arXiv:2303.13944v1 [math.OC] 24 Mar 2023

闵可夫斯基空间中的 m-DMP 逆及其应用

Jiale Gao [a]，Qingwen Wang [b]，Kezheng Zuo [a*a] 湖北师范大学数学与统计学院，中国湖北省黄石市，435002[b] 上海大学理学院，中国上海市，200444

2023年3月27日

摘要：本文首先介绍闵可夫斯基空间中的一种新的广义逆，称为 m-DMP 逆，并讨论其代数和几何性质。第二个目标是通过值域、零空间和矩阵方程对 m-DMP 逆进行等价刻画，并给出其积分表示、极限表示及若干显式表达式。最后，本文介绍 m-DMP 逆在线性方程组求解和约束优化问题中的应用。

关键词： m-DMP 逆；闵可夫斯基空间；Hartwig-Spindelb¨ock 分解；满秩分解；线性方程组

美国数学会主题分类：15A09、15A03、15A24

1 引言

自 Malik 和 Thome [20] 利用 Moore-Penrose 逆[26] 和 Drazin 逆 [5], 定义 DMP 逆以来，近年来，围绕 DMP 逆的研究引起了极大关注。Liu 和 Cai [16] 提出了两种计算 DMP 逆的迭代方法。 [41] 和 [15], 分别推导出了 DMP 逆的积分表示和行列式表示。Ferreyra 等人 [7] 建立了用于确定 DMP 逆的极大矩阵类。利用经典的 Cayley-Hamilton定理，Wang

*电子邮箱地址：xiangzuo28@163.com（K. Zuo）。

等人 [34] 给出了 DMP 逆的一个消去多项式。Ma 等人 [19] 研究了 DMP 逆的刻画、迭代方法、符号模式和扰动分析，以及其在求解奇异线性方程组中的应用。Zuo 等人 [43] 根据 DMP 逆的值域和零空间，进一步给出了其刻画。此外，DMP 逆的概念从复方阵扩展到了复矩形矩阵 [23], 、希尔伯特空间中的算子 [25], 、环中的元素 [42], 、任意向量空间上的有限幂自同态 [30], 、四元数斜域上的方阵[14], 以及张量 [31]。此外，[9, 24]还建立了 DMP 逆的其他扩展形式。

在研究偏振光时，Renardy [28] 研究了闵可夫斯基空间中的奇异值分解，以便快速验证穆勒矩阵是否将前向光锥映射到自身。随后，Meenakshi [21], 建立了闵可夫斯基空间中的闵可夫斯基逆，并根据该逆给出了穆勒矩阵在闵可夫斯基空间中存在奇异值分解的条件。过去二十年来，数学界投入了大量精力研究闵可夫斯基逆。关于其性质、应用和推广的更多详情，可参见 [1, 10–13, 17,18, 22, 40]。最近，Wang 等人定义了闵可夫斯基空间中的 𝔪-核逆 [35]、 𝔪- 核 -EP 逆 [36] 和 𝔪- 弱群逆 [38] ，它们分别可视为核逆 [2], 、核 -EP 逆 [27] 和弱群逆 [33], 的推广。

受闵可夫斯基空间中 DMP 逆及广义逆研究的启发，本文旨在引入一种闵可夫斯基空间中的新广义逆，称为 𝔪-DMP 逆，并探讨其性质、刻画、表示和应用。

本文的主要贡献概括如下：

- 闵可夫斯基空间中 𝔪-DMP 逆的定义，被给定为某个矩阵方程组的唯一解。基于其显式表达式，还利用 Hartwig-Spindelb¨ock 分解得到了 𝔪-DMP 逆的典范形式。

- The 𝔪-DMP 逆可表示为具有指定值域和零

空间的外逆，并展示了其一些代数性质和几何性质。反过来， 𝔪-DMP 逆也可通过其基本性质进行等价刻画。

• 利用满秩分解可得到 𝔪-DMP 逆的显式公式。根据这一结果，我们给出了 𝔪-DMP 逆的积分表示，并提出了几种 𝔪-DMP 逆的极限表示。

• 我们运用 𝔪-DMP 逆求解闵可夫斯基空间中的线性方程组以及一个最小范数问题，并给出了该方程组唯一解的简化的克莱姆法则。

本文结构安排如下。第2节回顾一些必要的概念、定义和引理。第3节介绍 𝔪-DMP 逆及其性质。第4节给出 𝔪-DMP 逆的进一步刻画和表示。第5节介绍 𝔪-DMP 逆在求解线性方程组和优化问题中的应用。第6节给出结论。

2 预备知识

本文通篇使用以下记号。令 $\mathbb{C}^n$、 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{C}_k^{n\times n}$ 分别表示所有复数 n维向量、复数 $m\times n$ 矩阵以及指标为 k的复数 $n\times n$ 矩阵的集合。满足 $\mathrm{rank}(A^{k+1}) = \mathrm{rank}(A^k)$ 的最小非负整数 k 称为 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的指标，记作 $\mathrm{Ind}(A)$。符号 A^*、 $\mathrm{rank}(A)$、 $\mathcal{R}(A)$、 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\|A\|_F$ 分别表示 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$的共轭转置、秩、值域、零空间和弗罗贝尼乌斯范数。我们用 I_n表示 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的单位矩阵，用 0 表示阶数适当的零矩阵。沿着 $\mathcal{T}$到 $\mathcal{S}$ 的投影算子记为 $P_{\mathcal{S},\ \mathcal{T}}$，其中$\mathcal{S}$、 $\mathcal{T}\subseteq\mathbb{C}^n$ 是满足其直和为 $\mathbb{C}^n$（即 $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}=\mathbb{C}^n$）的子空间。

此外，$\mathbb{C}^n$ 中两个元素 x 和 y 的闵可夫斯基内积 [21, 28] 定义为 $(x,y) =< x, Gy >$，其中 $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_{n-1}\end{pmatrix}$ 表示阶数为 n的闵可夫斯基度量矩阵，而 $<\cdot,\cdot>$ 是常规的欧几里得内积。配备闵可夫斯基内积的复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 称为闵可夫斯基空间。注意，

闵可夫斯基空间也是一种不定内积空间 [10]。$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的闵可夫斯基伴随为 $A^{\sim} = GA^*F$, 其中 G 和 F 分别是阶数为 n 和m的闵可夫斯基度量矩阵。

接下来，我们将回顾一些广义逆的定义。

定义 2.1。 [26, 32] 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$。则满足以下条件的矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad (XA)^* = XA,$$

称为 A 的 Moore-Penrose 逆，记作 $A^{\dagger}$。此外，若 X 满足 $XAX = X$，则称 X 为 A 的外逆。对于子空间 $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}^n$ 和 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}^m$，满足 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{T}$ 和 $\mathcal{N}(X) = \mathcal{S}$ 的 A 的外逆 X 是唯一的，记作 $A^{(2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$。

定义 2.2。 [5, 6] 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}_k$。则满足以下条件的矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$XAX = X, \quad AX = XA, \quad A^{k+1}X = A^k,$$

称为 A 的 Drazin 逆，记作 A^D。当 $\mathrm{Ind}(A) = 1$ 时， A 的 Drazin 逆退化为 A 的群逆，记作 $A^{\#}$。

定义 2.3。 [20] 令 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}_k$。那么我们称满足以下条件的矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$XAX = X, \quad XA = A^DA, \quad A^kX = A^kA^{\dagger},$$

为 A 的 DMP 逆，记作 $A^{D,\dagger}$。并且， $A^{D,\dagger} = A^DAA^{\dagger}$。

定义 2.4。 [21] 令 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$。若存在一个矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$，使得

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^{\sim} = AX, \quad (XA)^{\sim} = XA,$$

则 X 称为 A 的闵可夫斯基逆，记作 $A^{\mathfrak{m}}$。

随后，我们回顾几个将在后文用到的辅助引理。首先，我们介绍 Hartwig-Spindelb¨ock 分解，它是研究广义逆的有效工具。

引理 2.5（Hartwig-Spindelb¨ock 分解，[8]）。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ and $r = \text{rank}(A)$。那么 A 可以表示为

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \tag{2.1}$$

其中，$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵，$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$ 是 A的奇异值对角矩阵，$\sigma_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., r)$，且 $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$和 $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ 满足 $KK^* + LL^* = I_r$。

引理 2.6. *[20,* 公式（14）*]* 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 由（2.1）给出。则，

$$A^D = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & \left((\Sigma K)^D\right)^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*. \tag{2.2}$$

