arXiv:2303.13973v2 [math.RT] 3 Apr 2023

非定义特征下的 Brown 复形及其应用

Damiano Rossi

摘要

我们研究定义在特征不等于 ℓ 的域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限约化群中，与 ℓ-子群偏序集相关联的 Brown 复形。首先，在适当的假设下，我们证明其同伦类型由 Broué 和 Malle 提出的一般 Sylow 理论所决定；特别地，它仅取决于 q 模 ℓ 的乘法阶。该结果在一般 Sylow 理论、模 ℓ 同调分解以及 ℓ-模表示论方面带来了若干有趣的应用。随后，我们对 Brown 复形进行更深入的研究，以建立有限群表示论中的局部—整体猜想与一般 Sylow 理论之间的明确联系。为此，我们找出有限约化群的一族 ℓ-子群，它们与一般 Sylow 理论所控制的结构一一对应。

引言

Brown 复形 $\Delta(\mathrm{S}^\star_\ell(G))$ 与有限群 G 的非平凡 ℓ-子群偏序集相关联；其中 ℓ 是整除 G 的阶的一个素数。K. S. Brown 最早在其关于欧拉示性数的工作中引入了它 [Bro75]。对它的研究为 ℓ-局部群论、模 ℓ 群上同调以及 ℓ-模表示论作出了重要贡献。在其开创性论文中 [Qui 78], Quillen 首次系统研究了 Brown 复形，并证明其同伦类型与密切相关的子群集合（的单纯复形）的同伦类型一致。特别是，对于 ℓ 等于定义特征的有限约化群，他证明 Brown 复形与由真有理抛物子群集合所关联的 Tits 建筑同伦等价 [Tit74]。本文关注有限约化群在另一种情形下的 Brown 复形，即 ℓ 不等于定义特征。

我们的第一个定理借助 Broué 和 Malle 在 [BM92] 中发展的广义 Sylow 理论，描述 Brown 复形的同伦类型。设 G 是定义在代数闭域 $\mathbb{F}$ 的特征 p 上的线性代数群，并假设 G 连通且约化。设 $F : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ 是一个 Frobenius 端同态，它为（簇）G 定义了一个 $\mathbb{F}_q$-结构，其中 q是 p的某个幂。$\mathbb{F}_q$-有理点集 G^F，有时也称点对 $(\mathrm{G}\ F)$，称为

2010 数学主题分类：20J05, 20G40, 55P91, 20C20关键词和短语：Brown 复形、有限约化群、一般 Sylow 理论、Dade 猜想。感谢 Francesco Fumagalli 对本文早期版本提出的一些意见，也感谢 Gunter Malle 认真审阅本文内容并指出其中的一些不准确之处。本文始于作者访问佛罗伦萨大学期间，随后在 Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach 逗留期间完成，该逗留由莱布尼茨奖学金资助。感谢这两家机构的热情接待与支持。

一个有限约化群。固定一个素数 ℓ，令 p，并用 $e_\ell(q)$ 表示 q 模 ℓ 的乘法阶。利用一般 Sylow 理论，我们定义单纯复形 $\Delta(\mathrm{L}^{\star}_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F))$，它与 $(\mathbf{G}, F)$ 的真 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群所成的偏序集相关（精确定义见第 1.4 节）。

定理 A。设 $(\mathbf{G}, F)$ 是一个有限约化群，并考虑一个素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}, F)$（见定义 *2.1*），它不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 的阶。那么存在一个 $\mathbf{G}^F$-同伦等价

$$\Delta\left(\mathcal{S}^{\star}_{\ell}\left(\mathbf{G}^F\right)\right) \simeq_{\mathbf{G}^F} \Delta\left(\mathcal{L}^{\star}_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F)\right).$$

上述定理尤其说明，非定义特征下 Brown 复形的同伦类型具有普适性，也就是说，它不依赖于 ℓ，而只取决于正整数 $e_\ell(q)$。由此，对于固定的有限约化群 $(\mathbf{G}, F)$，我们在不同的素数 ℓ 和 ℓ' 处得到了等价的局部结构。值得一提的是，从某种相反的方向来看，Broto、Møller 和 Oliver [BMO12] 的工作表明，存在不同的有限约化群 $(\mathbf{G}, F)$ 和 $(\mathbf{G}', F')$，它们在固定素数 ℓ 处具有（按型）等价的融合系统。

在讨论定理 A 背后的动机之前，我们先推导出这一结果的一些有趣推论。首先，受 Brown 的同调 Sylow 定理 [Bro75, 推论 2], 启发，该推论指出 Brown 复形的欧拉示性数模 Sylow ℓ-子群的阶同余于 1，我们得到以下关于 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的单纯复形的欧拉示性数的同余。这应被理解为 Broué–Malle 的普适 Sylow 定理 [BM92，定理 3.4 (4)] 的同调版本。

推论 B. 设 $(\mathbf{G}, F)$ 是一个有限约化群，并假设素数 ℓ 对 $(\mathbf{G}, F)$ 而言足够大（见 *[BMM93,* 定义 *5.1]*），且不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 的阶。那么

$$\chi\left(\Delta\left(\mathcal{L}^{\star}_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F)\right)\right) \equiv 1 \pmod{\left(\Phi_{e_\ell(q)}(q)^a\right)_\ell}$$

其中 a 是阶多项式 $P_{(\mathbf{G},F)}(x)$ 关于 $\Phi_{e_\ell(q)}(x)$ 的赋值（定义见第 *1.4* 节），而 n_ℓ 表示整除整数 n 的 ℓ 的最大幂。

接下来，我们考虑其在模 ℓ 同调分解中的一个应用。根据 Dwyer 的工作 [Dwy97],，重构有限群的分类空间（模 ℓ 同调意义下）有三种标准方法，即通过粘合子群的分类空间来进行：中心化子分解、子群分解和正规化子分解。这三种方法都由一种称为充足性的性质来保证。一旦确立了这一性质，通常还会进一步考察这三种分解是否有任何一种是锐的。这一性质给出了一个闭合公式，用子群分类空间的同调来表示该分类空间的同调。读者可参见第 2.3 节及其中的参考文献。Grodal 和 Smith [GS06] 对锐性进行了广泛研究，并证明了许多子群族具有这一性质。借助定理 A，我们可以证明 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群族具有其中一些性质。

推论 C. 假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}, F)$ 不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 的阶。那么，$\mathbf{G}^F$-单纯复形 $\Delta(\mathcal{L}^{\star}_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F))$ 是充足的且正规化子尖锐（相对于素数 ℓ）。

上述推论表明，有限约化群的分类空间的模 ℓ 同调由局部的 $e_\ell(q)$ 决定，也就是说，由（真）$e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的正规化子决定。更一般地，定理 A 的同伦等价使我们能够将涉及群 G^F 的 ℓ-结构的问题转化为更方便的一般 Sylow 理论语言，从而运用代数几何中的强大技巧。这为先前关于 ℓ-模表示论的研究中建立的联系提供了更具概念性的解释（例如参见 [BMM93], [CE94], [CE99], 和 [KM15]）。我们的主要动机是将有限群表示论中的一些重要未解猜想，改写为关于 $e_\ell(q)$-局部结构的表述。若考虑 Knörr 和 Robinson 提出的 Alperin 权猜想形式 [KR89]，这一点尤其清晰。根据 Webb [Web87] 和 Thevénaz [Thé93] 的工作，对于给定的有限群 G，后者分别可用约化 *Lefschetz* 不变量 Λ_G 和等变 *Euler* 示性数 χ_G 来表述（更多详情见第 2.4 节）。由于这些量在 G-同伦等价下保持不变，我们可以利用定理 A 推导出以下推论。

推论 D。 设$(\mathbf{G}\ F)$为有限约化群，并考虑一个素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$（见定义 *2.1*），它不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶。那么，*Alperin* 权猜想的 *Knörr–Robinson* 改写的无块版本对$\mathbf{G}^F$成立，当且仅当

$$k^0\left(\mathbf{G}^F\right) = -l_\ell\left(\tilde{\Lambda}_{\mathbf{G}^F}\left(\Delta\left(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F)\right)\right)\right)$$

当且仅当

$$k\left(\mathbf{G}^F\right) - k^0\left(\mathbf{G}^F\right) = \chi_{\mathbf{G}^F}\left(\Delta\left(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F)\right)\right)$$

其中，函数 k、 k^0 和 l_ℓ 分别统计不可约普通特征、 ℓ-缺陷零特征以及 ℓ-*Brauer* 特征的数量，详见第 *2.4* 节。

现在我们转而讨论 Dade 猜想 [Dad92，猜想 6.3]。作者在 [Ros22b] 中启动了一项长期计划，旨在解决这一猜想；该计划依托 Späth[Spä17] 的约化定理，并受到 Broué、Fong 和 Srinivasan [BFS] 的早期思想启发。具体而言，在 [Ros22b，猜想 C] 中，作者提出了一个适用于有限约化群的 Dade 猜想版本，并通过使用由 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的单纯复形导出的 $e_\ell(q)$-局部结构，使其适配广义 Harish-Chandra 理论。现在，为了证明 Dade 猜想，我们需要证明:

