arXiv:2303.13815v2 [math.RT] 8 Feb 2024

代数上的不可约分次双模与雅各布森根的皮尔斯分解

ANTONIO DE FRANCA† 和 IRINA SVIRIDOVA

Abstract. 众所周知，可以通过模的语言来研究环根理论。本文从双边和分次的角度，对模论中的经典结果作了一些推广。设 G 是一个群， $\mathbb{F}$ 是一个特征为 char($\mathbb{F}$) $= 0$ 的代数闭域， $\mathfrak{A}$ 是一个有限维 G-分次结合 $\mathbb{F}$代数，M 是一个 G-分次含幺 $\mathfrak{A}$双模。我们证明，若 $\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$ 具有典范初等 G-分次，其中 H 是 G 的有限阿贝尔子群，且 $\sigma \in Z^2(\mathrm{H}\ \mathbb{F}^*)$，那么 M 不可约分次蕴含存在非零齐次元素 $w \in \mathrm{M}$，满足 $\mathrm{M} = \mathfrak{B}w$ 和 $\mathfrak{B}w = w\mathfrak{B}$。我们证明的另一个结果推广了上述结论：若 G 是阿贝尔群， $\mathfrak{A}$ 是分次单的，且 M 有限生成，那么存在非零齐次元素 $w_1,\ w_2,\ \ldots\ldots,\ w_n \in \mathrm{M}$，使得

$$\mathrm{M} = \mathfrak{A}w_1 \oplus \mathfrak{A}w_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}w_n\ ,$$

其中，对所有 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$，且每个 $\mathfrak{A}w_i$ 都不可约。元素 w_i 与 G 的不可约特征标相关联。我们还描述了分次半单代数上的分次双模。最后，我们给出任意有限维 $\mathbb{F}$-代数（带有 G-分次）的分次雅各布森根的皮尔斯分解。

1. Introduction

Amitsur 于 [2] 开始构建根的一般理论。正如 Kurosch 在其著作 [24], 中所阐释的那样，根 这一概念在结合代数和环的研究中极为重要。根的研究是发展环论的重要工具。在[3], ，Amitsur 为环的根提出了公理化基础。基于此，Andrunakievič 和 Rjabuhin 在 [4] 指出，Kurosh、Amitsur（及其他学者）发展出的结合环根的一般理论，可以用模的语言来表述，进而也可以用表示的语言来表述。

在 [19], Jacobson 开创了 Jordan 代数双模的研究之后，作者在 [20], 研究了 alternative 代数和 Jordan 双模的结构。随后，Foster 在 [12],开展了一项研究，表明关联环根的一般理论可以自然地推广到代数簇，其中模由双模取代。早在 [32], ，Shestakov 和 Trushina 就描述了 alternative[2] 代数和超代数的不可约双表示。关于根、（双）模 和表示（群的）的更多详情，请参见 [8, 13, 16, 26, 36]。

设 R 和 S 是两个环，M 是一个 (R,S)-双模。请记住，任何环都是一个 $\mathbb{Z}$-双模。在[7], ，Brown 和 Smith 考察了当 R 和 S 是诺特环，且 M 作为左 R-模和右 S-模都是有限生成时，M 能具备哪些性质。这些诺特双模的研究在推动诺特环理论发展方面发挥了重要作用。

另一方面，Giambruno 和 Zaicev 在 [14], 中需要描述代数 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathrm{J}$ 的 Jacobson 根 J；J 是一个 $\mathfrak{B}$-双模，以证明他们在该著作中的主要结果，其中 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F})$

Date：2024年2月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 16D20；次分类号 16D70、16W50、16P20、16P40。*Key words and phrases.* G-分次双模、G-单双模、G-不可约双模、弱 G-诺特双模、弱 G-阿廷双模、雅各布森根、皮尔斯分解、Specht 问题。

†作者获得了 Paraíba 州研究基金会（FAPESQ）资助，资助编号 #2023/2158。[1]一个 $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{A}})$-双模 M 是一个左 $\mathfrak{A}$-模和右 $\widetilde{\mathfrak{A}}$-模，并满足 $a(mb) = (am)b$ 对任意 $a \in \mathfrak{A}$、 $b \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $m \in \mathrm{M}$。若一个代数 $\mathfrak{A}$ 满足 $(xx)y = x(xy)$ 和 $(xy)y = x(yy)$，则称其为 *alternative algebra*，其中对任意 $x, y \in \mathfrak{A}$。

是域 $\mathbb{F}$ 上的 $n\times n$矩阵代数。根据 Wisbauer（[36]），交换结合代数理论中最重要的技巧之一，并且可通过单侧模成功推广到非交换结合代数，是在（单侧） $\mathfrak{A}$-模范畴中对代数 $\mathfrak{A}$ 进行同调刻画。运用模论研究来描述代数的结构后，Wisbauer 在其著作 [36] 中用近 400 页汇编介绍了这一理论。

上述问题凸显了研究模与根的重要性。近几十年来，许多著名数学家和代数学家都研究过这些主题，尤其关注这些结构的性质。为此，我们在本文中研究称为双模的代数对象。更具体地说，我们研究群分次代数上的双模。我们的结果给出了某一类代数的分次雅各布森根的刻画。

带有群分次的代数结构为环论提供了丰富的研究领域，因为通过分次结构，我们可以推导出普通对象（即没有分次的对象）的性质。在 [5], 定理 3 中，Bahturin、Sehgal 和 Zaicev 证明，当 G 是一个群，且 $\mathbb{F}$ 是特征满足 char($\mathbb{F}$) $=0$ 的代数闭域时，“任意有限维 G-分次 $\mathbb{F}$代数$\mathfrak{A}$ 是分次单的，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 同构于 $M_k(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$，其中 H 是 G 的有限子群，且 σ 是 H 上的一个 2-余循环”。基于这一最新成果，Sviridova 在 [34], 引理 2 中提出了 Wedderburn-Malcev 定理[3] 关于有限阿贝尔群分次代数的推广。她证明，在适当条件下，任意有限维分次代数 $\mathfrak{A}$ 都是极大半单分次子代数 $M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathrm{H}_1]) \times\cdots\times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathrm{H}_p])$ 的直和，其中 H1，...，Hp 是 G 的有限子群；此外，其雅各布森根 J($\mathfrak{A}$) 是分次的。注意，J($\mathfrak{A}$)自然是一个分次 $\mathfrak{A}$-双模，显然也是一个分次 $\mathfrak{A}$/J($\mathfrak{A}$)-双模。因此，研究分次单代数上的分次双模十分重要，尤其是矩阵代数 $M_r(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$上的分次双模，因为任意有限维分次单代数都由矩阵代数给出。

在本文中，我们旨在研究分次双模及其不可约分次子双模，并将这项研究用于描述分次代数的分次雅各布森根。我们研究了分次双模 M 的不可约分次子双模，以及将 M 分解为不可约分次对象之和的可能方式。基本上，我们回答了以下问题：

问题：如何描述不可约分次双模?

由此，我们自然会提出一些问题：如何刻画不可约分次双模？何时可以将分次双模写成不可约分次子双模之和？所考虑的代数会如何影响双模？能否将（有限维分次代数的）雅各布森根分解为不可约分次子双模？如果可以，如何分解，又会带来什么后果?

~ ~设 $\mathbb{F}$ 为一个域，G 为一个群，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 为两个结合代数。考虑一个 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模 M。~ ~ ~现在，考虑 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$上的 G-分次，分别记为 $\mathfrak{A}=\oplus_{g\in\mathrm{G}}\mathfrak{A}_g$ 和 $\mathfrak{A}=\oplus_{h\in\mathrm{G}}\mathfrak{A}_h$；并设 M $=\oplus_{t\in\mathrm{G}}$M$_t$ a~上的 G-分次，其中 M$_t$是 M 的子空间，满足 $\mathfrak{A}_g$M$_t\subset$ M$_{gt}$，且 M$_t\mathfrak{A}_h\subset$M$_{th}$，对任意$t,g,h\in$G 均成立。关于分次代数与环，以及模的一般理论的更多细节和概述，参见文献 [27, 28, 36] 及其参考文献。

首先，我们在 §2 中记录本研究进一步开展所需的定义和概念。熟悉 G-分次双模、G-诺特双模、G-阿廷双模、*G* 上的 *2*-余循环、扭群代数和群特征标等对象的读者，可以从第 10 页开始继续阅读，并在必要时返回查阅。随后，我们在本研究的 §3 部分致力于将单侧模理论中的一些经典结果推广到分次双模的语言中，例如 Jordan-H¨older 定理、同构定理和对应定理。本部分结果中的主要定理如下：

[3]Wedderburn-Malcev 定理（参见 [8], 定理 72.19，第 491 页）是 Malcev 对 Wedderburn 定理之一所作的推广。该定理指出，对于域 $\mathbb{F}$ 上的任意有限维代数，若 $\mathfrak{A}$/J($\mathfrak{A}$) 可分，则存在唯一的（在同构意义下）极大半单子代数 $\mathfrak{B}$，它是 $\mathfrak{A}$ 的子代数并满足 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\oplus$J($\mathfrak{A}$)。

定理 3.11：若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是弱 G-阿廷且弱 G-诺特的，则以下条件等价：i) M 是有限生成的；ii) M 是弱 G-诺特的；iii) M 是弱 G-阿廷且弱 G-诺特的；iv) M 有分次合成列。

在上述定理中，“弱”一词指的是这些链由（分次）子双模构成。本节的另一项重要结果见第 3.1 小节，其灵感来自[14]中的引理 2，表述如下：

定理 3.13 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个含幺代数。若 M 是有限维的（作为向量空间），则 M 可分解为 $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{00} \oplus \mathrm{M}_{10} \oplus \mathrm{M}_{01} \oplus \mathrm{M}_{11}$，，其中 M_{ij}是 G-分次的（$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$）-双模，且满足：

i) 对于 $r = 0,1$，M_{0r} 是 0-左 $\mathfrak{A}$-模，而 M_{1r} 是含幺左 G-分次 $\mathfrak{A}$-模；

ii) 对于 $s = 0,1$，M_{s0} 是 0-右 $\mathfrak{A}$-模，而 M_{s1} 是含幺右 G-分次 $\mathfrak{A}$-模；iii) M_{11} 是含幺 G-分次（$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$）-双模。

此外，如果 $\mathfrak{A}$（分别地，$\mathfrak{A}$）是分次单的，那么对于 $i = 0, 1$，M_{1r}（分别地，M_{r1}）在左侧（分别地，在右侧）是忠实的。

由前面的结果可知，我们在推论 3.14 中证明，M 是含幺（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模，当且仅当 $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{11}$。在 §4 中，我们描述含幺双模 M。

本文的主要结果见 §4。本节旨在描述不可约分次双模，并给出有限生成分次双模的一种（特殊）分解。设 H 是群 G 的有限阿贝尔子群，$\sigma \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{H}, \mathbb{F}^*)$ 是 H 上的一个 2-余循环，$\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$ 是 $\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}]$, 上的矩阵代数，而 M 是一个 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模；本节最重要结果的关键对象由以下形式的元素给出

$$\hat{w}_\chi = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h \in \mathrm{H}} \chi(h) \sigma(h, h^{-1})^{-1} \eta_h E_{i1} m_0 E_{1i} \eta_{h^{-1}} \right), \tag{1}$$

其中 $\chi : \mathrm{H} \to \mathbb{F}^*$ 是 H 的不可约特征标，E_{ij} 是 $M_n(\mathbb{F})$ 和 $\eta_h E_{i1}$，$E_{1i}\eta_{h^{-1}} \in M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$ 的初等矩阵，而 $m_0 \in \mathrm{M}$ 是一个非零齐次元素。这里，$\mathfrak{B}$ 是由一个 n 元组 $(g_1, \ldots\ldots, g_n) \in \mathrm{G}^n$（即 $\mathfrak{B} = \bigoplus_{g \in \mathrm{G}} \mathfrak{B}_g$，其中 $\mathfrak{B}_g =$ 张成空间$_{\mathbb{F}}\{E_{ij}\eta_h \in \mathfrak{B} : \ g_i^{-1} h g_j = g\}$）所定义的典范初等 G-分次，并且元素 $\hat{w}_\chi$ 属于 M，它们与 $M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$ 的基本（齐次）元素 $E_{ij}\eta_g$ 的乘积在相差一个标量的意义下可交换。§4 的关键且更重要的结果是

定理 4.3：设 G 是一个群，H 是 G 的有限阿贝尔子群，$\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，且 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$。考虑一个 G-分次含幺 $\mathfrak{B}$-双模 M，其中 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$ 带有典范初等 G-分次，且 $\sigma \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{H}, \mathbb{F}^*)$。若 M 是不可约分次的，则存在非零齐次元素 $w \in \mathrm{M}$ 满足 $\mathrm{M} = \mathfrak{B}w$，使得 $\mathfrak{B}w = w\mathfrak{B}$。

前一定理中定义的元素 w 与 H 的一个不可约特征标相关，其定义方式与 (1) 类似。

下面的结果给出了单分次代数上的分次双模的一个分解，条件是这些双模有限生成。在证明中，我们使用元素 $\hat{w}_\chi$。这一结果非常重要，它给出了类似于模的单侧情形的不可约（子双模）分解。我们将利用这种分解来刻画一族有限维代数的雅各布森根。

定理 4.7：设 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，G 是一个阿贝尔群，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 上带有 G-分次的有限维代数。假设 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，且 $\mathfrak{A}$ 是分次单的。若 M 是有限生成的 G- 分次 $\mathfrak{A}$- 双模，则存在非零齐次元素 w_1，w_2，……，$w_n \in \mathrm{M}$，使得

$$\mathrm{M} = \mathfrak{A}w_1 \oplus \mathfrak{A}w_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}w_n$$

其中 $w_i\mathfrak{A} = \mathfrak{A}w_i \neq 0$ 对所有 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$均成立，且 $\mathfrak{A}w_i$ 是不可约的。

我们最终 §4 给出了弱半单代数上双模的分解，其形式为~皮尔斯分解（见定理 4.8）。我们证明："如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是弱半单分次的，~且 M 是一个含幺 G-分次（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模，那么存在中心正交幂等元i_1、.....、$\mathsf{i}_p \in \mathfrak{A}$ 和 ˆ i_1、.....、ˆ$\mathsf{i}_q \in \widetilde{\mathfrak{A}}$，使得 $\mathfrak{A} = \bigoplus_{r=1}^{p} \mathfrak{A}_r$、 $\widetilde{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{s=1}^{q} \widetilde{\mathfrak{A}}_s$，且 M $= \bigoplus^{p}$、$_r{}^q$、$_{s=1}\,\mathsf{i}_r\mathsf{M}\hat{}\mathsf{i}_s$，其中~ ~ˆ ˆ$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}\mathsf{i}_r$、 $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}\mathsf{i}_s$"。此外，我们还证明了每个 $\mathsf{i}_r\mathsf{M}\mathsf{i}_s$ 要么等于 $\{0\}$，要么是一个忠实的 G-分次~（$\mathfrak{A}_r$， $\mathfrak{A}_s$）-双模。

我们以一项（我们的两项）主要结果的应用作为本文的收尾。环论研究中一个重要问题是如何描述环 $\mathfrak{R}$ 的性质，更确切地说，是如何描述其雅各布森根。下文将给出一个代数的雅各布森根分解，可作为未来理论研究的工具。关于雅各布森根的更多详情，我们推荐阅读书籍 [16, 21, 30]。

设 G 是一个群， $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathsf{J}$ 是一个带有 G-分次的有限维代数，其中 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的极大半单 G-分次子代数，而 J $=$J($\mathfrak{A}$) 是 $\mathfrak{A}$ 的雅各布森根和分次理想。除了定理 3.13 所保证的分解外，定理 5.2 指出，若$\mathfrak{B} = M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]) \times \cdots \times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathsf{H}_p])$，G 是有限阿贝尔群，且 $\mathbb{F}$ 是一个特征为 char($\mathbb{F}$) $= 0$ 的代数闭域，那么

a) $\mathsf{J}^{11} = \bigoplus_{s}^{p}{}_{,r=1}\,\mathsf{i}_r\mathsf{J}_{11}\mathsf{i}_s$，其中每个 $\mathsf{i}_r\mathsf{J}_{11}\mathsf{i}_s$ 都是 G-分次 $(\mathfrak{B}_r, \mathfrak{B}_s)$-双模，其中 $\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i$ 满足 $\mathfrak{B}_i = M_{k_i}(\mathbb{F}^{\sigma_i}[\mathsf{H}_i])$。此外，$\mathsf{i}_r\mathsf{J}_{11}\mathsf{i}_s \neq 0$ 意味着 $\mathsf{i}_r\mathsf{J}_{11}\mathsf{i}_s$ 是忠实左 $\mathfrak{B}_i$-模和忠实右 $\mathfrak{B}_j$-模；b) 对每个 $s = 1, \ldots, p$，都存在一个 G-分次向量空间 $\mathsf{N}_s = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{d_{1s}, \ldots, d_{r_s s}\} \subset \mathsf{i}_s\mathsf{J}_{11}\mathsf{i}_s$，使得 $\mathsf{i}_s\mathsf{J}_{11}\mathsf{i}_s = \mathfrak{B}_s\mathsf{N}_s$，且对于任意非零的 $b \in \beta_s$， $bd_{is} = \gamma_{is}(b)d_{is}b \neq 0$，并且 $i = 1, \ldots, r_s$，其中 $\gamma_{is} \in \mathbb{F}$，而 $\beta_s = \{E_{l_s j_s}\eta_{h_s} \in \mathfrak{B}_s\colon\ l_s, j_s = 1, \ldots, k_s, h_s \in \mathsf{H}_s\}$ 是 $\mathfrak{B}_s = M_{k_s}(\mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s])$ 的典范齐次基。此外，对于每个 $i = 1, \ldots, r_s$，我们有 $\mathfrak{B}_s d_{is}$ 是 G-单 $\mathfrak{B}_s$-双模。

前一定理中给出的有限维分次代数的雅各布森根分解，可用于描述多项式恒等式理论中研究的分次代数分次簇[4]。多项式恒等式理论中的一个著名问题是广为人知的**Specht 问题**[5]。Kemer 在 [23]证明，特征零结合代数的簇中的 Specht 问题有肯定解答。在 [34], , Sviridova 证明了分次情形（见定理 2, [34]）。具体而言，Sviridova 证明："若 $\mathbb{F}$ 是特征零代数闭域，且 G 是任意有限阿贝尔群，那么任意一个 GT-分次恒等式理想，都等于某个有限维 G-分次结合 PI代数（定义在 $\mathbb{F}$ 上）的 G-分次恒等式理想，该代数是某个有限维 G-分次 *Grassmann* 包络 $\times\, \mathbb{Z}_2$-分次结合 $\mathbb{F}$代数。"值得指出的是，Aljadeff 和 Kanel-Belov 在 [1]独立于 Sviridova 证明了一个类似结果，将结论推广到任意有限群。由此，要研究 G-分次结合代数的分次簇 $\mathfrak{W}$，只需研究某个有限维 G $\times\, \mathbb{Z}_2$-分次代数的**Grassmann 包络**[6]，其中该代数具有 $\mathfrak{A} = \big(M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]) \times \cdots \times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathsf{H}_p])\big) \oplus \mathsf{J}$ 型，且 J $=$J($\mathfrak{A}$) 具有定理 5.2 所述的分解。

总之，在推论 4.10 的条件下，即 $M_{k_r}(\mathbb{F}^{\sigma_r}[\mathsf{H}_r])$ 中的单位元 i_r' 在 $\mathfrak{A}$ 中是中心的，我们有 J $= \mathsf{J}_{00} \oplus \mathsf{J}_{11},$，其中 $\mathsf{J}_{11} = \mathsf{i}_1\mathsf{J}\mathsf{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{i}_p\mathsf{J}\mathsf{i}_p$。因此，容易看出

$$\mathfrak{A} \cong_{\mathsf{G}} \left(M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]) \oplus \mathsf{i}_1\mathsf{J}\mathsf{i}_1\right) \times \cdots \times \left(M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathsf{H}_p]) \oplus \mathsf{i}_p\mathsf{J}\mathsf{i}_p\right) \times \mathsf{J}_{00}\ .$$

