arXiv:2303.13892v1 [astro-ph.EP] 24 Mar 2023

均匀长旋转椭球的相互引力能。共线情形

Kondratyev B.P.[1,2*], Kornoukhov V.S.[1] Kireeva E.N.[1],

1 施特恩伯格天文研究所，莫斯科国立罗蒙诺索夫大学，俄罗斯莫斯科大学大道13号，邮编119992 2 普尔科沃中央天文台，俄罗斯

*** work@boris-kondratyev.ru**

摘要

本文提出并求解了两个对称轴位于同一直线上的均匀长旋转椭球系统的相互引力能问题。研究采用等引力元法，将三维椭球的外部势表示为一维非均匀焦杆的势。该问题的求解归结为对一根焦杆的势沿另一根焦杆线段积分。由此可得两个长旋转椭球相互引力能的初等函数有限解析表达式。本文还求得了椭球间的吸引力。该函数也可表示为椭球偏心率的幂级数。最后讨论了所得结果的可能应用。

1 引言

为解决许多物理和天文学问题，需要了解不同形状物体的引力（势）能 W。势能的标量形式对于计算引力系统的速度弥散、压力、力和力矩的分量等参数必不可少。势能张量是二阶维里方程的一部分，可用于研究天体平衡形状的平衡与稳定性（钱德拉塞卡，1969年）。

考虑两个质量 M_1 和 M_2，它们分别分布在体积 V_1 和 V_2中，密度分别为 ρ_1 和 ρ_2。每个质量都是引力场的源，其势为

$$\varphi_i(x) = G\int\limits_{V_i} \frac{\rho_i(x)}{|x-x'|}dV, \quad i=1,2, \tag{1}$$

并且处于第 j 个伙伴的引力场中时，其势能为

$$W_{i,j} = -\int\limits_{V_i} \rho_i(x)\,\varphi_j(x)\,dV. \tag{2}$$

引力能不被视为可加量。因此，如果某个物体（或物体系统）由例如两个部分组成，其总引力能

可写为

$$W=-\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{V_1}\rho_1(x)\,\varphi_1(x)\,dV+\int\limits_{V_2}\rho_2(x)\,\varphi_2(x)\,dV+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{V_1}\rho_1(x)\,\varphi_2(x)\,dV+\int\limits_{V_2}\rho_2(x)\,\varphi_1(x)\,dV\right\}. \tag{3}$$

式（3）中的前两个积分分别等于两个独立子系统的引力能 W_1 和 W_2，而最后两个积分之和则给出这两个物体（或物体的部分）之间的相互引力能W_{mut}。这两个积分相等是一个众所周知的性质（Kondratyev，1989年）

$$W_{mut}=-\int\limits_{V_1}\rho_1(x)\,\varphi_2(x)\,dV=-\int\limits_{V_2}\rho_2(x)\,\varphi_1(x)\,dV. \tag{4}$$

因此，整个物体的总引力能由三项组成

$$W=W_1+W_2+W_{12}. \tag{5}$$

引力能取决于物体的形状和内部结构，因此计算 W 是一项复杂的数学任务，其解很少能用有限的解析形式表示。通常，文献中只能找到球体或椭球体势能的表达式，例如参见（Subbotin，1937年）、（钱德拉塞卡，1969年）。近年来，人们发展出一种专门的等引力元法，用于研究引力场并计算形状更为复杂的物体的势能（Kondratyev，1989年）、（Kondratyev，2001年）、（Kondratyev，2003年）、（Kondratyev，2007），并借助这一方法在位势理论中取得了新的成果。

计算物体的相互引力能 W_{mut} 是位势理论中一个独立且重要的问题类别。本文研究两个均匀长旋转椭球组成的系统的相互势能问题，这两个椭球的对称轴位于同一直线上。这类椭球双星系统可很好地近似描述若干天体物理问题。例如，具有双自旋—轨道共振的天体系统（尤其是冥王星—卡戎双行星，或某些同步自转的双小行星），以及近距离双星系统和洛希问题的某些变体（钱德拉塞卡，1969年）。然而，直到最近，两个长旋转椭球之间的相互引力能表达式仍未推导出来。本文解决了这一问题，并以初等函数给出长旋转椭球 W_{mut} 相互引力能的有限解析形式。