- [Ros22b，猜想 C] 对有限约化群成立；并且
- [Ros22b，猜想 C] 蕴含 Dade 猜想。

第一个问题被归结为 [Ros22c] 中的某些可延拓性条件，并在 [Ros23] 中针对单幂特征标以及 A、B、C 型群得到了证明。第二个问题则在假设 ℓ 足够大的情况下，由 [Ros22b，命题 7.10] 作出了肯定回答。我们的下一个定理将这一结果推广到满足定理 A 假设的素数 ℓ。遗憾的是，在这种情况下，上述构造的同伦等价不足以得到所需结果。证明转而依赖于构造一系列<款式 id='9'>交替 </款式>（见定义 1.4），并利用它们证明一个消去定理（见定理 4.5），从而将 Dade 猜想的研究从 Brown 复形归约到 $e_\ell(q)$<款式 id='13'>-闭阿贝尔 </款式> ℓ<款式 id='16'>-子群 </款式>的单纯复形（见定义 3.1）。随后，后者被识别为 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的单纯复形（见命题 4.9），并

最终由此得到以下定理。

定理 E. 设$(\mathbf{G}, F)$是一个有限约化群，且$\mathbf{G}$是单连通型的单群。考虑一个对$\mathbf{G}$而言是好且不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶的奇素数 ℓ，其中 $\ell \neq 3$ 若$(\mathbf{G}, F)$具有有理型${}^3\mathbf{D}_4$。那么，对于每个具有非平凡缺陷的 *Brauer* ℓ-块 B 以及每个非负整数 d，*[Ros22b*、猜想 *C]* 与 *Dade* 猜想（见 *[Dad92*，猜想 *6.3]*）等价。

类似的论证可用于证明特征三元组猜想的一个消去定理（见定理 4.6） [Spä17，定义 6.3]。继而利用该结果证明，Dade 猜想的归纳条件 [Spä17，定义 6.7] 可由 [Ros22b、猜想 D] 推出，并由此得到我们的最终结果。

定理 F。 设$(\mathbf{G}, F)$是一个有限约化群，其中$\mathbf{G}$是单连通型的单群，且$\mathbf{G}^F$是$\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的泛覆叠群。考虑一个对$\mathbf{G}$而言是好且不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$阶的素数 $\ell \geq 5$。若 *[Ros22b,* 猜想 *D]* 对一个具有非平凡缺陷的 *Brauer* ℓ块 B 和一个非负整数 d成立，则 *Dade* 猜想的归纳条件（见*[Spä17,* 定义 *6.7]*）对 B 和 d成立。

本文安排如下。第 1 节介绍主要定义，并汇集关于单纯复形、等变同伦等价、一般 Sylow 理论以及有限约化群中阿贝尔 ℓ子群的中心化子的各种结果。我们还在此引入交替 的概念（见定义 1.4），其灵感来自 Knörr 和 Robinson [KR89]的工作。第 2 节致力于证明定理 A 及其推论：推论 B、推论 C 和推论 D。我们还证明，所有这些结果都可以通过将 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的单纯复形替换为 $\Phi_{e_\ell(q)}$-环面的单纯复形来表述（见命题 2.3）。第 3 节介绍并研究 e-闭包 和弱 e-闭包 的概念（分别见定义 3.1 和定义 3.6）。随后，我们利用这些概念在有限约化群的 Brown 复形中构造交替（见命题 3.9 和命题 3.12），并将研究归约到 $e_\ell(q)$-闭的阿贝尔 ℓ子群。由此，在第 4 节中，我们得到 Dade 猜想（见定理 4.5）和特征三元组猜想（见定理 4.6）的消去定理，借此可以仅用 $e_\ell(q)$-闭阿贝尔 ℓ子群的链来表述这些猜想。最后，在证明后者与 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的链相对应之后（见引理 4.7），我们便能够从 [Ros22b, 猜想 C 和猜想 D]推出 Dade 猜想及其归纳条件，或者更确切地说，推出特征三元组猜想。最终得到定理 E 和定理 F。

1 背景材料

1.1 子群复形

对于每个偏序集 X，我们构造一个单纯复形 $\Delta(\mathrm{X})$，其 n-单形是由 X 中元素组成、基数为 $n+1$ 的全序链 σ，也就是说，是形如 $\sigma = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ 且满足 $x_i \in \mathrm{X}$ 的链。单形 σ 的维数定义为 $|\sigma| := n$，而单纯复形 $\Delta(X)$ 的维数则定义为其单形中的最大维数。在考虑形如 $\Delta(\mathrm{X})$ 的单纯复形时，我们将 链 和单形这两个术语，以及长度 和维数这两个术语交替使用。现在，若 $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 是一个偏序集映射（即保序映射），则可得到一个诱导的单纯复形映射 $\Delta(\phi) : \Delta(\mathrm{X}) \to \Delta(\mathrm{Y})$。特别地，若 G 是一个

通过偏序集自同构作用于 X 的有限群，则 $\Delta(\mathrm{X})$ 是 [Ben98, Definition 6.1.1] 中定义的 G-单纯复形。在这种情况下，我们称 X 为 G-偏序集。此外，G-偏序集之间的映射 $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 是一个偏序集映射，并且还满足 G-等变性。注意，对于每个$x \in \mathrm{X}$，子偏序集 $\mathrm{X}_{\leq x} := \{x' \in \mathrm{X} \mid x' \leq x\}$ 都会诱导一个子复形 $\Delta(\mathrm{X}_{\leq x})$。此外，若 G作用于 X，则 $\Delta(\mathrm{X}_{\leq x})$ 是一个 G_x-单纯复形，其中 G_x 表示 G 中 x 的稳定子。此说明同样适用于类似定义的子偏序集 $\mathrm{X}_{<x}$、$\mathrm{X}_{\geq x}$ 等。

本文主要关注这样的情形：X 是按包含关系排序的子群偏序集。固定一个素数 ℓ，并设 Z 是有限群 G 的中心 ℓ-子群。我们用 $\mathrm{S}^\star_\ell(G, Z)$ 表示满足 $Z < P$ 的 G 的所有 ℓ-子群 P 的集合，用 $\mathrm{S}_\ell(G, Z)$ 表示满足 $Z \leq P$ 的那些 P 的集合。采用这一记号，有 $\mathrm{S}_\ell(G, Z) = \mathrm{S}^\star_\ell(G, Z) \cup \{Z\}$。这些 ℓ-子群集合在 G 的共轭作用以及通常的子群包含关系下，自然构成 G-偏序集。如上所述，我们得到一个 G-单纯复形 $\Delta(\mathrm{S}^\star_\ell(G, Z))$，它由满足 $Z < P_i$ 的 ℓ-子群链 $\sigma = \{P_0 < P_1 < \cdots < P_n\}$ 构成。接下来注意到，Z 是偏序集 $\mathrm{S}_\ell(G, Z)$ 中的最小元。在这种情况下，我们约定，属于单纯复形 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G, Z))$ 的每条链 σ 都以 Z 为起始项，即 $\sigma = \{Z = P_0 < P_1 < \cdots < P_n\}$。$\ell$-链复形 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G, Z))$ 对研究局部-整体计数猜想至关重要，已在 [KR89], [Dad92] 和 [Dad94] 中得到研究。关于为何考虑以固定的 ℓ-子群为起始项的链，[Dad92，第 193] 页的讨论对此作了说明。当 $Z = 1$ 时，我们分别将 $\mathrm{S}_\ell(G, 1)$ 和 $\mathrm{S}^\star_\ell(G, 1)$ 简记为 $\mathrm{S}_\ell(G)$ 和 $\mathrm{S}^\star_\ell(G)$。单纯复形 $\Delta(\mathrm{S}^\star_\ell(G))$ 最早由 [Bro75] 和 [Bro76] 引入，称为 Brown 复形。需要注意的是，尽管 Brown 复形通常记作 $\mathrm{S}_\ell(G)$，本文出于技术原因采用上述记号；按照这一记号，$\mathrm{S}_\ell(G)$ 表示 G 的所有 ℓ-子群组成的集合，其中包括平凡子群。

众所周知，在许多情况下，可以用某些子群的子集来取代 ℓ 在 G 中的子群集，例如初等阿贝尔 ℓ 子群集，或 ℓ-根基 ℓ 子群集（例如，参见 [Qui78，第 2], [Bou84] 节和 [KR89，命题 3.3]）。本文只考虑阿贝尔 ℓ 子群的子集。更准确地说，我们用 $\mathrm{Ab}_{\ell,z}(G, Z)$ 表示 $\mathrm{S}_\ell(G, Z)$ 的子集，其中包含满足以下条件的 ℓ 子群：P 包含 Z，且 P/Z 为阿贝尔群。我们还用 $\mathrm{Ab}_\ell(G, Z)$ 表示 $\mathrm{S}_\ell(G, Z)$ 的子集，其中包含满足以下条件的 ℓ 子群：P 包含 Z，且 P 为阿贝尔群。显然，$\mathrm{Ab}_\ell(G, Z)$ 包含于 $\mathrm{Ab}_{\ell,z}(G, Z)$，并且由于 Z 是阿贝尔群，故 Z 属于 $\mathrm{Ab}_\ell(G, Z)$。如果采用相同的定义，但只考虑严格包含 Z 的 ℓ 子群 P，则得到 $\mathrm{Ab}^\star_{\ell,z}(G, Z) := \mathrm{Ab}_{\ell,z}(G, Z) \setminus \{Z\}$，以及 $\mathrm{Ab}^\star_\ell(G, Z) := \mathrm{Ab}_\ell(G, Z) \setminus \{Z\}$。与前面一样，我们构造分别对应于 G-偏序集 $\mathrm{Ab}^\star_\ell(G, Z)$ 和 $\mathrm{Ab}^\star_{\ell,z}(G, Z)$ 的 G-单纯复形 $\Delta(\mathrm{Ab}^\star_\ell(G, Z))$ 和 $\Delta(\mathrm{Ab}^\star_{\ell,z}(G, Z))$。注意，在此情形下，$\ell$ 子群 Z 也是偏序集 $\mathrm{Ab}_\ell(G, Z)$ 和 $\mathrm{Ab}_{\ell,z}(G, Z)$ 的最小元，因此我们约定 ℓ-链 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(G, Z))$ 和 $\Delta(\mathrm{Ab}_{\ell,z}(G, Z))$ 均以 Z 这一项开始。当 $Z = 1$ 时，我们简化上述记号，仅写作 $\mathrm{Ab}_\ell(G, 1) = \mathrm{Ab}_\ell(G)$，其他偏序集也类似。我们指出，尽管 Quillen 最初考虑的是初等阿贝尔 ℓ 子群集，但本文需要考虑更大的全体阿贝尔 ℓ 子群集。作此选择的原因将在第 3.2 节中说明。

