arXiv:2303.13894v2 [math.DS] 5 Sep 2024

可表示为 d 元组映射的多项式对应

Shrihari Sridharan*, Subith, G.†, Atma Ram Tiwari‡

2024年9月6日

摘要

本文研究了在两个变量中次数均为 $d \geqslant 2$ 的多项式对应 $f(x,y)$ （其中 $[x,y]$ 属于 C），并给出了方程 $f(x,y) = 0$ 可表示为 $\Phi(x) = \Psi(y)$ 的充要条件，其中 Φ 和 Ψ 是黎曼球面上的分数次 d 有理映射。由于缺少在刻画二次对应（$d = 2$）中发挥重要作用的对合，我们借助方程论与矩阵中的一些初等思想来获得结果。我们还进一步探讨了满足上述因式分解的对应的系数矩阵所具有的一些对称条件。最后，我们以几个示例结束这篇简短的论文。

关键词 ：多项式对应、 d元组映射、黎曼球面上的等价类。

AMS 学科分类：30D05, 30C10,37F05, 37F10。

*Indian Institute of Science Education and Research Thiruvananthapuram (IISER-TVM), India. shrihari@iisertvm.ac.in
†Indian Institute of Science Education and Research Thiruvananthapuram (IISER-TVM), India. subith21@iisertvm.ac.in
‡Rashtriya Postgraduate College, Veer Bahadur Singh Purvanchal University, Jaunpur, India. art15iiser@gmail.com

1 引言

本文对多项式对应动力学的研究，主要始于 Bullett 的工作 [4]。此后，Bullett 与数位合作者撰写了一系列文章，研究迭代此类对应所产生的动力学。多位作者也将对各种类型对应（如多项式、亚纯对应）的迭代研究推广至定义在黎曼球面上或适当地定义在某些流形上的对象。值得一提的工作包括 Bullett 等人 发表于 [5, 6, 7, 8, 9], Hinkkanen 和 Martin 发表于 [13, 14], Boyd 发表于 [3], Sumi 发表于 [15, 16, 17], Dinh 发表于 [10, 11], Dinh 和 Sibony 发表于 [12], Bharali 和 Sridharan 发表于 [1, 2]。然而，这些研究都着重于迭代对应的图，将其视为底层空间上的一种关系，并允许动力学沿各变量方向呈指数增长。

[4] 研究的对象是通过迭代 C 上的某个关系而产生的动力系统。这里的 C 指黎曼球面，也就是复平面连同无穷远点。该关系是满足以下条件的多项式 $f \in \mathbb{C}[x,y]$ 的零点集：

1. $f(x,\cdot)$ 和 $f(\cdot,y)$ 一般而言均为二次；2. 为了方便记号并明确起见，设 $f(x,y)$ 中第一个变量和第二个变量的定义域分别为 $\mathbb{C}_x$ 和 $\mathbb{C}_y$。令 Γ_f 表示集合 $\{f=0\}$ 在 $\mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y$ 中的双射影完备化 。那么， Γ_f 的任何不可约分支都不具有 $\{a\} \times \mathbb{C}_y$ 或 $\mathbb{C}_x \times \{a\}$ 的形式，其中 $a \in \mathbb{C}$。

注意，考虑齐次坐标 $\prec([\xi:x],[\zeta:y]) \in \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y$ 下的一个四次对应，就能很好地解释这一点。这里我们使用 ξ 和 ζ 对每个单项式进行齐次化，该对应定义如下：

$$\begin{aligned} F([\xi:x],[\zeta:y]) \;:=\; & A_{(2,2)}x^2y^2 + A_{(2,1)}x^2y\zeta + A_{(1,2)}xy^2\xi + A_{(2,0)}x^2\zeta^2 + A_{(0,2)}y^2\xi^2 \\ & + A_{(1,1)}xy\xi\zeta + A_{(1,0)}x\xi\zeta^2 + A_{(0,1)}y\xi^2\zeta + A_{(0,0)}\xi^2\zeta^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $A_{(i,j)} \in \mathbb{C}$。于是， $F([1:x],[1:y])$ 给出多项式对应 $f \in \mathbb{C}[x,y]$，它满足 上述两个条件。设 Π_x 和 Π_y 分别是 Γ_f 到 $\mathbb{C}_x$ 和 $\mathbb{C}_y$ 的投影映射，那么上面写出的条件仅意味着

$$\widehat{\mathbb{C}}_x \ni x_0 \longmapsto \Pi_y\left(\Pi_x^{-1}\{x_0\} \cap \Gamma_f\right) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbb{C}}_y \ni y_0 \longmapsto \Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_0\} \cap \Gamma_f\right),$$

是集值映射，并且对于一般点 $x_0 \in \mathbb{C}_x$ 和 $y_0 \in \mathbb{C}_y$，其基数为二。对于这类对应，Bullett 在 [4], 中给出了如下定义。

定义 1.1 设 $x_1 \in \mathbb{C}_x$。那么， $\Pi_y\left(\Pi_x^{-1}\{x_1\} \cap \Gamma_f\right) = \{y_1, y_2\}$，也就是说。进一步， $\Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_j\} \cap \Gamma_f\right) = \prec\{x_1, x_2(j)\}$。设 $x_2(1) \equiv x_2(2)$，且所有初始点 $x_1 \in \mathbb{C}_x$ 都满足同样的条件。此外，即使从任意 $y_1 \in \mathbb{C}_y$ 出发，也存在类似的情形，此时我们称 f 为有序对映射。

本文旨在研究 $\mathbb{C}[x,y]$ 上一个次数为 $d \geqslant 2$ 的多项式对应，沿着对应的两个方向进行考察，并探究可称为 d 元组映射的对象所具有的特征。这个术语的精确定义——也是本文的核心研究对象——见第（2）节。我们还在同一节陈述本文的主要定理，即定理（2.3）、（2.4）、（2.5）、（2.6）和（2.7）。第（3）节中，我们着重讨论前两个主要定理并给出证明。接着，第（4）节介绍两个对后续内容有用的引理，然后在第（5）节重点证明其余三个定理。最后，我们在第（6）节通过若干示例阐释本文的各项定理。

2 元组映射与主要结果

我们首先定义一个记作 $f_d \in \mathbb{C}[x$、次数为 d 的多项式对应 $y]$，它满足以下条件：

1. $f_d(x、\cdot)$ 和 $f_d(\cdot、y)$ 一般而言是 d 值的；
2. 集合 $\{f_d=0\}$ in $\mathbb{C}_x\times\mathbb{C}_y$ 的双射影完备化不存在任何形如 $\{a\}\times\mathbb{C}_y$ or $\mathbb{C}_x\times\{a\}$ 的不可约分支，其中 $a\in\mathbb{C}$。