---

[4]由 $S \subset \mathbb{F}\langle X^{\mathsf{G}}\rangle$ 生成的分次簇，记作 var^{G}(S)，是满足任意 $g \in S$ 的分次结合代数类；也就是说，G-分次代数 $\mathfrak{A}$ 属于 var^{G}(S)，当且仅当对于任意 $g \in S$， $g \equiv_{\mathsf{G}} 0$ 属于 $\mathfrak{A}$。关于（分次）代数的（分次）簇的更多详情，请参见 [11], 第2章或 [15], 第1章。[5]Specht 问题由 W. Specht 于 [33]（1950 年）提出，可表述为以下问题：给定任意代数 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}$ 的任意一组多项式恒等式是否都是 $\mathfrak{A}$的有限多个恒等式的推论？关于 Specht 问题的更多详情，请参见 [6]。[6]（G $\times\, \mathbb{Z}_2$）-分次代数 $\mathfrak{A}$ 的 Grassmann 包络定义为 E^{G}($\mathfrak{A}$) $= (\mathfrak{A}_0 \otimes \mathsf{E}_0) \oplus (\mathfrak{A}_1 \otimes \mathsf{E}_1)$，它自然地带有 G $\times\, \mathbb{Z}_2$-分次和 G-分次。这里，E $= \mathsf{E}_0 \oplus \mathsf{E}_1$ 是无限生成的非含幺 Grassmann 代数，即 E $= \langle e_1, e_2, e_3, \cdots \mid e_i e_j = -e_j e_i, \forall i, j\rangle$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次的，其中 E_0 =张成空间 $_{\mathbb{F}}\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}\colon\ n$为偶数}，而 E_1 =张成空间$_{\mathbb{F}}\{e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_m}\colon\ m$为奇数}（见 §3第 7 节， [15], 第 80–83 页）。

因此，要研究分次簇 $\mathfrak{W}$及其代数，只需研究代数 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(M_{k_r}(\mathbb{F}^{\sigma_r}[\mathrm{H}_r]) \oplus \mathrm{i}_r\mathrm{J}\mathrm{i}_r)$，更具体地说，只需研究代数 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(M_{k_r}(\mathbb{F}^{\sigma_r}[\mathrm{H}_r]))$ 和 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathrm{i}_r\mathrm{J}\mathrm{i}_r)$。

2. Preliminary Results

本节回顾一些虽基础却对我们的研究至关重要的概念。我们简要介绍“群分次代数”、“代数上的双模”和“分次代数上的分次双模”的定义，以及其他重要定义。随后，我们将介绍“G-分次双模”、“弱 G-诺特双模”和“弱 G-阿廷双模”等与分次双模相关的定义。我们还将专门用一部分内容回顾“2-余循环”、“扭群代数”和“群特征”的一些（重要）定义及性质。熟悉这些定义及其主要性质的读者可以从 §3 处继续阅读。这里，除非另有说明，所有代数 $\mathfrak{A}$ 均为域 $\mathbb{F}$上的结合代数，且 G 是一个群。

2.1. 代数上的双模。 首先，我们来定义代数上的双模以及其他相关概念。我们假设读者已了解代数上的（单侧）模的主要定义和性质。如需详细了解代数上的（单侧）模，建议阅读 [8], 中的第2章或 [30]中的第6章。

定义 2.1。 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个 $\mathbb{F}$-代数（不一定含幺），且M 是一个 $\mathbb{F}$-向量空间。若M 是一个左 $\mathfrak{A}$-模和一个右 $\mathfrak{A}$-模，且其标量乘法满足结合律，则称$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-**双模**，

$$r(ms) = (rm)s$$

对任意 $r \in \mathfrak{A}$、 $s \in \mathfrak{A}$ 和 $m \in$ M均成立。当 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$时，我们称M 为一个 $\mathfrak{A}$-**双模**。当 $\mathfrak{A}$ 和$\mathfrak{A}$ 含幺时，M 是一个**含幺** $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-**双模**，当且仅当M 是一个含幺左 $\mathfrak{A}$-模和一个含幺右$\mathfrak{A}$-模。

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个代数，M 是一个 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。回顾一下，M 的左（分别为右）子-模 N 是 M 的一个子空间，同时也是左 $\mathfrak{A}$-模（分别为右 $\mathfrak{A}$-模）。取 M 的一个子集 S 。我们将由 $\mathfrak{A}S = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{rm \in \mathrm{M} :\ r \in \mathfrak{A}, m \in S\}$（分别由 $S\mathfrak{A} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{\tilde{m}s \in \mathrm{M} :\ s \in \mathfrak{A}, \tilde{m} \in S\}$）给出的 M 的左（分别为右）子模记为 $\mathfrak{A}S$ （分别为 $S\mathfrak{A}$）。注意，并不总是 S 的子集（分别为 $\mathfrak{A}S$ ）。据此，我们将由 S生成的 M 的左（分别为右）子模定义为 ${}_{\mathfrak{A}}S = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{m \in S\} + \mathfrak{A}S$（分别为 $S_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{m \in S\} + S\mathfrak{A}$），并记作 ${}_{\mathfrak{A}}S$（分别为 $S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$）。注意，必有 S 是 ${}_{\mathfrak{A}}S$的子集（分别为 $S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$）。如果 $\mathfrak{A}$（分别为 $\mathfrak{A}$）是含幺的，且 M 是含幺左 $\mathfrak{A}$-模（分别为右 $\mathfrak{A}$-模），那么 ${}_{\mathfrak{A}}S = \mathfrak{A}S$（分别为 $S_{\tilde{\mathfrak{A}}} = S\mathfrak{A}$）、和 ${}_{\mathfrak{A}}S$（分别为 $S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$）是含幺左 $\mathfrak{A}$-模（分别为右 $\mathfrak{A}$-模）。而 M 的子双模 N是 M 的一个子空间，同时也是一个 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。我们将由 $\mathfrak{A}S\mathfrak{A} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{q\check{m}p \in \mathrm{M} :\ q \in \mathfrak{A}, p \in \mathfrak{A}, \check{m} \in S\}$给出的 M 的子双模记为 $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$ 。我们将由 S生成的 M 的子双模定义为 ${}_{\mathfrak{A}}S_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{m \in S\} + \mathfrak{A}S + S\mathfrak{A} + \mathfrak{A}S\mathfrak{A}$，并记作 ${}_{\mathfrak{A}}S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$。注意，$\mathfrak{A}S\mathfrak{A} \subseteq {}_{\mathfrak{A}}S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ 和 $S \subseteq {}_{\mathfrak{A}}S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$，但不一定有 S 属于 $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$。若 $S = \{m\}$，在不会引起混淆时，我们分别用 $\mathfrak{A}m$、 $m\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}m\mathfrak{A}$表示 $\mathfrak{A}S$、 $S\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$ 。当 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是含幺的，且 M 是含幺的 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模时，我们有 ${}_{\mathfrak{A}}S_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}S\mathfrak{A}$，并且 ${}_{\mathfrak{A}}S_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ 是含幺的 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。

定义 2.2。 如果一个$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模M 满足 $\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A} \neq \{0\}$，且 $\{0\}$与M 是M仅有的子双模，则称其为**不可约**（或**单**）。特别地，条件 $\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A} \neq \{0\}$ 意味着，对于某些 $a \in \mathfrak{A}$、 $\tilde{a} \in \mathfrak{A}$，有 $am\tilde{a} \neq 0$，且 $m \in \mathrm{M}$。

对于任意不可约的（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模 M，任意非零的 $m \in \mathrm{M}$ 都有 $\mathrm{M} = \mathfrak{A}m\mathfrak{A}$ 。事实上，只需证明 $\mathrm{N} = \{m \in \mathrm{M} :\ \mathfrak{A}m\mathfrak{A} = \{0\}\}$ 是 M 的子双模，便可得出结论：$\mathrm{N} = \{0\}$。当 M 是含幺的（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模时（因此 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 也都是含幺的），“$\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A} \neq \{0\}$”这一条件等价于条件“$\mathrm{M} \neq \{0\}$”。

注意，给定 $\mathfrak{A}$ 的一个子代数 I，满足 $\mathfrak{A}I\mathfrak{A} \neq \{0\}$，则 $\mathfrak{A}$ 是（极小）双边理想，当且仅当 I 是一个（不可约） $\mathfrak{A}$-双模。

现在，我们来定义商双模 和双模同态。设 N 是一个（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模 M 的子双模 。商**商** （$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）**-双模** M/N 定义如下：

i) $\mathrm{M/N} = \{\overline{m} = m + \mathrm{N}\colon \ m \in \mathrm{M}\}$ 是一个商向量空间；

ii) $\overline{am} = \overline{am}$ 对任意 $a \in \mathfrak{A}$ 和 $m \in \mathrm{M}$；

iii) $\overline{m}b = \overline{mb}$ 对任意 $b \in \mathfrak{A}$ 和 $m \in \mathrm{M}$。

显然，对于任意 $\overline{a} \in \mathfrak{A}$, $\overline{b} \in \mathfrak{A}$ 和 $\overline{m} \in \mathrm{M}$，由上述三项可得，M/N 自然构成一个 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。

定义 *2.3.* 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个代数，M 和 M 是两个 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，且 $\varphi : M \longrightarrow M$ 是一个线性变换。若 φ 满足 $\varphi(am) = a\varphi(m)$ 和 $\varphi(mb) = \varphi(m)b$ 对任意 $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$ 和 $m \in M$ 均成立，则称 φ 是 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模的同态。

2.2. **分次代数上的分次双模**。设 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathbb{F}$-代数，G 是一个群。 $\mathfrak{A}$ 上的 G-分次是一个分解 $\Gamma : \mathfrak{A} = \bigoplus_{g\in \mathrm{G}} \mathfrak{A}_g$ ，其中包含 $\mathbb{F}$-向量子空间 $\mathfrak{A}_g$'s（属于 $\mathfrak{A}$ ），并满足 $\mathfrak{A}_g\mathfrak{A}_h \subseteq \mathfrak{A}_{gh}$ 对所有 $g, h \in \mathrm{G}$ 均成立。

群代数 $\mathbb{F}$G 具有自然的 G-分次。一般而言，对于任意群 G，任意代数 $\mathfrak{A}$ 都具有一种称为平凡分次的 G-分次，定义为 $\mathfrak{A}_e = \mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}_g = \{0\}$，其中 $g \in \mathrm{G} \setminus \{e\}$ 任意，且 e 是 G 的单位元。

定义 2.4。若一个G-分次代数 $\mathfrak{A}$ 满足 $\mathfrak{A}^2 \neq \{0\}$ 且 $\mathfrak{A}$ 没有非平凡的G-分次理想，则称其为G-**单**（或**分次单**，或**极小分次**）；也就是说，若 I 是 $\mathfrak{A}$的分次理想，则 $I = \{0\}$ 或 $I = \mathfrak{A}$。此外，假设 $\mathfrak{A}$ 含幺，若其所有非零齐次元素在 $\mathfrak{A}$中均可逆，则称 $\mathfrak{A}$ 为G-**除**代数（或**除**G-**分次**代数）；也就是说，对于任意$a \in \bigcup_{g\in \mathrm{G}} \mathfrak{A}_g$、$a \neq 0$，存在 $a^{-1} \in \mathfrak{A}$ 使得 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$。

注意，对于任意 $a \in \bigcup_{g\in \mathrm{G}} \mathfrak{A}_g$, $a \neq 0$，其逆元 a^{-1} 也是齐次的，其次数为 $\deg(a^{-1}) = (\deg(a))^{-1}$。还要注意，如果 $\mathfrak{A}$ 是单代数，那么 $\mathfrak{A}$ 是 G-单的。关于分次代数（环）的更多详情，参见文献 [27, 28]。

现在假设 $\mathfrak{A}$ 是一个G-分次代数，且 G 是一个群。$\mathfrak{A}$)-双模 M 上的 G-分次，其中 $\mathfrak{A}$ 和

定义 *2.5.* 设 G 是一个群，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个 G-分次 $\mathbb{F}$-代数，M 是一个 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。$M$ 上的 G-分次是指将 M 分解为 M 的 $\mathbb{F}$-子空间 M_g 的直和，$g \in G$，并满足 $\mathfrak{A}_g M_h \subseteq M_{gh}$ 和 $M_h\mathfrak{A}_t \subseteq M_{ht}$，对任意 $g, h, t \in G$ 均成立。在这种情况下，称 M 为一个 G-分次的 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。

与分次代数的情形类似，对于任意群 G，任意双模 M 都有一个 G-分次，称为平凡分次，定义为 $\mathrm{M}_e = \mathrm{M}$ 且对于任意 $g \in \mathrm{G} \setminus \{e\}$，$\mathrm{M}_g = \{0\}$，其中 e 是 G 的单位元素。研究 G-分次（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模时的一个特殊情形是 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$。这类双模称为 G-**分次** $\mathfrak{A}$-**双模**。

若双模 M 的子双模 N 满足 $\mathrm{N} = \bigoplus_{g\in \mathrm{G}} (\mathrm{N} \cap \mathrm{M}_g)$，则称 N 为**分次子双模** 。注意，分次双模的子双模是分次的，当且仅当它可以由其齐次元素作为双模生成。

定义 2.6。设 M 是一个G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。若 $\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A} \neq \{0\}$，且M 没有真分次子双模，则称 M 为**不可约分次** （或G-不可约）。这意味着，M 是不可约 G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，当且仅当 $\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A} \neq \{0\}$，且 $\{0\}$ 和M 是M的仅有的分次子双模。

根据上述定义，条件 $\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A} \neq \{0\}$ 意味着，对于某些齐次元素 $a \in \mathfrak{A}$，有 $am\tilde{a} \neq 0$ $m \in \mathrm{M}$ 和 $\tilde{a} \in \mathfrak{A}$。显然，对于任意不可约 G-分次（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模 M，任意非零齐次元素 $m \in \mathrm{M}$ 都满足$\mathrm{M} = \mathfrak{A}m\mathfrak{A}$。事实上，只需证明 $\mathrm{N} = \{m \in$

$\widetilde{\mathrm{M}}:\ \mathfrak{A}m\mathfrak{A}=\{0\}\}$ 是 M 的一个分次子双模，并得出 $\mathrm{N}=\{0\}$，因为 $\mathfrak{A}\mathrm{M}\mathfrak{A}\neq\{0\}\widetilde{}$ 且 $\mathfrak{A}\mathrm{N}\mathfrak{A}=\{0\}$，因此 $\mathrm{N}\neq\mathrm{M}$。

注意，给定分次子代数 I of $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}I\mathfrak{A}\neq\{0\}$, I 是 $\mathfrak{A}$ 的（单）分次双边理想，当且仅当 I 是一个（不可约）分次 $\mathfrak{A}$-双模。

定义 2.7. 设M 是一个G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，且N 是M的真分次子双模。我们称N 为M 的**极大分次**（或G-极大）子双模，如果M/N 是一个G-不可约$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。换言之，G-极大于M 中的N，当且仅当N 是真子双模，且对于任意 $m\in\mathrm{M}\backslash\mathrm{N}$，都有$\mathrm{N}+_{\mathfrak{A}}\{m\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}=\mathrm{M}$。

需要注意的是，由于 M 的任意分次子双模 N 仍然是 M 的左（也同时是右）分次子模，因此，M 的任意 G-极大（分别为 G-不可约）子双模 N，要么是 M 的左 G-极大（分别为左 G-不可约）子模，要么包含于（分别包含）某个这样的子模。

现在，给定 G-分次（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模 M 的一个分次子双模 N，则商 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模 M/N 自然是一个 G-分次（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模。事实上，由于 $\mathrm{M}=\bigoplus_{g\in\mathrm{G}}\mathrm{M}_g$ 且 $\mathrm{N}=\bigoplus_{g\in\mathrm{G}}(\mathrm{N}\cap\mathrm{M}_g)$，对于任意 $g\in\mathrm{G}$，商空间 $\mathrm{M}_g/(\mathrm{N}\cap\mathrm{M}_g)$ 都是良定义的。容易看出

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}=\bigoplus_{g\in\mathrm{G}}\frac{\mathrm{M}_g}{\mathrm{N}\cap\mathrm{M}_g},$$

因此，M/N 是一个 G-分次（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模，称为**分次商**（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）**-双模**。

现在我们来定义（$\mathfrak{A}$, 的齐次同态和分次同态。 $\widetilde{\mathfrak{A}}$)-双模。

定义 *2.8.* 设 G 是一个群， $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个 G-分次代数，M 和 M 是两个 G-分次（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模，且 $\varphi: M\to M$ 是（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模的一个同态。若 φ 是次数为 $h_0\in G$ 的齐次同态，即对于任意 $g\in G$，均有 $\varphi(M_g)\subseteq\left(M_{gh_0}\bigcap M_{h_0g}\right)$，则称之为次数为 $h_0\in G$ 的齐次同态。（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模的有限个齐次同态之和称为（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模的分次同态。

注意，若 φ 是次数为 h_0 的齐次同态，则 h_0 要么属于 $\sim\{g\in\mathrm{G}:\ \varphi(\mathrm{M}_g)\neq\{0\}\}$ 中的中心，因此对于任意 $g\in\mathrm{G}$，$\mathrm{M}_{gh_0}=\mathrm{M}_{h_0g}$；要么 $\varphi(\mathrm{M}_g)=\{0\}$，其中 $gh_0\neq h_0g$。

注意，G-分次模的任意齐次同态也是分次同态。分次同态的核或像不一定是分次子双模，但分次双模之间任意齐次同态的核和像都是分次子双模。当两个 G-分次 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A})$-双模 M 和 M 齐次同构时，我们记作 $\mathrm{M}\cong_{\mathrm{G}}\mathrm{M}$，也就是说，存在一个齐次同构 $\psi:\mathrm{M}\to\mathrm{M}$。

接下来，我们来简单讨论一下分次双模的链条件。

定义 2.9. 设 G 是一个群， $\mathfrak{A}$ 且 $\mathfrak{A}$ 是两个G-分次代数，M 是一个G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。若M 满足关于分次子双模的升链条件（*ACC*）（分别为降链条件（*DCC*）），则称M 是**弱 G-诺特**（分别为**弱 G-阿廷**）。

当 M 是一个 G-分次（$\mathfrak{A},\mathfrak{A}$）-双模，且同时是弱 G-诺特和弱 G-阿廷时，我们称“M 满足弱链条件”，而不称“M 满足分次子双模的两种链条件”。

任何有限维 G-分次（$\mathfrak{A},\ \widetilde{\mathfrak{A}}$）-双模，以及任何不可约 G-分次（$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}$）-双模，都是满足弱链条件的分次双模的例子。

注 2.10. 设M 是一个G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，其中G 是一个群， $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个G-分次代数。由于M 的任意分次子双模也是左分次子模，因此自然地，若M 是左G-诺特的（分别地，G-阿廷的），则M 是弱G-诺特的（分别地，弱G-阿廷的）。“右”情形类似。

定义 2.11。弱分次合成列是一个$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模M 的有限序列$\mathrm{N}_0,\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_r$，其中各项都是M 的分次子双模，并满足

$$\{0\}=\mathrm{N}_0\subsetneq\mathrm{N}_1\subsetneq\cdots\subsetneq\mathrm{N}_r=M,$$

其中每个N_k 都是N^{k+1}的极大分次子双模，即对于每个 k，N^{k+1} N_k 都是不可约分次$(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{A}})$-双模。在这种情况下，我们称$\mathsf{M}$ 具有长度为 r 的弱分次合成列，并用 $l(\mathsf{M})$ 表示M的弱分次合成列的最小长度。

~显然，任何具有分次合成列的 G-分次（$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$）-双模都是有限生成的（作为分次双模）。

2.3. **扭群代数上的矩阵**。下面定义我们研究中的一个重要对象：扭群代数。与前文一样，G 表示一个群，$e \in$G 表示其单位元，$\mathbb{F}$ 表示一个域，而 $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$。

定义 2.12。满足以下条件的映射 $\sigma : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \longrightarrow \mathbb{F}^*$

$$\sigma(x, y)\sigma(xy, z) = \sigma(x, yz)\sigma(y, z) \text{ for all } x, y, z \in \mathsf{G}$$

称为以 $\mathbb{F}^*$ 中的元素为值、定义在 G 上的2**-余循环**。从 G 到 $\mathbb{F}^*$ 的所有2-余循环构成的集合记作Z^2 (G $\mathbb{F}^*$)。

注 *2.13*。设 σ*:* G $\times$ G $\longrightarrow \mathbb{F}^*$ 是 *G* 上的一个 *2*-余循环。要证明对于任意$x, y \in G$， $\sigma(x, e) = \sigma(e, y)$，只需在定义 *2.12* 中令 $y = e$。由此可得，对于任意 $x \in G$， $\sigma(x, e) = \sigma(e, x) = \sigma(e, e)$。再在定义 *2.12* 中，将 $y = x^{-1}$ 和 $z = x$ 替换后，可证明对于任意 $x \in G$，$\sigma(x, x^{-1}) = \sigma(x^{-1}, x)$。

现在，考虑群代数 $\mathbb{F}$G。注意，$\mathbb{F}$G 是一个含幺结合代数；若 G 是交换群（分别地，有限群），则 $\mathbb{F}$G 是交换代数（分别地，有限维代数）。此外，$\mathbb{F}$G 具有自然的 G-分次。下面考虑更一般的情形。

