arXiv:2303.13967v1 [econ.TH] 24 Mar 2023

动态组合分配

Th`anh Nguyen*、Alexander Teytelboym†、Shai Vardi‡

2023年3月27日

摘要

我们研究一种不使用货币、对不可分物品进行动态组合分配的模型。我们提出一种新的解概念，称为动态近似等收入竞争均衡（DACEEI），它规定市场必须在几乎所有时期近似出清。简单地反复应用近似等收入竞争均衡（Budish，2011年）并不能带来理想结果，因为市场出清方面的近似误差会随时间迅速累积。因此，我们开发了一种静态近似等收入竞争均衡的新形式，采用精心构造的随机预算，确保市场在期望意义上能够完全出清。随后，我们利用这一方法设计在线组合分配机制（OCAM），该机制以高概率实现 DACEEI。OCAM 具有以下性质：（i）除一个物品外，群体策略无关；（ii）对几乎所有代理人而言，除一个物品外无嫉妒；（iii）当市场规模较大且参与者随机到达时，以高概率在几乎所有时期实现近似市场出清。其应用包括难民安置、日托分配和机场时刻分配。

*普渡大学丹尼尔斯管理学院，美国印第安纳州西拉斐特市州街西段403号，邮编47906。电子邮箱：nguye161@purdue.edu。

†牛津大学经济系及圣凯瑟琳学院，英国牛津市，邮编OX1 3UQ。电子邮箱：alexander.teytelboym@economics.ox.ac.uk。

‡普渡大学丹尼尔斯管理学院，美国印第安纳州西拉斐特州立街西段403号，邮编47906。电子邮箱：svardi@purdue.edu。

1 引言

在许多复杂的分配问题中，例如日托分配、难民安置和机场时刻分配，市场设计者需要将物品组合分配给代理人，但不能使用货币。在这类组合分配情境下，唯一有效且策略无关的机制是独裁机制，而这可能极不公平（例如，Klaus 和 Miyagawa 2002）。一种避免这种明显取舍的方法是使用伪市场：向代理人分配相等的代币预算，他们可以用代币交易资源。在这种情境下，等收入竞争均衡（CEEI）中的分配是有效的，并且消除了嫉妒（Varian，1974年）。此外，在大型市场中，在实施 CEEI 的机制中，如实揭示偏好会成为占优策略（Azevedo 和 Budish，2019年）。

遗憾的是，当资源不可分割和/或具有很强的互补性时，竞争均衡等收入（Hylland 和 Zeckhauser，1979年）可能并不一定存在。由 Budish（2011年）发表的一篇开创性论文提出了一种替代（精确）竞争均衡等收入的方案，称为近似竞争均衡等收入（ACEEI）。在 ACEEI 中，会对代理人的预算稍作调整，并且每种资源的市场只需近似出清。超额需求的近似界反映了为建立精确的竞争均衡等收入而未分配或需要增加的物品数量。因此，当超额需求相对于总供给较小时，ACEEI 仍能近乎实现无嫉妒和有效。

本文讨论在没有货币转移的情形下，动态（在线）组合分配问题中的伪市场。以下示例说明了我们的研究设定。

1. 难民安置（例如，Ahani 等人，2021年）：难民会在一段时间内陆续抵达。每当一个难民家庭抵达时，就需要为其匹配一个地点。难民对不同的初始安置地点有各自的偏好。难民家

庭规模各不相同，在不同地点可能需要不同数量的服务（例如，学位）。

2. 日托分配（例如，Kennes 等人，2014年）：有子女的家庭需要儿童照护。家庭对不同的日托中心（或日托中心与星期几的不同组合）有各自的偏好。日托中心难以轻易增加员工或房间，因此全年都必须遵守其容量约束。

3. 机场起降时刻分配（例如，Schummer 和 Vohra，2013）：航空公司需要为其航班安排降落时刻、登机口和起飞时刻。由于天气状况多变，分配通常需要按小时协商，而且协商时飞机往往仍在空中。航空公司可能希望起飞和降落时刻彼此接近，以避免飞机在登机口闲置。出于安全考虑，机场在各个登机口的容量，以及每个时期内可在跑道上起降的飞机数量，都受到严格限制，必须予以遵守。

要将 ACEEI 扩展到动态设置中，需要克服两个重大障碍。第一个障碍是在代理人到达时做出不可逆的分配决策。因此，反复直接使用 ACEEI 会越来越低效，因为超额需求上限会随着每次迭代线性增长，导致在线环境中的低效率与代理人数量成正比。第二个障碍是代理人到达前缺乏可用的偏好数据，因此需要开发一种在线分配机制，使其无需对偏好分布做出任何先验假设也能运行。

我们针对上述动态组合分配问题提出了一种伪市场机制。尽管存在上述挑战，我们的机制所产生的分配满足一种新颖且强有力的解概念，称为动态竞争均衡等收入（DACEEI）[1]，其中市场在每个时期都近似出清（即每当有新的代理人或一批

[1]为方便起见，简称“Daisy”。

代理人出现时），但初始的少数几个时期除外。我们证明，DACEEI继承了其静态对应概念的一系列理想性质：它至多一件物品无嫉妒（命题1），并且相对于实际供给而言是事后帕累托有效的（命题2）。随后，我们描述了一种在线机制，该机制以高概率实现DACEEI，同时使几乎所有代理人仅有有限的动机谎报其偏好。重要的是，我们利用了随机到达框架（例如，Freeman，1983年），该框架允许代理人从一个未知分布中随机到达。该框架要求我们的机制在有效分配资源的同时，随着时间推移学习偏好。我们通过两个关键步骤获得了一种有效的动态组合分配机制。

首先，为了控制反复使用 ACEEI 所导致的超额需求累积误差，我们针对静态组合分配环境引入了一种新的均衡概念，称为期望CEEI（ECEEI）。对于任意 $\epsilon > 0$，ECEEI 由均衡价格和扰动后的代理人收入分布刻画，使得代理人在均衡价格下的平均消费满足精确的市场出清条件，且收入均处于区间 $[1-\epsilon, 1]$内。定理 1 证明，对于任意 $\epsilon > 0$，ECEEI 均存在。

其次，我们说明如何将 ECEEI 调整到动态设置中，以确保在初始样本之后，每个时期的市场都近似出清。具体而言，我们的在线组合分配机制（OCAM）分为两个阶段：

1. 对于最先到达的一组代理人（我们称之为样本），按照（随机）序贯独裁（SD）分配物品。我们利用这些代理人的报告偏好计算 ECEEI。

2. 对于其余代理人，根据其类型（即对物品的偏好排序）所决定的随机预算，使用样本 ECEEI 中的价格为每位代理人分配其最偏好的物品组合。

定理 2 表明，OCAM 具有群体策略无关性（至多涉及一个物品），并且满足无嫉妒性

对于样本之外的所有代理人，至多涉及一个物品；当容量足够大且代理人按随机顺序到达时，该机制以高概率实现有效（即市场出清），并且以恒定速率耗尽每种物品的容量。证明的总体思路如下：序列独裁保证代理人如实报告，而样本之外代理人的预算则根据其报告类型进行调整，以维持如实报告激励。ECEEI 确保市场出清条件（针对样本）在期望意义下不会被违反。随后利用适当的集中不等式，将针对样本的期望保证推广为对几乎每个时期实际分配偏差的界。

1.1 相关文献

本文与几支文献脉络相关。第一支文献研究静态伪市场中的均衡。Varian (1974年) 对可分物品环境下竞争均衡等收入（CEEI）的公平性和效率属性进行了颇具影响力的分析。Hylland 和 Zeckhauser (1979年) 首次提出通过交易概率份额，在不可分物品的分配中使用伪市场。Budish(2011年) 通过引入 ACEEI，处理了组合分配伪市场中均衡不存在的问题。我们的解概念 DACEEI 直接将 Budish 的 ACEEI 扩展到了动态环境。本文还与 Nguyen 和 Vohra (2021年) 有关，该文证明了货币经济中伪均衡的存在性。本文进一步推进了这一研究，展示如何利用随机预算的彩票构造 ECEEI。这一方法是将组合分配扩展到动态设置的关键要素。

其次，我们的论文与动态伪市场和动态公平问题相关。若干论文（例如 Balseiro等人，2019年；Gorokh等人，2021年）分析了脚本系统；Combe等人（2021年）则考虑了通过即期机制进行动态分配。本文的关键区别在于，我们考虑对每个新到达的代理人实现公平性和激励相容性，而这些代理人