注意，这样的多项式对应于是由下式给出

$$\begin{aligned} f_d(x,y) \;:=\; & A_{(d,\,d)}x^d y^d \;+\; A_{(d,\,d-1)}x^d y^{d-1} \;+\; \cdots \;+\; A_{(d,\,1)}x^d y \;+\; A_{(d,\,0)}x^d \\ & +\, A_{(d-1,\,d)}x^{d-1}y^d \;+\; \cdots \;+\; A_{(d-1,\,0)}x^{d-1} \\ & +\, \cdots \\ & +\, A_{(1,\,d)}xy^d \;+\; \cdots \;+\; A_{(1,\,0)}x \\ & +\, A_{(0,\,d)}y^d \;+\; \cdots \;+\; A_{(0,\,0)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

注意，对于任意一般的 $x_0\in\mathbb{C}_x$ 和 $y_0\in\mathbb{C}_y$，$f_d\in\mathbb{C}[x,y]$ 满足以下条件：

$$\widehat{\mathbb{C}}_x\ni x_0\longmapsto\Pi_y\left(\Pi_x^{-1}\{x_0\}\cap\Gamma_{f_d}\right)\quad\text{and}\quad\widehat{\mathbb{C}}_y\ni y_0\longmapsto\Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_0\}\cap\Gamma_{f_d}\right)$$

是集值映射，其集合的基数为 d。与前文类似，Γ_{f_d} 表示集合 $\{f_d=0\}$ in $\mathbb{C}_x\times\mathbb{C}_y$的双射影完备化。

定义2.1 对于每个 $x_1\in\mathbb{C}_x$，令 $\{y_j(x_1)\}_{1\leqslant j\leqslant d}$表示 $\Pi_y\left(\Pi_x^{-1}\{x_1\}\cap\Gamma_{f_d}\right)$ 中的点，并按照 $\Pi_x^{-1}\{x_1\}\cap\Gamma_{f_d}$ 在其交点处的交点重数重复计入（等价地：当 $x_1\neq\infty$时，按照 $f_d(x_1,\cdot)$ 的零点的重数重复计入），并令

$$\Big\{x_1,\ x_2(y_j(x_1)),\ \cdots,\ x_d(y_j(x_1))\Big\},\quad j=1,\cdots,d,$$

表示 $\Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_j(x_1)\}\cap\Gamma_{f_d}\right)$ 中的点，并按照交点重数重复计入。对于每个 $y_1\in\mathbb{C}_y$，考虑 $\Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_1\}\cap\Gamma_{f_d}\right)$，令

$$\Big\{y_1,\ y_2(x_j(y_1)),\ \cdots,\ y_d(x_j(y_1))\Big\},\quad j=1,\cdots,d$$

按照上述方法作相应修改后构造。我们称 f_d 为一个 d-元组映射，记作

$$\left(x_1,x_2,\cdots,x_d\right)_{\widehat{\mathbb{C}}_x}\ \overset{f_d}{\rightleftarrows}\ \left(y_1,y_2,\cdots,y_d\right)_{\widehat{\mathbb{C}}_y}$$

若对于每个 $x_1\in\mathbb{C}_x$，$j=1,\cdots,d$ 对应的列表 $x_1,x_2(y_j(x_1)),\cdots,x_d(y_j(x_1))\}$ 一致，且对于每个 $y_1\in\mathbb{C}_y$，$j=1,\cdots,d$ 对应的列表 $y_1,y_2(x_j(y_1)),\cdots,y_d(x_j(y_1))\}$ 一致。

注记 2.2 为了方便记号和表述，我们假设上述定义中提到的点列 x_i 和 y_j 按模长非递减排列；若模长相同，则按辐角在区间 $[0,2\pi)$ 内非递减的顺序排列。

现在我们陈述本文的主要定理。

定理 2.3 假设如公式（2.1）所写的 $f_d(x,y)$ 不能写成 $f_d(x,y)=\left[g_k(x,y)\right]^{\frac{d}{k}}$，其中 $k|d$ 且 $k\neq d$，并且 $g_k\in\mathbb{C}[x,y]$ 是一个 k-元组映射。那么，对应 f_d 是一个 d-元组映射，当且仅当变量 x 和 y 能在方程 $f_d(x,y)=0$ 中分离，即方程 $f_d(x,y)=0$ 可以改写为 $\Phi(x)=\Psi(y)$，其中 Φ 和 Ψ 是如下所示的分数次数 d 函数：

$$\Phi(x)\;=\;\frac{\kappa_d x^d+\cdots+\kappa_1 x+\kappa_0}{\lambda_d x^d+\cdots+\lambda_1 x+\lambda_0}\qquad and\qquad\Psi(y)\;=\;\frac{\mu_d y^d+\cdots+\mu_1 y+\mu_0}{\nu_d y^d+\cdots+\nu_1 y+\nu_0}, \tag{2.2}$$

具有复系数。

定理 2.4 对应 f_d，如方程 (2.1) 所写，是黎曼球面上 d-元组的映射，当且仅当以下条件之一成立：

1. $f_d(x,y)$ 具有如下形式： $f_d(x,y) = \left[g_k(x,y)\right]^{\frac{d}{k}}$，其中 $k|d$ 和 $k \neq d$ 满足 $g_k \in \mathsf{C}[x,y]$ 是一个映射 f k元组。
2. f_d 的系数矩阵的秩为 2，即，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_{(d,d)} & A_{(d,d-1)} & \cdots & A_{(d,0)} \\ A_{(d-1,d)} & A_{(d-1,d-1)} & \cdots & A_{(d-1,0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{(0,d)} & A_{(0,d-1)} & \cdots & A_{(0,0)} \end{pmatrix}_{(d+1)\times(d+1)} = 2. \tag{2.3}$$

定理 2.5 设 $f_d = 0$ 是一个无法写成 $f_d(x,y) = \left[g_k(x,y)\right]^{\frac{d}{k}}$ 形式的 d元组映射，其中 $k|d$和 $k \neq d$ 满足 $g_k \in \mathsf{C}[x,y]$ 是一个 k元组映射。则以下陈述等价。