定义 2.14。设G 是一个群，$\mathbb{F}$ 是一个域，且 $\sigma : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \longrightarrow \mathbb{F}^*$ 是G上的一个2-余循环。考虑$\mathbb{F}$-向量空间

$$\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{G}] = \left\{ \sum_{g \in \mathsf{G}} \alpha_g \eta_g : \alpha_g \in \mathbb{F}, g \in \mathsf{G} \right\},$$

其中集合 $\{\eta_g\}_{g \in \mathsf{G}}$ 在 $\mathbb{F}$上是线性无关的。在 $\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{G}]$ 上定义乘法，使其通过线性延拓满足乘积 $\eta_g \eta_h = \sigma(g, h)\eta_{gh}$，$g, h \in$ G。在此乘法下，$\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{G}]$ 是一个代数，称为**扭群代数**。

注意，定义 2.12 中的等式保证了 $\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{G}]$ 是一个结合代数。显然，若 σ 是 G 上的平凡 2-余循环，即对任意 $g, h \in \mathsf{G}$，都有 $\sigma(g, h) = 1$，则 $\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{G}] = \mathbb{F}\mathsf{G}$。此外，$\mathfrak{A} = \mathbb{F}^\sigma[\mathsf{G}]$ 是 G-分次的，其自然分次由 $\mathfrak{A}_g = \text{span}_{\mathbb{F}}\{\eta_g\}$ 定义，其中每个 $g \in \mathsf{G}$。

注 *2.15.* 注意，$\mathbb{F}^\sigma[G]$ 是一个含幺代数，其单位元为 $\sigma(e, e)^{-1}\eta_e$，因为对于任意 $g \in G$，都有$\sigma(e, e) = \sigma(e, g) = \sigma(g, e)$（由注 *2.13*）。此外，$\mathbb{F}^\sigma[G]$ 是一个除分次代数，即 $\mathbb{F}^\sigma[G]$ 中的每个非零齐次元素在 $\mathbb{F}^\sigma[H]$中都有乘法逆元。注意，$\dim(\mathbb{F}^\sigma[G]) < \infty$ 当且仅当 *G* 是有限群。

现在，我们来介绍一些结果，它们将作为本节最后一部分的工具。

考虑由扭群代数 $\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}]$,上的所有 $n \times n$ 矩阵构成的代数 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathrm{H}])$，其中 H 是群 G 的子群，且 $\sigma \in \mathsf{Z}^2$(H $\mathbb{F}^*$)。我们有，$|\mathrm{H}| < \infty$ 蕴含 $\dim(\mathfrak{B}) = n^2|\mathrm{H}| < \infty$。固定一个任意的 k元组 $\xi = (g_1, \ldots\ldots, g_k) \in G^k$。由 $\mathfrak{B}_g = \text{span}_{\mathbb{F}}\{E_{ij}\eta_h \in \mathfrak{B} : g = g_i^{-1} h g_j\}$, $g \in$ G 定义的向量子空间，在 $\mathfrak{B}$上定义了一个 G-分次。这个 G-分次称为由 ξ定义的**典范初等分次**。

定理 *2.16*（定理 3, [5]）。设 $\mathfrak{A}$ 是代数闭域 $\mathbb{F}$上的有限维 *G*-分次代数。假设 $\mathit{char}(\mathbb{F}) = 0$，或者 $\mathit{char}(\mathbb{F})$ 与 *G* 的每个有限子群的阶互素。那么，$\mathfrak{A}$ 是分次单代数，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 同构于张量积 $M_k(\mathbb{F}) \otimes \mathbb{F}^\sigma[H] \cong M_k(\mathbb{F}^\sigma[H])$，其中 *H* 是 *G* 的有限子群，且 $\sigma \in Z^2(H\ \mathbb{F}^*)$。$M_k(\mathbb{F}^\sigma[H])$上的 *G*-分次是由一个 k-元组 $(g_1, \ldots, g_k) \in G^k$定义的典范初等分次。

2.4. **群特征标**。 在本小节中，我们回顾群特征标的一些定义和性质，这些内容对本文的展开至关重要。尽管本节中的结果广为人知，我们仍将其列出，以使本文内容完整。这里，记 G 为任意有限乘法群，其单位元为 1， $\mathbb{F}$ 为一个域， $GL_n(\mathbb{F})$为 $\mathbb{F}$上的可逆 $n \times n$ 矩阵群。

定义 2.17. 一个$\mathbf{G}$ 的表示，次数为 n，是一个群同态 T，它将G 映射到$GL_n(\mathbb{F})$。若两个表示 T 和 T' 次数相同，即 n，且存在固定的 S属于 $GL_n(\mathbb{F})$，使得对任意 $g \in \mathsf{G}$，都有 $T'(g) = ST(g)S^{-1}$，则称它们等价。

设 $T : \mathsf{G} \to GL_n(\mathbb{F})$ 是群 G 的一个表示。若存在 G 的表示 $T_1 : \mathsf{G} \to GL_{n_1}(\mathbb{F})$ 和 $T_2 : \mathsf{G} \to GL_{n_2}(\mathbb{F})$，其中 $n = n_1 + n_2$，使得 T 可约，则称其为**可约**，满足

$$T(g) \text{ and } \begin{bmatrix} T_1(g) & V(g) \\ 0 & T_2(g) \end{bmatrix}$$

对任意 $g \in \mathsf{G}$，它们等价，其中 $V(g)$ 是一个阶为 $n_1 \times n_2$、元素来自 $\mathbb{F}$ 的矩阵；否则， T 是一个**不可约表示**。更多细节请参见 [8, 18, 22, 31]。

定理 2.18 (定理10.8（马施克），第41, [8])。 设 G 是有限群，且 $T : \mathsf{G} \to GL_n(\mathbb{F})$是 G 的一个表示。若 特征$(\mathbb{F}) \nmid |\mathsf{G}|$，则存在不可约表示 $T_1, \ldots, T_n$ （不一定彼此不等价），使得 $T = T_1 + \cdots + T_n$。

定义 *2.19.* 设 G 是一个群，且 $T : G \to GL_n(\mathbb{F})$ 是 G 的一个表示。T 的特征是映射 $\zeta : G \to \mathbb{F}$，定义为对任意 $g \in G$， $\zeta(g) = tr(T(g))$，其中 $tr(T(g))$ 是矩阵 $T(g)$ 的迹。当 T 是不可约表示时，我们称 ζ 为不可约特征标。G 的所有不可约特征标组成的集合 $\widehat{\ }$ 称为 G 的对偶，记作 G。

命题 2.20 (推论30.14，第214页，以及定理27.22，第186, [8])。 设 T 和 T_1 是域 $\mathbb{F}$ 上的两个表示，其特征标分别为 ζ 和 ζ_1。若 特征$(\mathbb{F}) \nmid |\mathsf{G}|$，则 T 和 T_1等价当且仅当 $\zeta = \zeta_1$。此外，若 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，则 G 的不同不可约特征标的数目有限。

命题 2.21 (正交关系，第219—221, [8])。 设 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，满足 特征$(\mathbb{F}) \nmid |\mathsf{G}|$，其中 G 是有限群，而 $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ 是 G的所有不同特征标。那么

i) $\sum_{i=1}^{s} (\zeta_i(1))^2 = |G|$； *ii)* 若 ζ_i是不可约的，则 $\sum_{g \in G} \zeta_i(g)\zeta_j(g^{-1}) = \delta_{ij}|G|$，其中 δ_{ij} 是克罗内克δ； *iii)* 对每个 $i = 1, \ldots, s$，特征标 ζ_i 不可约当且仅当 $\sum_{g \in G} \zeta_i(g)\zeta_i(g^{-1}) = |G|$。

下一个结果是命题 2.21 的推论。

定理 2.22 （定理 9，第25, [31]）。 设 G 是一个有限群，且 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，使得 特征（$\mathbb{F}$）$\nmid |\mathsf{G}|$。那么，G 是阿贝尔群，当且仅当 G 的所有不可约特征标的次数都为 1。

前一定理的推论是，若 G 是有限阿贝尔群，则 G 的任意不可约特征标都是群同态。换言之，若 $\zeta : \mathsf{G} \to \mathbb{F}^*$ 是 G 的一个不可约特征标，则对任意 $g, h \in \mathsf{G}$，都有$\zeta(gh) = \zeta(g)\zeta(h)$。

下面的命题是有限群特征标理论中的一个著名结果。

命题 2.23 （习题 3.3，第26, [31]）。 若 G 是一个有限阿贝尔群，且 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，使得 特征（$\mathbb{F}$）$= 0$，则 G 与其对偶 $\widehat{\mathsf{G}}$ 同构。

证明。 设 $k_1, \ldots, k_n$ 为素数幂，使得 $\mathsf{G} \cong \mathsf{C}_{k_1} \times \cdots \times \mathsf{C}_{k_n}$，其中 C_{k_i} 是阶为 k_i 的（乘法）循环群。显然，$\widehat{\mathsf{G}} \cong \widehat{\mathsf{C}_{k_1}} \times \cdots \times \widehat{\mathsf{C}_{k_n}}$ 且 $|\mathsf{C}_{k_i}| = |\widehat{\mathsf{C}_{k_i}}|$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$ 均成立。由于 $\chi(g)$ 是一个 $o(g)$ 次单位根，对于 C_{k_i} 的任意特征 χ 以及任意 $g \in \mathsf{C}_{k_i}$，其中 $o(g)$ 是 g的阶，结论得证。□

3. First results on Graded Bimodules

本节中，我们给出代数上模论中一些著名结果的若干推广。

设 M 是一个 G-分次右 $\mathfrak{A}$模。考虑 $\widetilde{\mathrm{M}}$ 是一个带有平凡乘积的右 $\mathfrak{A}$模，即 $ma = 0$ 对于任意 $m \in \mathrm{M}$ 和 $a \in \mathfrak{A}$，因此，$\widetilde{\mathrm{M}}$ 自然是一个 G-分次（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模。类似地，我们可以假设右 $\mathfrak{A}$模也是一个（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模。因此，我们可以将关于左模和右模的一些结果推广到双模。下面给出一些关于双模的结果，这些结果原本是针对左模（或右模）的，其证明与单侧情形的证明类似。因此，本节的所有问题均受到单侧模理论中已知结果的启发。

引理 3.1（分次双模同构定理）。设 G 是一个群，$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}$ 是两个G-分次代数，且M 是一个G-分次（$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$）-双模。

i) 若 M' 是一个 *G*-分次 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$-双模，且 $\psi : M \longrightarrow M'$ 是次数为 h的齐次同态，则 M *ker(*ψ*)* $\cong_{\mathsf{G}}$ *im(*ψ*)* 作为 *G*-分次 $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{A}})$-双模同构；*ii)* 若 N 和 W 是 M 的 *G*-分次子双模，则 $N + W$ $W \cong_{\mathsf{G}} N$ $N \cap W$ 作为 *G*-分次 $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{A}})$-双模同构。此外，若 $N \subseteq W$，则 M $W \cong_{\mathsf{G}} M/N$ W/N 作为 *G*-分次 $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{A}})$-双模同构。

证明。 证明改编自定理 6.19、6.20 和 6.21, [30], , 第 406 页。 □

引理 *3.2*（分次双模对应定理）。设 *G* 是一个群，$\mathfrak{A}$ 且 $\mathfrak{A}$ 是两个 *G*-分次代数，*M* 是一个 *G*-分次（$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$）-双模。设 *N* 是 *M* 的一个分次子双模。那么商双模 M/N 的任意分次子双模都具有 $P/N = \{x + N : x \in P\}$ 的形式，其中 P 是 M 的一个分次子双模，且 $N \subset P \subset M$。M/N 的分次子双模与包含 N 的 M 的分次子双模之间的对应关系是一个双射。

证明。 证明改编自定理 6.22, [30], , 第 407 页。 □

引理 3.3. 设 G 是一个群，$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}$ 是两个G-分次代数，且M 是一个G-分次$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$-双模。设N 是M的一个分次子双模。那么M 是弱G-阿廷（分别地，弱G-诺特）当且仅当N 和M/N 是弱G-阿廷（分别地，弱G-诺特）。

证明。 证明改编自第 2, [29], 页的定理 41。 □

利用前一个引理和引理 3.2 的思路，我们可以构造一条具有特殊性质的分次子双模降链（或升链）。考虑一个 G-分次 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$-双模 M。假设 M 是弱 G-诺特（分别地，弱 G-阿廷）。根据前一个引理，对于 M 的任意分次子双模 N，N 和 M/N 都是弱 G-诺特（分别地，弱 G-阿廷）。若 M 不是 G-不可约的，则存在 M 中一个 G-极大（分别地，G-不可约）的子双模 N_1。若 N_1（分别地，M/N_1）是 G-不可约的，则 $\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 = \{0\}$（分别地，$\{0\} = \mathrm{N}_0 \subsetneq \mathrm{N}_1 \subsetneq \mathrm{N}_2 = \mathrm{M}$），其中 N_{i+1} 是 N_i 中的 G-极大子双模（分别地，$\mathrm{N}_{i+1}/\mathrm{N}_i$ 是 G-不可约的），对于 $i = 0, 1$。否则，假设 N_1（分别地，M/N_1）不是 G-不可约的，因此存在 M 的一个非零分次子双模 N_2，使得 $\mathrm{N}_2 \subsetneq \mathrm{N}_1$，且 N_2 是 N_1 的 G-极大子双模（分别地，$\mathrm{N}_2 \supsetneq \mathrm{N}_1$，且 $\mathrm{N}_2/\mathrm{N}_1$ 是 G-不可约的）。于是，我们得到链 $\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 \supsetneq \mathrm{N}_3 = \{0\}$（分别地，$\{0\} = \mathrm{N}_0 \subsetneq \mathrm{N}_1 \subsetneq \mathrm{N}_2 \subsetneq \mathrm{N}_3 = \mathrm{M}$）。若 N_2（分别地，M/N_2）是 G-不可约的，则可得 N_{i+1} 是 N_i 中的 G-极大子双模（分别地，$\mathrm{N}_{i+1}/\mathrm{N}_i$ 是 G-不可约的），对于 $i = 0, 1, 2$。否则，反复使用这一过程，我们必定得到一条分次子双模降链（分别地，升链）

$$\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \{0\} \quad (\text{resp. } \{0\} = \mathrm{N}_0 \subsetneq \mathrm{N}_1 \subsetneq \mathrm{N}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{M}), \tag{2}$$

使得 N_{i+1} 在 N_i 中是极大的（分别地，$\mathrm{N}_{i+1}/\mathrm{N}_i$ 是不可约的），其中 $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots$。注意，我们使用引理 3.2 来确保：如果 M/N_i 不是不可约的，那么存在一个分次子双模 $\mathrm{N}_{i+1} \supsetneq \mathrm{N}_i$，使得 $\mathrm{N}_{i+1}/\mathrm{N}_i$ 是不可约的。

现在，再次由引理 3.3，容易证明弱˜G-诺特（分别地，弱 G-阿廷）(𝔄，𝔄)-双模的有限直和（内直和或外直和）是弱 G-诺特（分别地，弱 G-阿廷）˜(𝔄，𝔄)-双模。这个结论的证明可以通过对直和项数进行归纳法，并递归应用引理 3.3 来完成。

˜请注意，给定分次（𝔄，𝔄）-双模 $\varphi : M_1 \to M_2$, 的一个齐次同态，如果 M_1 是弱 G-诺特（分别为弱 G- 阿廷），那么 im(φ) 和 ker(φ) 分别是 M_2 和 M_1, 的弱 G- 诺特（分别为弱 G- 阿廷）子双模，因为 ker(φ) 是 M_1 的分次子双模（见引理 3.3），且 im(φ) $\cong_G M_1/\ker(\varphi)$（见引理 3.1）是 M_2的分次子双模。

˜˜**引理 3.4**。设 𝔄和 𝔄是两个 G-分次代数，且M = N + W是一个G-分次(𝔄, 𝔄)-双模。若N和W 是M的弱G-阿廷（分别为弱G-诺特）子双模，则M 是弱 G-阿廷（分别为弱G-诺特）。

证明。 根据引理 3.1 的 (ii)，我们有

$$\frac{M}{W} \cong_G \frac{N+W}{W} \cong_G \frac{N}{N \cap W}.$$

由于 N 是弱 G-阿廷（分别为弱 G-诺特）的，因此由引理 3.3 可知 N N ∩W 是弱 G-阿廷（分别为弱 G-诺特）。再次由引理 3.3 可知，M 是弱 G-阿廷（分别为弱 G-诺特），因为 W 和 M W $\cong_G$ N N ∩ W 是弱 G-阿廷（分别为弱 G-诺特）。□

˜˜**引理 3.5**。设 𝔄 和 𝔄 是两个 G-分次代数，且 M 是一个 G-分次(𝔄, 𝔄)-双模。那么，M 是弱 G-诺特（分别为弱 G-阿廷）当且仅当 M 的每个非空分次子双模族 S 都包含该族中的一个极大（分别为极小）分次子双模，也就是说，存在一个分次子双模P $\in S$，使得若 N $\in S$ 且 N $\supset$ P （分别地，若 N $\subset$ P），则 N = P。

证明。 证明改编自命题 5.33, [30], , 第 312 页。 □

˜由前面的引理可知，任何非不可约的弱 G-诺特（分别为弱 G-阿廷）(𝔄，𝔄)-双模都有一个极大（分别为极小）真分次子双模。

˜˜**引理 3.6**。设 𝔄 和 𝔄 是两个 G-分次代数，且 M 是一个 G-分次(𝔄, 𝔄)-双模。那么，M 是弱 G-诺特的，当且仅当 M 的每个 G-分次子双模都是有限生成的。

证明。 首先，假设 M 是弱 G-诺特的。设 N 是 M 的任意非零分次 G-子双模。考虑 N 的所有有限生成分次子双模构成的族 S_N，显然该族非空。由于 N 是弱 G-诺特的（由引理 3.5），存在一个在 S_N 中极大的 W $\in S_N$，也就是说，不存在满足 W $\subsetneq$ W 的 W $\in S_N$。取任意齐次元素 $x \in$ N，并考虑 W = W +𝔄 $\{x\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$。˜˜注意，W 是有限生成的，因此 W $\in S_N$。由于 W 在 S_N 中极大，我们得出˜W = W，因此对任意 $x \in$N，均有 $x \in$W。因此，N 是有限生成的。

现在，假设 M 的每个 G-分次子双模都是有限生成的。考虑 M 的一个 G-子双模升链:

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_k \subset \ldots,$$

令 N = $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$，它是 M 的一个 G-子双模。根据假设，N 是有限生成的，因此存在 $x_1, x_2, \ldots,$ $x_s \in$ N 这些齐次元素，使得 N =𝔄 $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$。令$k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$满足 $x_i \in N_{k_i}$ 对所有 $i = 1, 2, \ldots, k$ 都成立。令 $k_0 = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$。我们有 $x_1, x_2, \ldots, x_s \in N_{k_0}$，因此 N $\subseteq N_{k_0}$。由此可得，对所有 $l \geq k_0$，$N_l = N_{k_0}$。因此，M 是弱 G-诺特的。□

例 3.7. 设 $\mathbb{R}$ 为实数域， $\mathfrak{A} = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]$ 为由无限多个（交换）变量构成的多项式代数（含单位元）。我们有， 𝔄 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 𝔄-双模，但不是 $\mathbb{Z}$-诺特的，因为 $_{\mathfrak{A}}\{x_1, x_2, \ldots\}_{\mathfrak{A}}$ 是 𝔄 的一个分次子双模，且无法有限生成。

下面给出一个受 Jordan-H¨older 定理启发的结果（参见第526页的定理 7.3 [30], ）。

引理 3.8. 设 M 是一个$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，且为G-分次，其中 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是G-分次代数。假设M 有一个长度为 r的弱分次合成列。那么M 的任意分次子双模N 都有弱分次合成列，且N 的任意弱分次合成列的长度至多为 r。

证明。 设 $\{0\} = \mathrm{M}_0 \subsetneq \mathrm{M}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{M}_r = \mathrm{M}$ 是 M 的一个弱分次合成列，使得$r = l(\mathrm{M})$。取 N 为 M 的一个分次子双模。对于每个 $i = 0, 1, \ldots, r$，考虑 N 的分次子双模 $\mathrm{N}_i = \mathrm{N} \cap \mathrm{M}_i$。由于 $\mathrm{M}_{i+1}/\mathrm{M}_i$ 是不可约分次的，容易看出，对于所有 $i = 0, 1, \ldots, r-1$，要么 $\mathrm{N}_{i+1}/\mathrm{N}_i \cong_{\mathsf{G}} \mathrm{M}_{i+1}/\mathrm{M}_i$，要么 $\mathrm{N}_i = \mathrm{N}_{i+1}$。因此，$\{\mathrm{N}_i\}_i$ 构成 N 的一个弱分次合成列，其长度为 $l(\mathrm{N}) \leq r$。