在每个时期都会到来，而以往的模型关注的是随时间到来的物品和长期存在的代理人。

另有一系列论文研究动态环境下效率与公平性之间的权衡（例如，Zeng 和 Psomas，2020 年；Manshadi 等人，2021年）。这些论文通常聚焦于可分物品或不可分商品的公平分配，其中代理人对物品具有基数估值；而在我们的环境中，机制的核心特征是代理人对物品束的偏好。

最后，从方法论角度来看，我们的论文建立在近期关于在线线性规划算法的研究之上。具体而言，我们的论文与Agrawal 等人（2014年）和Molinaro 和 Ravi （2014年）的研究最为相关。他们研究了一种相关的动态环境，其中代理人与装箱线性规划的变量相关联。他们抽取一部分固定比例的代理人样本，求解基于该样本构造的对偶问题，并以这些价格为基础制定动态二元分配规则；他们利用解空间的几何结构来界定可能的不同解的数量。我们的环境与他们的研究在几个方面有所不同：我们的输入是序数型的，而他们的是基数型的；他们的决策是二元的——分配或不分配，而我们必须为每位代理人分配一个物品束。此外，我们的分配是随机的；我们的证明利用了随机源的两种不同依赖结构。最近，Vera 和 Banerjee （2021年）研究了一种相关模型，其中每位代理人都具有单一偏好，决策者必须决定是否将其感兴趣的物品束分配给该代理人。

2 模型

存在一个有限集合 M，其中包含商品，$|M| = m$ 以及一个有限集合 N，其中包含代理人 $|N| = n$。每种物品j 都有一个有限的整数容量 $c^j \in \mathbb{N}$。代理人上存在一个排列 π：$N \to N$；该排列定义了代理人的到达顺序。不失一般性，代理人按其到达顺序编了号。我们允许代理人分批或逐个到达。

一个物品束$\mathbf{x} \in \{0,1\}^m$最多包含每种物品的一个单位。[2] 我们用$(\mathbf{x} - \mathbf{e}^j)^+$表示移除物品 j 后的物品束$\mathbf{x}$。代理人 i 消耗的物品束记为$\mathbf{x}_i$。消耗可能还受到其他约束（例如，起飞和降落时段之间不能过于接近）。令 $\Psi_i \subseteq \{0,1\}^m$ 表示代理人 i的可行物品束集合。我们假设可以自由处置，即对于所有 i，都有 $\mathbf{0} \in \Psi_i$。一个分配$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots\ldots, \mathbf{x}_n)$是一个可行物品束列表，每位代理人各对应一个。若对于所有 $j \in M$，都有 $\sum_{i \in N} x_i^j \leq c^j$，则分配$\mathbf{X}$相对于容量可行$\mathbf{c}$。

每个代理人 i 在集合 Ψ_i上都有一个严格偏好关系 $\succ_i$。我们假设，对于所有代理人而言，$\mathbf{0}$ 是最不受偏好的物品束。我们用 $\succeq_i$表示 $\succ_i$ 的弱偏好关系；即，$\mathbf{x} \succeq_i \mathbf{y}$表示$\mathbf{x} \succ_i \mathbf{y}$ 或$\mathbf{x} = \mathbf{y}$。用 $\succ := (\succ_i)_{i \in N}$表示所有代理人的偏好剖面。代理人群体 G 的偏好剖面记为 $\succ_G := (\succ_i)_{i \in G}$，而群体 G 之外所有代理人的偏好剖面记为 $\succ_{-G} := (\succ_i)^{i \notin G}$。代理人 i 的类型 是其偏好关系 $\succ_i$；为使符号更清晰，我们有时用 θ_i 表示代理人 i 的类型。由于可行物品束和偏好排序的集合都是有限的，类型集合也是有限的。令 Θ 表示代理人的类型集合（即物品束上所有严格偏好排序的集合），令 $\tau = |\Theta|$ 表示代理人类型的数量。

该经济是一个元组 $(N, \pi, M, \mathbf{c}, (\Psi_i)_{i \in N}, \succ)$。一个（直接）机制 Φ 将每个偏好剖面映射为一个（随机）分配。考虑两个经济 E 和 E'，它们仅在各自的排列 π 和 π' 上有所不同，其中 π 和 π' 对代理人 $1, \ldots\ldots, k$而言相同。在线机制是这样一种机制，它在两个经济中为代理人 $1, \ldots\ldots, k$产生相同的（随机）分配。

3 DACEEI

在伪市场中，每位代理人都拥有一定的代币预算。他们可以按物品的现行价格用这些代币「购买」物品束。令$\mathbf{b} = (b_1, \ldots\ldots, b_n)$表示向量

[2] 正如Budish （2011年）所指出的，这并不失一般性，因为相同单位只需重新标记为不同物品即可。

，即各代理人的代币预算。在竞争均衡等收入（CEEI）中，代理人获得的代币预算相等（Varian，1974年）。然而，在我们的设定中，竞争均衡等收入可能并不存在。因此，我们将遵循Budish（2011年）提出的 ACEEI 思路，允许预算略有调整，并仅要求近似市场出清，以保证均衡存在。

ˆ定义 1. 固定一个经济 $(N, \pi, M, \mathbf{c}, (\Psi_i)_{i\in N}, \succ)$。分配 $\mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n)$、预算 $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n)$ 和价格 $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}^1, \ldots, \hat{p}^m)$ 构成一个 $(\epsilon_b, \epsilon_n, \epsilon_f)$–动态等收入近似竞争均衡 (DACEEI)，当且仅当满足以下条件：

ˆ (i) 对所有 $k \in [\epsilon_n n, n]$，$\hat{\mathbf{x}}_k = \max_{\succ_k}\{\mathbf{x}_k \in \Psi_k$ 和 $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_k \le b_k\}$，ˆ (ii) 对所有 $k \in [\epsilon_n n, n]$, $1 - \epsilon_b \le b_k \le 1$，(iii) 对所有 $k \in [\epsilon_n n, n]$, $j \in M$, $\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i^j \le (1+\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}$，(iv) 对所有 $k \in [\epsilon_n n, n]$, $j \in M$，若 $p^j > 0$，则 $\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i^j \ge (1-\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}$。 —

—

DACEEI 由三个误差项参数化。第一个误差项，ϵ_b，决定了相对于等额预算的最大偏差。第二个误差项，ϵ_n，决定了我们不对其施加任何最优性、预算扰动或市场出清条件的代理人所占的比例。最后，ϵ_f 控制偏离精确市场出清的程度。DACEEI 定义的前两部分与 ACEEI 类似：第(i) 部分指出，在现行价格下，代理人会根据其经过扰动的预算获得自己最偏好的物品束；第(ii) 部分指出，代理人的预算最多可以放宽 ϵ_b。[3] 定义的最后两部分将 ACEEI 扩展到动态环境。第(iii) 和(iv)部分指出，除（可能的）最初 $\epsilon_n n$ 个时期外，每个时期所有物品的市场都近似出清。请注意，$\frac{kc^j}{n}$ 表示当 $\frac{k}{n}$ 比例的代理人已经到达时，每种物品的容量按比例缩放。因此，所有商品的容量都按照代理人到达的速度被消耗，从而确保较早和较晚到达的代理人都受到公平对待。

—

–

[3]这个条件与Budish （2011年）中的定义 1.iii.略有不同，后者对预算的增加幅度作了限制。即使采用他的定义，也不会影响任何结果；我们的定义使论述稍微简洁一些。

3.1 DACEEI 的性质

我们首先证明若干结果，以突出 DACEEI 的公平性和效率特征。尽管 DACEEI（甚至 ACEEI）中的分配可能并非无嫉妒，但我们可以证明，只要代理人 i 嫉妒代理人 i'，就可以从 i' 的物品束中移除一个物品，使得 i 不再嫉妒 i'。

定义 2。（Budish，2011年）。对于一组代理人，分配 $\mathbf{X}$ 是 至多一件物品无嫉妒 (EF1)，G 若对于任意 i，$i' \in G$，满足以下任一条件：(i) $\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{x}_{i'}$；或者 (ii) 存在某个物品 $j \in M$使得 $\mathbf{x}_i \succeq_i (\mathbf{x}_{i'} - \mathbf{e}^j)^+$。