2 沿同一直线排列的长旋转椭球的相互引力能

在柱坐标（r，x_3）中，长旋转椭球表面的方程形式如下

$$\frac{r^2}{a_1^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1,\quad c\geq a_1. \tag{6}$$

考虑由两个均匀引力长旋转椭球组成的系统，其半轴分别为（$c_1 \geq a_1$）和（$c_2 \geq a_2$）。这两个椭球的摆放方式使其对称轴与轴 Ox_3 重合（图 1），且图形的中心距为 $O_1O_2 = h$。对于给定的密度 ρ_1 和 ρ_2，物体的质量分别为 $M_1 = \frac{4}{3}\pi a_1^2 c_1 \rho_1$ 和 $M_2 = \frac{4}{3}\pi a_2^2 c_2 \rho_2$。

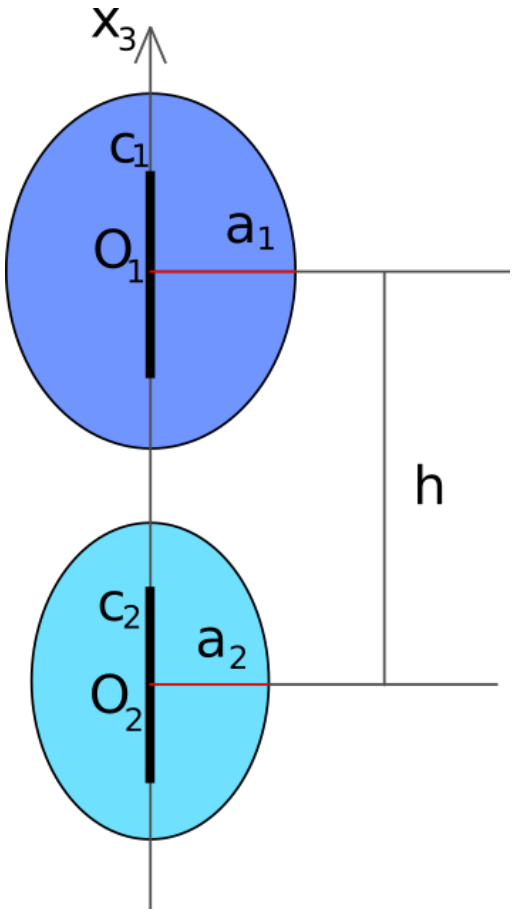

图1。两个对齐的长旋转椭球的横截面。图中显示了它们的半轴以及中心之间的距离 h O_1O_2。每个椭球内部都标出了长度分别为 $L_1 = 2R_1$ 和 $L_2 = 2R_2$ 的焦点等引力杆。

如图1所示，选取第一个椭球的中心 O_1 作为参考系的原点。在这种情况下（Kondratyev，2007，第255页），上方长旋转椭球的焦点等引力杆（长度为 $L_1 = 2R_1$）的密度为

$$\mu_1(x_3) = \frac{3M_1}{4R_1}\left(1 - \frac{x_3^2}{R^1}\right), \quad R_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}, \quad -R_1 \leq x_3 \leq R_1, \tag{7}$$

对称轴 Ox_3 上较低的长旋转椭球的外势为（Kondratyev，2007，第163页）

$$\varphi_2(x_3) = \frac{3GM_2}{4R_2}\left\{\frac{2(x_3+h)}{R_2} + \left(1 - \frac{(x_3+h)^2}{R_2^2}\right)\ln\frac{x_3+h+R_2}{x_3+h-R_2}\right\}. \tag{8}$$