本引理第二部分的证明是对定理 1（Jordan-H¨older）证明的改写，[29], 第 33 页。□

前一个引理是证明本文若干结果的关键工具。接下来，我们给出一个等价刻画：一个分次双模具有弱分次合成列，当且仅当它同时满足两个弱链条件。

引理 3.9. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个G-分次代数，且 M 是一个G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。那么M 具有弱分次合成列，当且仅当M 是弱G-诺特且弱G-阿廷。

证明。 首先，假设 M 有一个长度为 r 的弱分次合成列。由引理 3.8，M 的任意分次子双模 W 也有一个长度至多为 r 的弱分次合成列，因此 W 有限生成，进而由引理 3.6 可知，M 是弱 G-诺特。现在，我们来证明 M 是弱 G-阿廷。假设 M 的分次子双模存在一个无限降链 $\mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 \supsetneq \mathrm{N}_3 \supsetneq \cdots$。由于 M 有弱分次合成列，不失一般性，我们可以假设对所有 $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$，$\mathrm{N}_{i+1}$ 在 N_i 中极大（见引理 1（施赖尔），[29], 第 34 页）。由于 M 的任意分次子双模都有一个长度至多为 r 的弱分次合成列，令 $\{0\} = \mathrm{N}_{r+s} \subsetneq \mathrm{N}_{r+s-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{N}_r = \mathrm{N}_r$ 为 N_r 的一个分次合成列，其中$s - 1 = l(\mathrm{N}_r) \leq r$。因此，我们有

$$\{0\} = \widetilde{\mathrm{N}}_{r+s} \subsetneq \widetilde{\mathrm{N}}_{r+s-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{\mathrm{N}}_r = \mathrm{N}_r \subsetneq \mathrm{N}_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{N}_2 \subsetneq \mathrm{N}_1$$

是 N_1, 的弱分次合成列，其长度为 $r + s - 1$。因此，由引理 3.8 可得，从而 $r + s - 1 \leq r$，于是 $s \leq 1$。因此，要么 $\mathrm{N}_{r+1} = \{0\}$，于是 N_r 是不可约分次的；要么 $\mathrm{N}_r = \{0\}$。无论如何，我们得出，对于所有 $s > r$，$\mathrm{N}_s = \{0\}$。因此，M 是弱 G-阿廷的。

反过来，假设 M 是弱 G-诺特且弱 G-阿廷的。若 M 不是不可约分次的，考虑 F_1，它是由 M 的所有满足 $\mathrm{N} \neq \mathrm{M}$ 的分次子双模 N 构成的族。由于 M 是弱 G-诺特的，由引理 3.5，F_1 中存在一个极大元 $\mathrm{N}_1 \in \mathrm{F}_1$。注意，$\mathrm{N}_1$ 是 M 的极大子双模。若 N_1 是不可约分次的，则 $\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \{0\}$ 是 M 的弱分次合成列。否则，若 N_1 不是不可约分次的，考虑 F_2，它是由 N_1, 的所有满足 $\mathrm{P} \neq \mathrm{N}_1$ 的分次子双模 P 构成的族。再次由引理 3.5，F_2 中存在一个极大元 $\mathrm{N}_2 \in \mathrm{F}_2$。注意，$\mathrm{N}_2$ 是 N_1 的极大子双模。再次，若 N_2 是不可约分次的，则 $\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 \supsetneq \{0\}$ 是 M 的弱分次合成列。否则，上述过程必须继续，因此我们可以构造一个降链

$$\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 \supsetneq \mathrm{N}_3 \supsetneq \cdots$$

M 的分次子双模，其中对所有 $i = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}_{i+1}$ 在 N_i中是极大的。由于 M 是弱 G-阿廷的，存在 $s_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $s \geq s_0$，$\mathrm{N}_s = \mathrm{N}_{s_0}$。因此，我们得出 $\mathrm{N}_s = \{0\}$。于是，$\mathrm{M} = \mathrm{N}_0 \supsetneq \mathrm{N}_1 \supsetneq \mathrm{N}_2 \supsetneq \mathrm{N}_3 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{N}_s = \{0\}$ 是 M 的一个弱分次合成列。□

前一个引理的直接推论是：如果 M 是一个 G-分次（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模，且 M 有弱分次合成列，那么 M 必定是有限生成的。对于下一个结果，回顾一下，任意 G-分次（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$）-双模都可以由其齐次元素生成。

引理 3.10. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个有限维G-分次 $\mathbb{F}$-代数，且M 是一个G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。若M 有限生成，则M 是弱G-阿廷且弱G-诺特。

证明. 设 $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ 是 M 的齐次元素子集，且 M $=_{\mathfrak{A}} S_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$。由于 ${}_{\mathfrak{A}}S_{\widetilde{\mathfrak{A}}}=\sum_{i=1}^{n}{}_{\mathfrak{A}}\{x_i\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$，要证明 M 是弱 G-阿廷且弱 G-诺特，只需证明每个 ${}_{\mathfrak{A}}\{x_i\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ 都是弱 G-阿廷且弱 G-诺特（见引理 3.4）。任取 $x\in S$，下面证明 ${}_{\mathfrak{A}}\{x\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ 是弱 G-阿廷且弱 G-诺特。

首先，回顾一下 ${}_{\mathfrak{A}}\{x\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}=$ 张成空间$_{\mathbb{F}}\{x\}+\mathfrak{A}x+x\mathfrak{A}+\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$。现在，由于 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是有限维 $\mathbb{F}$-代数，考虑非零齐次元素 a_1，...，$a_r\in\mathfrak{A}$ 以及 b_1，...，$b_s\in\mathfrak{A}$，使得 $\mathfrak{A}=$ 张成空间$_{\mathbb{F}}\{a_1,\dots,a_r\}$，且 $\mathfrak{A}=$ 张成空间$_{\mathbb{F}}\{b_1,\dots,b_s\}$。容易看出，$\mathfrak{A}x=$ 张成空间$_{\mathbb{F}}\{a_1x,\dots,a_rx\}$，且 $x\mathfrak{A}=$ 张成空间$_{\mathbb{F}}\{xb_1,\dots,xb_s\}$，因此 $\mathfrak{A}x$ 和 $x\mathfrak{A}$ 具有有限维数。最后，给定任意 $m\in\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$，存在$\hat{a}_1$，...，$\hat{a}_t\in\mathfrak{A}$ 以及 b_1，...，$b_t\in\mathfrak{A}$，使得 $m=\hat{a}_1xb_1+\cdots+\hat{a}_txb_t$。令 λ_{11}，...，λ_{tr}，γ_{11}，...，$\gamma_{ts}\in\mathbb{F}$，使得$\hat{a}_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}a_j$和$\hat{b}_l=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{lj}b_j$，其中 i，$l=1$，...，t。因此，

$$m=\sum_{i=1}^{t}\hat{a}_i x\hat{b}_i=\sum_{i=1}^{t}\left(\left(\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}a_j\right)x\left(\sum_{l=1}^{s}\gamma_{ij}b_l\right)\right)=\sum_{i,j,l=1}^{t,r,s}\lambda_{ij}\gamma_{il}a_jxb_l\ ,$$

因此，$m\in$张成空间$_{\mathbb{F}}\{a_jxb_l:\ j=1,\ \ldots\ldots,\ r,$ 以及 $l=1,\ \ldots\ldots,\ s\}$。因此，$\mathfrak{A}x\mathfrak{A}=$张成空间$_{\mathbb{F}}\{a_jxb_l:\ j=1,\ \ldots\ldots,\ r,$ 以及 $l=1,\ \ldots\ldots,\ s\}$，从而 $\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$ 是有限维的。由此可得

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathfrak{A}}\{x\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}\right)=\mathsf{dim}_{\mathbb{F}}\left(\mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{x\}+\mathfrak{A}x+x\widetilde{\mathfrak{A}}+\mathfrak{A}x\widetilde{\mathfrak{A}}\right)\leq 1+r+s+rs<\infty$$

即，${}_{\mathfrak{A}}\{x\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ 是有限维的。因此，我们得出结论：${}_{\mathfrak{A}}\{x\}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ 是弱 G-阿廷且弱 G-诺特的，结论得证。□

根据前面的结果，给定 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 这两个有限维 G-分次 $\mathbb{F}$代数，以及一个 G-分次 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A})$-双模 M，对于 M 的任意有限个齐次元素组成的集合 S，M 的分次子双模 $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}S+S\mathfrak{A}+\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$ 都是弱 G-阿廷且弱 G-诺特的。

在 [35], 定理 11 中，P. V´amos 证明了，若 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个扩域，且 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$上不是有限生成的，那么张量代数 $\mathbb{K}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{K}$ 不是诺特的。因此，若不假设“$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个有限维 G-分次 $\mathbb{F}$-代数”，引理 3.10 就不成立。

定理 3.11。设 G 是一个群，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个有限维 G-分次 $\mathbb{F}$-代数，且 M 是一个G-分次 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。则以下条件等价：

i) M 是有限生成的（作为 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模）；

ii) M 是弱G-诺特的；iii) M 是弱G-阿廷的且弱G-诺特的；iv) M 有一个弱分次合成列。

证明。首先，根据引理 3.6 和引理 3.10，(i)、(ii) 和 (iii) 等价。(iii) 与 (iv) 等价则已由引理 3.9 得出。□

推论 3.12。设G 为一个群，H_1 和H_2 为G的两个有限子群，且 $\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]$ 和 $\mathbb{F}^{\sigma_2}[\mathsf{H}_2]$为两个扭群代数，其中 $\sigma_i\in\mathsf{Z}^2(\mathsf{H}_i,\mathbb{F}^*)$。对每个 $i=1,\ 2$，考虑 $\mathfrak{B}_i=M_{n_i}(\mathbb{F}^{\sigma_i}[\mathsf{H}_i])$ 上以 $\mathbb{F}^{\sigma_i}[\mathsf{H}_i]$ 为系数的 $n_i\times n_i$ 矩阵代数，并赋予其典范的初等G-分次。任何有限生成的G-分次$(\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2)$-双模都满足弱链条件。

证明。事实上，对每个 $i=1,2$，都有 $\mathsf{dim}(\mathfrak{B}_i)=n_i^2|\mathsf{H}_i|<\infty$，因为 H_i是有限的，因此 $\mathfrak{B}_1$和 $\mathfrak{B}_2$ 均为有限维。由定理 3.11 可立即得出结论。□

3.1. **有限维分次双模的分解**。若左（分别地，右） $\mathfrak{A}$-模 M 满足 $\mathfrak{A}\mathsf{M}=\{0\}$（分别地，$\mathsf{M}\mathfrak{A}=\{0\}$），则称其为 **0-左 $\mathfrak{A}$-模**（分别地，**0-右 $\mathfrak{A}$-模**）；若 $a\mathsf{M}=\{0\}$（分别地，$\mathsf{M}a=\{0\}$）能够推出 $a=0$，其中 $a\in\mathfrak{A}$，则称 M 为左（分别地，右）**忠实**模。值得注意的是，对于任意 $a=\sum_{g\in\mathsf{G}}a_g$ in $\mathfrak{A}$，“$a\mathsf{M}=\{0\}$ implies $a=0$”当且仅当“$a_g\mathsf{M}=\{0\}$ implies$a_g=0$”，其中任意 $g\in\mathsf{G}$ 均如此。“右”情形类似。

定理 3.13。设G 是一个群， $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是两个带G-分次的含幺代数，且M 是一个G-分次的$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，不一定含幺。若M 是有限维的（作为向量空间），则M 可分解为

$$\mathsf{M}=\mathsf{M}_{00}\oplus\mathsf{M}_{10}\oplus\mathsf{M}_{01}\oplus\mathsf{M}_{11}\ ,$$

其中M$_{ij}$是G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，并满足：

i) 对于 $r=0,1$，M_{0r} 是一个0-左 $\mathfrak{A}$-模，而M_{1r} 是一个含幺左G-分次 $\mathfrak{A}$-模；

ii) 对于 $s=0,1$，M_{s0} 是一个0-右 $\mathfrak{A}$-模，而 M_{s1} 是一个含幺右G-分次 $\mathfrak{A}$-模；iii) M_{11} 是一个含幺G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模。

此外，如果 $\mathfrak{A}$ （分别地， $\mathfrak{A}$）是分次单的，那么对于 $r=0,1$，M_{1r} （分别地，M_{r1}）在左侧（分别地，在右侧）是忠实的。

证明。设 $\mathfrak{i}$ 和 $\mathfrak{i}$ 分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$的单位元，并考虑映射 $L,R:\mathsf{M}\longrightarrow\mathsf{M}\hat{}$，其定义为对所有 x, $y\in\mathsf{M}$，分别有 $L(x)=\mathfrak{i}x$ 和 $R(x)=x\mathfrak{i}$。注意， L 和 R 是齐次的G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模同态，并且 $L^2=L$ 和 $R^2=R$，因为 $\mathfrak{i}^2=\mathfrak{i}\in\mathfrak{A}_e$ 和$\hat{\mathfrak{i}}^2=\hat{\mathfrak{i}}\in\widetilde{\mathfrak{A}}_e$。因此，ker($L$)、im($L$)、ker($R$)和im($R$)都是G-分次$(\mathfrak{A},\widetilde{\mathfrak{A}})$-双模。另一方面，我们得出 L 和 R的特征值只有0和$1\in\mathbb{F}$。因此， L 和 R是可对角化的，因为它们的最小多项式可以写成一次因子的乘积（见 [17], 定理6.4.6，第204页）。注意 $R\circ L=L\circ R$，因此，ker(R)和im(R)在 L下不变，而ker(L)和im(L)在 R下不变。由此很容易验证，$V_0^R=\ker(R)$和 $V_0^L=\ker(L)$分别是 R和 L 对应于0的特征子空间，而$V_1^R=\mathrm{im}(R)$和 $V_1^L=\mathrm{im}(L)$分别是 R和 L 对应于1的特征子空间。

令 $\mathsf{M}_{00}=V_0^R\cap V_0^L$、$\mathsf{M}_{10}=V_0^R\cap V_1^L$、$\mathsf{M}_{01}=V_1^R\cap V_0^L$和 $\mathsf{M}_{11}=V_1^R\cap V_1^L$。注意，M$_{rs}$'s是 G-分次$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$双模。我们来证明

$$\mathsf{M}=\mathsf{M}_{00}\oplus\mathsf{M}_{01}\oplus\mathsf{M}_{10}\oplus\mathsf{M}_{11}\ . \tag{3}$$

令 $\mathsf{M}=\sum_{r,s=0,1}\mathsf{M}_{rs}$。我们有

$$\mathsf{M}_{10}=\{x\in\mathsf{M}:x=\mathfrak{i}x,x\hat{\mathfrak{i}}=0\}\ ,\ \mathsf{M}_{01}=\{x\in\mathsf{M}:x=x\hat{\mathfrak{i}},\mathfrak{i}x=0\}\ ,$$
$$\mathsf{M}_{11}=\{x\in\mathsf{M}:x=\mathfrak{i}x\hat{\mathfrak{i}}\}\ ,\ \mathsf{M}_{00}=\{x\in\mathsf{M}:\mathfrak{i}x=x\hat{\mathfrak{i}}=0\}\ .$$

由此，若 $x_{10}+x_{01}+x_{11}+x_{00}=0$，其中 $x_{rs}\in\mathsf{M}_{rs}$，则

$$0=\mathfrak{i}(x_{10}+x_{01}+x_{11}+x_{00})\hat{\mathfrak{i}}=\mathfrak{i}x_{11}\hat{\mathfrak{i}}=x_{11}\ ,$$
$$0=\mathfrak{i}(x_{10}+x_{01}+x_{11}+x_{00})=\mathfrak{i}x_{10}+\mathfrak{i}x_{11}=x_{10}+x_{11}\ ,$$
$$0=(x_{10}+x_{01}+x_{11}+x_{00})\hat{\mathfrak{i}}=x_{01}\hat{\mathfrak{i}}+x_{11}\hat{\mathfrak{i}}=x_{01}+x_{11}\ ,$$

因此， $x_{11}=x_{10}=x_{01}=x_{00}=0$，从而，$\mathsf{M}=\bigoplus_{r,s=0,1}\mathsf{M}_{rs}$。另一方面，由秩-零度定理（见 [17], 定理 3.1.2，第71页），可知$\mathsf{M}=\ker(R)\oplus\mathrm{im}(R)=\ker(L)\oplus\mathrm{im}(L)$，因为 $\dim_{\mathbb{F}}\mathsf{M}<\infty$ 且 $\ker(R)\cap\mathrm{im}(R)=\ker(L)\cap\mathrm{im}(L)=\{0\}$。任取 $x\in\mathsf{M}$。存在 $x_0\in\ker(L)$ 和 $x_1\in\mathrm{im}(L)$，使得 $x=x_0+x_1$，因此存在 $x_{00},x_{10}\in\ker(R)$ 和 $x_{01},x_{11}\in\mathrm{im}(R)$，使得 $x_0=x_{00}+x_{01}$和 $x_1=x_{10}+x_{11}$。注意， $x_{00},x_{01}\in\ker(L)$，因为 $0=\mathfrak{i}x_0=\mathfrak{i}x_{00}+\mathfrak{i}x_{01}$且 $\ker(L)\cap\mathrm{im}(L)=\{0\}$。类似地， $x_{10},x_{11}\in\mathrm{im}(L)$，因为 $x_{10}+x_{11}=x_1=\mathfrak{i}x_1=\mathfrak{i}x_{10}+\mathfrak{i}x_{11}$，所以 $x_{10}-\mathfrak{i}x_{10}=\mathfrak{i}x_{11}-x_{11}$，但 $\ker(R)\cap\mathrm{im}(R)=\{0\}$。因此，

$$x=x_{00}+x_{01}+x_{10}+x_{11}\in\mathsf{M}_{00}\oplus\mathsf{M}_{01}\oplus\mathsf{M}_{10}\oplus\mathsf{M}_{11}\ .$$

这就完成了（3）的证明。

现在，为了证明 M$_{rs}$' 满足 *i)*、*ii)*和*iii)*，只需注意到，由于 M$_{rs}$' 是G-分次 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-双模，且 $\mathfrak{i}$ 和 $\mathfrak{i}$ 分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$的单位元，因此对于任意 $a\in\mathfrak{A}$ 和 $b\in\mathfrak{A}$， $a=a\mathfrak{i}=\mathfrak{i}a=\mathfrak{i}a\mathfrak{i}$ 和 $\hat{a}\hat{b}=\mathfrak{i}b=b\mathfrak{i}=\mathfrak{i}b\mathfrak{i}$，于是对于任意 $a\in\mathfrak{A}$、 $b\in\mathfrak{A}$ 和 $x\in\mathsf{M}$， $ax=(a\mathfrak{i})x=a(\mathfrak{i}x)$ 和 $xb=x(\mathfrak{i}b)=(x\mathfrak{i})b$。由此，根据 M$_{rs}$' 的定义，*i)*、*ii)* 和*iii)* 均成立。

最后，分别证明。为了得到矛盾，假设存在某个非零齐次元素 $a_0\in\mathfrak{A}$ (分别为 $a_0\in\mathfrak{A}$)，使得 $a_0\mathsf{M}_{1r}=\{0\}$ (分别为 $\mathsf{M}_{r1}a_0=$

~ ~ ~ ~{0})。由 $\mathfrak{A}$ (分别为 $\mathfrak{A}$)的单性可知， $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a_0\mathfrak{A}$ (分别为 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a\mathfrak{A}$)，因此，~ ~ ~ ~$\mathfrak{A}\mathrm{M}_{1r} = (\mathfrak{A}a_0\mathfrak{A})\mathrm{M}_{1r} \subseteq (\mathfrak{A}a_0)\mathrm{M}_{1r} = \mathfrak{A}(a_0\mathrm{M}_{1r})$ $= \{0\}$(分别为 $\mathrm{M}_{r1}\mathfrak{A} = \mathrm{M}_{r1}(\mathfrak{A}a_0\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{M}_{r1}(a_0\mathfrak{A}) = \widetilde{(\mathrm{M}_{r1}a_0)}\mathfrak{A} = \{0\}$)，这与本定理的 *i)* 和 *ii)* 两项矛盾。因此，我们得出结论：M_{1r} (分别为 M_{r1})在左侧（分别在右侧）是忠实的，其中 $i = 0,1$。□

~由上述定理（及其证明）可知，若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 是分次单的，则~M_{11} 是**“忠实双模”**，即给定 $a \in \mathfrak{A}$ 和 $b \in \mathfrak{A}$， $a\mathrm{M}b = \{0\}$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$。

下一 个结果表明，研究并描述 M 的子双模 M_{11} 的重要性 .