1.2 等变同伦等价

关于偏序集的等变同伦理论的主要定义和结果，请参阅 [TW91] 和 [Ben98，第 6.4] 节。特别是，G-同伦等价 的定义可参见 [Ben98，定义 6.4.1]，本文用 $\simeq_G$ 表示该概念。下文中，若 G-偏序集 X 的单纯复形 Δ(X) 与平凡的 G-单纯复形（带有平凡的 G 作用） G-同伦等价，则称 X 为 G-可缩 。我们从 Quillen 提出、后经 Thévenaz 和 Webb 推广的以下结果开始。

引理 1.1 ([Qui78，命题 1.6], [TW91，定理 1])。 设 G 为有限群，并考虑两个G-偏序集 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$。若 $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是 G-偏序集的映射，且满足以下条件之一：

(i) $\phi^{-1}(\mathcal{Y}_{\leq y})$ 对每个 $y \in \mathcal{Y}$ 都是 G_y-可缩的；

或 *(ii)* $\phi^{-1}(\mathcal{Y}_{\geq y})$ 对每个 $y \in \mathcal{Y}$ 都是 G_y-可缩的，

那么诱导出的 G-单纯复形映射

$$\Delta(\phi) : \Delta(\mathcal{X}) \to \Delta(\mathcal{Y})$$

是一个 G-同伦等价。

上述引理将作为我们的主要工具，用于构造单纯复形的 G-同伦等价。我们还将结合一条确保可缩性的标准结果来使用它。若存在元素 $x_0 \in \mathrm{X}^G$ 以及 G-偏序集的映射$\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$，使得对每个 $x \in \mathrm{X}$ 都有 $x \leq \phi(x) \geq x_0$，则称 G-偏序集 X 为规范 G-可缩的 。这里，X^G 表示 G-不变元素组成的子偏序集。

引理 1.2. 设$\mathcal{X}$ 是一个 G-偏序集。若$\mathcal{X}$ 是规范地 G-可缩的，则它是 G-可缩的。

证明. 根据 [Ben98, 定理 6.4.2]，只需证明对每个 $H \leq G$，单纯复形 $\Delta(\mathrm{X}^H)$ 都是可缩的。由假设，存在一个元素 $x_0 \in \mathrm{X}^G$ 以及一个 G-偏序集的映射 $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$，满足对每个 $x \in \mathrm{X}$， $x \leq \phi(x) \geq x_0$ 。特别地，我们得到一个映射$\phi^H : \mathrm{X}^H \to \mathrm{X}^H$和一个元素 $x_0 \in \mathrm{X}^H$，使得对每个 $x \in \mathrm{X}^H$， $x \leq \phi^H(x) \geq x_0$。于是，$\Delta(\mathrm{X}^H)$ 根据 [Qui78, 1.5] 是规范可缩的，结论得证。 □

上述条件有一种特别简单的情形可以满足。我们称一个 G-偏序集 X 是 G-连接可缩（经由 x_0） ，若存在一个元素 $x_0 \in \mathrm{X}^G$，使得对每个 $x \in \mathrm{X}$，X 中都存在连接$x \vee x_0$。

推论 1。 3. 设 $\mathcal{X}$ 是一个 G-偏序集。如果 $\mathcal{X}$ 是 G-连接可缩的，那么它是（典范地） G-可缩的 .

证明。 考虑由 $\phi(x) := x \vee x_0$ 给出的映射 $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$。由于 $x_0 \in \mathrm{X}^G$，我们推得 ϕ 是 G-等变的，结论立即由引理 1.2 得出。 □

1.3 单纯复形的交替

本节中，我们引入单纯复形的交替概念。这一概念受到 Knörr 和 Robinson 的工作的启发，尤其是受到 [KR89，命题 3.3] 的证明的启发（另见 [Nav18，定理 9.16] 的证明）。如下文所示，其思路是提供一种方法，以消去一组单形对某些交错和的贡献。这通常能将问题化归为研究更小且性质更好的单纯复形。

定义 1.4（交替）。设 Δ 是一个单纯复形，并考虑其子复形 $\Delta' \subseteq \Delta$。我们称映射

$$\phi : \Delta \setminus \Delta' \to \Delta \setminus \Delta'$$

是 Δ' 在 Δ 中的一个交替，如果对于每个 $\sigma \in \Delta \setminus \Delta'$，它都满足 $\phi^2(\sigma) = \sigma$ 且 $|\phi(\sigma)| = |\sigma| \pm 1$。此外，如果 Δ 是一个 G-单纯复形，且 Δ' 是 Δ的一个 G-稳定子复形，那么如果 ϕ 还满足 G-等变性，我们称其为 Δ' 在 Δ 中的一个 G-交替。

在下一个引理中，我们将说明如何利用上述构造，将关于单纯复形 Δ 的问题化归为关于其子复形 Δ'的问题。假设 Δ 是有限的。对于每个非负整数 r，令 Δ_r 为 Δ 中维数为 r的单形集合。那么，Δ 的欧拉示性数 为

$$\chi(\Delta) := \sum_{r \geq 0} (-1)^r |\Delta_r|$$

这是一个定义良好的整数，因为对于每个大于 Δ 的（有限）维数的 r，$\Delta_r = \varnothing$。我们还允许通过设定 $\chi(\varnothing) := 0$ 来在空单纯复形上定义欧拉示性数（这将在推论 2.5 的证明中用到）。

引理 1.5. 设 $\Delta' \subseteq \Delta$ 和 Δ' 是两个有限单纯复形。若 Δ 中存在 χ 的一个交替，则 $\Delta(=\chi)$ $\Delta'(\Delta)$。

证明。如上，设 Δ 和 Δ' 中维数为 r 的单形集合分别为 Δ_r 和 Δ'_r。由于 Δ' 的维数 d' 小于或等于 Δ 的维数 d，我们得到

$$\begin{aligned} \chi(\Delta) &= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r |\Delta_r| \qquad (1.1) \\ &= \sum_{r=0}^{d'} (-1)^r \left|\Delta'_r\right| + \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \left(|\Delta_r| - \left|\Delta'_r\right|\right) \\ &= \chi\left(\Delta'\right) + \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \left|\Delta_r \setminus \Delta'_r\right|. \end{aligned}$$

接下来，设 Δ_+ 和 Δ_- 分别为偶维和奇维单形的集合，并类似地定义 Δ'_+ 和 Δ'_-。若 Δ 中的 Δ' 是一个交替，则

$$\left|\Delta_+ \setminus \Delta'_+\right| = \left|\phi\left(\Delta_+ \setminus \Delta'_+\right)\right| = \left|\Delta_- \setminus \Delta'_-\right|$$

因此

$$\sum_{r=0}^{d} (-1)^r \left|\Delta_r \setminus \Delta'_r\right| = \left|\Delta_+ \setminus \Delta'_+\right| - \left|\Delta_- \setminus \Delta'_-\right| = 0. \qquad (1.2)$$

现在，结合 (1.1) 和 (1.2)，我们得出 $\chi(\Delta') = \chi(\Delta)$。 □

接下来，沿用 [KR89]，我们将定义在 G 的子群集合上、取整数值且在子群的 G-共轭类上为常值的映射称为 G-稳定函数。例如，对于 G 的每个子群 H，映射 $f_1(H) := k(H)$（H 的共轭类数）和 $f_2(H) := l_\ell(H)$（H 的 ℓ-正则共轭类数）都是 G-稳定函数。

引理 1.6. 设 f 是某个有限群 G 的 G-稳定函数，并考虑有限维 G-单纯复形 Δ 及一个 G-稳定子复形 $\Delta' \subseteq \Delta$。若 Δ 中存在 Δ' 的一个 G-交替，则

$$\sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}f(G_\sigma) = \sum_{\sigma'}(-1)^{|\sigma'|}f(G_{\sigma'})$$

其中 σ 和 σ' 分别遍历 G 在 Δ 和 Δ' 上作用的代表元集。

证明。 固定代表元集 S 和 S′，分别对应 G 在 Δ 和 Δ' 上的作用。不失一般性，可假设 S′ 包含于 S 中，因此 T := S ∖S′ 是 G 在 $\Delta \setminus \Delta'$ 上作用的代表元集。现在，若 Δ 中存在 Δ' 的一个 G- 交替，则可知 ϕ(T) 也是 G 在 $\Delta \setminus \Delta'$ 上作用的代表元集。此外，注意到对每个 $\rho \in$ T，都有 $|\phi(\rho)| = |\rho| \pm 1$ 和$G_\rho = G_{\phi(\rho)}$。于是，由于 f 在 G-共轭类的子群上为常数，我们推得

$$\sum_{\rho\in\mathcal{T}}(-1)^{|\rho|}f\left(G_\rho\right) = \sum_{\phi(\rho)\in\phi(\mathcal{T})}(-1)^{|\phi(\rho)|}f\left(G_{\phi(\rho)}\right) = -\sum_{\rho\in\mathcal{T}}(-1)^{|\rho|}f\left(G_\rho\right)$$