1. $f_d(x,y) = 0$ 当且仅当 $f_d(y,x) = 0$。

2. 存在 $f_d = 0$的因式分解，如方程 (2.2) 中所述，其中复系数κ_i， λ_i， μ_i 和 ν_i； $0 \leqslant i \leqslant d$ 满足 $\kappa_i\nu_j + \lambda_j\mu_i = \kappa_j\nu_i + \lambda_i\mu_j$。
f_d 的系数矩阵是对称的。

定理 2.6 设 $f_d = 0$ 是一个 d-元组映射，且不能写成 $f_d(x,y) = \left[g_k(x,y)\right]^{\frac{d}{k}}$，其中 $k|d$和 $k \neq d$ 满足 $g_k \in \mathsf{C}[x,y]$ 是一个 k-元组映射。那么以下陈述等价。

1. $f_d(x,\ y) = 0$ 当且仅当 $f_d(\overline{x},\ \overline{y}) = 0$。2. 存在 $f_d = 0$的因式分解，如方程 (2.2) 中所述，其中系数 κ_i， λ_i， μ_i和 ν_i； $0 \leqslant i \leqslant d$ 均为实数。

3. f_d 的系数矩阵是实数（相差一个常数因子）。

定理 2.7 设 $f_d = 0$ 是一个 d-元组映射，且不能写成 $f_d(x,y) = \left[g_k(x,y)\right]^{\frac{d}{k}}$，其中 $k|d$ 且 $k \neq d$，并且 $g_k \in \mathsf{C}[x,y]$ 是一个 k-元组映射。那么以下陈述等价。

1. $f_d(x,\ y) = 0$ 当且仅当 $f_d(\overline{y},\ \overline{x}) = 0$。2. 存在 $f_d = 0$的因式分解，如方程 (2.2) 中所述，其中系数 κ_i， λ_i， μ_i和 ν_i； $0 \leqslant i \leqslant d$ 满足 $\kappa_i = \overline{\mu_i}$ 且 $\lambda_i = \overline{\nu_i}$。 3

。 f_d 的系数矩阵是反厄米的（相差一个常数因子）。

我们以以下注记结束本节。

注记 2.8 取 $d = 2$ 于定理 (2.3)、(2.4)、(2.6) 和 (2.7)，我们便可将 Bullett 在 *[4],* 中给出的结果视为我们相应定理陈述的直接推论。

注记 2.9 对于有序对映射，如定义 (1.1)中所述，我们提醒读者注意^ ^对合的存在 I_x： $\mathbb{C}_x \circlearrowleft$ 和 I_y： $\mathbb{C}_y \circlearrowleft$ 满足 $I_x(x_1) = x_2$ 以及 $I_y(y_1) = y_2$。Bullett 在*[4]* 中广泛运用这些对合来证明他的结果。然而，当 $d > 2$ （即我们讨论的情形）时，我们无法利用此类对合。因此，我们采用其他方法来证明定理。

3 定理 (2.3)和 (2.4)的证明

在本节稿件的这一部分，我们证明前两个定理。我们先证明定理 (2.3)。

证明：（定理（2.3）的证明）我们首先假设 f_d 是一个由 d 元组构成的映射，且无法写成 $\left[g_k(x,y)\right]^{\frac{d}{k}}$ 的形式，其中 $k|d$ 且 $k \neq d$，并且 $g_k \in \mathbb{C}[x,y]$ 是一个由 k 元组构成的映射。于是，对于任意 x_1 和 x_2，若它们属于 $\widehat{\mathbb{C}}_x$，我们称 $x_1 \sim x_2$，当且仅当 $\Pi_y\left(\Pi_x^{-1}\{x_1\} \cap \Gamma_{f_d}\right)$ 和 $\Pi_y\left(\Pi_x^{-1}\{x_2\} \cap \Gamma_{f_d}\right)$ 中的点列表按重数重复后相等。类似地，对于任意属于 $\mathbb{C}_y$ 的 y_1 和 y_2，我们称 $y_1 \sim y_2$，当且仅当 $\Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_1\} \cap \Gamma_{f_d}\right)$ 和 $\Pi_x\left(\Pi_y^{-1}\{y_2\} \cap \Gamma_{f_d}\right)$ 中的点列表按重数重复后相等。容易验证，$\sim$ 是 $\mathbb{C}_x$ 上的等价关系，在 $\mathbb{C}_y$ 上也同样成立。记 $[x_1]$ 为 $\mathbb{C}_x$ 中与 $\widehat{\ }$ 相关的元素所构成的等价类，记 $[y_1]$ 为 $\mathbb{C}_y$ 中与 $\widehat{\ }y_1$ 相关的元素所构成的等价类。注意，$\mathbb{C}_x$ 和 $\mathbb{C}_y$ 中的每个等价类都包含 d 个点（按重数计）。

假设我们构造一个映射 $\phi : \mathbb{C}_x \longrightarrow \mathbb{C}$，使得 $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ 在 $x_1 \sim x_2$ 时成立；并构造一个映射 $\psi : \mathbb{C}_y \longrightarrow \mathbb{C}$，使得 $\psi(y_1) = \psi(y_2)$ 在 $y_1 \sim y_2$ 时成立。如果这种构造可行，那么 ϕ 会对 $\mathbb{C}_x$ 中彼此相关的所有 d 点（计重数）赋予相同的值，因此它必定是一个次数为 d的有理映射。同样，ψ 也必定是一个次数为 d的有理映射。接下来，我们可以运用一个自同构，即一个莫比乌斯映射，在 $\mathbb{C}$ 中移动。必须理解，我们运用莫比乌斯映射在 $\mathbb{C}$ 中移动¨，因为 f_d 只是一个 d元组的映射，在此阶段不应引入任何额外的次数。因此，我们采用的映射必须是线性的。此外，该映射还应是解析双射。换言之，我们关注的是将 f_d 分解为：

$$\widehat{\mathbb{C}}_x \xrightarrow{\phi} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{M} \widehat{\mathbb{C}} \xleftarrow{\psi} \widehat{\mathbb{C}}_y. \tag{3.1}$$

于是，方程 $f_d(x,y) = 0$ 可以改写为 $M \circ \phi(x) = \psi(y)$。为此，我们将方程 $f_d(x,y) = 0$ 改写为

$$\begin{aligned} P_d(x)y^d + P_{d-1}(x)y^{d-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) &= 0 \quad \text{and} \\ Q_d(y)x^d + Q_{d-1}(y)x^{d-1} + \cdots + Q_1(y)x + Q_0(x) &= 0, \end{aligned}$$