~**推论 3.14**。 假设与定理 *3.13* 的假设相同。若M 是一个含幺$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$-双模，则M $=\mathrm{M}_{11}$。

^^证明。 假设 M 是一个含幺双模，则对于任意 $x \in \mathrm{M}$，都有 $x = \mathrm{i}x = x\mathrm{i} = \mathrm{i}x\mathrm{i}$ ，因此，

$$\mathsf{J}_{00} \oplus \mathsf{J}_{01} \oplus \mathsf{J}_{10} = \mathsf{i}\,(\mathsf{J}_{00} \oplus \mathsf{J}_{01} \oplus \mathsf{J}_{10})\,\hat{\mathsf{i}} = \{0\}\ .$$

因此，结论得证。 □

受定理 3.13 和推论 3.14 的启发，在接下来的章节中，我们将研究（半）单代数上的含幺双模。

前一定理的一个特殊情形是 M 为分次代数，特别地，M 是代数 $\mathfrak{A}$ 的理想。最后，我们来介绍这方面的一些结果。

推论 3.15。 设 $\mathfrak{A}$ 是一个带有 G-分次的代数， $\mathfrak{B}$ 是一个分次子代数，N 是 $\mathfrak{A}$ 的一个分次（双边）理想。假设 $\mathfrak{B}$ 含幺，且 N 有限维。那么 $\mathsf{N} = \bigoplus_{i,\ j=0,\ 1}\mathsf{N}_{ij}$，其中$\mathsf{N}_{ij}$如定理 *3.13* 中所述，并且满足对于所有 r、p、q、$s \in \{0,1\}$，有$\mathsf{N}_{rq}\mathsf{N}_{qs} \subseteq \mathsf{N}_{rs}$，且当 $p \neq q$ 时，$\mathsf{N}_{rp}\mathsf{N}_{qs} = \{0\}$ 。

证明。 显然，N 是一个 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模，因此可按定理 3.13 将 N 写作 $\mathsf{N} = \bigoplus_{i,j=0,1}\mathsf{N}_{ij}$ 。现在，令 i 为 $\mathfrak{B}$ 的单位元，由于 $\mathfrak{A}$ 具有结合乘法，对于任意 $x, y \in \mathfrak{A}$，有 $(x\mathrm{i})y = x(\mathrm{i}y)$。因此，根据 N_{ij} 各项的定义可得

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N}_{00}\mathsf{N}_{11} = \mathsf{N}_{00}\mathsf{N}_{10} = \mathsf{N}_{01}\mathsf{N}_{00} = \mathsf{N}_{10}\mathsf{N}_{11} = \mathsf{N}_{11}\mathsf{N}_{01} = \mathsf{N}_{11}\mathsf{N}_{00} = \{0\}\ ,\\
&\mathsf{N}_{00}\mathsf{N}_{00} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{x \cdot y \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = x\mathrm{i} = 0, \mathrm{i}y = y\mathrm{i} = 0,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{00}\ ,\\
&\mathsf{N}_{00}\mathsf{N}_{01} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{x \cdot y\mathrm{i} \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = x\mathrm{i} = 0, \mathrm{i}y = 0, y\mathrm{i} = y,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{01}\ ,\\
&\mathsf{N}_{10}\mathsf{N}_{00} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{i}x \cdot y \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = x, x\mathrm{i} = 0, \mathrm{i}y = y\mathrm{i} = 0,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{10}\ ,\\
&\mathsf{N}_{10}\mathsf{N}_{01} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{i}x \cdot y\mathrm{i} \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = x, x\mathrm{i} = 0, \mathrm{i}y = 0, y\mathrm{i} = y,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{11}\ ,\\
&\mathsf{N}_{01}\mathsf{N}_{10} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{x\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}y \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = 0, x\mathrm{i} = x, \mathrm{i}y = y, y\mathrm{i} = 0,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{00}\ ,\\
&\mathsf{N}_{01}\mathsf{N}_{11} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{x\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}y\mathrm{i} \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = 0, x\mathrm{i} = x, \mathrm{i}y = y\mathrm{i} = y,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{01}\ ,\\
&\mathsf{N}_{11}\mathsf{N}_{10} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{i}x\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}y \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = x\mathrm{i} = x, \mathrm{i}y = y, y\mathrm{i} = 0,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{10}\ ,\\
&\mathsf{N}_{11}\mathsf{N}_{11} = \mathsf{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{i}x\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}y\mathrm{i} \in \mathsf{N} : \mathrm{i}x = x\mathrm{i} = x, \mathrm{i}y = y\mathrm{i} = y,\ x, y \in \mathsf{N}\} \subseteq \mathsf{N}_{11}\ ,
\end{aligned}$$

这就确保了我们的断言。 □

推论 3.16。 在推论 *3.15* 的相同假设下，令 i 为 $\mathfrak{B}$ 的单位元。若对于某个 $h \in \mathsf{G}$，有 $\mathrm{i} \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}(\mathsf{N}_h)$ （ $\mathfrak{A}$ 中 N_h 的中心），则 $\mathsf{N}_h = (\mathsf{N}_{00})_h \oplus (\mathsf{N}_{11})_h$。此外， $\mathrm{i} \in \mathcal{Z}(\mathsf{N})$ （ $\mathfrak{A}$ 中N 的中心）当且仅当 $\mathsf{N} = \mathsf{N}_{00} \oplus \mathsf{N}_{11}$。

证明。 由定理 3.13，我们可以写成

$$\mathsf{N} = \bigoplus_{g \in \mathsf{G}} ((\mathsf{N}_{00})_g \oplus (\mathsf{N}_{01})_g \oplus (\mathsf{N}_{10})_g \oplus (\mathsf{N}_{11})_g) = \bigoplus_{\substack{g \in \mathsf{G} \\ i,j \in \{0,1\}}} (\mathsf{N}_{ij})_g\ .$$

现在，假设对于某个 $h \in \mathsf{G}$，有 $\mathrm{i} \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_h)$，即对所有 $a_h \in \mathfrak{A}_h$，都有 $\mathrm{i}a_h = a_h\mathrm{i}$ 。特别地，对于任意 $x_h \in \mathsf{N}_h \subseteq \mathfrak{A}_h$，我们有 $\mathrm{i}x_h = x_h\mathrm{i}$。由于$\mathsf{N}_h = (\mathsf{N}_{00})_h \oplus (\mathsf{N}_{10})_h \oplus (\mathsf{N}_{01})_h \oplus (\mathsf{N}_{11})_h$，其中

$\mathsf{N}_{00}=\{z\in\mathsf{N}\colon\ \mathfrak{i}z=0=z\mathfrak{i}\}$，$\mathsf{N}_{10}=\{x\in\mathsf{N}\colon\ \mathfrak{i}x=x,\ x\mathfrak{i}=0\}$ 且$\mathsf{N}_{01}=\{y\in\mathsf{N}\colon\ y\mathfrak{i}=y,\ \mathfrak{i}y=0\}$，因此可得$\mathsf{N}_{10}=\mathsf{N}_{01}=\{0\}$。所以，对于 $h\in\mathsf{G}$，$\mathfrak{i}\in\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_h)$蕴含$\mathsf{N}_h=(\mathsf{N}_{00})_h\oplus(\mathsf{N}_{11})_h$。

因此，若 $\mathfrak{i}\in\mathcal{Z}(\mathfrak{A})$，则可得 $\mathsf{N}_h=(\mathsf{N}_{00})_h\oplus(\mathsf{N}_{11})_h$ 对任意 $h\in\mathsf{G}$ 均成立，由此我们得出

$$\mathsf{N}=\bigoplus_{g\in\mathsf{G}}\mathsf{N}_g=\bigoplus_{g\in\mathsf{G}}((\mathsf{N}_{00})_g\oplus(\mathsf{N}_{11})_g)=\mathsf{N}_{00}\oplus\mathsf{N}_{11}\ .$$

另一方面，假设 $\mathsf{N}=\mathsf{N}_{00}\oplus\mathsf{N}_{11}$。任取 $z=x+y\in\mathsf{N}$，使得 $x\in\mathsf{N}_{00}$ 且 $y\in\mathsf{N}_{11}$。由于 $\mathfrak{i}x=0=x\mathfrak{i}$ 和 $\mathfrak{i}y=y=y\mathfrak{i}$，我们有 $\mathfrak{i}z=\mathfrak{i}(x+y)=\mathfrak{i}x+\mathfrak{i}y=x\mathfrak{i}+y\mathfrak{i}=(x+y)\mathfrak{i}=z\mathfrak{i}$，结论即得。□

4. Graded Bimodules over Simple Graded Algebras

本节将阐述本文的主要结果：不可约分次双模的描述，以及有限生成分次双模的一种（特殊）分解。

设 G 为一个群，H 为 G 的有限子群，$\sigma\in\mathsf{Z}^2(\mathsf{H}\ \mathbb{F}^*)$ 是一个 2-余循环，并设 $\mathfrak{B}=M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{H}])$ 具有由一个 n-元组 $(g_1,\ .....,\ g_n)\in\mathsf{G}^n$ 定义的典范初等 G-分次，即 $\mathfrak{B}=\bigoplus_{g\in\mathsf{G}}\mathfrak{B}_g$，其中$\mathfrak{B}_g=$张成空间 $_{\mathbb{F}}\{E_{ij}\eta_h\in\mathfrak{B}\colon\ g_i^{-1}hg_j=g\}$。回顾一下，$\mathfrak{B}$ 是含幺的，其单位元为 $1_{\mathfrak{B}}=\sigma(e,\ e)^{-1}\sum_{i=1}^n E_{ii}\eta_e$，而集合 $\{E_{ij}\eta_h\in\mathfrak{B}\colon\ i,\ j=1,\ .....,\ n,\ \text{且}\ h\in\mathsf{H}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的齐次基。考虑一个含幺 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模 M。下文将定义 M 中的元素，使得它们与 $\mathfrak{B}$ 的（齐次）元素相乘时，乘积形式类似于 $\mathfrak{B}$ 中的乘积。

取一个非零齐次元素 $w_0\in\mathsf{M}$。由于 M 是含幺的，可知 $\eta_eE_{i_0i_0}w_0E_{j_0j_0}\eta_e\neq0$for some $i_0,j_0\in\{1,\dots,n\}$，因此，对任意 $r,s\in\{1,\dots,n\}$ 以及 $g,h\in\mathsf{H}$，均有 $\eta_gE_{ri_0}w_0E_{j_0s}\eta_h\neq0$（因为对于任意 $g\in\mathsf{H}$ 和 $i,j=1,\dots,n$，都有 $\eta_eE_{ii}=\sigma(g,g^{-1})^{-1}E_{ij}\eta_gE_{ji}\eta_{g^{-1}}$）。注意，所有 $\eta_gE_{ri_0}w_0E_{j_0s}\eta_h$'s 都是齐次的。不失一般性，我们可以考虑元素$\eta_eE_{11}w_0E_{11}\eta_e\neq0$，而非 w_0。给定任意 $g\in\mathsf{H}$ 和 $i,j\in\{1,\dots,n\}$，定义元素

$$m_{ij}^g:=\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(h,h^{-1}g)^{-1}\eta_hE_{i1}w_0E_{1j}\eta_{h^{-1}g}\ , \tag{4}$$

其中每个 $\eta_gE_{r1}w_0E_{1s}\eta_h\neq0$，对于任意 $r,\ s\in\{1,\dots,n\}$ 以及 $g,\ h\in\mathsf{H}$。

当 $m_{ij}^g\neq0$ 对某个 $g\in\mathsf{H}$ 和 $i,\ j\in\{1,\dots,n\}$成立时，注意到 m_{ij}^g 在与 $\mathfrak{B}$中元素相乘时的行为类似于 $E_{ij}\eta_g$；也就是说，对于任意 $r,\ s\in\{1,\dots,n\}$ 以及 $t\in\mathsf{H}$，有

$$E_{rs}\eta_t\eta_{ij}^g=\delta_{si}\sigma(t,g)m_{rj}^{tg}\quad\text{and}\quad m_{ij}^gE_{rs}\eta_t=\delta_{jr}\sigma(g,t)m_{is}^{gt}\ , \tag{5}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}0,&\text{若}\ i\neq j\\1,&\text{若}\ i=j\end{cases}$ 为克罗内克δ。事实上，取任意 $t\in\mathsf{H}$ 和 $r,\ s\in\{1,\dots,n\}$。

显然，当 $s\neq i$ 时，$E_{rs}\eta_hm_{ij}^g=0$；当 $r\neq j$ 时，$m_{ij}^gE_{rs}\eta_h=0$。现在，若 $s=i$，则有

$$\begin{aligned}E_{ri}\eta_tm_{ij}^g&=E_{ri}\eta_t\left(\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(h,h^{-1}g)^{-1}E_{i1}\eta_hw_0E_{1j}\eta_{h^{-1}g}\right)\\&=\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(t,h)\sigma(h,h^{-1}g)^{-1}E_{r1}\eta_{th}w_0E_{1j}\eta_{h^{-1}g}\\&=\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(t,h)\sigma(h,(th)^{-1}tg)^{-1}E_{r1}\eta_{th}w_0E_{1j}\eta_{(th)^{-1}tg}\\&=\sigma(t,g)\left(\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(th,(th)^{-1}tg)^{-1}E_{r1}\eta_{th}w_0E_{1j}\eta_{(th)^{-1}tg}\right)\\&=\sigma(t,g)\ m_{rj}^{tg}\ ,\end{aligned}$$

因为对于任意 h，g，$t \in \mathsf{H}$（见定义 2.12），$\sigma(t,\ h)\sigma(th,\ (th)^{-1}tg) = \sigma(t,\ g)\sigma(h,\ (th)^{-1}tg)$。并且，若$r = j$，则有

$$\begin{aligned} m_{ij}^{g}E_{js}\eta_t &= \left(\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(h,h^{-1}g)^{-1}E_{i1}\eta_h w_0 E_{1j}\eta_{h^{-1}g}\right)E_{js}\eta_t \\ &= \sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(h^{-1}g,t)\sigma(h,h^{-1}g)^{-1}E_{i1}\eta_h w_0 E_{1s}\eta_{h^{-1}gt} \\ &= \sigma(g,t)\left(\sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(h,h^{-1}gt)^{-1}E_{i1}\eta_h w_0 E_{1s}\eta_{h^{-1}gt}\right) \\ &= \sigma(g,t)\ m_{is}^{gt}\ , \end{aligned}$$

因为对于任意 h，g，$t \in \mathsf{H}$，$\sigma(h,\ h^{-1}g)\sigma(g,\ t) = \sigma(h,\ h^{-1}gt)\sigma(h^{-1}g,\ t)$（见定义 2.12）。

m_{ij}^{g} 的另一个特点是，如果对于某个 i，$j \in \{1,\dots,n\}$ 和 $g \in \mathsf{H}$，$m_{ij}^{g} \neq 0$，那么对于任意 $h \in \mathsf{H}$ 和 $l \in \{1,\dots,n\}$，$m_{lj}^{hg} = \sigma(h,\ g)^{-1}E_{li}\eta_h m_{ij}^{g} \neq 0$ 和 $m_{il}^{gh} = \sigma(g,\ h)^{-1}m_{ij}^{g}E_{jl}\eta_h \neq 0$，因为

$$m_{ij}^{g} = (\sigma(e,e)^{-1}\sigma(h^{-1},h)^{-1}E_{il}\eta_{h^{-1}}E_{li}\eta_h)m_{ij}^{g} = (\sigma(e,e)^{-1}\sigma(h^{-1},h)^{-1}E_{il}\eta_{h^{-1}})(E_{li}\eta_h m_{ij}^{g}),$$

and

$$m_{ij}^{g} = m_{ij}^{g}(\sigma(e,e)^{-1}\sigma(h,h^{-1})E_{jl}\eta_h E_{lj}\eta_{h^{-1}}) = (m_{ij}^{g}E_{jl}\eta_h)(\sigma(e,e)^{-1}\sigma(h,h^{-1})E_{lj}\eta_{h^{-1}}).$$

由此可推得，对于某个 i，$j \in \{1,\dots,n\}$ 和 $g \in \mathsf{H}$，$m_{ij}^{g} \neq 0$ 当且仅当对于任意 r，$s \in \{1,\dots,n\}$ 和 $h \in \mathsf{H}$，$m_{rs}^{h} \neq 0$。

除此之外，容易证明，元素 $\mathsf{i}_\mathsf{M} \coloneqq \sigma(e,\ e)^{-1}\sum_{i=1}^{n} m_{ii}^{e} \in \mathsf{M}$ 满足 $b\mathsf{i}_\mathsf{M} = \mathsf{i}_\mathsf{M}b$，对任意 $b \in \mathfrak{B}$ 均成立。

注意，当 $\deg(w_0) \in \mathcal{Z}(\mathsf{G})$ 或 $\mathsf{H} \subset \mathcal{Z}(\mathsf{G})$ 时，对任意 $g \in \mathsf{H}$，m_{ij}^{g} 都是 M 的齐次元素，并且 i，$j \in \{1,\dots,n\}$。特别地，当 $\deg(w_0) \in \mathcal{Z}(\mathsf{G})$ 时，对于任意 $g \in \mathsf{H}$，i，$j = 1,\dots,n$，可得 $m_{ij}^{g} \in \mathsf{M}_{g_i^{-1}gg_j\text{次数}(w_0)} = \mathsf{M}_{\deg(w_0)g_i^{-1}gg_j}$。由这些观察可知，扩张映射 $E_{ij}\eta_g \mapsto m_{ij}^{g}$ 的线性变换 $\psi:\ \mathfrak{B} \to \mathsf{M}$ 是一个次数为 $\deg(w_0)$ 的 $\mathfrak{B}$-双模齐次同态，其中 $\deg(w_0) \in \mathcal{Z}(\mathsf{G})$。

注 4.1。设G 是一个群，H 是G的一个有限子群，$\mathbb{F}$ 是一个域，$\sigma \in \mathsf{Z}^2(\mathsf{H}\ \mathbb{F}^*)$，以及 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{H}])$，并带有典范的初等G分次。设M 是一个含幺G分次 $\mathfrak{B}$双模。取非零齐次元素 $m_0 \in \mathsf{M}$，并如式 *(4)* 所示，定义

$$m_{ij}^{g} = \sum_{h\in\mathsf{H}}\sigma(h,h^{-1}g)^{-1}E_{i1}\eta_h m_0 E_{1j}\eta_{h^{-1}g}\ ,$$

对任意 $g \in \mathsf{H}$，以及 $i,j = 1,\dots,n$。回忆一下，对于任意 $h,g \in \mathsf{H}$和 $i,j,r,s \in \{1\dots,n\}$，有 $E_{rs}\eta_h m_{ij}^{g} = \delta_{si}\sigma(h,g)m_{rj}^{hg}$和 $m_{ij}^{g}E_{rs}\eta_h = \delta_{jr}\sigma(g,h)m_{is}^{gh}$，其中 δ_{ij}是克罗内克δ；并且对于某个H和 $i,j \in \{1,\dots,n\}$，$m_{ij}^{g} \neq 0$ 蕴含：对任意H和 $r,s \in \{1,\dots,n\}$，$m_{rs}^{h} \neq 0$。

设 $m_{ij}^{g} \neq 0$对于某个 $g \in H$和 $i,j \in \{1,\dots,n\}$，且 $\mathbb{F}$是一个代数闭域，满足 $char(\mathbb{F}) = 0$。取 $N = span_{\mathbb{F}}\{m_{ij}^{g}:\ g \in H\ i,j = 1,\dots,n\}$。断言：若 $deg(m_0) \in \mathcal{Z}(G)$，则 N 是 M 的一个不可约 G-分次 $\mathfrak{B}$-子双模。事实上，考虑线性变换$\psi:\ \mathfrak{B} \longrightarrow N$，它延拓了映射 $E_{ij}\eta_g \mapsto m_{ij}^{g}$。由 *(5)* 可知，$\psi$ 是$\mathfrak{B}$-双模同态。注意，ψ 是满射，且为次数 $deg(m_0)$ 的齐次映射。由于 $\mathfrak{B}$ 是一个不可约分次 $\mathfrak{B}$-双模（见定理 *2.16*），可知 ψ 是单射（$ker(\psi)$ 是 $\mathfrak{B}$ 的分次子双模）。因此，ψ 是 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模的齐次同构。于是，N 是一个不可约分次 $\mathfrak{B}$-双模。特别地，若 M 是不可约分次的，则 $M = N$。

在上述注记中，需要指出，并非总是有 $m_{ij}^{g} \neq 0$ for some $g \in \mathsf{H}$ and$i,j \in \{1,\dots,n\}$。在下一个结果中，我们将介绍不可约 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模的其他情形（可能是 $m_{ij}^{g} = 0$ for some $g \in \mathsf{H}$ and i，$j \in \{1,\dots,n\}$），这些双模不同构于作为分次 $\mathfrak{B}$-双模的 $\mathfrak{B}$。