文中引用了 Drazin 逆和闵可夫斯基逆的若干重要性质。

引理 2.7. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$。则以下陈述等价:

（1） A^{m}存在;

（2） *[21,* 定理 *1]* 秩（$AA^{\sim}$）=秩（$A^{\sim}A$）=秩（A）;

(3) 秩($A^{\sim}AA^{\sim}$) =秩(A);

(4) 定理 7，*8]* $CC^{\sim}$ 和 $B^{\sim}B$ 均为非奇异，其中 $BC = A$ 是 A 的一个满秩分解，秩为 r; 此时，$A^{\text{m}} = C^{\sim}(CC^{\sim})^{-1}(B^{\sim}B)^{-1}B^{\sim}$。

证明。我们只证明 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。事实上，由于 $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{N}(A^{\sim}) = \{0\}$，根据秩($A^{\sim}A$) =秩($A$), 由秩($AA^{\sim}$) = 秩($A$)可得

$$\begin{aligned} \text{rank}(A^{\sim}AA^{\sim}) &= \text{rank}(AA^{\sim}) - \dim(\mathcal{R}(AA^{\sim}) \cap \mathcal{N}(A^{\sim})) \\ &= \text{rank}(A) - \dim(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A^{\sim})) = \text{rank}(A). \end{aligned}$$

反过来，证明很容易，因此略去。 □

引理 2.8. *[10,* 定理 *9]* 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 满足 A^{m} 存在。则，

(1) $\mathcal{R}(A^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{R}(A^{\sim})$ 和 $\mathcal{N}(A^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^{\sim})$;
(2) $AA^{\mathfrak{m}} = P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{N}(A^{\sim})}$; (3)
$A^{\mathfrak{m}}A = P_{\mathcal{R}(A^{\sim})\ \mathcal{N}(A)}$.

引理 2.9. *[32,* 定理 2.1.*4]* 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 。则,

(1) $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^k)$ 且 $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^k)$;
(2) $AA^D = A^DA = P_{\mathcal{R}(A^k)\,\mathcal{N}(A^k)}$。

此外，回顾了几个具有指定值域和零空间的外逆的极限表达式。

引理 2.10. *[39,* 定理 2.*1]* 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ 和 $Y \in \mathbb{C}^{p\times m}$。若 $A^{(2)}_{\mathcal{R}\,(XY)\,\mathcal{N}(XY)}$存在，则

$$A^{(2)}_{\mathcal{R}(XY),\mathcal{N}(XY)} = \lim_{\lambda\to 0} X(\lambda I_p + YAX)^{-1}Y. \tag{2.3}$$

引理 2.11. *[37,* 定理 2.*4]* 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，并设 $H \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足 $\mathcal{R}(H) = \mathcal{T}$ 且 $\mathcal{N}(H) = \mathcal{S}$，其中 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{S}$ 分别是 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$的子空间。若 $A^{(2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 存在，则

$$A^{(2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = \lim_{\lambda\to 0} H(\lambda I_m + AH)^{-1} \tag{2.4}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} (\lambda I_n + HA)^{-1}H. \tag{2.5}$$

3 闵可夫斯基空间中的 m-DMP 逆

本节的主要目的是介绍闵可夫斯基空间中的 m-DMP 逆，并展示其一些性质。我们首先考虑以下矩阵方程组，其唯一解定义为 m-DMP 逆。

定理 3.1. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 满足秩($A^{\sim}AA^{\sim}$) =秩(A)。那么矩阵方程组

$$XAX = X, \quad XA = A^DA, \quad A^kX = A^kA^{\mathfrak{m}}, \tag{3.1}$$

有唯一解

$$X = A^DAA^{\mathfrak{m}}.$$

证明。利用条件 (3.1) 和引理 2.9(2)，我们得到

$$X = XAX = A^DAX = (A^DA)^kX = (A^D)^kA^kA^{\mathfrak{m}} = A^DAA^{\mathfrak{m}},$$

由此完成证明。 □

定义 3.2. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 的秩为 $A^{\sim}AA^{\sim}$，且 $=$ 的秩为 A。 A 在闵可夫斯基空间中的 $\mathfrak{m}$-DMP 逆，记作 $A^{D,\ \mathfrak{m}}$，定义为

$$A^{D,\mathfrak{m}} = A^DAA^{\mathfrak{m}}. \tag{3.2}$$

注 3.3. 比较 *[35,* 定理 2.*9]* 与定义 3.2 可知，显然， $\mathfrak{m}$-DMP 逆的概念推广了 $\mathfrak{m}$-核逆的概念，后者记作$A\mathfrak{m}\bigcirc$。换言之，如果 $A \in \mathbb{C}_1^{n\times n}$满足秩$(A^{\sim}AA^{\sim})$ =秩(A)，那么 $A^{D,\ \mathfrak{m}} = A\mathfrak{m}\bigcirc$。

以下定理给出了闵可夫斯基逆和$\mathfrak{m}$-DMP 逆关于 Hartwig-Spindelb¨ock 分解的规范表示。

定理 3.4. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 由 (2.1) 给出，设 $\Delta = \begin{pmatrix} K & L \end{pmatrix} U^*GU \begin{pmatrix} K^* \\ L^* \end{pmatrix}$，且闵可夫斯基度量矩阵 $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的分块为

$$G = U \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2^* & G_4 \end{pmatrix} U^*, \tag{3.3}$$

其中 $G_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$、 $G_2 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ 和 $G_4 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$。

(1) 秩(A) =秩$(AA^{\sim})$ 当且仅当 Δ 非奇异。

(2) 秩(A) =秩$(A^{\sim}A)$ 当且仅当 G_1 非奇异。

(3) 若 Δ 和 G_1 均为非奇异，则

$$A^{\mathfrak{m}} = GU \begin{pmatrix} K^*(G_1\Sigma\Delta)^{-1} & 0 \\ L^*(G_1\Sigma\Delta)^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^*G. \tag{3.4}$$

证明。(1)。利用 Hartwig-Spindelb¨ock 分解，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA^{\sim})\Leftrightarrow\operatorname{rank}(A)&=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^{*}GU\begin{pmatrix}(\Sigma K)^{*} & 0\\ (\Sigma L)^{*} & 0\end{pmatrix}\right)\\ &\Leftrightarrow\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}K & L\end{pmatrix}U^{*}GU\begin{pmatrix}K^{*}\\ L^{*}\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

这等价于 Δ 是非奇异的。

(2)。由 $KK^{*}+LL^{*}=I_r$可知，$\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\end{pmatrix}$ 满行秩。再次使用 Hartwig-Spindelb¨ock 分解，我们推导得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^{\sim}A)\Leftrightarrow\operatorname{rank}(A)&=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}(\Sigma K)^{*} & 0\\ (\Sigma L)^{*} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1 & G_2\\ G_2^{*} & G_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\\ &\Leftrightarrow\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\end{pmatrix}^{*}G_1\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\end{pmatrix}\right)\\ &\Leftrightarrow\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(G_1),\end{aligned}$$

这等价于 G_1 是非奇异的。

(3)。注意，(2.1) 中给出的 A 可以改写为

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K & L\end{pmatrix}U^{*},\tag{3.5}$$

并且 $B:=U\begin{pmatrix}\Sigma\\ 0\end{pmatrix}$ 和 $C:=\begin{pmatrix}K & L\end{pmatrix}U^{*}$ 分别具有满列秩和满行秩。若 Δ 和 G_1 非奇异，由引理 2.7(2)可知 A^{m} 存在。因此，

将引理 2.7(4)应用于 (3.5)，可得

$$\begin{aligned}
A^{\mathtt{m}} =& C^{\sim}(CC^{\sim})^{-1}(B^{\sim}B)^{-1}B^{\sim} \\
=& GU\begin{pmatrix} K^* \\ L^* \end{pmatrix} G\left(\begin{pmatrix} K & L \end{pmatrix} U^*GU\begin{pmatrix} K^* \\ L^* \end{pmatrix} G\right)^{-1} \\
& \left(G\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \end{pmatrix} U^*GU\begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} G\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \end{pmatrix} U^*G \\
=& GU\begin{pmatrix} K^* \\ L^* \end{pmatrix} \Delta^{-1}(\Sigma G_1\Sigma)^{-1}\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \end{pmatrix} U^*G \\
=& GU\begin{pmatrix} K^*(G_1\Sigma\Delta)^{-1} & 0 \\ L^*(G_1\Sigma\Delta)^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^*G,
\end{aligned}$$