命题1。 如果$(\hat{}\mathbf{X}、\hat{}\mathbf{b}、\hat{}\mathbf{p})$是一个$(\epsilon_b, \epsilon_n, \epsilon_f)$–*DACEEI*，且满足 $\epsilon_b < \frac{1}{m}$，那么$\hat{}\mathbf{X}$对 $[\epsilon_n n, n]$ 中的代理人至多一件物品无嫉妒。

命题1 的证明与 Budish (2011年) 中的定理 3 基本一致，同时对均衡定义中的细微差异作了调整。

我们的效率结果是福利第一基本定理的一个版本，该定理指出，竞争均衡分配是帕累托有效的。由于在我们的模型中容量可以发生扰动，我们首先引入帕累托效率的定义，该定义同时明确了商品的容量和代理人。

定义 3。相对于容量$\mathbf{c}$ 可行的分配$\mathbf{X}$ ，若不存在另一个相对于$\mathbf{c}$ 可行的分配，使得 G中的所有代理人都弱偏好该分配，且至少有一人严格偏好该分配，则称该分配对 G中的代理人而言是（事后）帕累托有效的。

我们考察所有代理人到达后商品的实现消费。随后，我们调整容量，使其与代理人 $\epsilon_n n$、……、 n 的实现消费相匹配，并考察相对于这些容量的分配是否有效。

命题2。 设$(\hat{}\mathbf{X}, \hat{}\mathbf{b}, \hat{}\mathbf{p})$ 是该经济的$(\epsilon_b, \epsilon_n, \epsilon_f)$–*DACEEI*，并设$\hat{}c^j := \sum_{i=\epsilon_n n}^{n} \hat{}x_i^j$ 对所有 $j \in M$均成立。那么，满足容量$\hat{}\mathbf{c}$ 约束的可行分配$\hat{}\mathbf{X}$ 对 $[\epsilon_n n, n]$ 中的代理人而言是帕累托有效的。

命题 2的证明采用第一福利定理中使用的标准显示性偏好论证，故略去。

4 DACEEI 的实现

本节将介绍一种在线组合分配机制（OCAM）。当市场规模足够大时，该机制以很高的概率实现 DACEEI，并为代理人如实报告提供强有力的激励。为此，我们定义一种新的均衡概念，在该概念中，市场在期望意义上出清，我们称之为 期望 CEEI（ECEEI）。在第 4.1 节中，我们正式定义 ECEEI，并构造性地证明其存在。该构造使用了伪均衡（Milgrom 和 Strulovici，2009）这一概念，适用于代理人的效用取决于其持有代币数量的经济。由于代币不会影响代理人的偏好，竞争均衡未必存在。我们构造中的关键思路是：当物品束的成本在预算的 ϵ 范围内时，用受货币影响的基数效用来近似序数偏好排序。OCAM 包含两个阶段。第一阶段（我们称为抽样阶段）使用序贯独裁为到达的代理人分配物品束。随后，我们为抽样代理人计算一组价格和预算，使其支持一个市场在期望意义上出清的竞争均衡。第二阶段则利用第一阶段得到的价格和预算，以在线方式为其余代理人分配物品束。我们将在第 4.2 节详细介绍该机制；在第 4.3 节描述该机制的性质并陈述主要结果。

4.1 ECEEI

考虑一个离散随机变量 $\mathcal{B}$，我们称之为随机预算。若随机预算 $\mathcal{B}$ 满足：$\mathcal{B}$ 的所有取值都介于 $1-\epsilon$ 和 1 之间，则称其为 ϵ-接近 *1* 。对于任意代理人 i,

价格向量$\mathbf{p}$ 和随机预算 $\mathcal{B}_i$，定义

$$\hat{\mathcal{X}}_i(\mathbf{p}, \mathcal{B}_i) := \left\{ \max_{\succ_i} \{\mathbf{x} \in \Psi_i \text{ and } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq b_i\} \text{ with probability } b_i \sim \mathcal{B}_i \right\}. \tag{1}$$

ˆ ˆ 我们称 $\mathcal{X}_i(\mathbf{p}\ \mathcal{B}_i)$ 为代理人 i的随机最优商品束。当代理人 i 的预算从分布 $\mathcal{B}_i$中抽取时， $\mathcal{X}_i$ 的取值就是该代理人在价格 $\mathbf{p}$ 下的最优商品束。用 $\mathbb{E}\left[\hat{}\mathcal{X}_i(\mathbf{p}\ \mathcal{B}_i)\right]$表示代理人 i的期望最优商品束，其中期望是针对 $\mathcal{B}_i$而言的。根据这些定义，我们提出均衡概念。

定义 4。 固定一个经济 $(N, \pi, M, \mathbf{c}, (\Psi_i)_{i\in N}, \succ)$。给定一个 $\epsilon > 0$、随机的 ϵ-接近于 1 的预算 $(\hat{}\mathcal{B}_1, \ldots, \hat{}\mathcal{B}_n)$、价格 $\hat{}\mathbf{p} = (\hat{}p^1, \ldots, \hat{}p^m)$，以及随机分配 $\hat{}\mathcal{X} = (\hat{}\mathcal{X}_1, \ldots, \hat{}\mathcal{X}_n)$，若对每个物品 j，则它们构成一个 ϵ-等收入期望竞争均衡 (ϵ-ECEEI)。

(a) $\sum_{i\in N} \mathbb{E}\left[\hat{\mathcal{X}}_i(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{B}}_i)\right]_j \leq c^j$,

(b) if $p^j > 0$, then $\sum_{i\in N} \mathbb{E}\left[\hat{\mathcal{X}}_i(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{B}}_i)\right]_j = c^j$.

ECEEI 的定义直观易懂：如果每个代理人都消费其在给定随机预算下的期望最优商品束，那么商品市场就恰好出清。在证明对于任意 $\epsilon > 0$ 都存在一个 ϵ-ECEEI 之前，我们还需要给出一些定义。

对于每个代理人 i 和可行商品束$\mathbf{x}$，令 $r_i(\mathbf{x})$ 表示与偏好序 $\succ_i$一致的某种数值效用。我们还设定 $r_i(\mathbf{0}) = 0$ ，并且对于任何不可行的物品束$\mathbf{x}$， $r_i(\mathbf{x}) = -\infty$ 。对于任意 $\epsilon > 0$，为每个代理人 i定义如下辅助效用函数。[4]

$$u_i^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \begin{cases} r_i(\mathbf{x}) + \min\{0, \log \frac{1-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\epsilon}\}, & \text{if } \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} < 1. \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

[4]因此，如果可行商品束的成本至少为 1，其辅助效用为 $-\infty$ ；而对于不可行的物品束，无论价格如何，其效用始终为 $-\infty$ 。

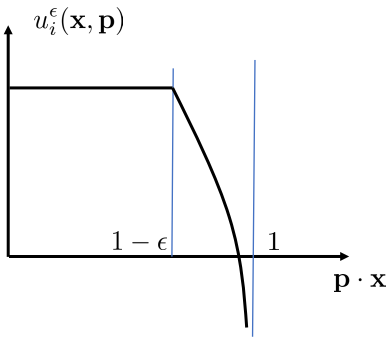

图1：辅助效用

辅助效用如图1所示。请注意，只有当物品束的成本 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ 至少为 $1-\epsilon$ 时，辅助效用才与 $r_i(\mathbf{x})$ 不同。现在我们为具有辅助效用的代理人定义伪均衡。在辅助经济中，代理人的序数偏好被辅助效用 $u_i^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 取代，预算则不再相关。给定价格向量 $\mathbf{p}$，定义 $Ch_i(\mathbf{p}) = \arg\max_{\mathbf{x}}\{u_i^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})\}$，并用 $conv(A)$ 表示集合 A 的凸包。

定义5。固定一个辅助经济。分配 $\mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{x}}_n)$ 和价格 $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}^1,\ldots,\hat{p}^m)$ 构成一个 伪均衡，如果对于所有 $i\in N$，均有 $\hat{\mathbf{x}}_i \in conv(Ch_i(\mathbf{p}))$，且 $\sum_{i\in N}\hat{\mathbf{x}}_i \le \mathbf{c}$ 对每个满足 $p^j\neq 0$ 的物品 $j\in M$ 均成立等式。

换言之，在不可分商品的情形下，伪均衡是对竞争均衡的一种放宽：通过将每个代理人 i 的选择对应 $Ch_i(\mathbf{p})$ 替换为其凸包 $conv(Ch_i(\mathbf{p}))$，使所有代理人对偏好进行凸化。现在我们可以陈述本节的主要结果了。