因此，左侧的交错和为零。由此可得

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}}(-1)^{|\sigma|}f(G_\sigma) = \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}'}(-1)^{|\sigma'|}f(G_{\sigma'}) + \sum_{\rho\in\mathcal{T}}(-1)^{|\rho|}f(G_\rho) = \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}'}(-1)^{|\sigma'|}f(G_{\sigma'})$$

正如命题所述。 □

关于本文所需交替的构造，请参阅第 3.2 节；有关更多应用，请参阅第 4.2 节。

1.4 泛 Sylow 理论

在 [BM92] Broué 和 Malle 将 ℓ-子群理论推广到了连通约化群的背景中。其核心思想是用分圆多项式的幂替代素数幂。首先注意，对于定义在特征为 $\mathbb{F}$ 的代数闭域 p 上、带有 Frobenius 端同态 $F : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ 的每个连通约化群 G（该端同态与 G 上的一个 $\mathbb{F}_q$-结构相关联（q 是 p 的一个幂）），我们都可以关联一个多项式 $P_{(\mathbf{G},F)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$，称为 (G F) 的阶多项式，它具有如下性质：$P_{(\mathbf{G},F)}(q) = |\mathrm{G}^F|$（参见 [GM20，定义 1.6.10 和注记 1.6.15]）。现在，给定一个正整数集合 E，如果 G 的一个 F-稳定环面 S 的阶多项式 $P_{(\mathbf{S},F)}(x)$ 是若干个 $e \in E$ 的 e 次分圆多项式 $\Phi_e(x)$ 的乘积，我们就称 S 为 (G F) 的 Φ_E-环面。Φ_E-环面的中心化子称为 (G F) 的 E-分裂 Levi 子群。当考虑集合 $E = \{e\}$ 时，我们省略括号，直接称为 Φ_e-环面、e-分裂 Levi 子群等。此外，回顾一下，每个 F-稳定环面 T 都包含一个唯一的极大 Φ_E-环面，记作 T^{Φ_E}。我们将 T_E(G F) 定义为包含 Z°(G)$^{\Phi_E}$ 的 (G F) 的 Φ_E-环面的集合，并考虑其子集 $\mathrm{T}^\star_E$(G F)，该子集由严格包含 Z°(G)$^{\Phi_E}$ 的 (G F) 的 Φ_E-环面组成。类似地，我们用 L_E(G F) 表示 (G F) 的 E-分裂 Levi 子群集合，而真子集（即严格包含于 G 中的那些

) E-分裂 Levi 子群在 $(\mathrm{G}\ F)$ 中构成的集合记为 $\mathrm{L}_E^\star(\mathrm{G}\ F)$。这些集合关于 G^F 的共轭作用以及子群的通常包含关系，自然构成 G^F-偏序集。正如第 1.1 节所述，我们随后可以构造相应的单纯复形。按照约定，我们假设 $\Delta(\mathrm{T}_E(\mathrm{G}\ F))$ 的单形总是以 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{G})^{\Phi_E}$（偏序集 $\mathrm{T}_E(\mathrm{G}\ F)$ 的最小元）为起始项。类似地，我们假设 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$ 的单形以 G（偏序集 $\mathrm{L}_E(\mathrm{G}\ F)$ 的最大元）为末项。

我们将 $e_\ell(q)$ 定义为 q 模 ℓ 的阶（若 $\ell = 2$，则模 4），并将 $E_\ell(q) := \{n \in \mathbb{N} \mid n_{\ell'} = e_\ell(q)\}$。后者与满足 ℓ 整除 $\Phi_n(q)$ 的正整数 n 的集合一致。注意，在本文中，当 A 是有限阿贝尔群时，我们常将其记作 $A_\ell := \mathrm{O}_\ell(A)$。

引理 *1.7.* 假设 ℓ 对 G 良好，且不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，并考虑子集 $E \subseteq E_\ell(q)$。若 L 是 $(G\ F)$ 的一个 E-分裂 *Levi* 子群，则 $L = C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C_{\mathbf{G}}^\circ(Z(L)_\ell^F))^{\Phi_E})$。

证明。首先，在我们的假设下，[CE04，命题 13.19] 蕴含 $\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F)$。另一方面，$\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})^{\Phi_E})$（例如参见 [GM20，命题 3.5.5] 或 [Ros22b，引理 2.5 (i)]）。现在，结合上述两个等式即可得到结论。 □

1.5 阿贝尔 ℓ-子群的中心化子

本节汇集了关于阿贝尔 ℓ-子群中心化子的一些众所周知的结果（参见 [CE94，第 2] 节和 [CE99，第 3]节）。请记住，ℓ 是一个固定的素数，且不同于 G 的定义特征 p。

引理 *1.8.* 设 A 是 G^F 的一个阿贝尔 ℓ-子群，并假设 ℓ 对 G 良好。则 $C_{\mathbf{G}}^\circ(A)$ 是 G 的一个 F-稳定 *Levi* 子群。若进一步假设 ℓ 不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，也不整除 $|Z(G^*)^F : Z^\circ(G^*)^F|$，则：

(i) $\mathbf{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)^F = \mathbf{C}_{\mathbf{G}}(A)^F$;

(ii) $A \le \mathbf{Z}^\circ(\mathbf{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A))$; *and*

(iii) $\mathbf{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$ *is an* $E_\ell(q)$*-split Levi subgroup.*

证明。根据 [CE94，命题 2.1 (ii)]，连通中心化子 $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$ 是一个 Levi 子群。现在假设 ℓ 不整除 $|\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F : \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{G})^F|$，也不整除 $|\mathrm{Z}(\mathrm{G}^*)^F : \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{G}^*)^F|$。在此假设下，性质 (i) 可由证明 [CE94，命题 2.1 (iii)] 时所用的论证推出；而性质 (ii) 和 (iii) 则可由 (i) 立即得到，正如 [Ros22b，引理 2.6 (ii)-(iii)] 的证明中所述。 □

推论1.9。设 A 是 $\mathbf{G}^F$ 的一个阿贝尔 ℓ子群，并假设 ℓ 对$\mathbf{G}$是好的。那么：

(i) $C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C_{\mathbf{G}}^\circ(A))^{\Phi_e})$ 是 $(G\ F)$ 的一个 e-分裂 *Levi* 子群；*(ii)* 若进一步 ℓ 不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，也不整除 $|Z(G^*)^F : Z^\circ(G^*)^F|$，则 $A \le C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C_{\mathbf{G}}^\circ(A))^{\Phi_e})$。

证明。令 $\mathrm{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$，注意到根据引理 1.8，这是一个 F-稳定的 Levi 子群。于是 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})$ 是一个 F-稳定的环面；根据 [BM92, Theorem 3.4 (2)]，它包含唯一的极大 Φ_e-环面 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})^{\Phi_e}$。

于是 $C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(L)^{\Phi_e})$ 是 $(G\ F)$ 的一个 e-分裂 Levi 子群。现在假设 ℓ 不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，也不整除 $|Z(G^*)^F : Z^\circ(G^*)^F|$。由引理 1.8 可得 $A \le Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))$，因此 A 中心化 $Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))$。由此我们推出，$A \le C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))) \le C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})$，如所需。

□

2 同伦等价及其应用

设 G 是定义在特征为 p 的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的连通约化群，$F : G \to G$ 是一个 Frobenius 端同态，它在代数簇 G 上定义了一个 $\mathbb{F}_q$-结构，且 ℓ 是一个素数。对于情形 $\ell = p$，Quillen 在 [Qui78，第 3.1] 定理中描述了 Brown 复形 $\Delta(S^\star_\ell(G^F))$（的同伦类型）。特别地，他证明了 $\Delta(S^\star_\ell(G^F))$ 与和真有理抛物子群集合相关联的 Tits（球面）建筑同伦等价。本节考察非定义特征的情形 $\ell \neq p$，并证明在适当假设下，Brown 复形的同伦类型由 Broué 和 Malle [BM92] 发展的普遍 Sylow 理论所控制。随后，我们将探讨这一结果在普遍 Sylow 理论、同调分解及 Alperin 权猜想中的应用。

2.1 通过 e_ℓ（q）-分裂 Levi 子群实现的等变同伦等价

我们陈述一个关于素数的条件，该条件最早由 Cabanes 和 Enguehard 在其工作中考察（见 [CE04，条件 22.1]）。这将确保在下文证明中考虑的偏序集映射下，非中心阿贝尔 ℓ-子群与真 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群相对应。回顾一下，每个连通约化群 G 都导出一个单连通群 $G_{sc} := ([G, G])_{sc}$，其定义见 [GM20，例 1.5.3 (b)]。我们将自由使用 [GM20，定义 1.5.17] 中的对偶群 (G^*, F^*) 概念。

定义 2.1。令 $\pi(G\ F)$ 为由以下素数组成的集合：这些素数 ℓ 对 G 良好，不整除 2，q 或 $|Z(G_{sc})^F|$，并且满足 $\ell \neq 3$ 当 $(G\ F)$ 具有类型为 ${}^3D_4$ 的有理分量时。然后，我们将 $\pi(G\ F)$ 定义为集合：其中的素数 $\ell \in \pi'(G\ F)$ 不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，也不整除 $|Z(G^*)^F : Z^\circ(G^*)^F|$。

我们现在证明定理 A。

定理 2.2。假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$ 不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 的阶。那么

$$\Delta\left(\mathcal{S}^\star_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\right) \simeq_{\mathbf{G}^F} \Delta\left(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F)\right).$$