其中，对于 $0 \leqslant j \leqslant d$，每个 P_j 和 Q_j 都是次数至多为 d的多项式。此外，P_j 中至少有一个多项式（$1 \leqslant j \leqslant d$），且 Q_j 中至少有一个多项式（$1 \leqslant j \leqslant d$）的次数为 d。不失一般性，令 $\deg(P_d) = d$。进一步说，P_j 中不可能所有多项式（$0 \leqslant j \leqslant d-1$）同时都是 P_d 的某个常数倍。因此，不失一般性，令 P_{d-1} 为无法写成 cP_d（对任何 $c \in \mathbb{C}$）的多项式。

由于 f_d是一个由 d元组构成的映射，考虑一对 d元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_d)\widehat{\ }\mathbb{C}_x \rightleftarrows^{f_d} (b_1, b_2, \cdots, b_d)\widehat{\ }\mathbb{C}_y$。那么，注意到点 $\{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$ 是方程 $\frac{P_{d-1}}{P_d}(x) = -b_1 - b_2 - \cdots - b_d$的 d 个解。类似地，在采用与前面不失一般性假设相同的条件下，我们得到 $\{b_1, b_2, \cdots, b_d\}$是方程 $\frac{Q_{d-1}}{Q_d}(y) = -a_1 - a_2 - \cdots - a_d$的 d 个解。事实上，对于任何一对满足 $(x_1, x_2, \cdots, x_d)\widehat{\ }\mathbb{C}_x \rightleftarrows^{f_d} (y_1, y_2, \cdots, y_d)\widehat{\ }\mathbb{C}_y$的 d元组，显然，有理映射 $\frac{P_{d-1}}{P_d}$和 $\frac{Q_{d-1}}{Q_d}$（基于我们不失一般性所作的假设）给出了这样的映射：将 $\mathbb{C}$ 中的 $\widehat{\ }$个点映射到单个点，以及将 $\mathbb{C}$ 中的 d 个点映射到 $\mathbb{C}$ 中的单个点。因此，按构造，ϕ 和 ψ 分别是关于变量 x 和 y 的次数为 d 的有理映射。现在，通过考虑一个适当的 Möbius 映射，例如 M，使其在 $\mathbb{C}$ 中移动，并定义 $\Phi = M \circ \phi$ 和 $\Psi \equiv \psi$，我们得到

$$\Phi(x) = \frac{\kappa_d x^d + \cdots + \kappa_1 x + \kappa_0}{\lambda_d x^d + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0} \quad \text{and} \quad \Psi(y) = \frac{\mu_d y^d + \cdots + \mu_1 y + \mu_0}{\nu_d y^d + \cdots + \nu_1 y + \nu_0},$$

其中 $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{C}$，适用于 $0 \leqslant i \leqslant d$。

反过来，假设方程 $f_d(x,y) = 0$ 可以通过分离变量重写为 $\Phi(x) = \Psi(y)$，其中 Φ 和 Ψ 是分数次数的 d 函数。为了证明 f_d 是一个 d 元组映射，我们注意到，对于任意复数值 $z_0 \in \mathbb{C}$，方程 $\Phi(x) = z_0$ 和 $\Psi(y) = z_0$ 都有解集，每个解集的基数为 d（按重数计），因此 f_d 是一个 d 元组映射。•

如我们所见，f_d(x的因式分解 y) $= 0$ 为 $\Phi(x) = \Psi(y)$ 时，除了与一个莫比乌斯映射复合之外，¨是唯一的。现在我们证明定理（2.4）中的第一条陈述。

证明：（定理（2.4）的（1））考虑对应 $f_d \in \mathbb{C}[x,\ y]$ 将其视为一个 d元组映射。我们首先证明 f_d 不能因式分解为 $g_k h_{d-k}$，其中 g_k 和 h_{d-k} 分别是 k元组映射和 $(d-k)$元组映射。为此，我们反设结论不成立。由于 g_k 和 h_{d-k} 分别是 k元组映射和$(d-k)$元组映射，可以写成

$$\begin{aligned}\left(x_1, x_2, \cdots, x_k\right)_{\widehat{\mathbb{C}}_x} &\rightleftarrows^{g_k} \left(y_1, y_2, \cdots, y_k\right)_{\widehat{\mathbb{C}}_y} \quad \text{and} \\ \left(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_d\right)_{\widehat{\mathbb{C}}_x} &\rightleftarrows^{h_{d-k}} \left(y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_d\right)_{\widehat{\mathbb{C}}_y}.\end{aligned}$$

然而，这并未得到 x_i的所有取值与 y_j的所有取值按适当顺序排列后构成的集合，正如注记（2.2）所述，它们通过映射 f_d彼此对应。这意味着 f_d 无法因式分解为 $g_k h_{d-k}$。这一论证进一步使我们得出结论：f_d的任何可能因式分解都不能包含多个因数，即 $f_d = [g_k]^{\frac{d}{k}}$，其中 $k|d$。反过来，对于 d的任意因数 k，$k \neq d$ $[g_k]^{\frac{d}{k}}$ 是一个 d元组的映射，其中在由等价关系确定的每个等价类中，如定理（2.3）的证明中所述，每个元素出现的次数都是 d/k的倍数。•

为了证明定理（2.4）的第二个断言，我们使用定理（2.3）

证明：（定理（2.4）（2）的证明）设 f_d 是一个 d元组的映射。我们运用定理（2.3），该定理指出$f_d(x,$ $y) = 0$ 可以改写为 $\Phi(x) = \Psi(y)$，其中

$$\Phi(x) \ = \ \frac{\kappa_d x^d \ + \ \cdots \ + \ \kappa_1 x \ + \ \kappa_0}{\lambda_d x^d \ + \ \cdots \ + \ \lambda_1 x \ + \ \lambda_0} \qquad \text{and} \qquad \Psi(y) \ = \ \frac{\mu_d y^d \ + \ \cdots \ + \ \mu_1 y \ + \ \mu_0}{\nu_d y^d \ + \ \cdots \ + \ \nu_1 y \ + \ \nu_0},$$

其中 $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathsf{C}$ 对应 $0 \leqslant i \leqslant d$。因此，在这种情况下，该对应可以改写为

$$\left(\kappa_d \nu_d - \lambda_d \mu_d\right) x^d y^d \ + \ \left(\kappa_d \nu_{d-1} - \lambda_d \mu_{d-1}\right) x^d y^{d-1} \ + \ \cdots \ + \ \left(\kappa_0 \nu_0 - \lambda_0 \mu_0\right) \ = \ 0.$$