定理1。对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个具有辅助效用$\hat{}\{u_i^\epsilon(\mathbf{x}、\mathbf{p})\}_{i\in N}$的伪均衡。此外，假设分配$\mathbf{X}$和价格$\hat{}\mathbf{p}$构成这样的伪均衡。那么，可以构造出 ϵ个接近*1*的随机预算$(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n)$，使$\hat{}$　　$\hat{}$这些预算、随机分配 $\{\mathcal{X}_i(\hat{}\mathbf{p}\ \mathcal{B}_i)\}_{i\in N}$ 和价格$\hat{}\mathbf{p}$ 构成一个 ϵ-*ECEEI*。此外，在伪均衡中，同一类型的代理人拥有相同的分配；因此，在构造出的 ϵ-*ECEEI*中，同一类型的代理人拥有相同的随机预算。

4.2 在线组合分配机制（OCAM）

本节介绍我们的机制；伪代码见在线附录。OCAM的初始输入是一组 M 容量为$\mathbf{c}$ 的商品，以及三个误差项，ϵ_b、 ϵ_n、 $\epsilon_f > 0$(如定义1所述)。我们将样本量设为 $\epsilon_s n$，其中 $\epsilon_s = \frac{\epsilon_f \epsilon_n}{4}$。回顾一下， ϵ_f 决定与精确市场出清的偏差， ϵ_n 则表示不施加任何条件的代理人所占比例。这样，OCAM便能在这两项保证之间实现参数化权衡。OCAM是一种直接在线机制：它征询代理人的类型，并在每位代理人到达时立即为其分配一个物品束。当一位样本代理人到达时，OCAM采用序贯独裁为其分配物品束，并按初始样本量的比例缩减容量。也就是说，OCAM会为该代理人分配其最偏好的物品组合，且对于任意物品， j该物品的分配总量j至多为 $\epsilon_s c^j$。OCAM还会从 $[1-\epsilon_b, 1]$中为该代理人分配任意预算（此预算不会实际使用，但在技术上是DACEEI定义所必需的）。

所有抽样代理人到齐后，我们为样本计算一个 ϵ_b-ECEEI。 ϵ_b-ECEEI 由随机分配、预算和价格定义，但我们只需要预算 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{\epsilon_s n}$ 和价格 $\mathbf{p}$。请注意，这些并非 OCAM 实际分配给样本代理人的预算；它们只用于未来的分配。现在，我们定义一个将代理人类型映射为随机预算的函数。对于任意代理人类型 θ，如果样本中有一名类型为 θ 的代理人 $i \in \{1, \ldots, \epsilon_s n\}$，则设 $f(\theta) = \mathcal{B}_i$。换言之，当一名代理人到来时，如果其（申报的）类型在样本中，就将其预算设为与一名相同类型代理人的（形式上的）预算相同。否则，将其预算任意设定在 $1-\epsilon_b$ 和 $\mathbf{1}$ 之间。DACEEI 的分配规则定义如下：对于代理人 $i = \epsilon_s n + 1, \ldots, n$，抽取 $b_i \sim f(\theta_i)$，其中 θ_i 是代理人 i 的类型，并设 $\mathbf{x}_i = \max_{\succ_i} \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Psi_i$ 且 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq b_i\}$（即，根据抽取的预算，将其最偏好的物品组合分配给该代理人）。使用此分配规则，在代理人 $\epsilon_s n + 1, \ldots, n$ 到来时，为其分配物品束和预算。

4.3 OCAM 的性质

本节将展示 OCAM 的三项理想性质：效率、公平性和策略无操纵性。前两项性质源于 OCAM 以高概率实现 DACEEI（定理 2）。

对于仅使用序数偏好信息的随机机制，策略无操纵性有多种现有定义。其中一种定义要求，对于机制实现的每一种结果，如实报告都是占优策略（我们称之为“事后”策略无操纵性）。在我们的设定中，满足事后策略无操纵性的有效机制只有序贯独裁（Klaus 和 Miyagawa，2002）。较弱的（或称“事前”）策略无操纵性概念则仅要求：当代理人对彩票的偏好由冯·诺依曼—摩根斯坦效用函数或随机占优偏序表示时，不可操纵性成立（Bogomolnaia 和 Moulin，2001）。[5]

在这里，我们采用事后策略无操纵性的概念，并要求代理人不能通过谎报类型，显著改善随机分配的任何 一种实现结果。为避免事后策略无操纵性与帕累托效率及非独裁之间的不相容，我们只要求操纵能带来足够大的收益，并要求效率达到近似水平。此外，我们的机制会抑制任何代理人群体谎报类型。

我们还需要一些额外的符号。给定一个经济和一个随机机制 Φ，令 $\Phi_i(\succ)$ 表示将代理人偏好剖面映射到代理人 i 的随机分配的映射，并令 $R(\Phi_i(\succ))$ 表示随机分配 $\Phi_i(\succ)$ 中概率为正的所有物品束构成的集合。利用这一符号，我们现在可以定义至多一个物品的群体策略无操纵性。

定义 6。如果对于任意代理人群体 G 及其任意两个偏好剖面 $\succ_G$ 和 $\succ'_G$，至少满足以下条件之一，则机制 Φ 是至多一个物品的群体策略无关

[5]要看出事后策略无操纵性是一种更强的不可操纵性条件，只需注意，它要求如实报告对于偏好在彩票上的<转任意效用函数表示而言都是占优策略，而中期策略无操纵性概念则限制了哪些函数可以表示偏好。

以下条件成立。

(i) 存在一位代理人 $i \in G$，使得对于任意 $\mathbf{x}_i \in R(\Phi_i(\succ_G, \succ_{-G}))$ 和 $\mathbf{x}'_i \in R(\Phi_i(\succ'_G \succ_{-G}))$，都有 $\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{x}'_i$，

(ii) 对所有 $i \in G$、$\mathbf{x}_i \in R(\Phi_i(\succ_G, \succ_{-G}))$ 和 $\mathbf{x}'_i \in R(\Phi_i(\succ'_G, \succ_{-G}))$，都存在 $j \in M$，使得 $\mathbf{x}_i \succeq_i (\mathbf{x}'_i - \mathbf{e}^j)^+$。

定义6 指出，若一群代理人 G 虚报其类型，则要么存在一位代理人 $i \in G$ 境况不会更好，要么对于每位代理人 $i \in G$，该代理人 i 通过虚报其类型而获得的任何已实现分配，都可以通过移除某件物品，使其境况比如实报告时的任何已实现分配都差或相同。

接下来，我们提出两个假设，分别针对到达顺序和市场规模，以便证明存在一种能够实现 DACEEI 的机制。首先，我们要求代理人随机到达。

假设1. 代理人按照从 $[n]$ 上所有排列中均匀随机选取的排列到达。

请注意，我们不对类型分布作任何假设；我们的结果对“任意糟糕”的分布都成立。其次，我们要求物品的容量足够大。

假设 2. $\min_j\{c^j\} \geq {}^{70}(\tau \log(\epsilon_s n) + \log(m) + \sqrt{n \log n})^{-\epsilon_s \epsilon_f^2}$，其中 $\epsilon_s = {}^{\epsilon_n \epsilon_f}_{4}$。

我们并未尝试优化假设 2 中的常数，而是优先考虑证明的清晰性，而非更优的常数。假设 2 中的 $\sqrt{n}$ 项，仅用于确保在代理人依次到达的整个过程中，分配近似公平且有效。如果愿意放宽这一假设，只要求最终分配满足这些要求，我们就可以去掉 $\sqrt{n}$ 项（或者，如果对 $\mathbf{c}$ 的界限仅适用于分子中的其他项，则最终分配的结论仍然成立）。作为比较，Agrawal 等人 （2014年）的容量假设为 $\min_j\{c^j\} \geq \Omega\left(\frac{m \log(n/\epsilon)}{\epsilon^3}\right)$。当 τ 为

足够小时（引言中描述的所有应用均属此情形），我们的界限仅比他们的差一个 ϵ 倍。我们还注意到，该假设独立于 ϵ_b，因此我们可以令 ϵ_b 任意小。关于 OCAM 性质的主要结果如下。

定理 2. 对于任意经济$(N, \pi, M,$ $\mathbf{c},$ $(\Psi_i)_{i\in N}, \succ)$，$\epsilon_f$、$\epsilon_n > 0$ 和 $0 < \epsilon_b < \frac{1}{m}$，*OCAM* 具有以下性质：