命题 4.2。 设G 为有限阿贝尔群， $\mathbb{F}$ 为代数闭域，且特征$(\mathbb{F}) = 0$， $\mathfrak{B} = \mathbb{F}^{\sigma}[\mathsf{G}]$ 为扭群代数。设M 为不可约含幺G-分次 $\mathfrak{B}$-双模。则存在非零齐次元素 $w_0 \in$M 以及特征 $\chi : \mathsf{G} \to \mathbb{F}^*$ ，满足M $= \mathfrak{B}w_0$ 且$\eta_g w_0 = \chi(g)^{-1} w_0 \eta_g$ ，对任意 $g \in$G均成立。

证明。 取一个非零齐次元素 $m_0 \in \mathsf{M}$，因此我们有 $\mathsf{M} = \mathfrak{B}m_0\mathfrak{B}$。令$\chi_1, \ldots, \chi_s$为 G 的所有互不相同的不可约特征标（见推论 2.20）。由于 G 和 $\mathsf{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_s\}$是同构群（见命题 2.23），因此我们有 $s = |\mathsf{G}|$。对每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，定义

$$w_{\chi_i} = \sum_{h \in \mathsf{G}} \sigma(h, h^{-1})^{-1} \chi_i(h) \eta_h m_0 \eta_{h^{-1}} \ .$$

我们来证明，对于所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$， $\mathfrak{B}w_{\chi_i} = w_{\chi_i}\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}m_0\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{B}w_{\chi_i}$。 注意， $\mathfrak{B}w_{\chi_i}\mathfrak{B}$是 M 的一个分次子双模，因为 m_0 是一个齐次元素，且 G 是阿贝尔群。

任取 $\eta_t \in \mathfrak{B}$，以及 $i = 1, \ldots, s$。我们有

$$\begin{aligned}
\eta_t w_{\chi_i} &= \eta_t \left(\sum_{h \in \mathsf{G}} \sigma(h, h^{-1})^{-1} \chi_i(h) \eta_h m_0 \eta_{h^{-1}} \right) = \sum_{h \in \mathsf{G}} \sigma(t, h) \sigma(h, h^{-1})^{-1} \chi_i(h) \eta_{th} m_0 \eta_{h^{-1}} \\
&= \sum_{h \in \mathsf{G}} \sigma(t, h) \sigma(h, h^{-1})^{-1} \sigma((th)^{-1}, t)^{-1} \chi_i(h) \eta_{th} m_0 \eta_{(th)^{-1}} \eta_t \\
&= \left(\sum_{h \in \mathsf{G}} \sigma((th)^{-1}, th)^{-1} \chi_i(h) \eta_{th} m_0 \eta_{(th)^{-1}} \right) \eta_t = \chi_i(t)^{-1} w_{\chi_i} \eta_t \ ,
\end{aligned}$$

因为对于任意 $h, t \in$ G，都有 $\sigma(t, h)\sigma((th)^{-1}, th) = \sigma(h, h^{-1})\sigma((th)^{-1}, t)$（只需在定义 2.12 中令 $x = (th)^{-1}$,$y = t$ 和 $z = h$，并由注 2.13 得出 $\sigma(h, h^{-1}) = \sigma(h^{-1}, h)$），且对于任意 $h, t \in$ G，都有 $\chi_i(ht) = \chi_i(h)\chi_i(t)$（见定理 2.22）。由此可得，对于所有 $i = 1, \ldots, s$，都有 $\mathfrak{B}w_{\chi_i} = w_{\chi_i}\mathfrak{B}$。

现在，写作 $\mathsf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$。由于矩阵

$$[\chi] \coloneqq \begin{bmatrix} \chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \cdots & \chi_1(g_s) \\ \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \cdots & \chi_2(g_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_s(g_1) & \chi_s(g_2) & \cdots & \chi_s(g_s) \end{bmatrix}$$

可逆，其逆矩阵为

$$[\chi]^{-1} = |\mathsf{G}|^{-1} \begin{bmatrix} \chi_1(g_1^{-1}) & \chi_2(g_1^{-1}) & \cdots & \chi_s(g_1^{-1}) \\ \chi_1(g_2^{-1}) & \chi_2(g_2^{-1}) & \cdots & \chi_s(g_2^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_1(g_s^{-1}) & \chi_2(g_s^{-1}) & \cdots & \chi_s(g_s^{-1}) \end{bmatrix}$$

（这是命题 2.21 的推论），我们有，对于任意 $h \in \mathsf{G}$， $\eta_h m_0 \eta_{h^{-1}} \in \sum_{i=1}^{s} \mathbb{F}w_{\chi_i}$，因为

$$\begin{bmatrix} w_{\chi_1} \\ w_{\chi_2} \\ \vdots \\ w_{\chi_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \cdots & \chi_1(g_s) \\ \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \cdots & \chi_2(g_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_s(g_1) & \chi_s(g_2) & \cdots & \chi_s(g_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma(g_1, g_1^{-1})^{-1} \eta_{g_1} m_0 \eta_{g_1^{-1}} \\ \sigma(g_2, g_2^{-1})^{-1} \eta_{g_2} m_0 \eta_{g_2^{-1}} \\ \vdots \\ \sigma(g_s, g_s^{-1})^{-1} \eta_{g_s} m_0 \eta_{g_s^{-1}} \end{bmatrix} .$$

因此，我们可以得出结论：对于任意 g， $h \in \mathsf{G}$， $\eta_g m_0 \eta_h \in \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{B}w_{\chi_i}$，所以 $\mathfrak{B}m_0\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{B}w_{\chi_i}$。因此，我们得出结论， $\mathsf{M} = \mathfrak{B}w_{\chi}$ 对应于 G 的某个不可约特征标 χ，因为每个 $\mathfrak{B}w_{\chi_i}$ 都是 M 的分次子双模，而 M 是不可约分次的。□

下面我们将证明：给定一个有限维单 G-分次代数 $\mathfrak{A}$，任何同时满足两个弱链条件的含幺 G-分次 $\mathfrak{A}$-双模 M，都可以写成如下形式的不可约 G-分次 $\mathfrak{A}$-子双模的有限直和 $\mathfrak{A}w$，其中 $w \in \mathsf{M}$ 且 $w\mathfrak{A} = \mathfrak{A}w$。

定理 4.3. 设G 为一个群，H 为G的有限阿贝尔子群，$\mathbb{F}$ 为一个代数闭域，且特征($\mathbb{F}$) = 0。考虑M 这一 *G*-分次含幺 $\mathfrak{B}$-双模，其中 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{H}])$ 具有规范的初等 *G*-分次，且 $\sigma \in \mathsf{Z}^2(\mathsf{H}\ \mathbb{F}^*)$。若M 不可约分次，则存在非零齐次元素 $w \in \mathsf{M}$，满足M = $\mathfrak{B}w$，使得 $\mathfrak{B}w = w\mathfrak{B}$。

证明。 如果 $n = 1$，则结论由命题 4.2 得出。

假设 $n > 1$。令 $\chi_1, \ldots, \chi_s$ 为 H 的所有互不相同的不可约特征标，其中 H $\cong$H $=\{\chi_1, \ldots, \chi_s\}$。固定一个非零齐次元素 $m_0 \in$M，并令 $i = 1, \ldots, s$。根据本章第三段（等式 (4) 上方的文字）中的讨论，不失一般性，我们可以假设 $m_0 = \eta_e E_{11}\, \hat{m} E_{11}\eta_e$，其中 $\hat{m} \in$M，因此对于任意 $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $g, h \in$ H，都有 $E_{p1}\eta_g w_0 \eta_h E_{1q} \neq 0$。现在，受命题 4.2 证明中 w_{χ_i} 定义的启发，定义

$$\hat{w}_{\chi_i} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{h \in \mathsf{H}} \sigma(h, h^{-1})^{-1} \chi_i(h) E_{j1} \eta_h m_0 \eta_{h^{-1}} E_{1j}\ .$$

与命题 4.2 的证明一样，对于任意 $E_{pq}\eta_t \in \mathfrak{B}$，不难看出

$$\begin{aligned} E_{pq}\eta_t \hat{w}_{\chi_i} &= \sum_{h \in \mathsf{H}} \sigma(t,h)\sigma(h,h^{-1})^{-1} \chi_i(h) E_{p1}\eta_{th} m_0 \eta_{h^{-1}} E_{1q} \\ &= \sum_{h \in \mathsf{H}} \sigma(t,h)\sigma(h,h^{-1})^{-1}\sigma((th)^{-1},t)^{-1} \chi_i(h) E_{p1}\eta_{th} m_0 \left(\eta_{(th)^{-1}} E_{1p}\right) E_{pq}\eta_t \\ &= \chi_i(t)^{-1} \left(\sum_{h \in \mathsf{H}} \sigma((th)^{-1}, th)^{-1} \chi_i(th) E_{p1}\eta_{th} m_0 \eta_{(th)^{-1}} E_{1p} \right) E_{pq}\eta_t = \chi_i(t)^{-1} \hat{w}_{\chi_i} E_{pq}\eta_t\ , \end{aligned}$$

因此，我们已经证明，对于任意 $t \in$H、 p， q， $i \in \{1, \ldots, s\}$，都有 $E_{pq}\eta_t\, \hat{w}_{\chi_i} = \chi_i(t)^{-1}\, \hat{w}_{\chi_i} E_{pq}\eta_t$，从而对于所有 $i = 1, \ldots, s$，都有 $\mathfrak{B}\, \hat{w}_{\chi_i} = \hat{w}_{\chi_i}\mathfrak{B}$。

最后，我们来推导 M = $\sum_{i=1}^{s} \mathfrak{B}\, \hat{w}_{\chi_i}$。 由于是 H $= \{h_1, h_2, \ldots, h_s\}$，我们有

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_{\chi_1} \\ \hat{w}_{\chi_2} \\ \vdots \\ \hat{w}_{\chi_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1(h_1) & \chi_1(h_2) & \cdots & \chi_1(h_s) \\ \chi_2(h_1) & \chi_2(h_2) & \cdots & \chi_2(h_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_s(h_1) & \chi_s(h_2) & \cdots & \chi_s(h_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma(h_1, h_1^{-1})^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{s} \left(E_{j1}\eta_{h_1} m_0 \eta_{h_1^{-1}} E_{1j} \right) \\ \sigma(h_2, h_2^{-1})^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{s} \left(E_{l1}\eta_{h_2} m_0 \eta_{h_2^{-1}} E_{1l} \right) \\ \vdots \\ \sigma(h_s, h_s^{-1})^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{s} \left(E_{k1}\eta_{h_s} m_0 \eta_{h_s^{-1}} E_{1k} \right) \end{bmatrix}.$$

由于对于任意 p， $q \in \{1, \ldots, n\}$ 以及 g， $h \in$H，都有 $E_{p1}\eta_g w_0 \eta_h E_{1q} \neq 0$，注意到对于所有 $i = 1, \ldots, s$，都有 $\sum_{j=1}^{s} E_{j1}\eta_{h_i} m_0 \eta_{h_i^{-1}} E_{1j} \neq 0$。由于 M 是不可约分次的，因此对所有 $i = 1, \ldots, s$，都有 M = $\mathfrak{B}\left(\sum_{j=1}^{s} E_{j1}\eta_{h_i} m_0 \eta_{h_i^{-1}} E_{1j}\right)\mathfrak{B}$。与命题 4.2 证明的最后一部分类似，并利用上述矩阵等式，容易验证 M = $\sum_{i=1}^{s} \mathfrak{B}\, \hat{w}_{\chi_i}$，因此，由于 M 是不可约 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模，我们得出，对于某个 H 的不可约特征标 χ，M = $\mathfrak{B}\, \hat{w}_{\chi}$。 □

观察定理 4.3 的证明，并考虑子集 $\beta = \{E_{ij}\eta_h :\ i,\ j = 1, \ldots\ldots,\ n,\ h \in$H}of $\mathfrak{B}$，我们有 $wb = \gamma_b bw \neq 0$ for any $b \in \beta$，其中 $\gamma_b \in \mathbb{F}^*$。这意味着， $\mathfrak{B}$中的任意元素与 M 中的任意元素交换时只相差一个标量。

下面，我们从证明中重新表述前一定理。

推论 4.4. 假设定理 *4.3* 的条件均成立。若M 是不可约分次的，则存在一个非零齐次元素 $m_0 \in$M 和一个特征 χ : H $\to \mathbb{F}^*$，使得由下式定义的元素

$$\hat{w}_\chi = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h \in \mathsf{H}} \chi(h) \sigma(h, h^{-1})^{-1} \eta_h E_{i1} m_0 E_{1i} \eta_{h^{-1}} \right)$$

满足M = $\mathfrak{B}\, \hat{w}_\chi$，且 $E_{pq}\eta_t\, \hat{w}_\chi = \chi(t)^{-1}\, \hat{w}_\chi E_{pq}\eta_t$，对所有 p、 $q \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $t \in$H均成立。

证明。 这可直接由定理 4.3 和命题 4.2 的证明得出。 □

注意，推论 4.4 中的元素 $\hat{}w_\chi$ 是齐次的，并满足 $\mathfrak{B}\hat{}w_\chi = \hat{}w_\chi\mathfrak{B}$。回想一下， χ 是 H 的不可约特征标。

推论4.5。 设G 是阿贝尔群， $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，且char$(\mathbb{F}) = 0$， $\mathfrak{A}$ 是一个有限维代数，定义在 $\mathbb{F}$ 上并带有G-分次。若 $\mathfrak{A}$ 是分次单的，则任意不可约G-分次$\mathfrak{A}$-双模M 都等于一个G-分次 $\mathfrak{A}$-双模 $\mathfrak{A}w$，其中 $w \in$M 是满足 $\mathfrak{A}w = w\mathfrak{A}$的齐次元素。

证明。 设 M 是一个不可约 G-分次 $\mathfrak{A}$-双模。由定理 2.16，存在 G 的有限子群 H、 $\sigma \in Z^2$(H $\mathbb{F}^*$)，以及一个 G-分次代数同构 ψ ，其定义在 $\mathfrak{A}$ 中，取值于 $M_n(\mathbb{F}^\sigma[H])$，其中$M_n(\mathbb{F}^\sigma[H])$带有典范初等 G-分次。令 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[H])$，并考虑由 M 中的 $\mathfrak{B}$ 定义的（双边）作用： $b\cdot m \mapsto \psi^{-1}(b)m$ 和 $m\cdot b \mapsto m\psi^{-1}(b)$。由此，M 也是一个 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模。由于 $\mathfrak{B}$ 含幺且 $\mathfrak{A} = \psi^{-1}(\mathfrak{B})$，可知 M 是一个不可约 G-分次含幺 $\mathfrak{B}$-双模。由定理 4.3，存在齐次元素 $w \in$M，满足 M $= \mathfrak{B}w$，且 $\mathfrak{B}w = w\mathfrak{B}$。因此，由于 $\mathfrak{B}w = \psi^{-1}(\mathfrak{B})w = \mathfrak{A}w$ 且 $w\mathfrak{B} = w\psi^{-1}(\mathfrak{B}) = w\mathfrak{A}$，结论得证。□

定理 4.6。 设G为一个群，H 为G的有限阿贝尔子群， $\mathbb{F}$ 为一个代数闭域，且char$(\mathbb{F}) = 0$, $\sigma \in Z^2$(H $\mathbb{F}^*$)，以及 $\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[H])$ 具有典范的初等G-分次。设M 是G-分次含幺 $\mathfrak{B}$-双模。若M 是有限生成的（作为双模），则M 可写成形如 $\mathfrak{B}w$ 的不可约分次子双模的有限直和，其中 $w \in$M 是满足 $w\mathfrak{B} = \mathfrak{B}w$ 的齐次元素。

证明。 由推论 3.12 和引理 3.9，我们可以得到一个有限序列

$$\{0\} = \mathsf{M}_0 \subsetneq \mathsf{M}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{M}_{p-1} \subsetneq \mathsf{M}_p = \mathsf{M}\ , \tag{6}$$

其中，M_i's 是 M 的 G-分次 $\mathfrak{B}$-子双模，使得 $\mathsf{M}_{i+1}/\mathsf{M}_i$ 是一个不可约 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模，其中 $i = 0$， 1、.. . 、$p-1$。

对 p 使用归纳法，我们证明存在齐次元素 $w_1, \dots, w_p \in$M，使得 M $= \bigoplus_{i=1}^p \mathfrak{B}w_i$，且对所有 $i = 1, \dots, p$，都有 $\mathfrak{B}w_i = w_i\mathfrak{B} \neq 0$。

首先，假设 $p = 1$。因此，M $=$M$_1$，且 M/M$_0 \cong_{\mathsf{G}}$ M 是 G-不可约的。由定理 4.3 可知，存在非零齐次元素 $w_1 \in$ M$_1$，使得 M$_1 = \mathfrak{B}w_1$，且 $w_1\mathfrak{B} = \mathfrak{B}w_1 \neq 0$。

假设结论对 $p = d > 1$成立，即存在非零齐次元素$w_1 \in \mathsf{M}_1 \setminus \mathsf{M}_0, w_2 \in \mathsf{M}_2 \setminus \mathsf{M}_1, \dots, w_d \in \mathsf{M}_d \setminus \mathsf{M}_{d-1}$，满足

$$\mathsf{M}_d = \mathfrak{B}w_1 \oplus \mathfrak{B}w_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}w_d\ ,$$

其中每个 $w_i\mathfrak{B} = \mathfrak{B}w_i \neq 0$ 都是不可约分次子双模，对所有 $i = 1, \dots, d$ 均成立。

现在，对于 $p = d + 1$，注意到对于任意$w \in \mathsf{M}_{d+1} \setminus \mathsf{M}_d$， $w \neq 0$，$\mathsf{M}_{d+1} = \mathsf{M}_d + \mathfrak{B}w\mathfrak{B}$ （由 M_d 在 M_{d+1} 中的极大性）。由于 $\mathsf{M}_{d+1}/\mathsf{M}_d$ 是不可约分次的，根据推论 4.4，存在一个非零齐次元素 $w_0 \in \mathsf{M}_{d+1} \setminus \mathsf{M}_d$ 和一个特征 χ: H $\to \mathbb{F}^*$，使得由以下方式定义的 $\hat{}w_\chi$

$$\hat{w}_\chi = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h\in \mathsf{H}} \chi(h)\sigma(h, h^{-1})^{-1}\eta_h E_{i1} w_0 E_{1i}\eta_{h^{-1}} \right) \neq 0$$

满足 $\mathsf{M}_{d+1}/\mathsf{M}_d = \mathfrak{B}(\hat{}w_\chi + \mathsf{M}_d)$，且 $E_{ij}\eta_g(\hat{}w_\chi + \mathsf{M}_d) = \chi(g)^{-1}(\hat{}w_\chi + \mathsf{M}_d)E_{ij}\eta_g$，对所有 i、$j \in \{1, \dots, n\}$ 和 $g \in$H 均成立。考虑 $w_{d+1} \coloneqq \hat{}w_\chi$。由于 $\mathfrak{B}(w_{d+1} + \mathsf{M}_d) \neq 0 + \mathsf{M}_d$，存在 $E_{kl}\eta_g \in \mathfrak{B}$ 使得 $E_{kl}\eta_g w_{d+1} = \chi(g)^{-1}w_{d+1}E_{kl}\eta_g \notin \mathsf{M}_d$。由此，利用等式$E_{kl}\eta_g = \sigma(gh^{-1}, h)^{-1}\sigma(g, e)^{-1}E_{ki}\eta_{gh^{-1}}E_{ij}\eta_h E_{jl}\eta_e$，对任意 i、$j \in \{1, \dots, n\}$ 和 $h \in$H，显然可得 $E_{ij}\eta_h w_{d+1} = \chi(h)^{-1}w_{d+1}E_{ij}\eta_h \notin \mathsf{M}_d$，对任意 i、$j \in \{1, \dots, n\}$ 和 $h \in$H 均成立。因此，我们有 $\mathfrak{B}w_{d+1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}w_{d+1} = w_{d+1}\mathfrak{B}$ 且 $\mathfrak{B}w_{d+1} \cap \mathsf{M}_d = \{0\}$，从而 $\mathsf{M}_{d+1} = \mathsf{M}_d \oplus \mathfrak{B}w_{d+1}$。根据同构定理（见定理 3.1），可得

$$\frac{\mathsf{M}_{d+1}}{\mathsf{M}_d} = \frac{\mathsf{M}_d \oplus \mathfrak{B}w_{d+1}}{\mathsf{M}_d} \cong_{\mathsf{G}} \frac{\mathfrak{B}w_{d+1}}{\mathsf{M}_d \cap \mathfrak{B}w_{d+1}} = \frac{\mathfrak{B}w_{d+1}}{\{0\}} \cong_{\mathsf{G}} \mathfrak{B}w_{d+1}\ ,$$