因此，相应的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \kappa_d \nu_d - \lambda_d \mu_d & \kappa_d \nu_{d-1} - \lambda_d \mu_{d-1} & \cdots & \kappa_d \nu_0 - \lambda_d \mu_0 \\ \kappa_{d-1} \nu_d - \lambda_{d-1} \mu_d & \kappa_{d-1} \nu_{d-1} - \lambda_{d-1} \mu_{d-1} & \cdots & \kappa_{d-1} \nu_0 - \lambda_{d-1} \mu_0 \\ \vdots & & & \\ \kappa_0 \nu_d - \lambda_0 \mu_d & \kappa_0 \nu_{d-1} - \lambda_0 \mu_{d-1} & \cdots & \kappa_0 \nu_0 - \lambda_0 \mu_0, \end{pmatrix}$$

它可以因式分解为

$$\begin{pmatrix} \kappa_d & 0 & \cdots & 0 & \lambda_d \\ \kappa_{d-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{d-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \kappa_0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nu_d & \nu_{d-1} & \cdots & \nu_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mu_d & -\mu_{d-1} & \cdots & -\mu_0 \end{pmatrix}.$$

由于因式分解中的两个矩阵的秩均为二，因此乘积矩阵的秩至多为二。现在我们用反证法证明乘积矩阵的秩不等于一。

考虑如下系数矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{(d,\,d)} & A_{(d,\,d-1)} & \cdots & A_{(d,\,0)} \\ A_{(d-1,\,d)} & A_{(d-1,\,d-1)} & \cdots & A_{(d-1,\,0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{(0,\,d)} & A_{(0,\,d-1)} & \cdots & A_{(0,\,0)} \end{pmatrix}.$$

由于根据假设，该矩阵的秩为 1，我们将后面 $(d-1)$ 列（不失一般性）写成第一列的常数倍。于是，对应 $f_d(x, y) = 0$ 的方程可因式分解为 $P(x)Q(y) = 0$，其中 P 和 Q 是次数为 d 的复系数多项式。这违反了次数为 d 的多项式对应定义中的第二个条件。

现在假设系数矩阵的秩为 2，并证明 f_d 是一个由 d 元组构成的映射。将系数矩阵的各行记为 R_1、R_2、$\cdots$、R_{d+1}。不失一般性，假设行 R_j 对于 $1<j<d+1$ 由第一行 R_1 和最后一行 R_{d+1} 张成，即 $R_j=\sigma_j R_1+\tau_j R_{d+1}$。因此，可以将 $f_d(x、y)=0$ 写作

$$x^d R_1 Y + x^{d-1} R_2 Y + \cdots + x R_d Y + R_{d+1} Y = 0, \quad \text{where} \quad Y^t = \begin{pmatrix} y^d & y^{d-1} & \cdots & y & 1 \end{pmatrix}.$$

这可以简化为

$$\left[\left(x^d+\sigma_2 x^{d-1}+\cdots+\sigma_d x\right) R_1 + \left(\tau_2 x^{d-1}+\cdots+\tau_d x+1\right) R_{d+1}\right] Y = 0.$$

显然，上述方程可以表示为 $\Phi(x)=\Psi(y)$，其中 Φ 和 Ψ 是分数次 d 映射。因此，应用定理（2.3）即可完成证明。

•

4 两个简单引理

本节首先陈述一个关于复数的引理，该引理将在后续定理的证明中派上用场。下面这个引理的证明很简单。

引理 4.1 设 $z, w \in \mathsf{C}$ 满足 $z\overline{w}=w\overline{z}$。那么，$\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w)=\mathrm{Re}(w)\mathrm{Im}(z)$。

现在我们陈述并证明一个引理，它将在定理（2.5）的证明中发挥作用。

引理 4.2 设 $f_d(x,y)=0$ 是一个 d 元组的映射，可改写为 $\Phi(x)=\Psi(y)$。假设存在一对互不相同的 d 元组，即 $(x_1,\cdots,x_d)$ 和 $(y_1,\cdots,y_d)$，其中 $x_i,y_j \in \hat{\mathsf{C}}$ 按照备注（2.2）的要求排列，使得对于 $1 \leqslant i, j \leqslant d$，$f_d(x_i,y_j)=0$ 当且仅当 $f_d(y_j,x_i)=0$，那么 $f_d(x,y)=0$ 也可以改写为 $\Phi(y)=\Psi(x)$。

证明：为了证明该引理，我们只需证明在 f_d 的表达式中，$x^d y^{d-1}$ 的系数与 $x^{d-1}y^d$ 的系数相同。采用类似的方法，我们还可以证明在 f_d 的表达式中，$x^i y^j$ 的系数与 $x^j y^i$ 的系数相同，由此即可完成证明。

由于 $f_d(x,\ y)=0$ 已知是一个从 d-元组到 2.3 定理表明，方程可以改写为 $\Phi(x)=\Psi(y)$，其中 Φ 和 Ψ 是分数次数的 d 函数，其形式如下

$$\Phi(x) = \frac{\kappa_d x^d + \cdots + \kappa_1 x + \kappa_0}{\lambda_d x^d + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0} \quad \text{and} \quad \Psi(y) = \frac{\mu_d y^d + \cdots + \mu_1 y + \mu_0}{\nu_d y^d + \cdots + \nu_1 y + \nu_0},$$

具有复系数。

有限情形：在这种情形下，如下文所述，我们将所有 x_i、y_j 和 z_k 都视为有限的。已知

$$\begin{aligned} (x_1,x_2,\cdots,x_d)_{\hat{\mathbb{C}}_x} &\rightleftarrows^{f_d} (y_1,y_2,\cdots,y_d)_{\hat{\mathbb{C}}_y} \quad \text{and} \\ (y_1,y_2,\cdots,y_d)_{\hat{\mathbb{C}}_x} &\rightleftarrows^{f_d} (x_1,x_2,\cdots,x_d)_{\hat{\mathbb{C}}_y}, \end{aligned}$$

我们考虑 C 中满足以下条件的不同值 z_1 和 z_2

$$\Phi(x_i) = z_1 = \Psi(y_j) \quad \text{and} \quad \Phi(y_j) = z_2 = \Psi(x_i) \quad \forall 1 \leqslant i,j \leqslant d.$$

换言之，$\{x_1,\cdots,x_d\}$ 是代数方程 $\Phi(x)-z_1=0$ 和 $\Psi(x)-z_2=0$的解集，其中各点按其重数重复出现。利用上文给出的 Φ 和Ψ的表达式，并考虑这些代数方程的根之和，我们得到

$$\frac{\kappa_{d-1}-z_1\lambda_{d-1}}{\kappa_d-z_1\lambda_d} = \frac{\mu_{d-1}-z_2\nu_{d-1}}{\mu_d-z_2\nu_d}.$$