(a) 至多一个物品的群体策略无关，

(b) 对$(1-\epsilon_s)$ 比例的代理人而言，至多一个物品无嫉妒，其中 $\epsilon_s = \frac{\epsilon_n \epsilon_f}{4}$。此外，当假设 *1* 和 *2* 成立时，*OCAM* 输出一个元组 $(\mathbf{X}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{p}})$ 该元组以至少 $(\epsilon_b, \epsilon_n, \epsilon_f)$–的概率构成 *DACEEI* $1 - \frac{1}{n}$。

请注意，公平性和策略性质均不取决于到达顺序或市场规模。事实上，只有为了证明几乎每个时期都满足近似市场出清（这是 DACEEI 的要求），才需要假设 1 和 2 。

5 结论

OCAM 是一种有前景的机制，可用于不涉及货币的复杂动态分配问题。它在公平性、效率和如实报告激励之间实现了令人满意的折中，并以恒定速率耗尽每件物品的容量。

未来研究有几个值得探索的方向。一个方向是理论方面：可以考虑放宽到达顺序为随机这一假设（假设1）；不过，这需要对我们的技术进行重大调整。定理2 表明，如果初始样本能够很好地代表总体，那么根据初始样本计算出的均衡价格，就能为剩余代理人的有效分配提供良好指引。在到达顺序非平稳的更复杂环境中，例如可以考虑

采用自适应抽样来确保样本具有代表性。另一个方向是对 OCAM 进行实证检验，甚至在实践中加以实施。

参考文献

Agrawal, S., Z. Wang 和 Y. Ye（2014年）。在线线性规划的动态近乎最优算法。运筹学研究 *62*(4)，876–890。

Ahani, N., P. G¨olz, A. D. Procaccia, A. Teytelboym 和 A. C. Trapp（2021年）。难民安置中的动态安置。载于第 *22* 届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，第 5–5 页。

Azevedo, E. M. 和 E. Budish（2019年）。大规模情形下的策略无关性。经济研究评论 *86*(1)，81–116。

Balseiro, S. R., H. Gurkan 和 P. Sun（2019年）。无货币的多智能体机制设计。运筹学研究 *67*(5)，1417–1436。

Bardenet, R. 和 O.-A. Maillard（2015年）。不放回抽样的集中不等式。伯努利 *21*(3)，1361–1385。

Bogomolnaia, A. 和 H. Moulin（2001年）。随机分配问题的新解。经济理论杂志 *100*(2)，295–328。

Budish, E.（2011年）。组合分配问题：基于相等收入的近似竞争均衡。政治经济学杂志 *119*(6)，1061–1103。

Budish, E. 和 P. J. Reny（2020 年）。Shapley–Folkman 定理的一个改进界。*JMath Econ 89*，48–52。

Combe, J.、V. Nora 和 O. Tercieux（2021年）。无货币的动态分配：即期机制的最优性。可见于 *SSRN 3894259*。

Freeman, P.（1983年）。秘书问题及其扩展：综述。国际统计评论 *51*(2), 189–206。

Gorokh, A., S. Banerjee 和 K. Iyer（2021年）。通过人工货币从货币机制设计转向非货币机制设计。数学运筹研究 *46*(3), 835–855。

Hylland, A. 和 R. Zeckhauser（1979年）。个体在职位间的有效分配。政治经济学杂志 *87*(2), 293–314。

Kennes, J., D. Monte 和 N. Tumennasan（2014年）。日托分配：一个动态匹配问题。美国经济学杂志：微观经济学 *6*(4), 362–406。

Klaus, B. 和 E. Miyagawa（2002）。多重分配问题中的策略无关性、团结性与一致性。国际博弈论杂志 *30*(3), 421–435。

Manshadi, V., R. Niazadeh 和 S. Rodilitz（2021年）。公平动态配给。载于第*22*届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，第 694–695 页。

Milgrom, P. 和 B. Strulovici（2009）。替代品、拍卖与均衡。经济理论杂志 *144*(1), 212–247。

Molinaro, M. 和 R. Ravi（2014年）。在线装箱线性规划的几何。数学运筹研究 *39*(1), 46–59。

Nguyen, T. 和 R. Vohra（2021年）。 δ-替代偏好与不可分物品的均衡。载于第*22*届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，第735–736页。

Schummer, J. 和 R. V. Vohra（2013）。到达时段的分配。美国经济学杂志：微观经济学 *5*(2), 164–85。

Serfling, R. J.（1974年）。不放回抽样中和的概率不等式。统计学年鉴 *2*(1), 39–48。

van der Vaart, A. 和 J. Wellner（1996年）。弱收敛与经验过程及其在统计学中的应用。Springer统计学丛书。施普林格出版社。

Varian, H. R.（1974年）。公平、嫉妒与效率。经济理论杂志 *9*，63–91。

Vera, A. 和 S. Banerjee（2021年）。贝叶斯先知：在线决策的低遗憾框架。《管理科学》*67*(3)，1368–1391。

Zeng, D. 和 A. Psomas（2020 年）。动态公平分配中的公平性与效率权衡。载于第 *21* 届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，第 911–912 页。

附录

定理1的证明：ECEEI的存在性

Nguyen 和 Vohra (2021年) 在更一般的设定中确立了以下关于伪均衡存在性的结果。

引理1 (Nguyen 和 Vohra，2021年)。令 Ψ_i 表示代理人$j \in N$ 可以可行消费的物品束有限集合，$\mathbf{0} \in \Psi_i$。每个代理人 i的效用函数 $u_i(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 满足

- $u_i(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = 0$,
- $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\infty$ 对于$\mathbf{x} \notin \Psi_i$
- $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 对$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ 连续，对于每个$\mathbf{x} \in \Psi_i$ 以及
- 存在某个常数 $C > 0$，使得如果 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq C$，那么，$u_i(\mathbf{x},\mathbf{p}) < 0$。

因此，存在一个伪均衡。

我们利用这一结果证明定理 1。

证明。定理 1的证明。定理陈述中的效用 $u_i^\epsilon(.,.)$ 满足引理 1，因此存在一个伪均衡。我们利用该伪均衡构造一个 ϵ- ECEEI，如下所示。

设 $\hat{\mathbf{p}}$和 $\{\hat{\mathbf{x}}_i \in conv(Ch_i(\hat{\mathbf{p}}))\}$ 是在效用 $u_i^\epsilon(.,.)$ 下的伪均衡。对于$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$，定义预算 $b_\mathbf{y}$ 如下：

$$b_\mathbf{y} = \begin{cases} 1-\epsilon & \text{if } \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y} \leq 1-\epsilon. \\ \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

注意，由于$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$，$u_i^{\xi}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{p}}) \geq 0$，因此$\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y} < 1$。所以，对于每个$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$，$1 - \epsilon \leq b_{\mathbf{y}} < 1$。接下来我们证明，若$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$，则$\mathbf{y}$是所有成本不超过$b_{\mathbf{y}}$的物品束中最优的。也就是说：

$$\mathbf{y} = \max_{\succ_i} \{\mathbf{x} \in \Psi_i \text{ and } \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x} \leq b_{\mathbf{y}}\}. \tag{4}$$

这是因为在$b_{\mathbf{y}} = 1 - \epsilon$的情况下，成本不超过$b_{\mathbf{y}}$的物品束的辅助效用等于与其序数排序相关联的数值$r_i$（。）。$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$意味着$r_i(\mathbf{y})$在这些物品束中最高。现在，若$b_{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y} > 1 - \epsilon$，那么对于任意满足$r_i(\mathbf{x}) > r_i(\mathbf{y})$的物品束$\mathbf{x}$，我们有$\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x} > \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y}$；否则，物品束$\mathbf{x}$的辅助效用会严格高于$\mathbf{y}$，这与$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$这一事实矛盾。

由于$\hat{\mathbf{x}}_i \in conv(Ch_i(\hat{\mathbf{p}}))$，$\hat{\mathbf{x}}_i$可以表示为一个彩票的期望$\mathcal{Z}$，该彩票取自$Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$中的$\hat{}$物品束。令$\mathcal{B}_i$为按(3)中的定义、对应于从$\mathcal{Z}$.中抽取的$\mathbf{y}$的随机预算。

