用。我们分别将 X 和Y与 G-网和 H-网关联。则 $G * H$ 在 $X * Y$上适当地且余紧地作用。

Corollary 4.2. 设 X 和 Y 为对称测地粗凸空间。设 G和 H 为群，分别在 X 和 Y上适当地且余紧地作用。则 $G * H$是粗凸群。

5. Application to the coarse Baum–Connes conjecture

5.1. 粗 Baum–Connes 猜想回顾。 设 Y 是一个恰当度量空间。若 Y满足以下粗

组装映射 μ_Y 从 Y 出发是一个同构:

$$\mu_Y \colon KX_*(Y) \to K_*(C^*(Y)).$$

这里，左边是 Y 的粗 K-同调，右边是 $C^*(Y)$ 这个 C^*-代数的 K-理论，称为 Y 的 *Roe* 代数。二者在粗等价下保持不变，且粗组装映射对粗映射具有自然性。因此，我们有以下结论。

PROPOSITION 5.1. 设 X 和 Y 是真度量空间。假设 X 和 Y 粗等价。若 X 满足粗 *Baum–Connes* 猜想，则 Y 也满足该猜想。

详情请见 [10], [11], 和 [16]。第一作者和 Oguni 证明了以下结论。

THEOREM 5.2 ([8, 定理1。3]). 设 X 是一个真粗凸空间。那么 X 满足粗 *Baum–Connes* 猜想。

我们将对真对称测地粗凸空间的自由积应用定理5.2。

LEMMA 5.3. 设 X 和 Y 是带有网的真度量空间。那么，自由积$X * Y$是一个真度量空间。

PROOF. 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是真度量空间。设 (X_0, i_X, e_X) 和 (Y_0, i_Y, e_Y) 分别是 X 和 Y 的网。令 $a \in X * Y$ 和 $R \geq 0$。设 n 为包含 $a \in X * Y$ 的片的高度。我们将 $B_*(a, R)$ 定义为

$$B_*(a, R) \coloneqq \{b \in X * Y \mid d_*(a, b) \leq R\}.$$

根据网的定义，与 $B_*(a, R)$ 相交的片的高度位于区间$[n - [R] - 1, n + [R] + 1]$内。由于 X 和 Y 是真度量空间，根据网的定义，对于每个片中的任意有界闭子集 K ，指标映射对 K 的原像都是有限集。因此， $B_*(a, R)$ 是片中有界闭子集的有限并。由于 X 和 Y 是真度量空间， $B_*(a, R)$ 是紧的。□

Com结合定理 3.1、定理5.2 和引理5.3，我们得到如下 g.

THEOREM 5.4. 设 X 和 Y 是带有网的恰当度量空间。若 X 和 Y 是对称测地粗凸空间，则自由积 $X * Y$满足粗 *Baum–Connes* 猜想。

设 G 和 H 是有限生成群，分别在 X 和Y上适当地且余紧地作用。如第 4 节所述，自由积 $G * H$ 相对于 G-网和 H-网在 $X * Y$ 上适当地且余紧地作用。因此，结合 ˇ定理 5.4、施瓦茨–米尔诺引理和命题 5.1，我们得到以下结果。

THEOREM 5.5. 设 X 和 Y 是带有网的恰当度量空间。假设 X 和Y 是对称测地粗凸空间。设 G 和 H 是群，分别在 X 和 Y上适当地且余紧地作用。那么，自由积 $G*H$ 满足粗 *Baum–Connes* 猜想。

最后，我们将定理 5.4 和定理 5.5 与相对双曲群以及可粗嵌入希尔伯特空间的空间的一些已知结果进行比较。

5.2. **相对双曲群**。第一作者和 Oguni [6] 证明了以下结论。

THEOREM 5.6 ([6, 定理 1.1])。设 G 为一个有限生成群，$\mathbb{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$为一个由无限子群构成的有限族。假设 $(G, \mathbb{P})$ 是一个相对双曲群。若每个子群 P_i 都满足粗 *Baum–Connes* 猜想，并且存在一个有限 P_i-单纯复形作为真作用的万有空间，则 G 满足粗 *Baum–Connes* 猜想。

设 G 和 H 为有限生成群。自由积 $G * H$ 相对于 $\{G, H\}$是双曲的。若 G 和 H 适当地余紧地作用于表 1 所列的任一空间上，则 G 和 H 分别存在有限 G-单纯复形和 H-单纯复形，作为真作用的万有空间。因此，$G*H$满足定理 5.6 的假设。然而，一般而言，尚不清楚在对称测地粗凸空间上适当地余紧地作用的群是否总存在有限 G-单纯复形作为真作用的万有空间。

5.3. **可粗嵌入希尔伯特空间的空间**。 格罗莫夫 [9] 引入了粗嵌入希尔伯特空间的概念。Yu [17] 证明了以下结果。

THEOREM 5.7（[17, 定理 1。1]）。 设 Γ 是一个具有有界几何的离散度量空间。若 Γ 可一致嵌入希尔伯特空间，则粗 *Baum– Connes* 猜想对 Γ 成立。