同样，聚焦于代数方程 $\Psi(y) - z_1 = 0$和 $\Phi(y) - z_2 = 0$的解集，即 $\{y_1, \cdots, y_d\}$；其中各点同样按其重数重复出现，我们得到这些根之和为

$$\frac{\kappa_{d-1} - z_2\lambda_{d-1}}{\kappa_d - z_2\lambda_d} = \frac{\mu_{d-1} - z_1\nu_{d-1}}{\mu_d - z_1\nu_d}.$$

由上述两个方程可得，

$$z_1\left(\lambda_d\mu_{d-1} - \lambda_{d-1}\mu_d\right) + z_2\left(\kappa_d\nu_{d-1} - \kappa_{d-1}\nu_d\right) = z_1\left(\kappa_d\nu_{d-1} - \kappa_{d-1}\nu_d\right) + z_2\left(\lambda_d\mu_{d-1} - \lambda_{d-1}\mu_d\right),$$

由此可得

$$z_1\left(\kappa_d\nu_{d-1} - \kappa_{d-1}\nu_d - \lambda_d\mu_{d-1} + \lambda_{d-1}\mu_d\right) = z_2\left(\kappa_d\nu_{d-1} - \kappa_{d-1}\nu_d - \lambda_d\mu_{d-1} + \lambda_{d-1}\mu_d\right).$$

由于 $z_1 \neq z_2$，我们有

$$\kappa_d\nu_{d-1} - \lambda_d\mu_{d-1} = \kappa_{d-1}\nu_d - \lambda_{d-1}\mu_d,$$

wh这证明了方程 $f_d(x、\ y) = 0$ 中 $x^d y^{d-1}$ 和 $x^{d-1}y^d$ 的系数相等 .

无穷情形：这又有多种子情形： x_i或 y_j中有一个或多个可能为无穷（取决于 8 作为相应方程零点的重数），或者 z_k之一为无穷。不过，请注意，8 不可能同时出现在 x_i和 y_j的列举中。基于对称性，这里我们只讨论 x_i为无穷的情形。

子情形 - 1：当 x_i和 y_j均为有限值， $z_1 < \infty$ 而 $z_2 = \infty$时。在这种情况下，我们考虑方程

$$\Phi(x_i) = z_1 = \Psi(y_j) \quad \text{and} \quad \Phi(y_j) = \infty = \Psi(x_i) \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant d.$$

d d因此， $\{x_1、\ \cdots、\ x_d\}$是代数方程 $\sum\left(\kappa_i - z_1\lambda_i\right)x^i = 0$和 $\sum \nu_i x^i = 0$ 的解集，其中各点按其重数重复。再次聚焦于所有这些 x_i之和，得到

$$z_1 = \frac{\kappa_d\nu_{d-1} - \kappa_{d-1}\nu_d}{\lambda_d\nu_{d-1} - \lambda_{d-1}\nu_d}.$$

当我们进行类似的计算，并令 $\{y_1、\ \cdots、\ y_d\}$为代数方程d $d\sum\left(\mu_i - z_1\nu_i\right)y^i = 0$ 和 $\sum \lambda_i y^i = 0$的解集，其中点仍按其重数重复计入时，可得

$$z_1 = \frac{\lambda_d\mu_{d-1} - \lambda_{d-1}\mu_d}{\lambda_d\nu_{d-1} - \lambda_{d-1}\nu_d}.$$

由于 z_1 各表达式中的分母相等，其分子也应相等，因此得到

$$\kappa_d\nu_{d-1} - \lambda_d\mu_{d-1} = \kappa_{d-1}\nu_d - \lambda_{d-1}\mu_d.$$

子情形 - 2：当 x_i中只有 $(d-m)$ 个有限时，其余的 x_i均为 8，而所有 y_j和 z_k均为有限值。由于 x_i中有 m 个无穷大，且方程 $\Phi(x_i) - z_1 = 0$ 和 $\Psi(x_i) - z_2 = 0$，我们得到 $z_1 = \frac{\kappa_i}{\lambda_i}$和 $z_2 = \frac{\mu_i}{\nu_i}$，其中 $i = d$、$d-1$、$\cdots$、$d-m$。利用代数方程 $\Psi(y) - z_1 = 0$ 和 $\Phi(y) - z_2 = 0$ 的根之和，并代入上文得到的 z_1 和 z_2的值，可得

$$\kappa_d\nu_{d-1} - \lambda_d\mu_{d-1} = \kappa_{d-1}\nu_d - \lambda_{d-1}\mu_d.$$

子情形 - 3：当只有 $(d-m)$ 个 x_i 有限，其余 x_i 为 8，且所有 y_j 都有限时， $z_1 < \infty$ 和 $z_2 = \infty$。通过类似的方法，我们在这个最后且穷尽的情形中也得出相同的结论。•

定理 5 的证明 (2.5)、(2.6)和(2.7)

在本节中，我们证明定理（2.5）、（2.6）和（2.7）。

证明：(定理（2.5）的证明）定理（2.5）的证明完全基于引理（4.2）。从引理（4.2）的证明可以明显看出，系数矩阵是对称的，并且如方程中所述，系数 $\Phi(x) = \Psi(y)$ 满足

$$\kappa_i\nu_j + \lambda_j\mu_i \;=\; \kappa_j\nu_i + \lambda_i\mu_j, \qquad \text{for} \quad 0 \leqslant i, j \leqslant d.$$

•

现在我们证明定理（2.6）。

证明：(定理（2.6）的证明）我们首先证明 $1 \Longrightarrow 3$。由于 f_d 是一个 d元组的映射，我们有

$$\big(x_1, x_2, \cdots, x_d\big)_{\widehat{\mathbb{C}}_x} \;\overset{f_d}{\rightleftarrows}\; \big(y_1, y_2, \cdots, y_d\big)_{\widehat{\mathbb{C}}_y},$$

作为 $f_d(x, y) = 0$ 的解集。根据我们的假设，我们还得出 $f_d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$，即，

$$\big(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_d}\big)_{\widehat{\mathbb{C}}_x} \;\overset{f_d}{\rightleftarrows}\; \big(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \cdots, \overline{y_d}\big)_{\widehat{\mathbb{C}}_y}.$$

对后一个方程取复共轭，得到

$$\big(x_1, x_2, \cdots, x_d\big)_{\widehat{\mathbb{C}}_x} \;\overset{\overline{f_d}}{\rightleftarrows}\; \big(y_1, y_2, \cdots, y_d\big)_{\widehat{\mathbb{C}}_y},$$