$\hat{}$在此构造中，$\mathcal{B}_i$的每个实现值对于$\mathbf{y} \in Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$都是$b_{\mathbf{y}}$，因此介于$1 - \epsilon\hat{}$与1之间。此外，由于(4)，预算为$\mathcal{B}_i$时的随机最优物品束，是从$\mathcal{Z}$中取自$Ch_i(\hat{\mathbf{p}})$的彩票，其均值等于$\hat{\mathbf{x}}_i$。伪均衡的市场出清条件蕴含ECEEI的市场出清条件。最后，同一类型的代理人具有相同的辅助效用；我们可以选取一种伪均衡，使他们拥有相同的分数分配，这意味着在ϵ-ECEEI中，同一类型的代理人具有相同的随机预算。

□

B ECEEI 蕴含 ACEEI

在本节中，我们将证明，ECEEI的存在性意味着存在一种等收入近似竞争均衡，其超额需求的界限与Budish (2011年)中的界限相同。具体而言，我们证明以下结果。

命题 3. 存在一种*ECEEI*的实现，其超额需求的 ℓ_2范数不超过 $\sqrt{\sigma m}/2$，其中 σ 是任何代理人所消费的最大物品束的大小。

为证明这一点，我们使用以下对 Shapley–Folkman 定理的改进界（Budish 和 Reny，2020 年），从而得到一个 ACEEI。

引理 2（Budish 和 Reny，2020 年中的定理 3.1）。若 S_1，..，S_n 是$\mathbf{R}^m$的紧子集，若$\mathbf{c} \in conv(S_1 + .. + S_n)$，且 D 是 S_i的最大直径，则存在$\mathbf{x}_i \in S_i$使得

$$||\mathbf{c} - \sum_i \mathbf{x}_i||_{\ell_2} \leq D\sqrt{m}/2.$$

证明。命题3的证明。设$\mathbf{p}$ $\mathcal{B}$ 是一个 ϵ-ECEEI。应用引理2，其中 $S_i = \hat{}\mathcal{X}_i(\mathbf{p}$ $\mathcal{B}_i)$，且$\mathbf{c}$ 是容量向量。若所有代理人的可行商品束大小至多为σ，则 S_i 的直径至多为 $\sqrt{2\sigma}$。由此可知存在$\mathbf{x}_i \in S_i$ 使得$||\mathbf{c} - \sum_i \mathbf{x}_i||_2 \leq \sqrt{\sigma m}/2.$。对于每个$\mathbf{x}_i \in \hat{}\mathcal{X}_i(\mathbf{p}$ $\mathcal{B}_i)$，都存在 b_i 的一个实现，使得$\mathbf{x}_i$是代理人 i 在预算 b_i下的最优选择。因此，分配 $\{\mathbf{x}_1$，..，$\mathbf{x}_n\}$ 对应于一个近似均衡，其中每位代理人的预算扰动至多为 ϵ。

□

C 集中不等式

我们使用以下集中不等式。

定理 3 (Chernoff 界)。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是独立随机变量，其中 $X_i = 1$ 的概率为 p_i，而 $X_i = 0$ 的概率为 $1 - p_i$。定义 $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$，以及 $\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{N} p_i$。那么对于 $\epsilon \in (0,1)$，

1. $\Pr[X - \mu \geq \epsilon\mu] \leq \exp(-\mu\epsilon^2/3)$,
2. $\Pr[\mu - X \geq \delta\mu] \leq \exp(-\mu\epsilon^2/2)$.

以下内容改编自 Bardenet 和 Maillard (2015年)。他们只证明了单侧界（即只有第一个不等式），不过不难看出，该证明对其补充不等式同样成立。[6] 类似的（双侧）界可由 Serfling(1974年) 推导得出。我们注意到，Bardenet 和 Maillard(2015年) 的界比下面的界更紧，但对于我们的 n 和 s （分别表示代理人数量和样本量），改进微乎其微。

定理 4 （Hoeffding-Serfling不等式）。设 $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 为包含 n 个元素的有限集合，其中 $i \in N$, $x_i \in [0,1]$。令 $X_1, \ldots, X_s$ 为从 $\mathcal{X}$ 中不放回抽取的随机样本。定义 $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$。则对于 $\epsilon > 0$,

1. $\Pr\left[\max_{s \le k \le n} \sum_{i=1}^{k} X_i - k\mu > k\epsilon\right] \le \exp\left(-2s\epsilon^2\right)$,
2. $\Pr\left[\max_{s \le k \le n} \sum_{i=1}^{k} X_i - k\mu < k\epsilon\right] \le \exp\left(-2s\epsilon^2\right)$.

当 $\mathcal{X}$ 的方差有界时，以下界比 Hoeffding界更紧。我们采用一种见于（例如van der Vaart 和 Wellner，1996年）的版本。

定理 5 (Hoeffding-Bernstein不等式)。设 $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是一个含有 n个元素的有限集合，其中对于 $i \in N$， $x_i \in [0,1]$。设 X_1，...， X_s 是从 $\mathcal{X}$中不放回抽样得到的随机样本。定义 $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$。则对于 $\epsilon > 0$,

$$\Pr\left[\left|\sum_{i=1}^{s} X_i - s\mu\right| \ge \epsilon\right] \le 2\exp\left(\frac{-\epsilon^2}{2s\sigma_n^2 + \epsilon}\right),$$

其中 $\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$。

定理 2 的证明

我们首先证明定理 (a)和 (b) 的第 2部分，并将其改述为以下引理。

[6]他们的证明依赖于证明 $Z_k^* = \frac{1}{N-k}\sum_{t=1}^{k}(X_t - \mu)$ 是一个鞅： $\mathbb{E}\left[Z_k^* | Z_{k-1}^*, \ldots, Z_1^*\right] = Z_{k-1}^*$。很容易调整他们的证明，说明 $Z_k = \frac{1}{N-k}\sum_{t=1}^{k}(\mu - X_t)$ 也是一个鞅，由此即可得到结论。

引理 3。 对于任意经济 $(N, \pi, M, \mathbf{c}, (\Psi_i)_{i\in N}, \succ)$， ϵ_f、 $\epsilon_n > 0$和 $0 < \epsilon_b < \frac{1}{m}$，*OCAM* 为：

(a) 至多一个物品的群体策略无操纵性，

(b) 嫉妒-无嫉妒，适用于比例为 $(1-\epsilon_s)$ 的代理人，其中 $\epsilon_s = \frac{\epsilon_n \epsilon_f}{4}$ —.

证明。 引理 3 的证明。对于最先到达的 $\epsilon_s n$ 个代理人（抽样样本），该机制采用序贯独裁，因此具有群体策略无关性。接下来需要证明，当 $\epsilon_b < \frac{1}{m}$ 时，抽样样本之后到达的代理人的分配是无嫉妒的，并且具有至多一个物品的群体策略无操纵性。

首先注意，在 OCAM 中，抽样阶段之后到达的代理人的分配不取决于其他人的报告类型。对于这些代理人，当他们将自己的类型从 t 虚报为 t'时，他们将获得类型为 t' 的代理人所获得的分配。因此，事后无嫉妒（至多一个物品）意味着至多一个物品的群体策略无操纵性。

还需证明，对于抽样阶段之后到达的代理人，该分配在事后满足至多一件物品无嫉妒。令 i、 i' 为这类代理人，并令 $(\mathbf{x}_i,\ b_i)$ 和 $(\mathbf{x}_{i'},\ b_{i'})$ 分别为代理人 i 和 i' 的事后分配与预算。

反设：从 $\mathbf{x}_{i'}$ 中取出任意一件物品后，代理人 i 仍然更喜欢它，而不是自己当前的物品束$\mathbf{x}_i$，那么该物品束（即从$\mathbf{x}_{i'}$ 中取出该物品后的物品束）的成本必然高于 b_i。因此，我们有

$$b_i < \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{i'} - \mathbf{e}^j) \text{ for every good } j \text{ contained in bundle } \mathbf{x}_{i'}.$$

将所有此类 j对应的不等式相加，可得

$$\sigma \cdot b_i < (\sigma - 1) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{i'}, \text{ where } \sigma \text{ is the size of bundle } \mathbf{x}_{i'}.$$

另一方面做爰片且，由于$\mathbf{x}_{i'}$ 是代理人 i' 消耗的物品束，因此我们有$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{i'} \leq b_{i'}$.