作为 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模。因此，我们证明了 $\mathfrak{B}w_{d+1}$ 是 M 的一个不可约 G-分次 $\mathfrak{B}$-子双模，满足 $w_{d+1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}w_{d+1}$，于是，

$$\mathsf{M}_{d+1} = \mathsf{M}_d \oplus \mathfrak{B}w_{d+1} = \mathfrak{B}w_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}w_d \oplus \mathfrak{B}w_{d+1},$$

其中，每个 $\mathfrak{B}w_i$ 都是 M 的一个不可约分次子双模，且满足对于所有 $i = 1$，……，$d+1$，$\mathfrak{B}w_i = w_i\mathfrak{B} \neq \{0\}$。此外，通过归纳法，结论得证。□

在定理 4.6 的相同条件下，取 w_1，……，$w_l \in \mathsf{M}$，使得 $\mathsf{M} = \bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{B}w_k$，其中对于所有 $k = 1$，……，l，$\mathfrak{B}w_k = w_k\mathfrak{B}$ 均不可约分次。由推论 4.4（或由定理 4.3 的证明和命题 4.2），对于所有 $k = 1$，……，l，存在一个映射 $\chi_k \colon \mathsf{H} \to \mathbb{F}^*$（$\chi_k$ 是与 w_k 相关联的不可约特征标），满足

$$E_{ij}\eta_g w_k = \chi_k(g)^{-1} w_k E_{ij}\eta_g$$

对于任意 $g \in \mathsf{H}$ 和 $i, j = 1, \ldots, n$。此外，考虑由 $\varphi(k, g) = \chi_k(g)^{-1}$ 定义的映射 $\varphi \colon \mathbb{N}_l \times \mathsf{H} \to \mathbb{F}^*$，其中 $\mathbb{N}_l = \{1, \ldots, l\}$，我们有 $E_{ij}\eta_g w_k = \varphi(k, g) w_k E_{ij}\eta_g$，对任意 $k = 1, \ldots, l$、$g \in \mathsf{H}$ 和 $i, j = 1, \ldots, n$ 均成立。

最后，在本节中我们给出一个综合前面所有结果的结论。

定理 4.7。设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，G 是阿贝尔群，$\mathfrak{A}$ 是带有 G-分次的 $\mathbb{F}$ 上的有限维代数。假设 特征$(\mathbb{F}) = 0$，且 $\mathfrak{A}$ 是 G-单的。若 M 是有限生成的 G-分次 $\mathfrak{A}$-双模，则存在非零齐次元素 $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathsf{M}$ 使得

$$\mathsf{M} = \mathfrak{A}w_1 \oplus \mathfrak{A}w_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}w_n \ ,$$

其中 $w_i\mathfrak{A} = \mathfrak{A}w_i \neq 0$ 对所有 $i = 1$、2、…、n 均成立，且 $\mathfrak{A}w_i$ 是 G-不可约的。

证明。由定理 2.16，存在一个 G-分次同构 ψ，将 $\mathfrak{A}$ 映到 $M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{H}])$ 中，其中 H 是 G 的某个有限子群，且 $\sigma \in \mathrm{Z}^2(\mathsf{H}, \mathbb{F}^*)$，而 $M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{H}])$ 带有典范初等 G-分次。令$\mathfrak{B} = M_n(\mathbb{F}^\sigma[\mathsf{H}])$。我们有，M 通过左作用 $b \cdot m = \psi^{-1}(b) \cdot m$ 和右作用 $m \cdot b = m \cdot \psi^{-1}(b)$ 成为一个 G-分次 $\mathfrak{A}$-双模，其中 $b \in \mathfrak{B}$ 和 $m \in \mathsf{M}$ 任意。由于 $\mathfrak{B}$ 是含幺的，因此 M 也是含幺的，故满足定理 4.6 的相同条件。因此结论成立。□

注意，定理 4.7 简化了有限生成 G-分次 $\mathfrak{A}$-双模 M 中元素的表示方式。先验地，若 $x_1, \ldots, x_m \in \mathsf{M}$ 是 M 的一个生成集，那么对任意 $y \in \mathsf{M}$，存在 $a_{ij}, b_{ij} \in \mathfrak{A}$，满足 $i = 1, \ldots, m$ 且 $j = 1, \ldots, k_i$，使得 $y = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} x_i b_{ij} \right)$。利用前一定理，我们只需写成 $y = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$，其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$。因此，当需要了解给定（分次）双模的结构 / 性质时，定理 4.7 是一项重要工具。

4.1. 半单分次代数上的分次双模。设 $\mathfrak{A}$ 是含幺代数。若 $\epsilon \in \mathfrak{A}$ 是中心幂等元，即 $\epsilon \in \mathcal{Z}(\mathfrak{A})$且$\epsilon^2 = \epsilon$，则 $1 - \epsilon \in \mathfrak{A}$ 也是 $\mathfrak{A}$ 的中心幂等元，使得 ϵ，并且当 $\epsilon \neq 0$时，$(1-\epsilon)$彼此正交，即 $\epsilon(1-\epsilon) = (1-\epsilon)\epsilon = 0$。因此，给定 $x \in \mathfrak{A}$，注意到 $x = x\epsilon + x(1-\epsilon)$，于是不难看出$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\epsilon \oplus \mathfrak{A}(1-\epsilon)$。这个分解称为 $\mathfrak{A}$ 关于 ϵ的**皮尔斯分解**。自然地，我们可以将此定义扩展到 $\mathfrak{A}$的 n 个幂等元，如下所示。设 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathfrak{A}$ 是互不相同的中心正交幂等元。不失一般性，设 $1 = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$。给定 $x \in \mathfrak{A}$，有 $x = x1 = \sum_{i=1}^{n} x\epsilon_i$，因此，$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}\epsilon_n$ 是 $\mathfrak{A}$ 关于 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$的皮尔斯分解。

我们记得，若存在单分次左（分别为右）理想 $\mathfrak{A}_r$'s，$r \in I$（不一定有限），使得 $\mathfrak{A} = \bigoplus_{r \in I} \mathfrak{A}_r$，则称分次代数 $\mathfrak{A}$ 为左（分别为右）半单分次。类似地，我们以双边理想的意义定义双边半单分次代数。更准确地说，若存在单分次双边理想 $\mathfrak{A}_r$'s，$r \in I$（不一定有限），使得 $\mathfrak{A} = \bigoplus_{r \in I} \mathfrak{A}_r$，则称分次代数 $\mathfrak{A}$ 为**弱半单分次**。显然，当 $\mathfrak{A}$ 含幺时，这个和是有限的。事实上，存在 $\mathsf{i}_{r_1} \in \mathfrak{A}_{r_1}$，…，$\mathsf{i}_{r_n} \in \mathfrak{A}_{r_n}$（不全为零），使得$1_{\mathfrak{A}} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{i}_{r_j} \in \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_{r_j}$。令 $I_0 = \{r_1, \ldots, r_n\}$，并任取 $y \in \bigcup_{k \in I \setminus I_0} \mathfrak{A}_k$。由于 $1_{\mathfrak{A}} x = x 1_{\mathfrak{A}} = x$

对任意 $x \in \mathfrak{A}$，我们有 $1_{\mathfrak{A}} y = y$，但这意味着 $y = y \cdot 1_{\mathfrak{A}} = y\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}_{r_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} (y\mathrm{i}_{r_j})$ 属于 $\left(\bigoplus_{l\in I_0} \mathfrak{A}_l\right) \bigcap \left(\bigoplus_{k\in I\setminus I_0} \mathfrak{A}_k\right) = \{0\}$。因此，当 $\mathfrak{A}$ 含幺时，$\mathfrak{A} = \bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{A}_r$。不难证明，代数 $\mathfrak{A}_r$'s 都含幺。

定理 4.8. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是两个 G-分次含幺代数，M 是一个含幺 G-分次 $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{A}})$-双模。若 $\mathfrak{A}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是弱半单分次的，则存在中心的正交幂等元 p, q，p 和 q 元素 $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_p \in \mathfrak{A}$ 以及 $\hat{\mathrm{i}}_1, \ldots, \hat{\mathrm{i}}_q \in \widetilde{\mathfrak{A}}$，使得 $M = \bigoplus_{r,s=1} \mathrm{i}_r M \hat{\mathrm{i}}_s$，$\mathfrak{A} = \bigoplus_{r=1} \mathfrak{A}_r$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{s=1} \widetilde{\mathfrak{A}}_s$，其中 $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}\mathrm{i}_r$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}_s = \widetilde{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{i}}_s$ 是 G-单双边理想。此外，每个 $\mathrm{i}_r M \mathrm{i}_s$ 要么等于零，要么是一个忠实 G-分次 $(\mathfrak{A}_r, \widetilde{\mathfrak{A}}_s)$-双模。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是含幺且弱半单分次的，因此存在单分次理想 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p \subset \mathfrak{A}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \widetilde{\mathfrak{A}}_q \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$，使得 $\mathfrak{A} = \bigoplus_{r=1}^{p} \mathfrak{A}_r$，$\widetilde{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{s=1}^{q} \widetilde{\mathfrak{A}}_s$，并且我们可以取中心正交幂等元 $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_p \in \mathfrak{A}$ 和 $\hat{\mathrm{i}}_1, \ldots, \hat{\mathrm{i}}_q \in \widetilde{\mathfrak{A}}$，使得 $\mathrm{i} = \sum_{r=1}^{p} \mathrm{i}_r$ 且 $\hat{\mathrm{i}} = \sum_{s=1}^{q} \hat{\mathrm{i}}_s$，其中 $\mathrm{i}_r \in \mathfrak{A}_r$ 且 $\hat{\mathrm{i}}_s \in \widetilde{\mathfrak{A}}_s$。注意，$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_r \mathrm{i}_r$ 且 $\widetilde{\mathfrak{A}}_s = \widetilde{\mathfrak{A}}_s \hat{\mathrm{i}}_s$。

由于 M 是含幺的，因此 $\mathrm{M} = \mathrm{i}\mathrm{M}\hat{\mathrm{i}}$。令 $\widetilde{\mathrm{M}} = \sum_{r,s=1}^{p,q} \mathrm{i}_r \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_s$。由于 i_r's 和 $\hat{\mathrm{i}}_s$'s 是正交元素，因此可得 $\widetilde{\mathrm{M}} = \bigoplus_{r,s=1}^{p,q} \mathrm{i}_r \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_s$。显然，$\widetilde{\mathrm{M}} \subseteq \mathrm{M}$。另一方面，对于任意 $x \in \mathrm{M}$，我们有 $x = \mathrm{i}x\hat{\mathrm{i}} = \left(\sum_{r=1}^{p} \mathrm{i}_r\right) x \left(\sum_{s=1}^{q} \hat{\mathrm{i}}_s\right) = \sum_{r,s=1}^{p,q} \mathrm{i}_r x \hat{\mathrm{i}}_s \in \widetilde{\mathrm{M}}$。因此，$\mathrm{M} \subseteq \widetilde{\mathrm{M}}$，故 $\mathrm{M} = \widetilde{\mathrm{M}}$。

现在显然，对于所有 $r = 1, \ldots, p$ 和 $s = 1, \ldots, q$，$\mathrm{i}_r \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_s$ 都是一个 G-分次 $(\mathfrak{A}_r, \widetilde{\mathfrak{A}}_s)$-双模，因为 $\mathfrak{A}_r$'s 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}_s$'s 分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 的分次理想。又由于 $\mathfrak{A}_r$'s 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}_s$'s 的简单性可知，当 $\mathrm{i}_r \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_s$ 非零时，它是一个忠实双模。□

根据定理 4.8，当存在 $r_0 \in \{1, \ldots, p\}$ 和 $s_0 \in \{1, \ldots, q\}$ 使得 $\mathfrak{A}_{r_0}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{A}}_{s_0}$ 有限维且（作为分次代数）分次同构时，可得到一个特例。因此，如果基域 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，且 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，G 是阿贝尔群，并且 $\mathrm{i}_{r_0} \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_{s_0}$ 有限生成，那么存在齐次元素 $d_1, \ldots, d_{k_{(r_0,s_0)}} \in \mathrm{M}$，使得 $\mathrm{i}_{r_0} \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_{s_0} = \bigoplus_{j=1}^{k_{(r_0,s_0)}} \mathfrak{A}_{r_0} d_j$，其中 $\mathfrak{A}_{r_0} d_j$ 是一个 G-单 $\mathfrak{A}_{r_0}$-双模，且对所有 $j = 1, \ldots, k_{(r_0,s_0)}$ 都有 $\mathfrak{A}_{r_0} d_j = d_j \mathfrak{A}_{s_0}$。事实上，假设 $\psi : \mathfrak{A}_{r_0} \to \mathfrak{A}_{s_0}$ 是分次代数之间的分次同构，并令 $\mathrm{V}_{(r_0,s_0)} = \mathrm{i}_{r_0} \mathrm{M} \hat{\mathrm{i}}_{s_0}$。考虑 $\mathrm{V}_{(r_0,s_0)}$ 上的右作用，对任意 $x \in \mathrm{V}_{(r_0,s_0)}$ 和 $a \in \mathfrak{A}_{r_0}$，该作用由 $x \cdot a = x\psi(a)$ 给出。因此，我们可以将 $\mathrm{V}_{(r_0,s_0)}$ 视为一个 $\mathfrak{A}_{r_0}$-双模。结论由定理 4.7 得出。

推论 4.9。设G 是一个阿贝尔群，$\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，且$\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$；$\mathfrak{A}$ 是一个带有G分次的有限维含幺 $\mathbb{F}$-代数，且M 是一个G分次含幺 $\mathfrak{A}$-双模。若 $\mathfrak{A}$ 是弱半单分次的，且M 是有限生成的，则存在 M 的如下形式的分解$\bigoplus_{i,j=1}^{p} \mathrm{M}_{ij}$ $p \in \mathbb{N}$，其中每个M_{ij} 要么等于零，要么是忠实的G分次 $\mathfrak{A}$-双模；并且每个M_{ii} 都可写成有限个如下形式的不可约G分次 $\mathfrak{A}$-子双模之和 $\mathfrak{A}w$，其中 $w \in$M 是满足 $\mathfrak{A}w = w\mathfrak{A}$ 的某个齐次元素。

证明。 这由定理 4.8 和定理 4.7 立即得出。 □

需要指出的是，前一个推论中给出的 M_{ij} 具有$, \ldots, p$定理 4.7 中 $\mathrm{i}_r \mathrm{M} \mathrm{i}_s$的形式。注意，若对于某个 $s = 1$有 $\mathrm{i}_s \mathrm{M} = \mathrm{M}\mathrm{i}_s$，则对任意 $i \neq s$，$\mathrm{M}_{is} = \{0\}$。此外，我们还有如下结果。

推论 4.10。 在定理 *4.8* 的假设下，设 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ 且M 是 $\mathfrak{A}$的一个（双边）理想。那么M $= \bigoplus_{s=1}^{p} \mathrm{i}_s \mathrm{M} \mathrm{i}_s$ 当且仅当 $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_p \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{M})$。

证明。 由定理 4.8 和推论 4.9，我们有 $\mathrm{M} = \bigoplus_{r,s=1}^{p} \mathrm{M}_{rs}$，其中 $\mathrm{M}_{rs} = \mathrm{i}_s \mathrm{M} \mathrm{i}_r$。假设$\mathrm{i}_s \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{M})$ 对任意 $s = 1, \ldots, p$均成立。因此，我们可以得出结论：对于 $r \neq s$，有 $\mathrm{i}_s \mathrm{M} \mathrm{i}_r = \{0\}$，因为对于所有 $x \in$ M 和 $r \neq s$，$\mathrm{i}_s x \mathrm{i}_r = (\mathrm{i}_s x \mathrm{i}_r)\mathrm{i}_s = 0$。由此，$\mathrm{M} = \bigoplus_{s=1}^{p} \mathrm{i}_s \mathrm{M} \mathrm{i}_s$。因此，我们得到了所需结果。□

5. A Pierce Decomposition of the Jacobson Radical

本节旨在介绍前述关于 $\mathfrak{A}$的雅各布森根结果的一项应用，其中 $\mathfrak{A}$ 是域 $\mathbb{F}$上的 G-分次有限维代数。在此，我们将运用本文的一些主要结果，例如定理 4.6 和 4.8，根据皮尔斯分解和其半单部分 $\mathfrak{B}$ 的概念，描述带有群 G 上某种分次的有限维代数 $\mathfrak{A}$ 的雅各布森根 J。有关雅各布森根的更多细节，请参见 [16, 21]。

在 [34], 中，Sviridova 提出了 Wedderburn-Malcev 定理的一个推广，适用于由（有限阿贝尔）群分次的代数。在适当条件下，她将任意有限维分次代数描述为一个极大半单分次子代数与其雅各布森根的直和，且该根也是分次的。更准确地说，Sviridova 证明了：

引理 5.1 (引理 2, [34])。 设 G 是一个有限阿贝尔群，且 $\mathbb{F}$ 是一个特征为零的代数闭域。任意有限维 G-分次的 $\mathbb{F}$-代数 $\mathfrak{A}$ 均同构于一个 G-分次代数，其形式为

$$\mathfrak{A}' = \big(M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]) \times \cdots \times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathsf{H}_p])\big) \oplus \mathsf{J}\ . \tag{7}$$

这里，$\mathfrak{A}$ 的雅各布森根 $J = J(\mathfrak{A})$ 是一个分次理想，而 $\mathfrak{B} = M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[H_1]) \times \cdots \times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[H_p])$（代数直积）是 $\mathfrak{A}'$ 的极大半单分次子代数，$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。$\mathfrak{B}_l = M_{k_l}(\mathbb{F}^{\sigma_l}[H_l])$ 上的 G-分次是由某个 k_l-元组 $(\theta_{l_1}, \ldots, \theta_{l_{k_l}}) \in G^{k_l}$ 定义的典范初等分次，其中 H_l 是 G 的一个子群，而 $\sigma \in Z^2(H_l, \mathbb{F}^*)$ 是一个 2- 余循环。

由此可见，由于代数 $M_{k_i}(\mathbb{F}^{\sigma_i}[\mathrm{H}_i])$'s 众所周知（见 [5]），因此探讨（分次）理想 J 的某些性质（若可能）及其与代数$M_{k_i}(\mathbb{F}^{\sigma_i}[\mathrm{H}_i])$'s 的联系颇有意义。在下一个结果中，我们将给出有限维分次代数的雅各布森根的描述，这是定理 3.13、推论 3.15、定理 4.8、推论 4.9 和定理 2.16 的推论。

定理 5.2. 设 G 是一个群，$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathsf{J}$ 是一个带有 G-分次的有限维代数，其中$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的极大半单G-分次子代数，而$\mathsf{J} = \mathsf{J}(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 的雅各布森根和分次理想。那么J 可分解为

$$\mathsf{J} = \mathsf{J}_{00} \oplus \mathsf{J}_{10} \oplus \mathsf{J}_{01} \oplus \mathsf{J}_{11}\ ,$$

其中 J_{ij}'是 G-分次 $\mathfrak{B}$-双模，满足：

i) 对于 $r = 0,1$，J_{0r} 是一个 0-左 $\mathfrak{B}$-模，且J_{1r} 是一个左 G-分次忠实 $\mathfrak{B}$-模；ii) 对于 $s = 0,1$，J_{s0} 是一个 0-右 $\mathfrak{B}$-模，且J_{s1} 是一个右 G-分次忠实 $\mathfrak{B}$-模；iii) $\mathsf{J}_{rq}\mathsf{J}_{qs} \subseteq \mathsf{J}_{rs}$ 对于所有 $r, p, q, s \in \{0, 1\}$均成立，且当 $p \neq q$时，$\mathsf{J}_{rp}\mathsf{J}_{qs} = \{0\}$。