至此，该定理的证明完成。 □

定理 3.5. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 由 (2.1) 给出，且秩($A^{\sim}AA^{\sim}$) = 秩(A)，并设 G_1和 G_2 由 (3.3) 给出。则 $A^{D,\ \mathtt{m}}$ 具有如下形式的分解

$$A^{D,\mathtt{m}} = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^D G_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*G \tag{3.6}$$

$$= U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & (\Sigma K)^D G_1^{-1}G_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*. \tag{3.7}$$

*P*roof. 将 (2.1)、(2.2) 和 (3.4) 代入 (3.2)，通过直接计算可得 t

$$
\begin{aligned}
A^{D,\mathfrak{m}} =& U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & \left((\Sigma K)^D\right)^2\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*GU\begin{pmatrix} K^*(G_1\Sigma\Delta)^{-1} & 0 \\ L^*(G_1\Sigma\Delta)^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^*G \\
=& U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & \left((\Sigma K)^D\right)^2\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \end{pmatrix}U^*GU\begin{pmatrix} K^* \\ L^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta^{-1}\Sigma^{-1}G_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^*G \\
=& U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & \left((\Sigma K)^D\right)^2\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix} \Delta^{-1}\Sigma^{-1}G_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^*G \\
=& U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^DG_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*G = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^DG_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2^* & G_4 \end{pmatrix}U^* \\
=& U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & (\Sigma K)^DG_1^{-1}G_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*,
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

注 3.6. 在定理 3.5 的假设下，我们还有一个与 A 相关的外逆，即 $A^{\mathfrak{m},\ D} = A^{\mathfrak{m}}AA^D$，称为闵可夫斯基空间中 A 的对偶 $\mathfrak{m}$-DMP 逆。采用与 (3.6) 的证明类似的方法，我们有

$$
A^{\mathfrak{m},D} = GU\begin{pmatrix} K^*\Delta^{-1}K(\Sigma K)^D & K^*\Delta^{-1}K((\Sigma K)^D)^2\Sigma L \\ L^*\Delta^{-1}K(\Sigma K)^D & L^*\Delta^{-1}K((\Sigma K)^D)^2\Sigma L \end{pmatrix}U^*.
$$

预计 $A^{\mathfrak{m},\ D}$ 将具有与 $A^{D,\ \mathfrak{m}}$ 类似的性质。

例 3.7。设

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

则秩($A^{\sim}AA^{\sim}$) = 秩(A) = 2,

$$A^{\dagger}=\begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 & -0.33333 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.33333 & 0.33333 & 0.66667 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{D,\dagger}=\begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 & -0.33333 & 0 & 0\\ 0.66667 & 0.33333 & -0.33333 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{D,\mathfrak{m}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{\mathfrak{m},D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，$A^{D,\mathfrak{m}}$ 是 A的一个新的广义逆，不同于 $A^{\dagger}$、A^{D}、$A^{D,\dagger}$ 和$A^{\mathfrak{m}}$。这也表明，$A^{D,\mathfrak{m}}$ 与 $A^{\mathfrak{m},D}$ 是不同的。

以下定理给出了 m-DMP 逆的一些基本性质，表明 m-DMP 逆是具有指定值域和零空间的外逆。

定理 3.8. 设 $A\in\mathbb{C}_{k}^{n\times n}$，且 rank($A^{\sim}AA^{\sim}$) = rank($A$)。则,

(1) 秩($A^{D,\mathfrak{m}}$) =秩(A^{k}); (2) $\mathcal{R}(A^{D,\mathfrak{m}})=\mathcal{R}(A^{k})$ and $\mathcal{N}(A^{D,\mathfrak{m}})=\mathcal{N}(A^{k}A^{\mathfrak{m}})$; (3) $A^{D,\mathfrak{m}}=A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^{k})}$ $\mathcal{N}(A^{k}A^{\mathfrak{m}})$; (4) $AA^{D,\mathfrak{m}}=P_{\mathcal{R}(A^{k})\,\mathcal{N}(A^{k}A^{\mathfrak{m}})}$; (5) $A^{D,\mathfrak{m}}A=A^{D}A=P_{\mathcal{R}(A^{k})\,\mathcal{N}(A^{k})}$.

证明。(1)。由引理 2.9 可知

$$\mathrm{rank}(A^D) = \mathrm{rank}(A^D A) = \mathrm{rank}(A^D A A^{\mathfrak{m}} A) \leq \mathrm{rank}(A^D A A^{\mathfrak{m}}) \leq \mathrm{rank}(A^D),$$

结合 (3.2)，可得 rank($A^{D,\ \mathfrak{m}}$) =rank(A^k)。

(2)。利用 (3.2) 和第 (1) 项，可直接得到 $\mathcal{R}(A^{D,\ \mathfrak{m}}) = \mathcal{R}(A^k)$。由于

$$\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^k A^{\mathfrak{m}} A) \leq \mathrm{rank}(A^k A^{\mathfrak{m}}) \leq \mathrm{rank}(A^k),$$

再次由第 (1) 项可得

$$\mathrm{rank}(A^k A^{\mathfrak{m}}) = \mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{D,\mathfrak{m}}). \tag{3.8}$$

此外,

$$\mathcal{N}(A^k A^{\mathfrak{m}}) \subseteq \mathcal{N}((A^D A)^k A^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^D A A^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^{D,\mathfrak{m}}),$$

这意味着 $\mathcal{N}(A^{D,\ \mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^k A^{\mathfrak{m}})$。

(3)。由 (3.1) 和第 (2) 项显然可得。

(4). 根据 Ind(A) $= k$ 和第 (2) 项，我们推得

$$\mathcal{R}(AA^{D,\mathfrak{m}}) = A\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^k).$$

显然，rank($AA^{D,\mathfrak{m}}$) =rank(A^k)，结合第 (1) 项和第 (2) 项可得

$$\mathcal{N}(AA^{D,\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^{D,\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^k A^{\mathfrak{m}}).$$

于是，由于 $A^{D,\mathfrak{m}}$ 是 A的外逆，我们有 $AA^{D,\mathfrak{m}} = P_{\mathcal{R}(A^k)\,\mathcal{N}(A^k A^{\mathfrak{m}})}$。

(5). 根据 (3.2) 和引理 2.9(2) 很容易得到。 □

从几何视角刻画广义逆是一种常见的方法，例如，[2, 定义 1], [20, 定理 2.13], [23, 定理 3.2], 等。因此，下面的定理给出了 $\mathfrak{m}$-DMP 逆的几何刻画。

定理 3.9。设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 的秩($A^{\sim}AA^{\sim}$) = 秩(A)。则 $A^{D,\mathfrak{m}}$ 是满足以下条件的唯一矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$AX = P_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^k A^{\mathfrak{m}})}, \quad \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k). \tag{3.9}$$

证明。显然，由定理 3.8(2)和(4)可知， $A^{D,\mathrm{m}}$ 是(3.9)的一个解。接下来，我们将证明(3.9)解的唯一性。假设 X_1 和 X_2 都满足(3.9)。因此，由于$AX_1 = AX_2 = P_{\mathcal{R}(A^k)\,\mathcal{N}(A^k A^{\mathrm{m}})}$，可得 $\mathcal{R}$ $(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^k)$。此外，由 $\mathcal{R}(X_1) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$和 $\mathcal{R}(X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$可知 $\mathcal{R}($ $X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$。因此，根据 Ind$(A) = k$，我们可直接得到

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\},$$

即 $X_1 = X_2$。因此， $A^{D,\ \mathrm{m}}$ 是方程 (3.9) 的唯一解。 □

注 3.10。设 $A \in \mathbb{C}_1^{n\times n}$的秩满足 rank$(A^{\sim}AA^{\sim})$ = rank(A)。根据 [35, 定理 2.7(I)、定理 2.9]和引理 2.8(1)，很容易得到 $A\mathrm{m}\bigcirc = A^{(1,2)}_{\mathcal{R}\ A\,()\,\mathcal{N}(A^{\sim})}$。此外，根据注 3.3，定理 3.9 可直接推出 $A\mathrm{m}\bigcirc$ 是满足 $AX = P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{N}(A^{\sim})}$ 且 $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$ 的唯一矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$。