证明。令 $e := e_\ell(q)$，并回顾一下，$Ab^\star_\ell(G^F)$ 是 G^F 的非平凡阿贝尔 ℓ-子群所构成的偏序集。由于 $Ab^\star_\ell(G^F)$ 包含了 Quillen 在 [Qui78], 中考察的非平凡初等阿贝尔 ℓ-子群所构成的偏序集，我们由 [TW91, Theorem 2] 得出，Brown 复形 $\Delta(S^\star_\ell(G^F))$ 与 $\Delta(Ab^\star_\ell(G^F))$ G^F-同伦等价。另一方面，由于对偶偏序集对应于同胚的单纯复形，因此存在一个 G^F-等变同胚，将 $\Delta(L^\star_e(G\ F))$ 映到 $\Delta(L^\star_e(G\ F)^{op})$。因此，只需证明单纯复形 $\Delta(Ab^\star_\ell(G^F))$ 与 $\Delta((L^\star_e(G\ F))^{op})$ G^F-同伦等价。为证明后一结论，

我们应用第1.2节和第1.5节的结果。考虑映射

$$\begin{aligned}\phi_e : \mathrm{Ab}_\ell^\star\left(\mathbf{G}^F\right) &\to \mathcal{L}_e^\star\left(\mathbf{G}, F\right)^{\mathrm{op}} \\ A &\mapsto \mathbf{C}_{\mathbf{G}}\left(\mathbf{Z}^\circ\left(\mathbf{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)\right)_{\Phi_e}\right)\end{aligned}$$

并注意到这是一个定义良好的 G^F-偏序集映射。事实上，根据推论1.9，我们知道 $\phi_e(A)$ 是一个 e-分裂 Levi 子群，因此只需证明 $\phi_e(A)$ 严格包含于 G。为证明这一点，我们首先应用引理 1.8 (iii)，推出 $\mathrm{H} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$ 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 $E_\ell(q)$-分裂 Levi 子群。此外，回想 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F = 1$，可见 A 不可能是 G 的中心元素，因此 $\mathrm{H} < \mathrm{G}$。现在，若假设 $\phi_e(A) = \mathrm{G}$，则可得 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{H})_{\Phi_e} \leq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$，而且[CE04, Lemma 22.3] (另见 [CE04, Theorem 22.2]的证明)蕴含，对于每个 $a \geq 0$，都有 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{H})_{\Phi_{e\ell^a}} \leq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$。但此时 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{H})^{\Phi_{E_\ell(q)}} \leq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$，并且由于 H 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 $E_\ell(q)$-分裂 Levi 子群，我们得到 $\mathrm{H} = \mathrm{G}$。这个矛盾表明 $\phi_e(A)$ 严格包含于 G，因此映射 ϕ_e 定义良好。接下来，我们证明 ϕ_e 是一个 G^F-偏序集映射。根据 ϕ_e 的定义，对于每个阿贝尔 ℓ-子群 $A \leq \mathrm{G}^F$ 和 $g \in \mathrm{G}^F$，都有 $\phi_e(A^g) = \phi_e(A)^g$。此外，设 $A \leq A'$ 为两个阿贝尔 ℓ-子群，并令 $\mathrm{L} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$，$\mathrm{K} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A')$。由于 $\mathrm{K} \leq \mathrm{L}$ 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 Levi 子群（见引理 1.8），我们得到 $\mathrm{Z}(\mathrm{L}) \leq \mathrm{Z}(\mathrm{K})$，这意味着 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})_{\Phi_e} \leq \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{K})^{\Phi_e}$，因此 $\phi_e(A') \leq \phi_e(A)$。这表明 ϕ 是一个 G^F-偏序集映射。

现在，我们要应用引理 1.1 来证明 ϕ_e 诱导出一个 G^F-同伦等价 $\Delta(\phi_e)$。为此，固定 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 e-分裂 Levi 子群 L，并注意到纤维 $\mathrm{X}_{\mathbf{L}} := \phi_e^{-1}(\mathrm{L}_e^\star(\mathrm{G}\ F)_{\geq}^{\mathrm{op}}\ \mathrm{L})$ 中的元素是满足 $\phi_e(A) \leq \mathrm{L}$ 的 G^F 的阿贝尔 ℓ-子群 A。我们需要证明 $\mathrm{X}_{\mathbf{L}}$ 是 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F$-可缩的；为此，我们将证明 $\mathrm{X}_{\mathbf{L}}$ 可通过 $A_0 := \mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F$ 成为 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F$-连接可缩的（见推论 1.3）。首先，注意到 A_0 是纤维 $\mathrm{X}_{\mathbf{L}}$ 中的一个元素，因为根据引理 1.7，$\phi_e(A_0) = \mathrm{L}$；并且 A_0 在 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F$ 的作用下保持不变。此外，只要 $A \in \mathrm{X}_{\mathbf{L}}$，推论1.9 就意味着 $A \leq \phi_e(A) \leq \mathrm{L}$，因此 $[A, A_0] = 1$，因为 A_0 中心化 L。由此可知，乘积 AA_0 是 G^F 的一个定义良好的阿贝尔 ℓ- 子群，且满足 $\phi_e(AA_0) \leq \mathrm{L}$。这表明，对于每个 $A \in \mathrm{X}_{\mathbf{L}}$，$AA_0$（即 A 与 A_0 的连接）在偏序集 $\mathrm{X}_{\mathbf{L}}$ 中有定义，证明至此完成。

□

上文构造的同伦等价也可以用 $\Phi_{e\ell(q)}$-环面来表述。事实上，不难证明，对于每个正整数集合 E，$(\mathrm{G}\ F)$ 的 E-分裂 Levi 子群构成的单纯复形，与 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 Φ_E-环面构成的单纯复形之间存在 G^F-同伦等价。回顾一下，记号 $\mathrm{T}_E^\star(\mathrm{G}\ F)$ 表示 $(\mathrm{G}\ F)$ 中严格包含 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^{\Phi_E}$ 的 Φ_E-环面 S 的集合。

命题 2.3。 对于每个正整数集合 E，我们有

$$\Delta\left(\mathcal{L}_E^\star\left(\mathbf{G}, F\right)\right) \simeq_{\mathbf{G}^F} \Delta\left(\mathcal{T}_E^\star\left(\mathbf{G}, F\right)\right).$$

证明。按照定理 2.2 的证明思路，只需证明单纯复形$\Delta(\mathrm{T}_E^\star(\mathrm{G}\ F))$ 与 G^F-同伦等价于 $\Delta(\mathrm{L}_E^\star(\mathrm{G}\ F)^{\mathrm{op}})$。为构造这一等价关系，我们考虑 G^F-偏序集 $\phi : \mathrm{T}_E^\star(\mathrm{G}\ F) \to \mathrm{L}_E^\star(\mathrm{G}\ F)^{\mathrm{op}}$ 之间的映射，该映射将一个 Φ_E-环面 S 映至其中心化子 $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$。注意，$\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 E-分裂 Levi 子群，并且是 G 的真子群，因为 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^{\Phi_E}$ 真包含于 S。现在固定 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 E-分裂 Levi 子群 L，令 $\mathrm{S}_0 := \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})^{\Phi_E}$，并将 $\mathrm{X}_{\mathbf{L}}$ 记作纤维 $\phi^{-1}(\mathrm{L}_E^\star(\mathrm{G}\ F)_{\geq}^{\mathrm{op}}\ \mathrm{L})$。若 $\mathrm{S} \in \mathrm{X}_{\mathbf{L}}$，则 $\mathrm{S} \leq \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{S}) \leq \mathrm{L}$ 且 $[\mathrm{S}, \mathrm{S}_0] = 1$，因为 S_0 在 L 中是中心的。特别地，SS_0 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 Φ_E-环面

满足 $\phi(SS_0) \le L$，由推论 1.3 可知，X_L 是 $N_G(L)^F$-可缩的。现在由引理 1.1 得出结论。 □

2.2 同调泛型 Sylow 定理

有限群的 Brown 复形最早由 K. S. Brown 在 [Bro75] 中研究，他证明了第三 Sylow 定理的一个同调版本。更确切地说，他证明，对于整除有限群 G 的阶的每个素数 ℓ，欧拉示性数 $\chi(\Delta(S_\ell^\star(G)))$ 模 Sylow ℓ-子群的阶同余于 1。另一方面，Borué 和 Malle 为有限约化群发展了 Sylow 定理的泛型版本。本节利用定理 2.2 中构造的同伦等价，针对大素数，得到一个类似的同余关系，其中涉及 e-分裂 Levi 子群的单纯复形的欧拉示性数。这为同调泛型 Sylow 定理提供了佐证。

若存在唯一的正整数 e，使得 $\Phi_e(x)$ 整除阶多项式 $P_{(\mathbf{G},F)}(x)$，且 ℓ 整除 $\Phi_e(q)$（见 [BMM93，定义 5.1]），则称素数 ℓ 对 $(\mathbf{G}\ F)$ 大。此时，也称 ℓ 是 $(\mathbf{G}\ F, e)$-适配的（见 [BMM93，定义 5.3]）。注意，若 ℓ 对 $(\mathbf{G}\ F)$ 大，则根据 [BMM93，命题 5.2]，ℓ 对 G 良好，且既不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，也不整除 $|Z(G^*)^F : Z^\circ(G^*)^F|$。在证明下一个结果之前，我们指出，定理 2.2 对不整除 $Z(G)^F$ 的大素数 ℓ 成立。