这里我们采用以下记号

$$R_2 = \sqrt{c_2^2 - a_2^2}. \tag{9}$$

必须强调，等引力元法使我们能够将任意三维均匀长扁球体的外势替换为其具有抛物线密度定律（7）的一维焦点等引力杆的势，而这种替换大大简化了后续计算。将势（8）沿对应于上方扁球体的杆积分（参见公式（4）），即可得到两个扁球体组成的系统的相互引力能（Kondratyev，2007）

$$W_{mut} = -\int_{-R_1}^{R_1} \mu_1(x_3)\,\varphi_2(x_3)\,dx_3. \tag{10}$$

积分（10）可以表示为有限的解析形式。为此，我们令变量 $z = \dfrac{x_3}{R_1}$ 变化，并采用如下记号

$$x = \frac{h}{R_1}; \quad n = \frac{R_1}{R_2} = \frac{c_1 e_1}{c_2 e_2}; \quad \alpha = x + \frac{1}{n}; \quad \beta = x - \frac{1}{n}, \tag{11}$$

其中 $e_1 = \sqrt{1 - \dfrac{a_1^2}{c_1^2}}$ 和 $e_2 = \sqrt{1 - \dfrac{a_2^2}{c_2^2}}$ 分别为扁球体的偏心率。于是，积分（10）可写为

$$W_{mut} = -\frac{9}{16}\frac{GM_1M_2}{h} xn \int_{-1}^{1} \left(1 - z^2\right)\left\{2n\,(z + x) + \left[1 - n^2\,(z + x)^2\right]\ln\frac{z + \alpha}{z + \beta}\right\} dz. \tag{12}$$

计算该积分，经过多次变换后，我们得到相互能的表达式

$$W_{mut} = -\frac{GM_1M_2}{h}\Phi(n, x). \tag{13}$$

下面介绍各项符号：

$$\Phi(n, x) = f_1 \ln\frac{n\,(x+1)+1}{n\,(x+1)-1} + f_2 \ln\frac{n\,(x-1)+1}{n\,(x-1)-1} + f_3 \ln\frac{n\,(x-1)-1}{n\,(x+1)-1} + f_4 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{3x}{160n^2}\left(n\,(x+1)+1\right)^3\left(4 - 12n + 2nx + 4n^2 + 3nx + 3n^2x - n^2x^2\right)\\
f_2 &= \frac{3x}{160n^2}\left(n\,(x-1)+1\right)^3\left(4 + 12n + 2nx + 4n^2 + 3nx - 3n^2x - n^2x^2\right)\\
f_3 &= \frac{3x}{20n^2}\left(1 - 5n^2 + 5n^2x^2\right)\\
f_4 &= \frac{3x^2}{40}\left(11 + 11n^2 + n^2x^2\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

辅助函数 $\Phi(n,\ x)$ (14) 随物体中心间距变化的关系如图 2 所示。可以看出，当两个扁球体距离较近时，它们的相互势能会迅速降低；而距离较远时，降低速度则会变慢。

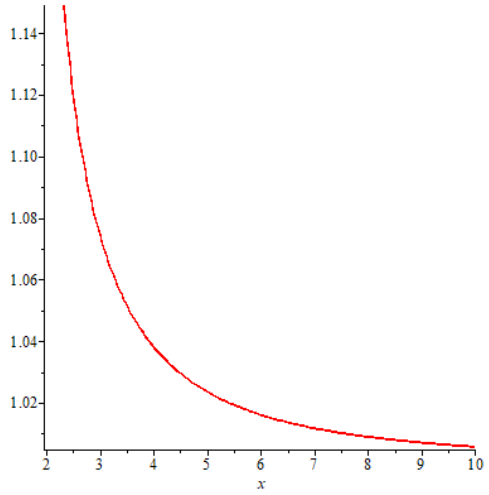

图 2. 根据公式 (14) 和 (15)，当 $n = 1$ 时，两个长旋转椭球的归一化互能 $\Phi(n, x)$ 随其中心间距 $x = \dfrac{h}{R_1}$ 的变化关系。