设 X 和 Y 是恰当度量空间。设 G 和 H 是分别在 X 和 Y 上适当地且余紧地作用的群。我们假设 X 和 Y 可粗嵌入希尔伯特空间。则 G和 H 也可粗嵌入希尔伯特空间。根据 Dadarlat–Guentner [4], 的工作，自由积 $G * H$ 可粗嵌入希尔伯特空间。由定理 5.7，自由积 $G*H$ 满足粗 Baum–Connes 猜想。我们指出，$G * H$ 在 $X * Y$ 上适当地且余紧地作用。因此，由施瓦茨 – 米尔诺引理和命题 5.1 可知，$X * Y$ 满足粗 Baum–Connes 猜想。

我们指出，在上述设定中，所有 X、Y 和 $X * Y$ 都具有 [7, 定义 A.2] 意义下的有界粗几何。然而，存在不具有有界粗几何的对称测地粗凸空间。

EXAMPLE 5.8. 设 Γ 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 关于某个生成集的凯莱图。由于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 是一个双曲群，因此 Γ 是一个对称测地粗凸空间。

对于 $p \in (0, \infty)$，令 X_p 为例 2.2] 中给出的完备布塞曼空间。如 [7] 所述，X_p 由半直线 $[0,\infty)$ 构造而成，方法是将每个整数 $n \in [0,\infty)$ 与 n 维 l_p 空间的原点识别起来。根据定理 5.4，自由积 $\Gamma * X_p$ 满足粗 Baum–Connes 猜想。

在 $[7, \text{附录}]$, 中证明了，X_p 不具有有界粗几何。因此，$\Gamma * X_p$ 不满足定理 5.7 的假设。

由此还可得出，X_p 不允许任何离散群的完备余紧作用。因此，我们无法将定理 5.6 应用于 $\Gamma * X_p$。

Kondo 利用扩张图 [12]构造了一个不能粗嵌入希尔伯特空间的 CAT(0) 空间。然而，[12] 中给出的空间并不完备，不过经过稍作修改，我们可以得到一个不能粗嵌入希尔伯特空间的完备 CAT(0) 空间。按照 Kondo 的论证，[12], 我们给出该空间的构造。

首先，我们简要回顾扩张图。设 $G = (V, E)$ 是一个图。对于 $A \subset V$，我们用 $\partial^e A$ 表示连接 A 中一个顶点与 A^c 中一个顶点的边集，即

$$\partial^e A \coloneqq \{e \in E : \#(e \cap A) = 1\}.$$

切格常数 $h(G)$ 定义为

$$h(G) \coloneqq \min\left\{ \frac{\#\partial^e A}{\#A} : A \subset G, 0 < \#A \leq \frac{\#V}{2} \right\}.$$

G 的围长 是包含在 G 中的最短嵌入圈的长度，记为 girth(G)。

扩张图族 是由有限连通图 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 组成的序列，满足以下条件：

(1) $\#V_n \to \infty$ $(n \to \infty)$。(2) 存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $v \in V_n$，v 的度小于或等于 k。(3) 存在 $c > 0$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$h(G_n) > c$。

注意，扩张图族不能粗嵌入希尔伯特空间。

设有限连通的 k-正则图序列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成一族扩张图，并满足围长 $(G_n) \to \infty (n \to \infty)$，而

$$\frac{\operatorname{diam}(G_n)}{\operatorname{girth}(G_n)}$$

保持有界。设 ρ_n 为 G_n 上的组合距离，并设

$$d_n := \frac{2\pi}{\mathrm{girth}(G_n)}\rho_n.$$

于是，每个 (G_n, d_n) 都是 CAT(1) 空间，因为我们考虑的是缩放后的距离 d_n onG_n，其中最短嵌入圆的长度为 2π。

对每个 G_n，令 $G_n := G_n \times \mathbb{R}_{\geq 0}/G_n \times \{0\}$。我们通过将半直线 $[0,\infty)$ 中的每个整数 $n \in [0,\infty)$ 与 $G_n \times \{0\}$ 的 G_n 识别，构造度量空间 Y_0 from；Y_0 的距离定义为

$$d_{Y_0}((v_1,r_1),(v_2,r_2))^2 := r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\min\{d_n(v_1,v_2),\pi\}),$$

当 v_1 和 v_2 位于同一个 G_n 中时，以及

$$d_{Y_0}((v_1,r_1),(v_2,r_2)) = r_1 + r_2 + |m-n|,$$

当 $v_1 \in G_n, v_2 \in G_m$ 对于 $n \neq m$ 时。显然，(Y_0,d_{Y_0}) 是完备的。对每个 $n \in \mathbb{N}$，度量空间 $(G_n, d_{Y_0}|_{\widetilde{G_n}})$ 都是以 G_n 为底的欧几里得锥。由于 G_n 是 CAT(1) 空间，根据 Berestovskiı 定理（另见 [2, 定理 II.3.14]），欧几里得锥 $(G_n, d_{Y_0}|_{\widetilde{G_n}})$ 是 CAT(0) 空间。因此，反复使用粘合引理 [2, 定理 II.11.3]，可知 (Y_0,d_{Y_0}) 是完备 CAT(0) 空间。由于 (Y_0,d_{Y_0}) 含有双利普希茨嵌入的扩张图族 [12, 命题 4.4 和注 4.6]，，该空间不能粗嵌入到希尔伯特空间中。