因此， $\sigma \cdot b_i < (\sigma - 1) \cdot b_{i'}$，这意味着

$$\frac{b_i}{b_{i'}} < \frac{\sigma - 1}{\sigma} \leq \frac{m-1}{m}.$$

这是一个矛盾，因为二者都是 b_i， $b_{i'} \in (1 - \frac{1}{m}$， 1)。 □

为完成定理2的证明，我们需要证明，当假设1 和2ˆ ˆ成立时，机制输出的元组 (**X**, **b**， ˆ**p**) 以至少ϵ_b， ϵ_n， ϵ_f)–的概率构成一个 DACEEI。我们首先需要引入一些额外的符号。 $1 - \frac{1}{n}$

对于代理人中任意一个大小为 $\epsilon_s n$ 的子集，我们定义三元组 $q = (\Lambda, f, \mathbf{p})$，其中 Λ 是该子集中代理人的类型所构成的无序集合（允许重复）， f 是一个将代理人类型映射到随机预算的函数，而 $\mathbf{p}$ 是 m 个物品的价格向量（f 和 Λ 的定义见机制 1 的伪代码）。三元组 q 将用于定义所有代理人的分配。不过，由 q 定义的分配与机制生成的分配并不一定相同：代理人 $\epsilon_s n + 1$、.....、 n 的分配相同，但代理人 1、.....、 $\epsilon_s n$ 的分配可能不同。对于任意代理人 i 和三元组 $q = (\Lambda, f, \mathbf{p})$，令 $\mathbf{w}_i(q) \in [0,1]^{2^m}$ 表示由 q 生成的代理人 i 的随机分配，其中 $w_i^{\mathbf{x}}$ 表示代理人 i 获得物品束 $\mathbf{x}$ 的概率。$\mathbf{w}_i$ 的值由 $(\Lambda, f, \mathbf{p})$ 唯一确定。令 $\mathbf{y}_i(q) \in [0,1]^m$ 满足： $y_i^j(q)$ 表示代理人 i 获得物品 j 的概率（即， $y_i^j(q) = \sum_{\mathbf{x}: j \in \mathbf{x}} w_i^{\mathbf{x}}(q)$ ）；令 $\mathcal{Y}_i$ 表示相应的随机变量（随机性来自对 q 的选择）。最后，令 $\mathcal{X}_i(q)$ 表示 $\mathbf{w}_i(q)$ 实现值的随机变量；也就是说， $\mathcal{X}_i^j(q) \in \{0,1\}$，其中 $\mathcal{X}_i^j(q) = 1$ 的概率为 $y_i^j(q)$。注意，事件 $\mathcal{X}_i^j(q) = 1$ 和 $\mathcal{X}_{j'}^i(q) = 1$ 相互依赖，但对于任意 $i \neq i'$、 j、j'， $\mathcal{X}_i^j(q) = 1$ 和 $\mathcal{X}_{j'}^{i'}(q) = 1$ 相互独立。沿用这一符号，令 $\mathcal{X}_i$ 表示代理人 i 分配的随机变量，其样本空间同时包含随机到达顺序和预算选择所产生的随机性。在 D.1 和 D.2 节中，我们对三元组 q 定义的完整随机分配和确定性分配进行界定（此处“完整”是指涵盖所有代理人的分配）。在

节D.3 和 D.4 中，我们利用这些结果证明 OCAM 生成的分配满足相应的界。

D.1 步骤1：界定由三元组 q生成的随机分配。

第一步中，我们固定任意三元组 $q=(\Lambda,\ f,\ \mathbf{p})$，并如下定义相对于该三元组的坏样本：

定义7. 如果样本 $\mathcal{S}$对于三元组 $q=(\Lambda,\ f,\ \mathbf{p})$ 和物品 j满足以下任一条件，则称其为坏样本：

(i) $\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i^j(q) \le \epsilon_s c^j$ 且 $\sum_{i\in N} y_i^j(q) > \left(1+\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j$，或 (ii) $\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i^j(q) \ge \epsilon_s c^j$ 且 $\sum_{i\in N} y_i^j(q) < \left(1-\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j$。

引理4。 对于任意 $\epsilon_b,\ \epsilon_n,\ \epsilon_f > 0$，若假设 2成立，则三元组 q 生成的随机分配 $\mathcal{Y}$和价格 $\mathbf{p}$ 满足以下条件：

1. 存在某个物品 $j\in M$使得 $\sum_{i\in N}\mathcal{Y}_i^j > \left(1+\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j$ 的概率至多为 $\frac{1}{6n}$，并且

2. 存在某个物品 $j\in M$ 使得 $p^j > 0$ 和 $\sum_{i\in N}\mathcal{Y}_i^j < \left(1-\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j$ *is at most* $\frac{1}{6n}$,

其中，随机性来自随机到达排列。

证明。 证明。固定一个三元组 $q=(\Lambda,\ f,\ \mathbf{p})$ 和物品 j。我们首先证明，对于这个三元组和物品，样本 $\mathcal{S}$ 为坏样本的概率很低。若 $\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i^j(q) \le \epsilon_s c^j \wedge \sum_{i\in N} y_i^j(q) > \left(1+\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j$，则该样本为坏样本。我们对这一事件发生的概率进行界定；该概率是针对样本的选取而言的。对于任意三元组 q，令 $\eta_i^j(q) = c^j y_i^j(q)/\sum_{i\in N} y_i^j(q)$。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left[\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i^j(q) \le \epsilon_s c^j \wedge \sum_{i\in N} y_i^j(q) > \left(1+\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j\right] \\
&\le \Pr\left[\sum_{i\in\mathcal{S}} \eta_i^j(q) \le \epsilon_s c^j \wedge \sum_{i\in N} \eta_i^j(q) = \left(1+\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j\right] \\
&\le \Pr\left[\sum_{i\in\mathcal{S}} \eta_i^j(q) \le \epsilon_s c^j \middle| \sum_{i\in N} \eta_i^j(q) = \left(1+\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j\right] \\
&\le \Pr\left[\left|\sum_{i\in\mathcal{S}} \eta_i^j(q) - \epsilon_s \mathbb{E}\left[\sum_{i\in N} \eta_i^j(q)\right]\right| \ge \frac{\epsilon_f}{4}\epsilon_s c^j\right] \\
&\le 2\exp\left(-\frac{(\epsilon_f \epsilon_s c^j)^2}{64\epsilon_s c^j + \epsilon_f \epsilon_s c^j}\right) \qquad (5) \\
&\le 2\exp\left(-\frac{\epsilon_f^2 \epsilon_s c^j}{65}\right), \\
&\le \frac{1}{6mn\cdot(\epsilon_s n)^\tau}.
\end{aligned}
$$

不等式（5）由定理 5 得出，注意到 $\sum_{i=1}^n (\eta_i^j(q) - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n \eta_\ell^j(q))^2 \le 2c^j$；因此 $\sigma_n^2 \le \frac{c^j}{n}$。最后一个不等式由假设 2 得出。

现在，我们对所有不同的三元组和物品应用并集界。每个三元组 $q = (\Lambda, f, \mathbf{p})$ 都由 Λ 唯一确定。因此，只需对 Λ 的可能取值进行界定。由于样本量为 $\epsilon_s n$，每种类型在样本中最多出现 $\epsilon_s n$ 次；因此， Λ 的可能取值至多有 $(\epsilon_s n)^\tau$ 个， q 的可能取值也至多有这么多个。尽管这是一个宽松的上界，但若类型空间不受限制，它在渐近意义上是紧的。对物品及 q 的可能取值应用并集界，即可得到第一个结果。第二个结果的证明类似，只需界定以下概率：对于满足 $p^j > 0$ 的物品 j， $\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i^j(q) \ge \epsilon_s c^j \wedge \sum_{i\in N} y_i^j(q) < \left(1-\frac{\epsilon_f}{4}\right)c^j$。由于定理 5 的界具有对称性，证明几乎完全相同，故略去。

□

D.2 第 2 步：界定由三元组 q生成的确定性分配。

引理 5. 对于任意 $\epsilon_b, \epsilon_n, \epsilon_f > 0$，若假设 2成立，则由三元组 q 生成的（确定性）分配和价格满足以下条件：

1. 存在某个物品 $j \in M$和 $k \in [\epsilon_n n, n]$，使得 $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i^j > \left(1 + \frac{3\epsilon_f}{4}\right) \frac{kc^j}{n}$ 的概率至多为 $\frac{1}{2n}$，并且

2. 存在某个物品 $j \in M$ 和 $k \in [\epsilon_n n, n]$，使得两者均 $p^j > 0$ *and* $\sum_{i=\epsilon_s n}^{k} \mathcal{X}_i^j < (1-\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}$ *is at most* $\frac{1}{2n}$,