可以注意到，表达式 (14) 可以改写为关于扁球体偏心率 e_1 和 e_2的幂级数。为此，我们引入体积-等效半径 $\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$，并假设偏心率变化时，扁球体的质量和体积保持不变，即 $\tilde{R}_1^3 = a_1^2 c_1$, $\tilde{R}_2^3 = a_2^2 c_2$。那么，显然，

$$R_1 = \frac{e_1 \tilde{R}_1}{(1-e_1^2)^{\frac{1}{3}}}; \quad R_2 = \frac{e_2 \tilde{R}_2}{(1-e_2^2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{16}$$

引入归一化量 $x_s = \dfrac{h}{\tilde{R}_1}$, $n_s = \dfrac{R_1}{\tilde{R}_2}$ 可得

$$x = x_s \frac{(1-e_1^2)^{\frac{1}{3}}}{e_1}; \quad n = n_s \frac{e_1 (1-e_2^2)^{\frac{1}{3}}}{e_2 (1-e_1^2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{17}$$

在计算中保留小量 e_1^5 和 e_2^5 的项后，我们得到相互引力能的新表达式：

$$W_{mut} = -\frac{GM_1M_2}{h}\left\{1 + \frac{e_1^2}{5x_s} + \frac{e_2^2}{5x_s n_s^2} + \frac{e_1^2 e_2^2}{5x_s^2 n_s^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5x_s} + \frac{1}{x_s^2}\right) + ...\right\}. \tag{18}$$

函数 $\Phi(n, x)$ 表示两个均匀长旋转椭球的相互能 $W = \dfrac{-W_{mut}h}{GM_1M_2}$，并以相同质量的两个球体（或点质量）的标准能量值进行归一化。图 2 和图 3 显示，函数 $\Phi(n, x)$ 随着椭球中心间距的增加而迅速减小，但有下限，始终大于 1。

$$\Phi(n, x) > 1. \tag{19}$$

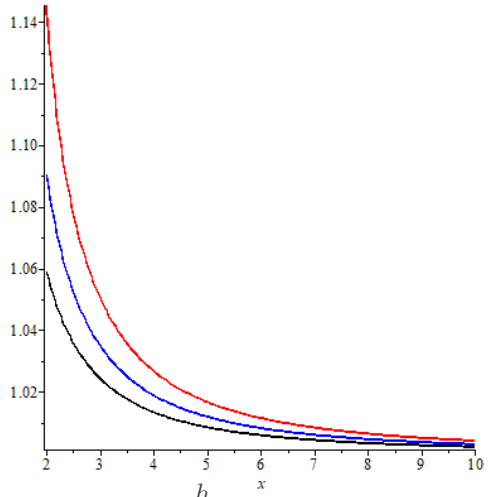

图 3. 不同 n 时，函数 $\Phi(n,x)$ 对归一化距离 $x=\dfrac{h}{R_1}$ 的依赖关系。曲线分别对应 $n=1$（红色）、$n=1.5$（蓝色）和 $n=5$（黑色）。

这意味着，对称轴位于同一直线上的两个均匀长旋转椭球，其相互能始终大于两个等效球体或点质量的相互能。

对相互势（13）求导，可得两个长旋转椭球之间的引力：

$$F(n,x)=\frac{GM_1M_2}{h^2}\left(\Phi(n,x)-x\frac{d\Phi(n,x)}{dx}\right). \tag{20}$$

将（14）中的 $\Phi(n,x)$ 代入，经过多次变换后得到

$$\begin{aligned}F(n,x)=&\frac{GM_1M_2}{h^2}\cdot\\&\left\{\left[-\frac{3x^2}{32n}(nx+n+1)^2\left(n^2x^2-2n^2x-3n^2-2nx+6n-3\right)\right]\ln\frac{n(x+1)+1}{n(x+1)-1}+\right.\\&+\left[\frac{3x^2}{32n}(nx-n+1)^2\left(n^2x^2+2n^2x-3n^2-2nx-6n-3\right)\right]\ln\frac{n(x-1)+1}{n(x-1)-1}-\\&\left.-\frac{3x^3}{2}\ln\frac{n(x-1)-1}{n(x+1)-1}-\frac{3x^2}{8}\left(n^2x^2+3n^2+3\right)\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