Remark 5.9. 这种扩张图族可由 Lubotzky 等人构造的拉曼努金图得到 [13]。

Example 5.10. 令 Γ 为某个生成集对应的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的凯莱图。由于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 是一个双曲群，Γ 是一个对称测地粗凸空间。我们指出，Γ 不是 CAT(0) 空间。根据定理 5.4，自由积 $\Gamma * Y_0$ 满足粗 Baum–Connes 猜想。

自由积 $\Gamma * Y_0$ 既不是 CAT(0) 空间，也不能粗嵌入到任何希尔伯特空间中。因此，$\Gamma * Y_0$ 不满足定理 5.7 的假设。

Acknowlegement

我们感谢审稿人认真审阅稿件并提出宝贵意见。审稿人的意见使我们的稿件得到了改进。我们要感谢大国慎一教授给予的非常有益的讨论。我们还要感谢盐谷隆教授对自由积形状提出的非常有益的意见，这些意见引出了例1.8。对于 Takefumi Kondo 教授建议在例5.10中构造完备CAT(0)空间，我们深表感激。

T. Fukaya 获得了日本学术振兴会科研补助金（项目编号：JP19K03471）。T. Matsuka 获得了 JST 面向科学技术创新的大学奖学金设立项目资助（项目编号：JPMJFS2139）。

References

[1] V. N. Berestovskiĭ. 关于多面体度量化的 Borsuk问题。苏联科学院院刊，268(2):273–277，1983年。[2] Martin R. Bridson 和 Andr´e Haefliger。《非正曲率度量空间》，数学科学基础丛书第319卷， /《数学科学基本原理》/。施普林格出版社，柏林，1999年。[3] J´er´emie Chalopin、Victor Chepoi、Anthony Genevois、Hiroshi Hirai 和 Damian Osajda。Helly群。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2002.06895，2020年2月。[4] Marius Dadarlat 和 Erik Guentner。相对双曲群的一致可嵌入性。《纯粹与应用数学杂志》，612:1–15，2007年。[5] Dominic Descombes 和 Urs Lang。凸测地双组合与双曲性。《几何奉献》，177:367–384，2015年。[6] Tomohiro Fukaya 和 Shin-ichi Oguni。相对双曲群的粗鲍姆–康尼斯猜想。《拓扑分析杂志》，4(1):99–113，2012年。[7] Tomohiro Fukaya 和 Shin-ichi Oguni。Busemann 非正曲率空间的粗鲍姆–康尼斯猜想。《京都数学杂志》，56(1):1–12，2016年。[8] Tomohiro Fukaya 和 Shin-ichi Oguni。一种粗卡当–阿达马定理及其在粗鲍姆–康尼斯猜想中的应用。《拓扑分析杂志》，12(3):857–895，2020年。[9] M. 格罗莫夫。无限群的渐近不变量。载于《几何群论》第2卷（萨塞克斯，1991年），伦敦数学学会讲义丛书第182卷，第1–295页。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[10] Nigel Higson 和 John Roe。关于粗鲍姆–康尼斯猜想。载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》第2卷（奥伯沃尔法赫，1993年），伦敦数学学会讲义丛书第227卷，第227–254页。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[11] Nigel Higson 和 John Roe。解析 K-同调。牛津数学专著。牛津大学出版社，牛津，2000年。牛津科学出版物。[12] Takefumi Kondo。CAT(0)空间与扩张图。《数学杂志》，271(1-2):343–355，2012年。[13] A. Lubotzky、R. Phillips 和 P. Sarnak。拉曼努金图。《组合数学》，8(3):261–277，1988年。[14] Damian Osajda 和 Piotr Przytycki。正交群的边界。《几何与拓扑》，13(5):2807–2880，2009年。[15] Tomaˇz Pisanski 和 Thomas W. Tucker。图的乘积中的增长。《澳大拉西亚组合学杂志》，26:155–169，2002年。[16] Guoliang Yu。粗鲍姆–康尼斯猜想。 K-理论，9(3):199–221，1995年。[17] Guoliang Yu。可一致嵌入希尔伯特空间的空间的粗鲍姆–康尼斯猜想。《数学发明》，139(1):201–240，2000年。

Tomohiro Fukaya
Department of Mathematical Sciences
Tokyo Metropolitan University
Minami-osawa Hachioji Tokyo 192-0397
Japan电子邮箱地址：tmhr@tmu.ac.jp

Takumi Matsuka
Department of Mathematical Sciences

Tokyo Metropolitan University
Minami-osawa Hachioji Tokyo 192-0397
Japan电子邮箱地址:
takumi.matsuka1@gmail.com