其中，$\overline{f_d}$ 表示方程 (2.1) 中提到的对应，将每个系数 $A_{i,j}$ 替换为 A_{i,j_0}。因此，$f_d(x, y) = 0$ 和 $\overline{f_d}(x, y) = 0$ 表示同一个多项式对应，也就是说，其中一个是另一个的常数倍。比较系数可得，对于每个 $0 \leqslant i, j \leqslant d$，都有 $A_{i,j} = MA_{i,j}$，其中 $M \in \mathbb{C}$。因此，利用引理 (4.1)，对于每个 $0 \leqslant i, j \leqslant d$，都有 $\mathrm{Re}(A_{i,j}) = \rho$ 和 $\mathrm{Im}(A_{i,j})$，其中某个 $\rho \in \mathbb{R}$。于是，令 $A_{i,j} = \rho a_{i,j} + i a_{i,j}$，便得到该对应的另一种表示：

$$\begin{aligned} f_d(x, y) \;=\; (\rho + i)\; \big[& a_{(d,\,d)}x^d y^d \;+\; a_{(d,\,d-1)}x^d y^{d-1} \;+\; \cdots \;+\; a_{(d,\,1)}x^d y \;+\; a_{(d,\,0)}x^d \\ & + a_{(d-1,\,d)}x^{d-1}y^d \;+\; \cdots \;+\; a_{(d-1,\,0)}x^{d-1} \\ & + \cdots \\ & + a_{(0,\,d)}y^d \;+\; \cdots \;+\; a_{(0,\,0)}\big], \end{aligned}$$

其中，每个系数 $a_{i,j} \in \mathbb{R}$，从而证明了陈述 (3)。

由于 $3 \Longrightarrow 2$ 是平凡的，我们现在简短证明一下 $2 \Longrightarrow 1$。考虑对应 $\Phi(x) - \Psi(y) = 0$。然后，对整个方程取共轭，便得到陈述 (1)。•

现在证明定理（2.7）。

证明：（定理（2.7）的证明）这里，我们首先证明 $(1) \Longrightarrow (2)$。由于 f_d 是一个由 d元组构成的映射，根据定理（2.3），我们得到 $f_d(x$的因式分解，$y) = 0$ 为 $\Phi(x) = \Psi(y)$。然后，利用假设，我们得到 $f_d(\overline{y}$的因式分解，$\overline{x}) = 0$ 为 $\Phi(\overline{y}) = \Psi(\overline{x})$。对最后一个方程取复共轭，得到$\overline{\Phi(\overline{y})} = \overline{\Psi(\overline{x})}$，这是原对应 $f_d(x, y) = 0$的另一种表示。因此，这仅意味着存在一个 M¨obius 映射（行列式为 1，不失一般性）$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，使得 $\overline{\Psi}(x) = M \circ \Phi(x)$。这里，$\overline{\Psi}$ 表示分数次数的有理映射 d，如公式（2.2）所示，

其中 Ψ 表达式中的每个系数都取复共轭。因此，

$$\overline{\Psi}(x) \;=\; M \circ \Psi(y). \tag{5.1}$$

根据陈述 (1)中的假设，我们也有 $\overline{\Psi}(\overline{y}) = M \circ \Psi(\overline{x})$。对上面的方程取复共轭，得到 $\Psi(y) = \overline{M} \circ \overline{\Psi}(x)$。因此，

$$\overline{\Psi}(x) \quad = \quad \left(\overline{M}\right)^{-1} \circ \Psi(y). \tag{5.2}$$

由方程 (5.1) 和 (5.2)，我们得到 $M = \left(\overline{M}\right)^{-1}$，由此矩阵元素 B 和 C 为纯虚数，且 $A = \overline{D}$。这样的矩阵 M 可表示为 $M = \left(\overline{N}\right)^{-1} N$，其中矩阵 N 的元素为复数。将 M 的这一表达式代入方程 (5.1)，得到

$$N \circ \Psi(y) \quad = \quad \overline{N} \circ \overline{\Psi}(x),$$

从而证明了 (2)。证明的其余部分是一个简单的练习。 •

6 示例

在本节的最后部分，我们给出一些示例，以说明本文的主要定理。

例 6.1 考虑

$$\begin{aligned}
&5x^5y^5 + 5x^5y^4 + 10x^5y^3 + 7x^5y^2 + (1+6i)x^5y + 11x^5 \\
+\ &7x^4y^5 + 4x^4y^4 + 8x^4y^3 + 11x^4y^2 + (2+3i)x^4y + 7x^4 \\
+\ &(9-i)x^3y^5 + (3-2i)x^3y^4 + (6-4i)x^3y^3 + (15-i)x^3y^2 + 6x^3y + (3-5i)x^3 \\
+\ &15x^2y^5 + 10x^2y^4 + 20x^2y^3 + 23x^2y^2 + (4+9i)x^2y + 19x^2 \\
+\ &16xy^5 + 7xy^4 + 14xy^3 + 26xy^2 + (5+3i)xy + 10x \\
+\ &7y^5 + 9y^4 + 18y^3 + 9y^2 + (1+12i)y + 21 \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

这个对应可以分解为

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1}{2x^5 + x^4 - ix^3 + 3x^2 + x + 4} \quad = \quad -\frac{y^5 + 2y^4 + 4y^3 + y^2 + 3iy + 5}{3y^5 + y^4 + 2y^3 + 5y^2 + y + 1}.$$

因此，根据 定理 (2.3)，这是一个5元组映射。此外，系数矩阵的秩为 2，即 即 .,

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 & 7 & 1+6i & 11 \\ 7 & 4 & 8 & 11 & 2+3i & 7 \\ 9-i & 3-2i & 6-4i & 15-i & 6 & 3-5i \\ 15 & 10 & 20 & 23 & 4+9i & 19 \\ 16 & 7 & 14 & 26 & 5+3i & 10 \\ 7 & 9 & 18 & 9 & 1+12i & 21 \end{pmatrix} \quad = \quad 2.$$

例 6.2 (a) 对应

$$\begin{aligned}
&x^3y^3 + 3x^3y^2 + 3x^3y + x^3 + 3x^2y^3 + 12x^2y^2 + 15x^2y + 6x^2 \\
&\quad +3xy^3 + 15xy^2 + 24xy + 12x + y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \quad = \quad 0,
\end{aligned}$$