下面的定理展示了 m-DMP 逆的一些新性质，这些性质继承自 DMP 逆 [20, 命题 2.14]。

定理 3.11. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 由 (2.1) 给出，且 rank$(A^{\sim}AA^{\sim})$ = rank(A)。则，

(1) $A^{D,\mathrm{m}} = A^D P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^{\sim})}$; (2) $(A^{D,\mathrm{m}})^l = \begin{cases} (A^D A^{\mathrm{m}})^{\frac{l}{2}}, & \text{若 } l\text{为偶数;} \\ A($

$A^D A^{\mathrm{m}})^{\frac{l+1}{2}}$, 若 l为奇数; (3) $A^{D,\mathrm{m}}$ =$(A^2 A^{\mathrm{m}})^D$; (4) $((A^{D,\mathrm{m}})^D)^D = A^{D,\mathrm{m}}$; (5) $AA^{D,\mathrm{m}} = A^{D,\mathrm{m}}A$当且仅当 $A^{D,\mathrm{m}} = A^D$当且仅当 $\mathcal{N}(A^{\sim}) \subseteq \mathcal{N}(A^k)$;

(6) $A^{D,\mathrm{m}} = 0$ 当且仅当 A 为幂零;

(7) $A^{D,\ \mathrm{m}} = A$ 当且仅当 $(\Sigma K)^D = \Sigma L$ 且 $L = KG_1^{-1}G_2$, 其中 G_1 和 G_2 由 (3.3) 给出。

证明。(1)。由 (3.2) 和引理 2.8(2) 可知。

(2). 由 (3.2) 可得

$$(A^{D,\mathfrak{m}})^2 = A^D A A^{\mathfrak{m}} A^D A A^{\mathfrak{m}} = A^D A A^{\mathfrak{m}} A A^D A^{\mathfrak{m}} = A^D A^{\mathfrak{m}}.$$

于是，当 l为偶数时，可得

$$(A^{D,\mathfrak{m}})^l = ((A^{D,\mathfrak{m}})^2)^{\frac{l}{2}} = (A^D A^{\mathfrak{m}})^{\frac{l}{2}}. \tag{3.10}$$

此外，若 l 为奇数，则由 (3.10) 和 (3.2) 可得

$$(A^{D,\mathfrak{m}})^l = A^{D,\mathfrak{m}}(A^{D,\mathfrak{m}})^{l-1} = A^{D,\mathfrak{m}}(A^D A^{\mathfrak{m}})^{\frac{l-1}{2}} = A A^D A^{\mathfrak{m}}(A^D A^{\mathfrak{m}})^{\frac{l-1}{2}} = A(A^D A^{\mathfrak{m}})^{\frac{l+1}{2}}.$$

(3). 利用 Cline公式，即 $(XY)^D = X\left((YX)^D\right)^2 Y$对于 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$和 $Y \in \mathbb{C}^{n\times m}$，由 (3.2) 可推得

$$(A^2 A^{\mathfrak{m}})^D = (A(AA^{\mathfrak{m}}))^D = A\left((AA^{\mathfrak{m}}A)^D\right)^2 AA^{\mathfrak{m}} = A(A^D)^2 AA^{\mathfrak{m}} = A^D AA^{\mathfrak{m}} = A^{D,\mathfrak{m}}.$$

(4). 再次利用 Cline公式，由 (3.2)、引理 2.8(2) 和引理 2.9(1) 可得

$$\begin{aligned}(A^{D,\mathfrak{m}})^D &= (A^D(AA^{\mathfrak{m}}))^D = A^D\left((AA^{\mathfrak{m}}A^D)^D\right)^2 AA^{\mathfrak{m}} \\ &= A^D\left((A^D)^D\right)^2 AA^{\mathfrak{m}} = (A^D)^D AA^{\mathfrak{m}} = (A^D)^{\#} AA^{\mathfrak{m}}.\end{aligned}$$

于是，再由 Cline公式可得

$$\begin{aligned}((A^{D,\mathfrak{m}})^D)^D &= ((A^D)^{\#} AA^{\mathfrak{m}})^D = (A^D)^{\#}\left((AA^{\mathfrak{m}}(A^D)^{\#})^D\right)^2 AA^{\mathfrak{m}} \\ &= (A^D)^{\#}\left(((A^D)^{\#})^{\#}\right)^2 AA^{\mathfrak{m}} = A^D AA^{\mathfrak{m}}.\end{aligned}$$

(5). 根据 (3.2)、引理 2.8(2) 和引理 2.9(2)，我们可知

$$\begin{aligned}AA^{D,\mathfrak{m}} = A^{D,\mathfrak{m}}A &\Leftrightarrow AA^D(AA^{\mathfrak{m}} - I_n) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}(A^{\sim}) \subseteq \mathcal{N}(A^k) \\ &\Leftrightarrow A^D(AA^{\mathfrak{m}} - I_n) = 0 \Leftrightarrow A^{D,\mathfrak{m}} = A^D.\end{aligned}$$

(6). 利用 (3.6) 和 $[20, \text{定理 } 2.5]$, 即， $A^{D,\,\dagger} = U\begin{pmatrix}(\Sigma K)^D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*$，可得

$$A^{D,\mathfrak{m}} = 0 \Leftrightarrow (\Sigma K)^D = 0 \Leftrightarrow A^{D,\dagger} = 0,$$

结合 [20, 命题 2.14 (g)], 即, $A^{D,\dagger}=0 \Leftrightarrow A$ 是幂零的，可知第 (6) 项成立。

(7). 由 (2.1) 和 (3.7) 显然可得。 □

注 3.12. 在定理 3.11 的假设下，利用 (2.1) 和 (3.4)，经过直接计算可得

$$A^2A^{\mathfrak{m}}=U\begin{pmatrix}\Sigma KG_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*G.$$

然后，利用定理 3.5 中的 (3.6)，我们可以验证 $A^{D,\mathfrak{m}}$ 满足 $A^2A^{\mathfrak{m}}$ 的 Drazin 逆的定义，即 $A^{D,\mathfrak{m}}=(A^2A^{\mathfrak{m}})^D$。因此，在定理 3.11(3) 的证明中，我们成功避免了使用 Cline公式。

4 m-DMP 逆的进一步刻画与表示

本节将继续从不同角度刻画和表示 m-DMP 逆。我们首先根据第 3 节中得到的基本性质来刻画 m-DMP 逆。

定理 4.1. 设 $A\in\mathbb{C}_k^{n\times n}$，且 rank($A^{\sim}AA^{\sim}$) =rank($A$)，并设 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$。则以下陈述等价:

(1) $X=A^{D,\mathfrak{m}}$; (2) $\mathcal{R}(X)\subseteq\mathcal{R}(A^k)$, $A^DX=A^DA^{\mathfrak{m}}$; (3) $\mathcal{R}(X)\subseteq\mathcal{R}(A^k)$, $A^kX=A^kA^{\mathfrak{m}}$; (4) $\mathcal{N}(A^kA^{\mathfrak{m}})\subseteq\mathcal{N}$ (X), $XA=AA^D$; (5) $\mathcal{N}(A^kA^{\mathfrak{m}})$ $\subseteq\mathcal{N}(X)$, $XA^{k+1}=A^k$。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 这是定理 3.8(2)和(3.2)的直接推论。 (2) $\Rightarrow$ (3). 左乘 A^{k+1}即可得出 $A^DX=A^DA^{\mathfrak{m}}$ 。

(3) $\Rightarrow$ (4). 由 $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$可知，$\text{rank}(X) \leq \text{rank}(A^k)$，因此由(3.8)和 $A^kX = A^kA^{\mathrm{m}}$ 可得$\text{rank}(X) = \text{rank}(A^k)$，且 $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^kA^{\mathrm{m}})$。然后，根据引理 2.9(2) 和 $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$，我们推得

$$\begin{aligned} A^kX = A^kA^{\mathrm{m}} &\Rightarrow (A^D)^kA^kXA = (A^D)^kA^kA^{\mathrm{m}}A \\ &\Rightarrow A^DAXA = A^DAA^{\mathrm{m}}A \\ &\Rightarrow XA = A^DA. \end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$(5)。通过在右侧乘以 A^k $XA = AA^D$，显然可得。