注 2.4. 在定理 2.2 的证明中，只有在调用 CE04 引理 22 时才用到假设 $\ell \in \pi'(\mathbf{G}\ F)$。该引理用于证明：若 H 是 G 的一个 F-稳定 Levi 子群，且 $Z^\circ(H)_{\Phi_e} \le Z(G)$，那么对于每个 $a \ge 0$，都有 $Z^\circ(H)_{\Phi_{e\ell^a}} \le Z(G)$。然而，如果 ℓ 对 $(\mathbf{G}\ F)$ 足够大，且与 $(\mathbf{G}\ F, e)$ 相适配，那么对于每个 $a \ge 0$，都有 $Z^\circ(H)^{\Phi_e} = Z^\circ(H)^{\Phi_{e\ell^a}}$，上述蕴含便显然成立。

推论 2.5. 假设 ℓ 对 $(\mathbf{G}\ F)$ 足够大，且不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 的阶。则 n

$$\chi\left(\Delta\left(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}, F)\right)\right) \equiv 1 \pmod{\left(\Phi_{e_\ell(q)}(q)^a\right)_\ell}$$

其中 a 是阶多项式 $(\mathbf{G}\ F)$ 的 $\Phi_{e_\ell(q)}$-赋值。

证明。令 $e := e_\ell(q)$。不失一般性，我们可以假设素数 ℓ 是 $(\mathbf{G}\ F, e)$-适配的。事实上，由于 ℓ 整除 $\Phi_e(q)$，若 ℓ 对某个正整数 e_0 是 $(\mathbf{G}\ F, e_0)$- 适配的，那么 $e = e_0$ 或 Φ_e 不整除 $(\mathbf{G}\ F)$ 的阶多项式。在后一种情况下，我们得出 $a(e) = 0$，且 $(\mathbf{G}\ F)$ 没有非平凡的 Φ_e-子群。因此 $\chi(T_e(\mathbf{G}\ F)) = 0, \Phi_e^{a(e)}(q)_\ell = 1$，结论显然成立。接下来注意，单纯复形 Δ 的欧拉示性数 $\chi(\Delta)$仅取决于 Δ 的同调，因此它是一个同伦不变量。因此，应用定理 2.2（根据注 2.4，该定理在我们的假设下成立），可得

$$\chi(\Delta(\mathcal{L}_e^\star(\mathbf{G}, F))) = \chi\left(\Delta\left(\mathcal{S}_\ell^\star\left(\mathbf{G}^F\right)\right)\right). \tag{2.1}$$

另一方面，我们从 [BM92，推论 3.13 (ii)] 得知

$$\left|\mathbf{G}^F\right|_\ell = \Phi_e^a(q)_\ell \tag{2.2}$$

其中，a 是阶多项式（$\mathbf{G}\ F$）的 $\Phi_{e_\ell(q)}$进赋值。根据布朗定理 [Bro75，推论 2]，由此可结合 (2.1) 和 (2.2) 得出该结果。 □

注意，利用命题 2.3，我们可以立即推得，上述推论中的同余也可以用$\Phi_{e_\ell(q)}$-torias 的单纯复形来表述

$$\chi\left(\Delta\left(\mathcal{T}^{\star}_{e_\ell(q)}(\mathbf{G},F)\right)\right)\equiv 1 \pmod{\left(\Phi_{e_\ell(q)}(q)^a\right)_\ell}.$$

我们以该推论的另一种证明结束本节。此证明涉及约化 Lefschetz 模（Steinberg 模的一种类似物），基本上归功于 Quillen。

注 2.6。 上述同余也可由 Quillen 关于广义 Steinberg 模投射性的结果推出。为此，令 $e = e_\ell(q)$，并定义代数闭域 $\mathbb{F}_\ell$（特征为 ℓ）上 $\Delta(\mathrm{L}^{\star}_{e}(\mathrm{G}\ F))$ 的约化 ***Lefschetz*** 模（参见 [Ben98，定义 6.3.2]）。

$$\mathrm{St}_e(\mathbf{G},F) := \tilde{L}_{\mathbf{G}^F}\left(\Delta\left(\mathcal{L}^{\star}_{e}(\mathbf{G},F)\right),\overline{\mathbb{F}}_\ell\right)$$

其维数为 $\chi(\Delta(\mathrm{L}^{\star}_{e}(\mathrm{G}\ F)))-1$。现在假设 ℓ 对 $(\mathrm{G}\ F)$ 足够大，且不整除 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F$ 的阶，则定理 2.2（连同注 2.4）意味着 $\mathrm{St}_e(\mathrm{G}\ F)$ 与 [Ben98，定义 6.7.1] 中定义的广义 ***Steinberg*** 模 $\mathrm{St}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 重合。另一方面，应用 [Qui78，推论 4.3]，可推出 $\mathrm{St}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 是一个虚投射模，因此其维数是 $|\mathrm{G}^F|_\ell$ 的倍数。这表明 G^F 的 Sylowℓ 子群的阶整除 $\chi(\mathrm{L}^{\star}_{e}(\mathrm{G}\ F))-1$。推论 2.5 现由 [BM92，推论 3.13 (ii)] 推出，该结果表明 (2.2) 成立。

2.3 尖锐同调分解

Dwyer 在 [Dwy97] 中系统地研究了这样一种思想：将有限群 G 的分类空间，模 ℓ 同调意义下，按照 G 的子群的分类空间进行分解。这项研究建立在 Brown [Bro79]、Webb [Web87]、Jackowski–McClure [JM92]，以及 Jackowski–McClure–Oliver [JMO92] 先前工作的基础上。同调分解 的精确定义见 [Dwy97]，并且与充足性的概念相关（参见 [Dwy97，定义 1.2]）。这里，我们将 Dwyer 的定义推广到更一般的单纯复形。

定义 2.7 ([BS08，定义 5.6.6])。 设 G 为有限群， Δ 为一个 G-单纯复形。记 $\star$ 为带有平凡 G-作用的单点空间，记 $(-)_{\mathrm{hG}}$ 为 Borel 构造 [BS08，定义2.5.9]。若映射满足以下条件，我们称 Δ 关于素数 ℓ 是充足的：

$$(\Delta)_{\mathrm{hG}} \to (\star)_{\mathrm{hG}}$$

由 $\Delta \to \star$ 给出的映射在模 ℓ 同调上诱导一个同构。

对于每个充足的 G-单纯复形，我们得到三个同调分解：中心化子分解、子群分解和正规化子分解（参见 [Dwy97，定理 1.4、1.6、1.8] 或 [BS08，定理 5.6.10]）。此外，注意到充足性是单纯复形的一个同伦不变量 Δ（例如，参见 [BS08，引理 5.6.8]）。根据 [BS08，定理 5.1.3 和命题 5.6.7]，Brown 复形 $\Delta(\mathrm{S}^{\star}_{\ell}(G))$ 关于素数 ℓ 是充足的，因此我们得到定理 2.2 的以下推论。

推论 2.8. 假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$ 不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶。那么，$\mathbf{G}^F$-单纯复形 $\Delta(\mathcal{L}^{\star}_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}\ F))$ 关于素数 ℓ 是充足的。

接下来，回顾一下：如果相应的同伦余极限的 Bousfield–Kan 上同调谱序列满足 $E_{i,j}^2 = 0$ 对每个 $i > 0$ 和每个j 都成立（更多细节参见 [Dwy98] ），则称同调分解是锐的。如果单纯复形 Δ 是中心化子锐、子群锐或正规化子锐（相对于 ℓ），则称其具有相应的锐性；这意味着它关于 ℓ 是充足的，且相应的同调分解按上述意义是锐的。Dwyer [Dwy98] 引入了这一概念，随后 Grodal [Gro02] 和 Grodal–Smith [GS06] 对其作了进一步研究。与充足性不同，中心化子锐性或子群锐性不是同伦不变量。然而，根据 [Gro02，推论 7.2] （另见 [BS08，定理 5.8.11]），正规化子锐性在这种情形下是同伦不变量。由于 Brown 复形 $\Delta(\mathrm{S}_\ell^\star(G))$ 关于素数 ℓ 是正规化子锐的（例如参见 [BS08，定理 5.8.8]），我们在定理 2.2 中得到的同伦等价推出如下结论。

推论 2.9. 假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$ 不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 的阶。那么，ℓ 上的 $\mathbf{G}^F$-单纯复形 $\Delta(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G}\ F))$ 具有正规化子尖锐性。

上述结果引出了进一步的自然问题。例如，上述单纯复形是否具有中心化子锐性或子群锐性。此外，值得探讨的是，关于素数 ℓ 的限制是否可以放宽。最后，我们提及，利用 Grodal[Gro23], 的近期结果，定理 2.2 中的 G^F-同伦等价提供了一种研究有限约化群（在非定义特征 $\ell \in \pi(\mathrm{G}\ F)$ 下）的内平凡模的方法，该方法是通过 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群（或者，根据命题 2.3，等价地通过 $\Phi_{e_\ell(q)}$-环面）来进行的。

2.4 Alperin 的权猜想

受有限约化群在定义特征下模表示的权理论启发，Alperin 提出了著名的权猜想。若 G 是有限群，ℓ 是素数，则称一对 (Q,ϑ) 为 G 的一个 ℓ-权，如果 Q 是 G 的一个 ℓ-子群，且 ϑ 是 $\mathrm{N}_G(Q)/Q$ 的一个 ℓ-缺陷零不可约特征标，也就是说 $\vartheta(1)_\ell = |\mathrm{N}_G(Q) : Q|_\ell$。

Alperin 权猜想 2.10。 G 的不可约 ℓ-*Brauer* 特征标的数目等于 G 的 ℓ-权共轭类的数目。

Knörr 和 Robinson 在 [KR89] 中为理解上述陈述取得了重大突破，他们提出了一种以 ℓ-子群的 Brown 复形为基础的等价表述。特别是，这使得人们能够证明，该猜想只取决于 Brown 复形的同伦类型。Webb 对 Knörr–Robinson 等价表述的论述更明确地体现了这一点 [Web87, 第 6]节。可以将其表述为

$$k^0(G) = -l_\ell\left(\tilde{\Lambda}(\Delta(\mathcal{S}_\ell^\star(G)))\right) \tag{2.3}$$