可以写成 $(xy + x + y + 2)^3 = 0$，使这个对应成为一个 3 元组映射。

(b) 对应

$$\begin{aligned}
&x^4y^4 + 2x^4y^2 + x^4 + 2x^3y^4 + 4x^3y^2 + 2x^3 + 3x^2y^4 + 8x^2y^2 \\
&\quad +5x^2 + 2xy^4 + 6xy^2 + 4x + y^4 + 4y^2 + 4 \quad = \quad 0,
\end{aligned}$$

可写为 $\left(x^2y^2 + x^2 + xy^2 + x + y^2 + 2\right)^2 = 0$，从而使该对应成为一个 4 元组映射；不过，括号内二次对应的每个根的重数在四次对应中都加倍了。

例 6.3 考虑如下 3 元组映射

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-x^3 - 8x^2 + 31x + 10} = \frac{2y^3 + 2y^2 - 20y - 16}{y^3 + 8y^2 - 31y - 10},$$

在三元组 $(1,2,3)$ 与 $(-1,-2,4)$ 之间建立对应，所用方式为 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$；其中我们沿用 z_k 的记号，如引理 (4.2)的证明中所示。注意，这个对应也可以表示为

$$\begin{aligned} &3x^3y^3 + 10x^3y^2 - 51x^3y - 26x^3 + 10x^2y^3 - 32x^2y^2 + 26x^2y - 68x^2 \\ &\quad -51xy^3 + 26xy^2 + 279xy + 386x - 26y^3 - 68y^2 + 386y + 220 = 0, \end{aligned}$$

其中，对于所有 $0 \leqslant i, j \leqslant 3$，$x^iy^j$ 的系数与 x^jy^i的系数相同，因此得到一个对称系数矩阵，符合定理 (2.5)的要求。

例 6.4 考虑由下式给出的 4 元组映射

$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 10x^2 + x + 7}{x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x + 1} = -\frac{y^4 + 2y^3 + 5y^2 + 6y + 4}{y^4 + 7y^3 + 2y^2 + y + 8},$$

上述分式四次表示中的所有系数均为实数。注意，这个对应也可以写为

$$\begin{aligned} &3x^4y^4 + 16x^4y^3 + 9x^4y^2 + 8x^4y + 20x^4 + 8x^3y^4 + 31x^3y^3 + 31x^3y^2 + 33x^3y + 44x^3 \\ &+ 11x^2y^4 + 72x^2y^3 + 25x^2y^2 + 16x^2y + 84x^2 + 5xy^4 + 15xy^3 + 22xy^2 + 25xy + 24x \\ &+ 8y^4 + 51y^3 + 19y^2 + 13y + 60 = 0, \end{aligned}$$

其中所有系数 $A_{i,j}$ 均为实数。此外，对最后一个方程取复共轭后，我们发现这个对应还满足定理 (1) 中的条件 (2.6)。

例 6.5　考虑以下一个秩 2 的三次对应的反厄米系数矩阵由下式给出

$$\begin{pmatrix} 28i & 6i-25 & 19i-7 & -31 \\ 25+6i & 12i & 17+5i & -15+4i \\ 7+19i & -17+5i & 12i & -2i-28 \\ 31 & 15+4i & 28-2i & -20i \end{pmatrix}$$

由上述系数矩阵构成的对应 f_3 是一个 3 元组映射，当且仅当 $f_3(x,y) = 0$ 满足 $f_3(\overline{y},\overline{x}) = 0$。那么，$f_3(x, y) = 0$ 也可以改写为

$$\frac{2ix^3 + 3x^2 + (1+i)x + 5}{7x^3 + (3-2i)x^2 + 6x + 2i} = \frac{-2iy^3 + 3y^2 + (1-i)y + 5}{7y^3 + (3+2i)y^2 + 6y - 2i},$$

说明定理(2.7)。

利益冲突　　益声明：作者特此声明，他们不存在利益冲突　　.

数据可用性声明：除下文提及的参考文献外，本文稿的编写未使用任何相关数据。

参考文献

[1] Bharali, G. 和 Sridharan, S.，《P^1 上全纯对应的动力学：不变测度与正规性集》，《复变函数与椭圆方程》，61（2016），（1587 - 1613）。[2] Bharali, G. 和 Sridharan, S.，《与有限生成有理半群相关的全纯对应》，《国际数学杂志》，28（2017），（1750108 - pp25）。[3] Boyd, D.，《有限生成有理半群的一个不变测度》，《复变函数理论与应用》，39（1999），（229 - 254）。[4] Bullett, S.，《二次对应的动力学》，《非线性》，1（1988），（27 - 50）。[5] Bullett, S.，《算术几何平均数的动力学》，《拓扑学》，30（1991），（171 - 190）。[6] Bullett, S. 和 Freiberger, M.，《将切比雪夫型映射与海克群配对的全纯对应》，《遍历理论与动力系统》，25（2005），（1057 - 1090）。[7] Bullett, S.、Osbaldestin, A. H. 和 Percival, I. C.，《一个迭代隐式复映射》，《物理学D辑》，19（1986），（290 - 300）。[8] Bullett, S. 和 Penrose, C.，《迭代对应集锦》，《实验数学》，3（1994），（85 - 105）。[9] Bullett, S. 和 Penrose, C.，《全纯对应的正规集与极限集》，《基础数学》，167（2001），（111 - 171）。[10] Dinh, T.-C.，《多项式对应的原像与周期点的分布》，[多项式对应的原像与周期点的分布，《法国数学会通报》，133（2005），（363 - 394）。[11] Dinh, T.-C.，《多值亚纯映射序列与层状流》，《几何分析杂志》，15（2005），（207 - 227）。[12] Dinh, T.-C. 和 Sibony, N.，《亚纯变换的值分布及其应用》，《赫尔维蒂数学评论》，81（2006），（221 - 225）。[13] Hinkkanen, A. 和 Martin, G. J.，《有理函数半群的动力学 I》，《伦敦数学会会刊》，73（1996），（358 - 384）。[14] Hinkkanen, A. 和 Martin, G. J.，《有理半群的朱利亚集》，《数学杂志》，222（1996），（161 - 169）。[15] Sumi, H.，《与有限生成有理半群相关的斜积映射》，《非线性》，13（2000），（995 - 1019）。[16] Sumi, H.，《次双曲与半双曲有理半群及斜积的动力学》，《遍历理论与动力系统》，21（2001），（563 - 603）。[17] Sumi, H.，《扩张有理半群的朱利亚集的维数》，《古代数学杂志》，28（2005），（390 - 422）。