(5) $\Rightarrow$ (1)。由 $XA^{k+1} = A^k$ 可知，$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$ 且秩$(A^k) \leq$ 秩(X)。由 (3.8) 及 $\mathcal{N}(A^kA^{\mathrm{m}}) \subseteq \mathcal{N}(X)$，可得 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A^k)$ 且 $\mathcal{N}(A^kA^{\mathrm{m}}) = \mathcal{N}(X)$，这意味着存在 $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$，使得

$$YA^kA^{\mathrm{m}} = X. \tag{4.1}$$

然后在 (4.1) 的右侧乘以 A，得到 $YA^k = XA$，这意味着 $\mathcal{N}(A^k) \subseteq \mathcal{N}(XA)$。因此，由引理 2.9(2)，可得

$$\begin{aligned} XA^{k+1} = A^k &\Rightarrow XA^{k+1}(A^D)^kX = A^k(A^D)^kX \\ &\Rightarrow XAA^DAX = A^DAX \\ &\Rightarrow XAX = X, \end{aligned}$$

这意味着 $X = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^kA^{\mathrm{m}})}$。因此，由定理 3.8(3)，$X = A^{D,\mathrm{m}}$。 □

定理 4.2。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}_k$，且秩$(A\sim AA\sim)$ =秩(A)，并设 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$。则以下命题等价:

(1) $X = A^{D,\,\mathrm{m}}$; (2) $AX^2 = X$, $AX = A^2A^DA^{\mathrm{m}}$; (3) $AX^2 = X$, $AX = P_{\mathcal{R}(A^k)\ \mathcal{N}\ (A^DA^{\mathrm{m}})}$; (4) $AX^2 = X$, $A^kX = A^kA^{\mathrm{m}}$。

证明。(1) ⇒ (2)。由 (3.2) 可轻易得到。

(2) ⇒ (3)。根据 (3.2) 和定理 3.8(4)，我们有

$$AX = A^2A^D A^{\mathfrak{m}} = AA^{D,\mathfrak{m}} = P_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^D A^{\mathfrak{m}})}. \tag{4.2}$$

(3) ⇒ (4)。利用 (4.2)，由 $AX = P_{\mathcal{R}(A^k)\,\mathcal{N}(A^D A^{\mathfrak{m}})}$ 可得

$$A^k X = A^{k-1} P_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^D A^{\mathfrak{m}})} = A^{k-1}A^2 A^D A^{\mathfrak{m}} = A^k A^{\mathfrak{m}}.$$

(4) ⇒ (1)。由 $AX^2 = X$ 可得

$$X = AXX = AAX^2X = A^2XX^2 = A^2AX^2X^2 = A^3XX^3 = ... = A^kX^{k+1},$$

这意味着 $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$。然后，由引理 2.9(2) 和 (3.2)，我们得出

$$\begin{aligned} A^kX = A^kA^{\mathfrak{m}} &\Rightarrow (A^D)^kA^kX = (A^D)^kA^kA^{\mathfrak{m}} \\ &\Rightarrow AA^DX = A^DAA^{\mathfrak{m}} \\ &\Rightarrow X = A^DAA^{\mathfrak{m}} = A^{D,\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

Zuo 等人在 [43, 定理 3.8] 中给出了关于 DMP 逆的一个有趣结果，即对于$A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$，

$$A^{D,\dagger} = AA^\dagger(I_n - \overline{A}AA^\dagger)^D = (I_n - \overline{A}AA^\dagger)^DAA^\dagger, \tag{4.3}$$

其中 $\overline{A} = I_n - A$。下面的定理给出了 $\mathfrak{m}$-DMP 逆的类似表达式。

定理 4.3. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$，且 rank($A^\sim AA^\sim$) = rank($A$)，并设 $\overline{A} = I_n - A$。该 n,

$$A^{D,\mathfrak{m}} = AA^{\mathfrak{m}}(I_n - \overline{A}AA^{\mathfrak{m}})^D \tag{4.4}$$

$$= (I_n - \overline{A}AA^{\mathfrak{m}})^DAA^{\mathfrak{m}}. \tag{4.5}$$

证明。利用 [5, 推论 1]，，即 $(X+Y)^D = X^D + Y^D$，其中 X、$Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $XY = YX = 0$，以及一个显然的事实

$$(I_n - AA^{\mathfrak{m}})A^2A^{\mathfrak{m}} = A^2A^{\mathfrak{m}}(I_n - AA^{\mathfrak{m}}) = 0,$$

我们可以直接得到

$$(I_n - AA^{\mathfrak{m}} + A^2A^{\mathfrak{m}})^D = (I_n - AA^{\mathfrak{m}})^D + (A^2A^{\mathfrak{m}})^D = I_n - AA^{\mathfrak{m}} + (A^2A^{\mathfrak{m}})^D.$$

因此，由定理 3.11(3)、定理 3.8(2)和引理 2.8(2)可得

$$\begin{aligned} AA^{\mathfrak{m}}(I_n - \overline{A}AA^{\mathfrak{m}})^D &= AA^{\mathfrak{m}}(I_n - AA^{\mathfrak{m}} + A^2A^{\mathfrak{m}})^D \\ &= AA^{\mathfrak{m}}(I_n - AA^{\mathfrak{m}}) + AA^{\mathfrak{m}}(A^2A^{\mathfrak{m}})^D \\ &= AA^{\mathfrak{m}}A^{D,\mathfrak{m}} = A^{D,\mathfrak{m}}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (I_n - \overline{A}AA^{\mathfrak{m}})^D AA^{\mathfrak{m}} &= (I_n - AA^{\mathfrak{m}} + A^2A^{\mathfrak{m}})^D AA^{\mathfrak{m}} \\ &= (I_n - AA^{\mathfrak{m}})AA^{\mathfrak{m}} + (A^2A^{\mathfrak{m}})^D AA^{\mathfrak{m}} \\ &= A^{D,\mathfrak{m}}AA^{\mathfrak{m}} = A^{D,\mathfrak{m}}, \end{aligned}$$

这表明(4.4)和(4.5)成立。 □

满秩分解也被证实是研究广义逆的有力工具。此外，Cline [4] 和 Zekraoui 等人 [40] 分别利用满秩分解表示了 Drazin 逆和闵可夫斯基逆。在他们工作的基础上，我们在下述定理中给出 m-DMP 逆的一种新表示。

定理 4.4. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 的秩($A^{\sim}AA^{\sim}$) = 秩(A) > 0 且 $A^k \neq 0$。设

$$A = B_1C_1, \quad C_1B_1 = B_2C_2, \quad C_2B_2 = B_3C_3, \quad ..., \quad C_{k-1}B_{k-1} = B_kC_k, \tag{4.6}$$

满足 B_1C_1 是 A的满秩分解，且 $B_{i+1}C_{i+1}$ 是 C_iB_i($i = 1,2, ..., k-1$)的满秩分解。那么

$$A^{D,\mathfrak{m}} = B_1 \cdots B_k(C_kB_k)^{-k}C_k \cdots C_2(B_1^{\sim}B_1)^{-1}B_1^{\sim}.$$

证明。首先，由 (4.6) 可得

$$C_k \cdots C_3C_2C_1B_1 = C_k \cdots C_3C_2B_2C_2 = \cdots = C_kB_kC_k \cdots C_2.$$

然后，将 $[4, \text{公式 (1.11)}]$, 即 $A^D = B_1 \cdots B_k (C_k B_k)^{-(k+1)} C_k \cdots C_1$ 和 $[40, \text{定理 } 8]$, 即 $A^{\mathfrak{m}} = C_1^{\sim} (C_1 C_1^{\sim})^{-1} (B_1^{\sim} B_1)^{-1} B_1^{\sim}$ 应用于 (3.2)，可得

$$\begin{aligned} A^{D,\mathfrak{m}} &= B_1 \cdots B_k (C_k B_k)^{-(k+1)} C_k \cdots C_1 B_1 C_1 C_1^{\sim} (C_1 C_1^{\sim})^{-1} (B_1^{\sim} B_1)^{-1} B_1^{\sim} \\ &= B_1 \cdots B_k (C_k B_k)^{-k} C_k \cdots C_2 (B_1^{\sim} B_1)^{-1} B_1^{\sim}, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

利用满秩分解，Zhou 和 Chen $[41]$ 推导出了 DMP 逆的积分表示，该表示不要求对矩阵的谱施加限制。此外，Kılıcman 等人 $[11]$ 得到了加权 Minkowski 逆的一个积分表示。受他们工作的启发，我们给出 $\mathfrak{m}$-DMP 逆的一个积分表示如下。