其中，$k^0(G)$表示 G 中 ℓ-缺陷为零的不可约特征标的数量，而 $\tilde{\Lambda}$ 是 Burnside 环 $b(G)$中的约化 *Lefschetz* 不变量 [Ben98，定义 6.3.3]。这里，$l_\ell(H)$表示有限群 H 的不可约 ℓ-Brauer 特征标的数量，并且我们将 l_ℓ 视为 Burnside 环 $b(G)$上的函数（更多详情见 [Web87，章节 6] 以及 [Ben98，第 6.9] 节）。由于 Λ 是一个同伦不变量，(2.3) 右侧的项也可以等价地用各种子群复形来表述。特别地，我们可以用 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的单纯复形来重述有限约化群的 Alperin 权猜想。

推论 2.11。 假设$(\mathbf{G}\ F)$不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶。那么，*Knörr– Robinson* 对 *Alperin* 权猜想的重述（按 *Webb* (2.3)的含义）在素数 ℓ 处对$\mathbf{G}^F$成立，当且仅当

$$k^0\left(\mathbf{G}^F\right) = -l_\ell\left(\tilde{\Lambda}\left(\Delta\left(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G},F)\right)\right)\right).$$

Thévenaz [Thé93] 提出了 Alperin 权猜想的另一种研究方法，这与 Brown 复形的等变 K-理论有关。对于每个有限群 G 和 G-单纯复形 Δ，定义 Δ 的等变 *Euler* 示性数 为

$$\chi_G(\Delta) \coloneqq \dim\left(\mathbb{Q}\otimes K^0_G(\Delta)\right) - \dim\left(\mathbb{Q}\otimes K^1_G(\Delta)\right)$$

其中 K^0_G 和 K^1_G 是等变 K-理论群，而 Δ 被视为紧 G-空间（更多详情请参阅 [Thé93] ）。Thévenaz 证明，Alperin 权猜想的 Knörr–Robinson 改写可重述为

$$k\left(G\right) - k^0\left(G\right) = \chi_G\left(\Delta\left(\mathcal{S}^\star_\ell(G)\right)\right) \tag{2.4}$$

其中 $k(G)$表示 G的不可约特征标数。再次注意，上述等式的右端在等变同伦等价下保持不变。由于定理 2.2 中构造的同伦等价是 $\mathbf{G}^F$-同伦等价，我们可以利用 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的单纯复形，重述有限约化群中式 (2.4) 的右端。

推论 2.12。 假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$ 不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶。那么，*Knörr– Robinson* 对 *Alperin* 权猜想的改写（按 *Webb* 的含义(2.4)）对$\mathbf{G}^F$在素数 ℓ 处成立，当且仅当

$$k\left(\mathbf{G}^F\right) - k^0\left(\mathbf{G}^F\right) = \chi_{\mathbf{G}^F}\left(\Delta\left(\mathcal{L}^\star_{e_\ell(q)}(\mathbf{G},F)\right)\right).$$

我们指出，尽管对于每个固定的有限群，Alperin 权猜想并不等价于 Knörr–Robinson 改写，但根据 [KR89, 推论 4.5]（另见 [Nav18, 推论 9.23]），后者对每个固定的有限群都等价于 (2.3) 和 (2.4)

Møller 最近研究了 Thévenaz 的方法，并据此为定义特征下的广义线性群、酉群和辛群中的 Alperin 权猜想（Knörr–Robinson 改写）给出了新的证明 [Møl19], [Møl21] 和 [Møl22]。推论 2.12 与 e-分裂 Levi 子群的几何性质相结合，或可推动这一方向上关于非定义特征的进一步发展。

作为本节的总结，我们指出，仅使用定理 2.2 中构造的同伦等价，还不足以将 Alperin 权猜想的分块版本改写为关于 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群的表述。事实上，后者并没有（已知的）(2.3) 和 (2.4) 形式的表述。尽管如此，在接下来的章节中，我们将拓展导出定理 2.2 证明的论证，并得到与分块理论以及更强猜想相容的结果。

3 将阿贝尔 ℓ-子群调整为 e-分裂 Levi 子群

在上一节中，只要 ℓ 是一个不同于 G 的定义特征且满足适当假设的素数，我们就构造了 Brown 单纯复形 $\Delta(S^{\star}_{\ell}(G^F))$ 与单纯复形 $\Delta(L^{\star}_{e_\ell(q)}(G\ F))$ 之间的 G^F-同伦等价。这足以将素数 ℓ 对应的 Alperin 权猜想改写为关于属于 $\Delta(L^{\star}_{e_\ell(q)}(G\ F))$ 的链的表述。然而，为了对 Dade 猜想及其归纳条件，即特征三元组猜想，获得类似的改写，我们需要细化这些论证。更确切地说，我们确定 G^F 的 ℓ-子群中的一个特殊子集，它对应于 $(G\ F)$ 的 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群中的相应子集（其含义见引理 3.3），并证明，对这些猜想有贡献的 $\Delta(S_\ell(G^F))$ 链，只有其各项都属于这个新定义的 ℓ-子群子集的那些。我们通过构造一系列如定义 1.4 所述的交替来完成这一点。我们的方法拓展了 Broué、Fong 和 Srinivasan [BFS] 未发表的思路；这些思路见于 [Ros22b，第 7 节，2]，并曾用于解决关于大素数的类似问题。

3.1 阿贝尔 ℓ-子群的（弱） e-闭包

回顾第 1.1 节，$\mathrm{Ab}_\ell(G^F)$ 表示 G^F 的阿贝尔 ℓ-子群构成的集合。我们的首要目标是在这类子群上定义如下 e-闭包算子。这应被视为一种尝试，旨在将这些子群调整为 e-分裂 Levi 子群这一类（见下文引理 3.3）。

定义 3.1 （e-闭包）。对于每个正整数 e，我们在 $\mathrm{Ab}_\ell(G^F)$ 上定义 e-闭包映射

$$\begin{aligned}\gamma_{\ell,e}:\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)&\to\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\\ A&\mapsto\mathbf{Z}^\circ\left(\mathbf{C}_{\mathbf{G}}\left(\mathbf{Z}^\circ\left(\mathbf{C}^\circ_{\mathbf{G}}(A)\right)_{\Phi_e}\right)\right)^F_\ell\end{aligned}$$

并称阿贝尔 ℓ-子群 $A\in\mathrm{Ab}_\ell(G^F)$ 是 e-闭的，如果它满足 $A=\gamma_{\ell,\,e}(A)$。我们用 $\mathrm{Ab}_\ell(G^F)^{\gamma_{\ell,\,e}}$ 表示 G^F 的 e-闭 ℓ-子群构成的集合，也就是集合 $\mathrm{Ab}_\ell(G^F)$ 中的 $\gamma_{\ell,\,e}$-不动元素构成的集合。

若假设 ℓ 对 G 良好，则根据 [CE94, 命题 2.1 (ii)]，阿贝尔 ℓ-子群的连通中心化子是一个 Levi 子群。在此情形下，映射 $\gamma_{\ell,\,e}$ 满足以下一些有用性质。这里，我们将 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(G^F)$ 记为 CS13, 第 2 章节[中所描述的 G^F 的自同构群4]。照例，回顾一下 $\ell\neq p$。

引理 3.2. 设 A 是 $\mathbf{G}^F$ 的一个阿贝尔 ℓ-子群，并假设 ℓ 对 $\mathbf{G}$ 良好。对于每个正整数 e，有：

(i) $\gamma_{\ell,e}(A)\leq\gamma_{\ell,e}(A')$ 对每个满足 $A\leq A'$ 的阿贝尔 ℓ-子群 $A'\in Ab_\ell(G^F)$ 都成立；*(ii)* $\gamma_{\ell,e}(A^\alpha)=\gamma_{\ell,e}(A)^\alpha$ 对每个自同构 $\alpha\in Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$ 都成立；*(iii)* $Z^\circ(G)^F_\ell\leq\gamma_{\ell,e}(A)$；*(iv)* $[A,\gamma_{\ell,e}(A)]=1$。

证明。 假设 $A\leq A'$，我们得到包含关系 $C^\circ_{\mathbf{G}}(A')\leq C^\circ_{\mathbf{G}}(A)$；又由于 $C^\circ_{\mathbf{G}}(A')$ 是 $C^\circ_{\mathbf{G}}(A)$ 的 Levi 子群，因此 $Z(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))\leq Z(C^\circ_{\mathbf{G}}(A'))$。现在由 [BM92, 引理 3.1 (ii)]

可得 $Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))_{\Phi_e} \le Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A'))^{\Phi_e}$，从而得到 ($e$-分裂) Levi 子群 $C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A'))^{\Phi_e}) \le C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})$ 的包含关系。与前面一样，取中心会导出反向包含关系 $Z^\circ(C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})) \le Z^\circ(C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A'))^{\Phi_e}))$，由此可得 $\gamma_{\ell,e}(A) \le \gamma_{\ell,e}(A')$。这证明了 (i)；而 (ii) 由以下事实立即得出：对于任意有限阿贝尔群 Y 和任意 (F-稳定) 环面 S，Y_ℓ 在 Y 中是特征的，且 S^{Φ_e} 在 S 中是特征的。为证明 (iii)，注意到对于 G^F 的任意阿贝尔 ℓ-子群 A，$Z^\circ(G)$ 包含于 (e-分裂) Levi 子群 $C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e}) =: L$ 中。因此我们必有 $Z^\circ(G)^F_\ell \le Z^\circ(L)^F_\ell = \gamma_{\ell,e}(A)$。最后，由于 $C^\circ_{\mathbf{G}}(A)$ 是 G 的 Levi 子群，我们得到 $C^\circ_{\mathbf{G}}(A) = C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))) \le C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})$（参见 [DM20, 命题 3.4.6]）；取连通中心可得 $Z^\circ(C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})) \le C^\circ_{\mathbf{G}}(A)$。因此，$\gamma_{\ell,e}(A)$ 包含于 $C^\circ_{\mathbf{G}}(A) \le C_{\mathbf{G}}(A)$ 中，(iv) 随即得证。