其中，概率是针对随机到达排列和预算实现而言的。

证明。证明。对于任意三元组 $q = (\Lambda, f, \mathbf{p})$ 和物品 j，将事件 $\sum_{i \in N} y_i^j(q) > \left(1 + \frac{\epsilon_f}{4}\right) c^j$ 记为 $\mathbb{I}_y(q, j)$，将事件 $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i^j(q) > (1 + \frac{\epsilon_f}{2}) c^j$ 记为 $\mathbb{I}_n(q, j)$，并将存在某个 $k \in [\epsilon_n n, n]$ 使得 $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i^j(q) > \left(1 + \frac{3\epsilon_f}{4}\right) \frac{kc^j}{n}$ 的事件记为 $\mathbb{I}_k(q, j)$。我们首先界定 $\mathbb{I}_n(q, j)$ 的概率。

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[\mathbb{I}_n(q,j)\right] &\leq \Pr\left[\mathbb{I}_n(q,j) | \neg\mathbb{I}_y(q,j)\right] \Pr\left[\neg\mathbb{I}_y(q,j)\right] + \Pr\left[\mathbb{I}_y(q,j)\right] \\
&\leq \Pr\left[\sum_{i \in N} \mathcal{X}_i^j(q) - \sum_{i \in N} y_i^j(q) > \frac{\epsilon_f}{4} c^j\right] + \frac{1}{6n} \qquad (6) \\
&= \Pr\left[\sum_{i \in N} \mathcal{X}_i^j(q) - \mathbb{E}\left[\sum_{i \in N} \mathcal{X}_i^j(q)\right] > \frac{\epsilon_f}{4} c^j\right] + \frac{1}{6n} \\
&\leq \exp\left(-\frac{\epsilon_f^2 c^j}{32}\right) + \frac{1}{6n} \qquad (7) \\
&\leq \frac{1}{3n},
\end{aligned}
$$

其中（7）来自定理 3，利用了在给定 $\neg\mathbb{I}_y(q, j)$ 的条件下，$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i^j\right] \leq (1 + \frac{\epsilon_f}{2}) c^j$，最后一个不等式则由假设 2得出。

现在，我们可以利用 $\mathbb{I}_k(q, j)$ 的界以及定理 $\mathbb{I}_n(q, j)$ 和定理 4 来界定其概率：

概率 $[\mathbb{I}_k(q,\ j)] \leq$ 概率 $[\mathbb{I}_k(q,\ j)|\neg\mathbb{I}_n(q,\ j)]$ 概率 $[\neg\mathbb{I}_n(q,\ j)] +$ 概率 $[\mathbb{I}_n(q,\ j)]$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Pr\left[\max_{k\in[\epsilon_n n,n]}\sum_{i=1}^{k}\mathcal{X}_i^j(q) > \left(1+\frac{3\epsilon_f}{4}\right)\frac{kc^j}{n}\middle|\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i^j(q) \leq \left(1+\frac{\epsilon_f}{2}\right)c^j\right] + \frac{1}{3n} \\
&\leq \Pr\left[\max_{k\in[\epsilon_n n,n]}\left\{\sum_{i=1}^{k}\mathcal{X}_i^j(q) - \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i^j(q)\right\} > \frac{\epsilon_f}{4}\frac{kc^j}{n}\right] + \frac{1}{3n} \\
&\leq \exp\left(\frac{-2\epsilon_s n\epsilon_f^2 {c^j}^2}{16n^2}\right) + \frac{1}{3n} \qquad (8) \\
&\leq \frac{1}{2n},
\end{aligned}
$$

其中不等式（8）由定理 4 得出，最后一个不等式则由假设 2得出。

关于在 $p^j > 0$ 的条件下，$\mathbf{Pr}\left[\sum_{i=\epsilon_s n}^{n}\mathcal{X}_i^j < (1-\epsilon_f)c^j\right] \leq \frac{1}{2n}$ 的证明类似，故略去。

□

D.3 步骤 3：对 OCAM 的确定性分配进行界定

引理 6。 对于任意 ϵ_b， ϵ_n， $\epsilon_f > 0$，若假设 2成立，则 *OCAM* 的输出 $(\mathbf{X}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{p}})$满足以下条件：

1. 存在某个物品 $j \in M$ 和 $k \in [\epsilon_n n, n]$，使得 $\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j > (1+\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}$ 的概率至多为 $\frac{1}{2n}$，且——　　—

2. 存在某个物品 $j \in M$ 和 $k \in [\epsilon_n n, n]$ 使得两者都 $p^j > 0$ *and* $\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j < (1-\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}$ *is at most* $\frac{1}{2n}$,

其中概率　　是针对随机到达排列和预算实现取的　　.

证明。 证明。满足 $\exists k \in [\epsilon_s n, n], j \in M$且 $\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j \geq (1+\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}$ 的概率可按如下方式界定：

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j > (1+\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}\right] \le \Pr\left[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{X}_i^j > \left(1+\frac{3\epsilon_f}{4}\right)\frac{kc^j}{n}\right] \le \frac{1}{2n},$$

其中，第一个不等式是因为

1. $\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j \le \sum_{i=1}^{\epsilon_s n}\hat{x}_i^j + \sum_{i=1}^{k}\mathcal{X}_i^j$，
以及 2. $\sum_{i=1}^{\epsilon_s n}\hat{x}_i^j \le \epsilon_s c^j \le \frac{\epsilon_f \epsilon_n}{4} c^j \le \frac{\epsilon_f}{4}\frac{kc^j}{n}$， ——

第二个不等式由引理 5得出。类似地，若 $p^j > 0$，则有

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j < (1-\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}\right] \le \Pr\left[\sum_{i=\epsilon_s n}^{k}\mathcal{X}_i^j < (1-\epsilon_f)\frac{kc^j}{n}\right] \le \frac{1}{2n},$$

其中，第一个不等式是因为 $\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i^j = \sum_{i=1}^{\epsilon_s n}\hat{x}_i^j + \sum_{i=\epsilon_s n}^{k}\mathcal{X}_i^j$，第二个不等式则由引理5得出。

□

D.4 第 4 步：整合起来

证明。定理 2 的证明。定理 2 的 (a) 和 (b) 部分已在引理 3 中证明。根据 OCAM 中分配的构造，输出 (X, b, ˆp) 显然满足定义 1 的 (i) 和 (ii) 部分（对所有 $k \in [1, n]$）。引理 6 表明，(X, b, ˆp) 以至少 $\frac{1}{n}$ 的概率满足定义 1 的 (iii) 和 (iv) 部分。

– □

E OCAM 的伪代码

机制 1： OCAM

输入：一组容量为 $\mathbf{c}$ 的商品 M，ϵ_b、ϵ_n、$\epsilon_f > 0$、n 个代理人依次在线到达。输出：分配 $\mathbf{x}$、预算 $\mathbf{b}$ 和价格 $\mathbf{p}$。设置 $\epsilon_s = \frac{\epsilon_f \epsilon_n}{4}$；对每个代理人 $i \in [\epsilon_s n]$，代理人 i 报告其类型 θ_i；设置 $\mathbf{x}_i = \max_{\succ_i}\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in \Psi_i \text{ 且 } \sum_{\ell=1}^{i} \mathbf{x}_\ell \le \epsilon_s \mathbf{c}\}$；任意设置 $b_i \in [1-\epsilon_b, 1]$；结束。定义经济 $E' = (\![\epsilon_s n], \pi^I, M, \epsilon_s \mathbf{c}, (\Psi_i)_{i\in[\epsilon_s n]}, (\succ_i)_{i\in[\epsilon_s n]})\!)$，其中 π^I 是恒等置换；计算 E' 的 ϵ_b-ECEEI：$\mathcal{X}, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{\epsilon_s n}, \mathbf{p}$；设置 $\Theta_{\mathcal{S}} = \cup_{i\in\{1,\ldots,\epsilon_s n\}} \theta_i$；定义 f：$\Theta_{\mathcal{S}} \to \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{\epsilon_s n}\}$ 如下：$f(\theta) = \mathcal{B}_i$，其中 $\theta_i = \theta$ 对某个 $i \in [\epsilon_s n]$ 成立；对每个代理人 $i \in \{\epsilon_s n + 1, \ldots, n\}$，代理人 i 报告其类型 θ_i；如果 $\theta_i \in \Theta_{\mathcal{S}}$，则抽取 $b_i \sim f(\theta_i)$；否则任意设置 $b_i \in [1-\epsilon_b, 1]$；结束。设置 $\mathbf{x}_i = \max_{\succ_i}\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in \Psi_i \text{ 且 } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \le b_i\}$；结束