定理 4.5. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 满足 $\text{rank}(A^{\sim} A A^{\sim}) = \text{rank}(A) > 0$ 且 $A^k \neq 0$，并设 A的满秩分解如 (4.6) 所示。那么，

$$A^{D,\mathfrak{m}} = \int_0^{\infty} M \exp(-B_1^{\sim} B_1 t) B_1^{\sim} dt, \tag{4.7}$$

其中 $M = B_1 \cdots B_k (C_k B_k)^{-k} C_k \cdots C_2$。

证明。我们首先断言 $B^{\mathfrak{m}}$ 存在。事实上，

$$\begin{aligned} \text{rank}(B_1^{\sim} B_1) \leq \text{rank}(B_1) = \text{rank}(A) &= \text{rank}(A^{\sim} A A^{\sim}) \\ &= \text{rank}(C_1^{\sim} B_1^{\sim} B_1 C_1 C_1^{\sim} B_1^{\sim}) \leq \text{rank}(B_1^{\sim} B_1). \end{aligned}$$

于是，$\text{rank}(B_1) = \text{rank}(B_1^{\sim} B_1) = \text{rank}(B_1^{\sim} B_1 B_1^{\sim})$，因为 $B_1^{\sim}$是满行秩的。因此，根据引理 2.7(3)，$B^{\mathfrak{m}}$存在。此外，由引理 2.8(1)和定理 3.8(2)可得

$$\mathcal{N}(B_1^{\sim}) \subseteq \mathcal{N}(C_1^{\sim} B_1^{\sim}) = \mathcal{N}(A^{\sim}) = \mathcal{N}(A^{\mathfrak{m}}) \subseteq \mathcal{N}(A^k A^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{N}(A^{D,\mathfrak{m}}),$$

这与引理 2.8(2) 一起表明

$$A^{D,\mathfrak{m}} B_1 B_1^{\mathfrak{m}} = A^{D,\mathfrak{m}}. \tag{4.8}$$

最后，将定理 4.4 和 $[11, \text{推论 } 8]$, 即 $X^{\mathfrak{m}} = \int_0^{\infty} \exp(-X^{\sim} X t) X^{\sim} dt$ 对于$X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 应用于 (4.8)，立即可得 (4.7)。 □

众所周知， $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的 Moore-Penrose 逆可表示为一个极限[3], 即,

$$A^{\dagger} = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda I_n + A^*A)^{-1}A^*.$$

此外，利用极限过程计算广义逆一直是一个热门课题。Ma 等人 [19] 和 Kılıcman 等人 [11] 分别给出了 DMP 逆和加权闵可夫斯基逆的若干极限表达式。下一个定理给出了 $\mathfrak{m}$-DMP 逆的几种极限表示。

定理 4.6. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 满足秩$(A^{\sim}AA^{\sim}) =$ 秩(A)。则,

$$A^{D,\mathfrak{m}} = \lim_{\lambda\to 0}A^k(\lambda I_n + A^{\mathfrak{m}}A^{k+1})^{-1}A^{\mathfrak{m}} \tag{4.9}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}A^kA^{\mathfrak{m}}(\lambda I_n + A^{k+1}A^{\mathfrak{m}})^{-1} \tag{4.10}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}(\lambda I_n + A^k)^{-1}A^kA^{\mathfrak{m}} \tag{4.11}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}(\lambda I_n + A^k)^{-1}A^k(\lambda I_n + A^{\sim}A)^{-1}A^{\sim}. \tag{4.12}$$

证明。由 (3.8) 可知 $\mathcal{R}(A^kA^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{R}(A^k)$，利用定理 3.8(3) 可得

$$A^{D,\mathfrak{m}} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^kA^{\mathfrak{m}})} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^kA^{\mathfrak{m}}),\mathcal{N}(A^kA^{\mathfrak{m}})}. \tag{4.13}$$

因此，将 (2.3)、(2.4) 和 (2.5) 应用于 (4.13)，分别得到 (4.9)、(4.10) 和 (4.11)。然后，将 [11, 推论 11], 即 $A^{\mathfrak{m}} = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda I_n + A^{\sim}A)^{-1}A^{\sim}$ 代入 (4.11)，即可立即得出 (4.12)。证明完毕。 □

Exam例 4.7. 我们来检验例 3.7 中给出的矩阵 A。那么，k :=Ind(A) = 2,

$$B := A^k(\lambda I_n + A^{\mathrm{m}}A^{k+1})^{-1}A^{\mathrm{m}} = A^kA^{\mathrm{m}}(\lambda I_n + A^{k+1}A^{\mathrm{m}})^{-1}$$

$$= (\lambda I_n + A^k)^{-1}A^kA^{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda+1} & \frac{-1}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\lambda+1} & \frac{-1}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := (\lambda I_n + A^k)^{-1}A^k(\lambda I_n + A^{\sim}A)^{-1}A^{\sim} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^3} & \frac{-\lambda-1}{(\lambda+1)^3} & \frac{1}{(\lambda+1)^3} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^3} & \frac{-\lambda-1}{(\lambda+1)^3} & \frac{1}{(\lambda+1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证 $\lim_{\lambda\to 0}B = \lim_{\lambda\to 0}C = A^{D,\mathrm{m}}$，其中 $A^{D,\mathrm{m}}$ 已在例 3.7 中证明，故略去。

5 m-DMP逆在求解某些方程中的应用

本节的研究动机主要源于 Ma 等人 [19] 利用 DMP 逆求解奇异线性方程组，并给出了计算 DMP逆解的简化的克莱姆法则。我们从考察一个线性方程组开始。

定理5.1. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$，其中 rank($A^{\sim}AA^{\sim}$) =rank($A$)，且 $b \in \mathbb{C}^n$，并设一个线性方程组为

$$A^kx = A^kA^{\mathrm{m}}b. \tag{5.1}$$

则方程组 (5.1) 的通解为

$$x = A^{D,\mathrm{m}}b + (I_n - A^{D,\mathrm{m}}A)v, \tag{5.2}$$

其中 $v \in \mathbb{C}^n$ 任意。此外,

$$x = A^{D,\mathrm{m}}b$$

是 $\mathcal{R}(A^k)$ 上系统 (5.1) 的唯一解。

证明。由 (3.2) 可知， $A^{D,\,\mathfrak{m}}b$ 是 (5.1) 的一个解。因此，利用定理 3.8(5)，可得 (5.1) 的所有解构成的集合为

$$\left\{ A^{D,\mathfrak{m}}b+\alpha \,\middle|\, \alpha\in\mathcal{N}(A^k) \right\}=\left\{ A^{D,\mathfrak{m}}b+\alpha \,\middle|\, \alpha\in\mathcal{R}(I_n-A^{D,\mathfrak{m}}A) \right\},$$

这表明 (5.1) 的通解为 (5.2)。此外，由于 $\mathcal{R}(A^k)\oplus\mathcal{N}(A^k)=\mathbb{C}^n$根据 $\mathrm{Ind}(A)=k$，利用定理 3.8(2) 可知， $A^{D,\,\mathfrak{m}}b\in\mathcal{R}(A^k)$ 是 (5.1) 在 $\mathcal{R}(A^k)$ 上的唯一解。

□

Wang 等人 [35] 考虑了一个有趣的弗罗贝尼乌斯范数下的最小二乘问题，即

$$\|(AA^{\dagger})^{\sim}Ax-b\|_F=\min \text{ subject to } x\in\mathcal{R}(A),$$

其中 $A\in\mathbb{C}_1^{n\times n}$满足秩$(A^{\sim}A)=$秩$(A)<n$，且 $b\in\mathbb{C}^n$。在下面的定理中，我们讨论一个关于 $\mathfrak{m}$-DMP 逆的类似优化问题。

定理 5.2. 设 $A\in\mathbb{C}_k^{n\times n}$ 由(2.1) 给出，且满足 $r:=\mathrm{rank}(A^{\sim}AA^{\sim})=\mathrm{rank}(A)<n$。令 $b\in\mathbb{C}^n$ 为 $b=GU\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，其中 $b_1\in\mathbb{C}^r$ 满足 $G_1^{-1}b_1\in\mathcal{R}\left((\Sigma K)^D\right)$，且 G_1 由 (3.3) 给出，并且 $b_2\in\mathbb{C}^{n-r}$。那么

$$\min_{x\in\mathcal{R}(A^k)}\|(AA^{\dagger})^{\sim}Ax-b\|_F=\|b_2\|_F\,. \tag{5.3}$$