例如，图 4 展示了两个相同长旋转椭球之间的吸引力随中心距变化的关系。可以看出，长旋转椭球之间的吸引力始终大于质量相同的两个球体（或点质量）之间的作用力。

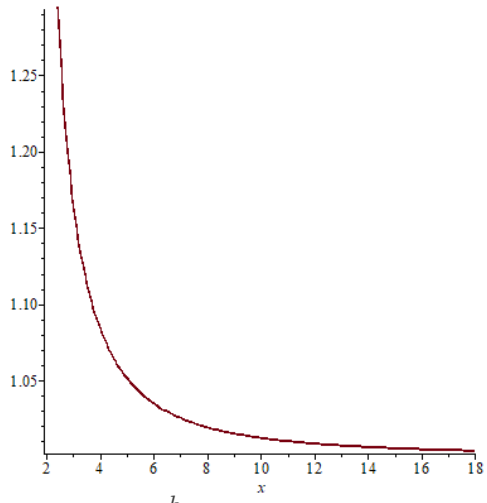

图 4. 两个均匀共轴长旋转椭球体的中心间距$x = \frac{h}{R_1}$ 对归一化引力 $F(n,x) = \frac{GM_1M_2}{h^2}$ 模的影响。使用公式 (21) 对 $n = 1$ 进行计算。

3 讨论与结论

本文针对对称轴位于同一直线上的两个均匀长旋转椭球，提出并求解了相互引力能问题 W_{mut}。为解决这一问题，我们采用了 Kondratyev 提出的等引力元法。该方法将三维均匀椭球体的外势表示为一维非均匀焦杆的势，从而将问题简化为沿第二根焦杆的长度对第一根焦杆的势进行积分。由此，可以用初等函数表示的有限解析形式，求得两个长旋转椭球的相互能 W_{mut} 以及它们之间的吸引力。此外，函数W_{mut} 还可以表示为关于椭球偏心率的幂级数。

此处得到的相互能表达式可用于许多天体物理问题，例如研究近距离双星、小行星，尤其是接触双星的动力学，以及冥王星-卡戎系统这样的双行星。

值得注意的是，在众多双小行星中，目前尚无已知的双重同步自转双小行星。由于潮汐力与距离的立方成反比，因此应在彼此距离非常近的小行星对中寻找潮汐捕获现象。

然而，最近发现了一对同步自转的小行星（Taylor，2019）。它的编号为 **(190166) 2005 UP156**。这个双星系统尤为惊人，因为它由处于双重潮汐捕获状态的小行星组成。观测表明，该系统中的小行星质量大致相同，且具有相同的长旋转椭球形状。对这对双星小行星动力学的研究将另撰论文。

参考文献

钱德拉塞卡，S. 1969年，《椭球平衡形状》。（纽黑文：耶鲁大学出版社）康德拉季耶夫，B. P. 1989年，《椭球引力形状动力学》（莫斯科：“科学出版社”，物理数学文献总编辑部）康德拉季耶夫，B. P. 2001年，《计算数学与数学物理》，41，269 康德拉季耶夫，B. P. 2003年，《势理论与平衡形状》（莫斯科—伊热夫斯克：计算机科学研究所）康德拉季耶夫，B. P. 2007，《势理论：新方法与有解问题》（莫斯科）苏博亭，M. F. 1937年，《天体力学教程》第2卷（莫斯科—列宁格勒：重工业人民委员部全苏科学技术出版社总编辑部）泰勒，P. A.，里维拉-瓦伦丁，E. G.，维尔基，A. K.，等，2019年，2945，https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019LPI....50.2945T