此外，若 $\mathfrak{B} = M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]) \times \cdots \times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathsf{H}_p])$，G 是有限阿贝尔群，且 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，并且$\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，则以下结论成立：

iv) $J_{11} = \bigoplus_{s,r=1}^{p} \mathsf{i}_r J_{11} \mathsf{i}_s$，其中每个 $\mathsf{i}_r J_{11} \mathsf{i}_s$ 都是一个 G-分次 $(\mathfrak{B}_r, \mathfrak{B}_s)$-双模，且 $\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i$满足 $\mathfrak{B}_i = M_{k_i}(\mathbb{F}^{\sigma_i}[H_i])$。此外，$\mathsf{i}_r J_{11} \mathsf{i}_s \neq 0$ 意味着 $\mathsf{i}_r J_{11} \mathsf{i}_s$ 是忠实左 $\mathfrak{B}_i$-模和忠实右 $\mathfrak{B}_j$-模；*v)* 对每个 $s = 1, \ldots, p$，都存在非零齐次元素 $d_{s,1}, \ldots, d_{s,r_s} \in \mathsf{i}_s J_{11} \mathsf{i}_s$，使得 G-分次向量空间 $N_s =$的张成空间$_{\mathbb{F}}\{d_{s,1}, \ldots, d_{s,r_s}\}$ 满足 $\mathsf{i}_s J_{11} \mathsf{i}_s = \mathfrak{B}_s N_s$。元素 $d_{s,i}$'满足 $bd_{s,i} = \gamma_{s,i}(b) d_{s,i} b \neq 0$，对任意非零 $b \in \beta_s$以及 $i = 1, \ldots, r_s$均成立，其中$\gamma_{s,i} \in \mathbb{F}$，并且 $\beta_s = \{E_{l_s j_s} \eta_{h_s} \in \mathfrak{B}_s :\ l_s, j_s = 1, \ldots, k_s, h_s \in H_s\}$ 是 $\mathfrak{B}_s = M_{k_s}(\mathbb{F}^{\sigma_s}[H_s])$ 的标准齐次基。此外，对每个 $i = 1, \ldots, r_s$，都有 $\mathfrak{B}_s d_{s,i}$ 是一个 G-单 $\mathfrak{B}_s$-双模。

现在，设 $\mathfrak{A}$ 是满足引理 5.1 相同假设的代数，因此，考虑具有分解 (7) 的 $\mathfrak{A}$。这意味着

$$\mathfrak{A} = \big(M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[\mathsf{H}_1]) \times \cdots \times M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[\mathsf{H}_p])\big) \oplus \mathsf{J}\ ,$$

其中 k_1、.. . 、$k_p \in \mathbb{N}$，H1、.. . 、$H_p \trianglelefteq G$， $\sigma_1 \in Z^2(H_1, \mathbb{F}^*)$ .. . 、$\sigma_p \in Z^2(H_p, \mathbb{F}^*)$，且 $J = J(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 的雅各布森根。此外，若推论 4.10 的条件成立，则有 $J = J_{00} \oplus J_{11}$，其中 $J_{11} = i_1 J i_1 \oplus \cdots \oplus i_p J i_p$。由于每个 i_r（ $M_{k_r}(\mathbb{F}^{\sigma_r}[H_r])$ 的单位元）都与 $\mathfrak{A}$ 交换，因此很容易看出

$$\mathfrak{A} \cong_G (M_{k_1}(\mathbb{F}^{\sigma_1}[H_1]) \oplus i_1 J i_1) \times \cdots \times \left(M_{k_p}(\mathbb{F}^{\sigma_p}[H_p]) \oplus i_p J i_p\right) \times J_{00} \ . \tag{8}$$

因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_p \times J_{00},$，其中 $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}_r \oplus J_r$，且 $\mathfrak{B}_r = M_{k_r}(\mathbb{F}^{\sigma_r}[H_r])$，并且 $J_r = i_r J i_r$。因此，我们可以通过研究每个代数 $\mathfrak{A}_r$ 和每个 $\mathfrak{A}_r$-双模 J_r，推导出 $\mathfrak{A}$ 的一些（或许是若干）性质。由定理 5.2 可知，每个代数 $\mathfrak{A}_r$ 都是含幺的，其中每个 J_r 都可分解为有限直和，其各项均为如下形式的不可约分次子双模： $\mathfrak{A}_r w$；这里 $w \in$ 是 J_r 中满足 $\mathfrak{A}_r w = w\mathfrak{A}_r$ 的非零齐次元素，而 J_{00} 是一个 $\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_p$-双模，作为单侧模，它既是 0-左模也是 0-右模。

5.1. **多项式恒等式理论中的一个应用**。设 G 是一个群， $\mathfrak{A}$ 是一个带有 $(G \times \mathbb{Z}_2)$-分次的有限维 $\mathbb{F}$-代数。 $\mathfrak{A}$ 的 **Grassmann 包络** 记作 $E^G(\mathfrak{A})$，定义如下：

$$E^G(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}_0 \otimes E_0) \oplus (\mathfrak{A}_1 \otimes E_1) \, ,$$

其中 $E = E_0 \oplus E_1$ 是一个无限生成的非含幺格拉斯曼代数。记格拉斯曼代数 E 为由元素 $e_1, e_2, e_3, \ldots$ 生成的 $\mathbb{F}$-代数，满足 $e_i e_j = -e_j e_i$，对所有 $i, j \in \mathbb{N}$，其中 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$。自然地，E 是 G-分次的，其中 $E_0 =$ 由 $_{\mathbb{F}}\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n} \colon \ n$ 为偶数$\}$ 张成，$E_1 =$由 $_{\mathbb{F}}\{e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_m} \colon \ m$ 为奇数$\}$ 张成。注意，$E^G(\mathfrak{A})$ 是一个 $(\mathfrak{A}_0 \otimes E_0)$-双模，并且

$$E^G(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{g \in G} \left((\mathfrak{A}_{(g,0)} \otimes_{\mathbb{F}} E_0) + (\mathfrak{A}_{(g,1)} \otimes_{\mathbb{F}} E_1)\right)$$

在 $E^G(\mathfrak{A})$ 上定义了一个 G-分次。此外，由于它是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $(G \times \mathbb{Z}_2)$-分次子代数，容易看出 $E^G(\mathfrak{B})$ 是 $E^G(\mathfrak{A})$ 的一个 $(G \times \mathbb{Z}_2)$-分次子代数。

接下来的定理由 I. Sviridova 提出，它对特征零下分次结合代数的分次簇中的著名问题**Specht 问- 题** 给出了肯定的答案。回顾一下，Specht 问题询问：对于任意代数 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}$ 的任意一组多项式恒等式是否都是 $\mathfrak{A}$ 的有限多个恒等式的推论。关于 Specht 问题的更多细节及概述，参见 [6]。

注意， $\mathbb{F}\langle X^G\rangle$ 的 GT-理想是 $\mathbb{F}\langle X^G\rangle$ 的分次（双边）理想，并且在 $\mathbb{F}\langle X^G\rangle$的所有分次自同态作用下保持不变。众所周知，域 $\mathbb{F}$ 上的 G-分次 PI代数的所有 G-分次多项式恒等式构成 $\mathbb{F}\langle X^G\rangle$的一个 G$T$-理想。

定理 5.3 (定理 2, [34])。 设 $\mathbb{F}$ 是特征零的代数闭域，且 G是任意有限阿贝尔群。*G*-分次结合 PI代数上的分次恒等式的任意GT-理想，都与某个有限维$G \times \mathbb{Z}_2$-分次结合 $\mathbb{F}$代数的G-分次 *Grassmann* 包络的G-分次恒等式理想相同。

现在，假设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限维 $G \times \mathbb{Z}_2$-分次代数，如式 (8) 所示，即 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_p \times J_{00},$，其中 $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{B}_s \oplus J_s$，且 $\mathfrak{B}_s = M_{k_s}(\mathbb{F}^{\sigma_s}[H_s])$ 和 $J_s = i_s J i_s$。我们有

$$E^G(\mathfrak{A}) = E^G(\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_p \times J_{00}) = E^G(\mathfrak{A}_1) \times \cdots \times E^G(\mathfrak{A}_p) \times E^G(J_{00}) \ ,$$

以及 $E^G(\mathfrak{A}_s) = E^G(\mathfrak{B}_s) \oplus E^G(J_s)$。请记住， $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \cdots \times \mathfrak{B}_p$ 是 $\mathfrak{A}$ 的极大半单分次子代数，而 $J(\mathfrak{A}) = J_{00} \times J_{11}$ 是 $\mathfrak{A}$的雅各布森根，其中 $J_{11} = J_1 \times \cdots \times J_p$ 和 J_{00} 是一个 $\mathfrak{B} \oplus J_{11}$-双模，且作为单侧模，它左零且右零。由此，根据定理 5.3，要研究任意一个分次簇 $\mathfrak{W}$ （即特征零下的分次结合代数簇），就必须研究 $\mathfrak{B}_s$-双模 J_s，以及代数 $E^G(J_s)$ 和 $E^G(J_{00})$。回想一下，G-分次簇$\mathfrak{W}$ 是由满足给定子集 $S \subset \mathbb{F}\langle X^G\rangle$ 的所有分次多项式恒等式的 G-分次（结合）代数组成的族。

另一方面，De Fran.ca 和 Sviridova 证明，在有限分次下， $\mathfrak{A}_e$ 是幂零的当且仅当 $\mathfrak{A}$是幂零的（见定理 3.9，第 237 页）。因此，考虑带有 $\mathbb{Z}_2$-分次的 $E = E_0 \oplus E_1$和 $J = J_0 \oplus J_1$，由于 E_0 是交换的且 J_0 是幂零的（因为 J 本身如此），我们有

$(\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}))_0 = \mathsf{J}_0 \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_0$ 是幂零的，因此 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J})$ 是幂零的，其幂零指数 $\mathrm{nd}(\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}))$ 至多为 $2 \cdot \mathrm{nd}(\mathsf{J})$。特别地，代数 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_s)$'s 和 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{00})$ 是幂零的，幂零指数至多为 $2 \cdot \mathrm{nd}(\mathsf{J})$。

最后，假设 $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{B}_s \oplus \mathsf{J}_s$，其中 $\mathfrak{B}_s = M_{k_s}(\mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s])$ 且 $\mathsf{J}_s = \mathsf{i}_s \mathsf{J} \mathsf{i}_s$。根据定理 5.2 的第 (v) 项，存在 $d_{s,1}, \ldots\ldots, d_{s,r_s} \in \mathsf{J}_s$，使得 $\mathsf{J}_s = \bigoplus_{i=1}^{r_s} \mathfrak{B}_s d_{s,i}$。因此，我们有

$$\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{11}) = \mathsf{E}^{\mathsf{G}}\left(\bigtimes_{s=1}^{p} \mathsf{J}_s\right) = \bigtimes_{s=1}^{p} \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_s) = \bigtimes_{s=1}^{p} \mathsf{E}^{\mathsf{G}}\left(\bigoplus_{i=1}^{r_s} \mathfrak{B}_s d_{s,i}\right) = \bigtimes_{s=1}^{p} \left(\bigoplus_{i=1}^{r_s} \mathsf{E}^{\mathsf{G}}\left(\mathfrak{B}_s d_{s,i}\right)\right).$$

因此，为了研究 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{11})$，我们可以分析 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{B}_s d_{s,i}) = \bigoplus_{j=1}^{n} d_{s,i}(\mathfrak{B}_s)_j \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_{l_{s,i}+j}$，其中对所有 $s = 1, \ldots\ldots, p^{j \in \mathbb{Z}_2}$ 以及 $i = 1, \ldots\ldots, r_s$，其中 $\deg_{\mathbb{Z}_2}(d_{s,i}) = l_i$。因此，定理 5.2 中给出的分解可以成为研究 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{11})$ 的重要工具，并进而有助于描述 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J})$ 和 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A})$，以及特征零下任意分次结合代数的分次簇 $\mathfrak{W}$。

我们以如下结果为本文作结，该结果是上述观察的推论。

命题 5.4. 设 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域，满足特征$(\mathbb{F}) = 0$，且G 是一个有限群。设 $\mathfrak{W}$ 是由子集 $S = \left\{\left[y^{(e)}, z^{(g)}\right] : g \in \mathsf{G}\right\}$ 生成的G-分次簇。如果$\mathsf{G} = \mathbb{Z}_p$，且最大公约数$(p,2) = 1$，那么 $\mathfrak{W}$ 的任意 G-分次代数都满足某个（普通）多项式恒等式$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] \cdots [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \in \mathbb{F}\langle X \rangle$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

证明。从上述观察可知，存在一个有限维的 $\mathsf{G} \times \mathbb{Z}_2$-分次代数 $\mathfrak{A}$，满足 $\mathfrak{W} = \mathrm{var}^{\mathsf{G}}(\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}))$，因此我们可以写成 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}) = \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_1) \times \cdots \times \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_p) \times \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{00})$，其中每个 $\mathfrak{A}_s = M_{k_s}(\mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s]) \oplus \mathsf{J}_s$，且 $\mathsf{J}(\mathfrak{A}) = \mathsf{J}_1 \times \cdots \times \mathsf{J}_p \times \mathsf{J}_{00}$。由于 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A})_e$ 在 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A})$ 中是中心的，显然 $k_1 = \cdots = k_p = 1$，因此对所有 $s = 1, \ldots, p$，都有$\mathfrak{A}_s = \mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s] \oplus \mathsf{J}_s$。

另一方面，由于 $\mathsf{G} = \mathbb{Z}_p$，且 p 与 2 互素，我们有 $\mathsf{G} \times \mathbb{Z}_2$ 同构于$\mathbb{Z}_{2p}$。因此，对于 $\mathsf{G} \times \mathbb{Z}_2$ 的任意子群 H，任意 2-余循环 $\sigma \in Z^2(\mathsf{H}, \mathbb{F}^*)$ 都是对称的，即对于任意 $g, h \in \mathsf{H}$，有 $\sigma(g,h) = \sigma(h,g)$（关于这一事实的证明，见第 28 页的推论 1.2.8 [9],）。因此，代数 $\mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s]$' 都是交换的。注意，对所有 $r, s = 1, \ldots, p, r \neq s$，$\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_r)\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_s) = \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_r)\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{00}) = \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{00})\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_r)$。现在，对于任意 $i = 0$、1 以及 $g, h, t \in \mathsf{G}$，我们有

$$\begin{aligned}\left[(\mathfrak{A}_s)_{(g,0)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_0, (\mathfrak{A}_s)_{(h,i)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i\right] &\subseteq \left[(\mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s])_{(g,0)}, (\mathsf{J}_s)_{(h,i)}\right] \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i + \left[(\mathsf{J}_s)_{(g,0)}, (\mathbb{F}^{\sigma_s}[\mathsf{H}_s])_{(h,i)}\right] \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i \\ &\quad + \left[(\mathsf{J}_s)_{(g,0)}, (\mathsf{J}_s)_{(h,i)}\right] \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i \\ &\subseteq (\mathsf{J}_s)_{(gh,i)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i \subseteq \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_s),\end{aligned}$$

并且由于 $\left[(\mathfrak{A}_s)_{(g,1)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_1, (\mathfrak{A}_s)_{(h,1)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_1\right] \subseteq (\mathfrak{A}_s)_{(gh,0)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_0$，因此可得

$$\left[\left[(\mathfrak{A}_s)_{(g,1)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_1, (\mathfrak{A}_s)_{(h,1)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_1\right], (\mathfrak{A}_s)_{(t,i)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i\right] \subseteq \left[(\mathfrak{A}_s)_{(gh,0)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_0, (\mathfrak{A}_s)_{(t,i)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_i\right] \subseteq \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_s).$$

由此，由于 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_s) = \bigoplus_{g \in \mathsf{G}} (\mathfrak{A}_s)_{(g,0)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_0 + (\mathfrak{A}_s)_{(g,1)} \otimes_{\mathbb{F}} \mathsf{E}_1)$，我们得出 $\left[\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_s), \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathfrak{A}_s)\right] \subseteq \mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_s)$，对所有 $s = 1, \ldots, p$ 均成立。因此，由于对所有$s = 1, \ldots, p$，$\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_{00})$ 和 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J}_s)$ 都是 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J})$ 的子代数，且 $\mathsf{E}^{\mathsf{G}}(\mathsf{J})$ 是幂零的，结论得证。□

ACKNOWLEDGMENTS

这项工作是在第一作者于2022年至2023年担任巴西利亚大学教授期间完成的。作者感谢该文审稿人认真审阅稿件，并提出了非常有益的文体方面的建议。

References

1. E. Aljadeff 和 A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G-graded algebras*, 《数学进展》**225** (2010), no. 5, 2391–2428. 2. S.A. Amitsur, *A General Theory of Radicals. I. Radicals in Complete Lattices*, 《美国数学杂志》**74** (1952), no. 4, 774–786. 3. , *A General Theory of Radicals. II. Radicals in Rings and Bicategories*, 《美国数学杂志》**76** (1954), no. 1, 100–125.

4. V.A. Andrunakievi˘c 和 Ju.M. Rjabuhin, *Modules and radicals*, 《苏联科学院通报》, 第 5 卷, 1964 年, 第 991–995 页（俄文）。5. Yu.A. Bahturin、S.K. Sehgal 和 M.V. Zaicev, *Finite-dimensional simple graded algebras*, 《数学文集》199 (2008), no. 7, 965. 6. A. Belov-Kanel、L. Rowen 和 U. Vishne, *Full Exposition of Specht's Problem*, 《塞尔迪卡数学杂志》38 (2012), no. 1-3, 313p–370p. 7. K.A. Brown 和 S.P. Smith, *Bimodules over a Solvable Algebraic Lie Algebra*, 《数学季刊》36 (1985), no. 2, 129–139. 8. C.W. Curtis 和 I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, AMS Chelsea 出版系列, 第 356 卷, Interscience, 1962 年。9. A. de Fran˛ca, *Graded algebras with the neutral component satisfying a polynomial identity of degree* 2, 博士论文, 巴西利亚大学, 2019 年。10. A. de Fran˛ca 和 I.Yu. Sviridova, *Köthe's Problem, Kurosch-Levitzky Problem and Graded Rings*, 《代数杂志》602 (2022), 224–246. 11. V.S. Drensky, *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, 施普林格出版社, 2000 年。12. D.M. Foster, *Radicals and Bimodules*, 《美国数学会会刊》38 (1973), no. 1, 47–52. 13. B.J. Gardner 和 R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*, 第 1 版, 《纯粹与应用数学》261, CRC 出版社, 2003 年。14. A. Giambruno 和 M.V. Zaicev, *Asymptotics for the standard and the Capelli identities*, 《以色列数学杂志》135 (2003), no. 1, 125–145. 15. , *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, 第 122 号, 美国数学会, 2005 年。16. I.N. Herstein, *Noncommutative rings*, 第 15 号, 剑桥大学出版社, 2005 年。17. K. Hoffman 和 R.A. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall 数学丛书, Prentice-Hall, 1971 年。18. I.M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, 1976 年。19. N. Jacobson, *General representation theory of Jordan algebras*, 《美国数学会汇刊》70 (1951), no. ~~3, 509–~~530. 20. , *Structure of alternative and Jordan bimodules*, 《大阪数学杂志》6 (1954), no. 1, 1 – 71. 21. , *Structure of rings*, 修订版, CP37, AMS, 1964 年。22. G. James 和 M. Liebeck, *Representations and characters of groups*, 剑桥大学出版社, 2001 年。23. A.R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, 美国数学会, 1991 年。24. A.G. Kurosch, *Radicals of rings and algebras*, 《数学文集》, 新系列, 第 33 卷 (1953), 13–26（俄文）。25. A.I. Mal'tsev, *On ~~the re~~presentation of an algebra as a direct sum of the radical and a semi-simple subalgebra*, 36 (1942), no. 1, 942 ¯(俄文）。26. L. M´arki 和 R. Wiegandt, *Theory of Radicals*, János Bolyai 数学学会讨论会, 北荷兰出版社, 1993 年。27. C. Nastasescu 和 F. Van Oystaeyen, *Methods of graded rings*, 施普林格出版社, 2004 年。28. , *Graded Ring Theory*, 北荷兰数学丛书, 爱思唯尔科学出版社, 2011 年。29. P. Ribenboim, *Rings and Modules*, Interscience 纯粹与应用数学专著丛书, 第 24 号, Interscience, 1969 年。30. J.J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, 数学研究生丛书, 美国数学会, 2010 年。31. J.P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, 数学方法丛书, 施普林格出版社, 1977 年。32. I. Shestakov 和 M. Trushina, *Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras*, 《美国数学会汇刊》368 (2016), no. 7, 4657–4684. 33. W. Specht, *Gesetze in Ringen. I*, 《数学杂志》52 (1950), no. 1, 557–~~589. 3~~4. I.Yu. Sviridova, *Identities of PI-algebras graded by a finite abelian group*, 《代数通讯》39 (2011), no. 9, 3462–3490. 35. P. V´amos, *On the minimal prime ideals of a tensor product of two fields*, 《剑桥哲学学会数学会刊》84 (1978), no. 1, 25–35. 36. R. Wisbauer, *Modules and algebras. Bimodule structure on group actions and algebras*, Pitman 纯粹与应用数学专著及综述丛书 81, 朗文, 1996 年。

Unidade Acadêmica de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Av. Aprígio Veloso, 785,Bodocongó, CEP 58429-970, Campina Grande, Paraíba, Brasil*Email address*: a.defranca@yandex.comDepartamento de Matemática, Universidade de Brasília, Campus Universitário Darcy Ribeiro, ICC, AlaCentro , Bloco A, CEP 70910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil
Email address: I.Sviridova@mat.unb.br