此外，

$$x=A^{D,\mathfrak{m}}b$$

是 (5.3) 的唯一解。

证明。对于每个 $x\in\mathcal{R}(A^k)$，由引理 2.9(1)可知，存在 $y\in\mathbb{C}^n$ 使得$x=A^Dy$。令 $y=U\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，其中 $y_1\in\mathbb{C}^r$ 且 $y_2\in\mathbb{C}^{n-r}$。利用 [2, 公式 2.2], ，即，

$AA^{\dagger}=U\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^{*}$，由 (2.1)、(3.3) 和 (2.2) 可推得

$$\begin{aligned}\left\|(AA^{\dagger})^{\sim}Ax-b\right\|_F&=\left\|(AA^{\dagger})^{\sim}AA^{D}y-b\right\|_F\\&=\left\|GU\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & G_2\\ G_2^{*} & G_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right.\\&\qquad\left.\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{D} & \left((\Sigma K)^{D}\right)^{2}\Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}-GU\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\end{pmatrix}\right\|_F\\&=\left\|\begin{pmatrix} G_1(\Sigma K)^{D}\Sigma Ky_1+G_1(\Sigma K)^{D}\Sigma Ly_2-b_1\\ -b_2\end{pmatrix}\right\|_F\\&=\left(\left\|G_1(\Sigma K)^{D}\Sigma Ky_1+G_1(\Sigma K)^{D}\Sigma Ly_2-b_1\right\|_F^{2}+\|b_2\|_F^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\geq\|b_2\|_F.\end{aligned}$$

由于根据条件 $G_1^{-1}b_1\in\mathcal{R}\left((\Sigma K)^{D}\right)$ 有 $\Sigma K(\Sigma K)^{D}G_1^{-1}b_1=G_1^{-1}b_1$，因此如果

$$y_1=(\Sigma K)^{D}\Sigma Ly_2-G_1^{-1}b_1\text{ and }y_2\in\mathbb{C}^{n-r},\tag{5.4}$$

则 $G_1(\Sigma K)^{D}\Sigma Ky_1+G_1(\Sigma K)^{D}\Sigma Ly_2-b_1=0$，这意味着 $\left\|(AA^{\dagger})^{\sim}Ax-b\right\|_F$ 取最小值，

$$\min_{x\in\mathcal{R}(A^{k})}\|(AA^{\dagger})^{\sim}Ax-b\|_F=\|b_2\|_F.$$

因此，由 (2.2)、(5.4) 和 (3.6) 可得

$$\begin{aligned}x=A^{D}y&=U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{D} & \left((\Sigma K)^{D}\right)^{2}\Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}\\&=U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{D}(-(\Sigma K)^{D}\Sigma Ly_2-G_1^{-1}b_1)+\left((\Sigma K)^{D}\right)^{2}\Sigma Ly_2\\ 0\end{pmatrix}\\&=U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{D}G_1^{-1}b_1\\ 0\end{pmatrix}=A^{D,\mathrm{m}}b,\end{aligned}$$

这表明 $x=A^{D,\mathrm{m}}b$ 是 (5.3) 的唯一解。 □

注记 5.3. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 由 (2.1) 给出，且 $r :=$ 秩$(A) < n$，并设 $b \in \mathbb{C}^n$ 为$b = U \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，

其中 $b_1 \in \mathbb{C}^r$ 满足 $b_1 \in \mathcal{R}\left((\Sigma K)^D\right)$，且 $b_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$。根据定理 5.2 中相同的论证，我们有

$$\min_{x\in\mathcal{R}(A^k)} \|Ax - b\|_F = \|b_2\|_F . \tag{5.5}$$

此外， $x = A^{D,\dagger}b$ 是（5.5）的唯一解。

本节最后给出简化的克莱姆法则，以直接计算（5.1）和（5.3）的唯一解。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的行列式为 det(A)，并用$A(i \to b)$表示将 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的第 i列替换为 $b \in \mathbb{C}^n$后得到的矩阵。定理 5.4. 设 $A \in \mathbb{C}_k^{n\times n}$ 满足 rank$(A^{\sim}AA^{\sim}) =$ rank(A)， $b \in \mathbb{C}^n$，且 $t =$ rank(A^k)。假设 $V \in \mathbb{C}^{n\times(n-t)}$和 $W \in \mathbb{C}^{(n-t)\times n}$满足 $\mathcal{R}(V) = \mathcal{N}(A^k)$且 $\mathcal{N}(W) = \mathcal{R}(A^k)$。记 $E = V(WV)^{-1}W$。则 $x = A^{D,\mathrm{m}}b$的各分量为

$$x_i = \frac{\det((A^k + E)(i \to A^k A^{\mathrm{m}} b))}{\det(A^k + E)},\ i = 1, 2, .., n. \tag{5.6}$$

证明。由于定理 3. 已证明 E 存在， $\mathcal{N}(E) = \mathcal{R}(A^k)$，且$(A^k + E)^{-1} = (A^k)^D + E^{\#}$，由引理 2.9(2)和(3.2)可知，线性方程组

$$(A^k + E)x = A^k A^{\mathrm{m}} b \tag{5.7}$$

有唯一解

$$x = (A^k + E)^{-1}A^k A^{\mathrm{m}} b = (A^k)^D A^k A^{\mathrm{m}} b + E^{\#} A^k A^{\mathrm{m}} b = A^D A A^{\mathrm{m}} b = A^{D,\mathrm{m}} b.$$

最后，对非奇异线性方程组(5.7)应用克拉默法则 [29] ，立即得到(5.6)。

□

例 5.5. 考虑例 3.7 中给出的矩阵 A ，并令

$$b = \begin{pmatrix} 0.15735 \\ 0.15735 \\ 0.1415 \\ -0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么， $k:=\mathrm{Ind}(A)\ =2$，且 A 的 Hartwig-Spindelb ¨ock 分解为 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^{*}$,

其中

$$U=\begin{pmatrix}-0.40825 & 0.70711 & 0 & 0 & 0.57735\\ -0.8165 & 0 & 0 & 0 & -0.57735\\ -0.40825 & -0.70711 & 0 & 0 & 0.57735\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\Sigma=\begin{pmatrix}1.7321 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix}0.28868 & -0.5\\ -0.28868 & 0.5\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}0 & -0.70711 & -0.40825\\ 0 & -0.70711 & 0.40825\end{pmatrix}.$$

此外,

$$G_1=\begin{pmatrix}-0.66667 & -0.57735\\ -0.57735 & 0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}0.12201\\ 0.21132\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.1\\ 0.1\end{pmatrix},$$

$$(\Sigma K)^{D}=\begin{pmatrix}0.5 & -0.86603\\ -0.28868 & 0.5\end{pmatrix},A^{k}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

于是容易验证，秩$(A^{k})\ =1$, $G_1^{-1}b_1\in\mathcal{R}\left((\Sigma K)^{D}\right)$, $\mathcal{R}(V)\ =\mathcal{N}(A^{k})$，且$\mathcal{N}(W)\ =\mathcal{R}(A^{k})$。利用定理5.1和定理5.2，可得系统 (5.1) 在 $\mathcal{R}(A^{k})$ 上以及系统 (5.3) 的唯一解为

$$x=A^{D,\mathrm{m}}b=\begin{pmatrix}0.29885 & 0.29885 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{*},\tag{5.8}$$

and

$$\min_{x\in\mathcal{R}(A^{k})}\|(AA^{\dagger})^{\sim}Ax-b\|_{F}=\|b_2\|_{F}=0.24495.$$

并且，很容易验证，由定理 5.4 中的（5.6）计算得到的解 x 等于（5.8）中给出的 $x_{\circ}$

6 结论

本文定义了闵可夫斯基空间中的 m-DMP 逆，并展示了它的一些性质、刻画、表示，以及在求解线性方程组和约束最小范数问题中的应用。

不仅因为 m-DMP 逆作为一种新的广义逆，是闵可夫斯基空间中 DMP 逆的推广，而且鉴于 DMP 逆广泛的研究背景，我们相信 m-DMP 逆仍有更多值得探索的潜在结果和应用。关于 m-DMP 逆的研究，未来可以从以下几个方向展开：

(1) m-DMP 逆的扰动分析和迭代方法将是两个值得研究的课题。

(2) 通过加权推广广义逆，一直是研究广义逆的重要内容。并且，Meng [23] 定义了矩形矩阵的 W-加权 DMP 逆，这是方阵的 DMP 逆的一种推广。同样，讨论矩形矩阵的 m-DMP 逆也很有意义。

(3) 受 [24]，的工作启发，自然会想到，对于两个新的矩阵类 $A^{D}AA^{\sim}$ 和 $A^{\sim}AA^{D}$，可以得到哪些有趣的刻画和应用。

参考文献

[1] Al-Zhour, Z.：任意矩阵在闵可夫斯基空间中的加权闵可夫斯基逆的扩展与推广性质。《计算数学及其应用》70，954–961（2015）。
https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.06.015

[2] Baksalary, O.M., Trenkler, G.：矩阵的核逆。《线性与多重线性代数》58，681–697（2010）。https://doi.org/10.1080/03081080902778222

[3] Ben-Israel, A., Charnes, A.：广义逆理论的贡献。J. Soc. Indust. Appl. Math. 11, 667–699 (1963). https://doi.org/10.1137/0111051

[4] Cline, R.E.：矩阵的秩不变幂的逆。SIAM 数值分析杂志 5, 182–197 (1968). https://doi.org/10.1137/0705015[5] Drazin, M.P.：结合环与半群中的伪逆。美国数学月刊 65, 506–514 (1958). https://doi.org/10.2307/2308576[6] Erdelyi, I.：关于矩阵方程 $A = \lambda Bx$。数学分析与应用杂志 17, 119–132 (1967). https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90169-2

[7]Ferreyra, D.E., Levis, F.E., Thome, N.：确定广义逆的矩阵极大类。《应用数学与计算》333，42–52（2018）。https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.102

[8] Hartwig, R.E., Spindelb¨ock, K.：使 A^* 与 $A^\dagger$ 可交换的矩阵。《线性与多重线性代数》14，241–256（1984）。https://doi.org/10.1080/03081088308817561

[9]Hern´andez, M.V., Lattanzi, M.B., Thome, N.：矩阵的 GDMP 逆及其对偶。《线性与多重线性代数》，1–13（2020）。https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1857678

[10]Kamaraj, K., Sivakumar, K.C.：不定内积空间中的 Moore-Penrose 逆。《应用数学与计算杂志》19，297–310（2005）。https://doi.org/10.1007/BF02935806

[11] Kılıcman, A., Zhour, Z.A.：闵可夫斯基空间中加权闵可夫斯基逆的表示与逼近。《数学与计算建模》47，363–371（2008）。https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.03.031

[12] Krishnaswamy, D., Lone, M.S.：闵可夫斯基空间中关于闵可夫斯基伴随的值域对称矩阵与 m-投影算子的偏序。线性代数与矩阵理论进展 6，132–145（2016）。https://doi.org/10.4236/alamt.2016.64013

[13] Krishnaswamy, D.、Punithavalli, G.：《闵可夫斯基空间 M中的矩阵方程$AXB = C$的反自反解》。应用科学研究与评论国际期刊 15，221–227（2013）

[14]Kyrchei, I.：加权四元数 core-EP、DMP、MPD 和 CMP 逆及其行列式表示。R ACSAM 114，1–26（2020）。https://doi.org/10.1007/s13398-020-00930-3

[15]Kyrchei, I.I.：核逆及其推广的行列式表示及应用。《数学杂志》2019，1–13（2019）。https://doi.org/10.1155/2019/1631979[16] Liu, X., Cai, N.：DMP 逆的高阶迭代方法。《数学杂志》2018，1–6（2018）。https://doi.org/10.1155/2018/8175935[17] Liu, X., Qin, Y.：闵可夫斯基空间中矩阵加权闵可夫斯基逆的计算迭代方法。世界学术、科学与技术学院 75，1083–1085（2011）[18] Lone, M.S., Krishnaswamy, D.： m-投影涉及闵可夫斯基逆及闵可夫斯基空间中的值域对称性质。《线性拓扑与代数杂志》5，215–228（2016）[19] Ma, H., Gao, X., Stanimirovi´c, P.S.：DMP 逆的刻画、迭代方法、符号模式和扰动分析及其应用。《应用数学与计算》378，125196（2020）。https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125196[20]Malik, S.B., Thome, N.：关于任意指标矩阵的一种新广义逆。《应用数学与计算》226，575–580（2014）。https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.060[21] Meenakshi, A.R.：闵可夫斯基空间中的矩阵广义逆。《国家代数及其应用研讨会论文集》57，1–14（1999）[22] Meenakshi, A.R.：闵可夫斯基空间中的值域对称矩阵。《马来西亚数学科学学会通报（第二辑）》23，45–52（2000）[23] Meng, L.：矩形矩阵的DMP 逆。Filomat 31，6015–6019（2017）。https://doi.org/10.2298/FIL1719015M[24]Mosi´c, D.：Drazin-星矩阵与星-Drazin 矩阵。《数学成果》75，1–21（2020）。https://doi.org/10.1007/s00025-020-01191-7

[25] Mosi´c, D., Djordjevi´c, D.S.：希尔伯特空间算子的 gDMP 逆。《谱理论杂志》8，555–573（2018）。https://doi.org/10.4171/JST/207

[26] Penrose, R.：《矩阵的一个广义逆》。《剑桥哲学学会数学汇刊》51，406–413（1955）。https://doi.org/10.1017/S0305004100030401

[27] Prasad, K.M.，Mohana, K.S.：《Core-EP逆》。《线性与多重线性代数》62，792–802（2014）。https://doi.org/10.1080/03081087.2013.791690

[28] Renardy, M.：《闵可夫斯基空间中的奇异值分解》。《线性代数及其应用》236，53–58（1996）。https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)00124-3

[29]Robinson, S.M.：《克拉默法则的简短证明》。《数学杂志》43，94–95（1970）。https://doi.org/10.1080/0025570X.1970.11976018

[30]Romo, F.P.：有限幂自同态的 Drazin-Moore-Penrose 逆。《线性与多重线性代数》69，627–647（2021）。https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1612834

[31]Wang, B.，Du, H.，Ma, H.：通过爱因斯坦乘积得到的张量 DMP 和 CMP 逆的扰动界。《计算与应用数学》39，1–17（2020）。https://doi.org/10.1007/s40314-019-1007-1

[32]Wang, G.，Wei, Y.，Qiao, S.：《广义逆：理论与计算》（第二版）。科学出版社，北京（2018）。https://doi.org/10.1007/978-981-13-0146-9

[33]Wang, H., Chen, J.：弱群逆。《开放数学》16，1218–1232（2018）。https://doi.org/10.1515/math-2018-0100[34] Wang, H., Chen, J., Yan, G.：核-EP逆矩阵和DMP逆矩阵的广义凯莱-哈密顿定理。《东南大学学报（英文版）》34，135–138（2018）。https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-7985.2018.01.019[35] Wang, H., Li, N., Liu, X.： m-核逆及其应用。《线性与多重线性代数》69，2491–2509（2021）。https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1680597

[36] Wang, H., Wu, H., Liu, X.：闵可夫斯基空间中的 𝔪-Core-EP逆。伊朗数学会会刊48, 2577–2601（2022）。https://doi.org/10.1007/s41980-021-00619-2

[37]Wei, Y.：广义逆的一种刻画与表示$A_{\mathcal{T}}^{(2)}$ ，$\mathcal{S}$ 及其应用。《线性代数及其应用》280, 87–96（1998）。https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)00008-1

[38] Wu, H., Wang, H., Jin, H.：闵可夫斯基空间中的 𝔪-WG 逆。《Filomat》36，1125–1141（2022）。https://doi.org/10.2298/FIL2204125W

[39] Yuan, Y., Zuo, K.：利用乘积奇异值分解计算 $\lim_{\lambda\to 0} x(\lambda I_p + YAX)^{-1}Y$。《线性与多重线性代数》64，269–278（2016）。https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1034641

.[40] Zekraoui, H., Al-Zhour, Z., Ozel, C.：闵可夫斯基空间中闵可夫斯基逆的一些新代数与拓扑性质。《科学世界期刊》2013，1–6（2013）。
https://doi.org/10.1155/2013/765732

[41] Zhou, M., Chen, J.：两种广义core逆的积分表示。《应用数学与计算》333，187–193（2018）。https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.085

[42] Zhu, H.：环中的 DMP逆和 m-EP 元素。《线性与多重线性代数》67，756–766（2019）。https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1432546

[43]Zuo, K., Cvetkovi´c-Ili´c, D., Cheng, Y.：矩阵 DMP逆的不同刻画。《线性与多重线性代数》70，411–418（2022）。https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1729084