□

接下来，我们给出 e-闭阿贝尔 ℓ-子群的刻画。这也解释了为什么映射 $\gamma_{\ell,\,e}$ 称为 e-闭包，并阐明了其定义的原因。

引理 *3.3.* 假设 ℓ 对 G 良好，并考虑一个正整数 e。若 A 是 G e的一个 ℓ-闭阿贝尔 A 子群^F，则对于某个 e-分裂 *Levi* 子群 L，有 $A = Z^\circ(L)^F_\ell$。逆命题成立，前提是 $e = e_\ell(q)$ 且 ℓ 不整除 $|Z(G^F) : Z^\circ(G^F)|$。

证明。假设 A 是 G^F的一个 e-闭阿贝尔 ℓ-子群。令 $L := C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})$，则 L 是 (G F)的一个 e-分裂 Levi 子群，并满足 $A = \gamma_{\ell,e}(A) = Z^\circ(L)^F_\ell$。反过来，假设 ℓ 不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，且满足 $e = e_\ell(q)$。令 L 为 (G F)的一个 e-分裂 Levi 子群，并设 $A := Z^\circ(L)^F_\ell$。由引理 1.7 可推得 $L = C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}}(A))^{\Phi_e})$，从而 $A = \gamma_{\ell,e}(Z^\circ(L)^F_\ell) = \gamma_{\ell,e}(A)$ 是 e-闭的。

□

上述引理的一个直接推论是，$e_\ell(q)$-闭阿贝尔 ℓ-子群的连通中心化子是一个 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群。

推论 3.4. 假设 ℓ 对 $\mathbf{G}$ 良好，且不整除 $|\mathbf{Z}(\mathbf{G}^F) : \mathbf{Z}^\circ(\mathbf{G}^F)|$。若 A 是 $\mathbf{G}^F$ 的一个 $e_\ell(q)$-闭阿贝尔 ℓ-子群，则连通中心化子 $\mathbf{C}^\circ_{\mathbf{G}}(A)$ 是 $(\mathbf{G}\ F)$ 的一个 $e_\ell(q)$-分裂 *Levi* 子群。

证明。 由引理 3.3，存在 (G F) 的一个 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群 L，使得 $A = Z^\circ(L)^F_\ell$。但据 CE04，命题 13.19]，$C^\circ_{\mathbf{G}}(A) = C^\circ_{\mathbf{G}}(Z^\circ(L)^F_\ell) = L$ 是 (G F) 的一个 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群。

□

注 3.5. 注意，推论 3.4 的逆命题一般不成立。例如，假设素数 ℓ 对 G 良好，不整除 $|Z(G)^F : Z^\circ(G)^F|$，但整除 $Z^\circ(G)^F$ 的阶（例如，考虑 $G^F = GL_n(q)$，且 ℓ 整除 $q-1$）。那么，对于每个严格包含于 $Z^\circ(G)^F_\ell$ 的 ℓ-子群Q，可得 $C^\circ_{\mathbf{G}}(Q) = G$ 是 (G F) 的一个 $e_\ell(q)$-分裂 Levi 子群，而 Q 不可能是 $e_\ell(q)$-闭的，因为 $Z^\circ(G)^F_\ell$不包含于 Q（见引理 3.2 (iii)）。

给定 G^F 的任意阿贝尔 ℓ-子群 A，我们希望构造 G^F 的一个对应的 e-闭子群。为此，我们首先引入以下弱 e-闭包的概念。回顾一下，对于有限群 G 的两个子群 H 和 K，乘积 HK 是 G 的子群，当且仅当 $HK = KH$。若满足 $[H, K] = 1$，则后一条件显然成立。此外，在这种情况下，HK 是阿贝尔群，当且仅当 H 和 K 也是阿贝尔群。

定义 3.6（弱 e-闭包）。 假设 ℓ 对 G 良好，并取一个正整数 e。我们将 $\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 上的弱 e-闭包定义为映射

$$\omega_{\ell,e} : \mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right) \to \mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)$$
$$A \mapsto A\gamma_{\ell,e}(A)$$

根据引理 3.2 (iii) 及上述讨论，这一定义是良定的。若阿贝尔 ℓ-子群 $A \in \mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 满足 $A = \omega_{\ell,e}(A)$，则称其为弱 e-闭，并用 $\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\omega_{\ell,e}}$表示 G^F 中弱 e-闭 ℓ-子群的集合，即 $\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 中的 $\omega_{\ell,e}$-不动元集合。

在下面的引理中，我们汇总弱 e-闭包 $\omega_{\ell,e}$ 以及弱 e-闭 ℓ-子群集合的一些基本性质。特别地，对于任意给定的阿贝尔 ℓ-子群，我们展示如何通过反复应用映射 $\gamma_{\ell,e}$ 和 $\omega_{\ell,e}$，构造出一个 e-闭阿贝尔 ℓ-子群。

引理 3.7。 设 A 是 $\mathbf{G}^F$ 的阿贝尔 ℓ-子群，并假设 ℓ 对 $\mathbf{G}$ 是好的。对于每个正整数 e，有：

(i) $\omega_{\ell,e}(A) \le \omega_{\ell,e}(A')$ 对每个满足 $A \le A'$ 的阿贝尔 ℓ-子群 $A' \in \mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)$ 均成立；

(ii) $\omega_{\ell,\,e}(A^\alpha) = \omega_{\ell,\,e}(A)^\alpha$ 对于每个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$；

(iii) $A \le \omega_{\ell,\,e}(A)$。特别地，存在唯一确定的非负整数 t_A，它是满足以下性质的最小值：$\omega_\ell^{t_A},\,_e(A)$ 是弱 e-闭的；

(iv) 若 A 是弱 e-闭的，则 $\gamma_{\ell,\,e}(A)$也如此。特别地，e-闭包限制为一个映射

$$\gamma_{\ell,e} : \mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)^{\omega_{\ell,e}} \to \mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)^{\omega_{\ell,e}}$$

并且存在唯一确定的非负整数 r_A，它是满足以下性质的最小值：$\gamma_\ell^{r_A}e,\,(A)$ 是 e-闭的；

(v) 若 A 是 e-闭的，则 A 是弱 e-闭的。

证明。若 $A \le A'$，我们由引理 3.2 (i) 知道 $\gamma_{\ell,e}(A) \le \gamma_{\ell,e}(A')$，于是 (i) 成立。同理，(ii) 由 3.2 (ii) 得出。接下来注意到，对于每个阿贝尔 ℓ-子群，都有 $A \le A\gamma_{\ell,e}(A) = \omega_{\ell,e}(A)$，于是我们得到有限群 G^F 的 ℓ-子群升链 $\{\omega_{\ell,e}^i(A)\}_{i\ge 0}$。由于这条链必定稳定，存在最小指标 $t_A \ge 0$，使得对每个 $t \ge t_A$，都有$\omega_\ell^{t_A},_e(A) = \omega_{\ell,e}^t(A)$。于是，根据定义，子群 $\omega_\ell^{t_A},_e(A)$ 是弱 e-闭的。

现在假设 A 是弱 e-闭的。这意味着 $A = \omega_{\ell,e}(A) = A\gamma_{\ell,e}(A)$，因此 $\gamma_{\ell,e}(A) \le A$。于是，引理 3.2 (i) 蕴含 $\gamma_{\ell,e}(\gamma_{\ell,e}(A)) \le \gamma_{\ell,e}(A)$，从而 $\omega_{\ell,e}(\gamma_{\ell,e}(A)) = \gamma_{\ell,e}(A)\gamma_{\ell,e}(\gamma_{\ell,e}(A)) = \gamma_{\ell,e}(A)$。这表明 $\gamma_{\ell,e}(A)$ 是弱 e-闭的。如前所述，我们可以构造一个由 ℓ-子群组成的降链 $\{\gamma_{\ell,e}^i(A)\}_{i\ge 0}$，它必定最终稳定。于是我们可以找到一个最小指标 $r_A \ge 0$，使得对每个 $t \ge r_A$，都有 $\gamma_\ell^{r_A}e,(A) = \gamma_{\ell,e}^t(A)$；那么显然 $\gamma_\ell^{r_A},_e(A)$ 是 e-闭的。这证明了 (iv)，而 (v) 则由定义立即得出。 □

3.2 通过$\gamma_{\ell,e}$ 和$\omega_{\ell,e}$进行交替

众所周知，在处理 Dade 猜想中出现的交错和时，不同的 ℓ-链组可视为等价。当交错和是一个同伦

不变量时，例如当它表示为某个单纯复形的欧拉示性数时，这些结果可由某些同伦等价的存在性推出。Webb 首先考虑了这种方法 [Web87, 第 6] 节，并在 Bouc、Quillen 和 Thévenaz 先前结果的基础上展开。Knörr 和 Robinson 在 [KR89] 中提出了一种更初等的方法；这种方法隐含地基于按照定义 1.4（参见 [KR89, 命题 3.3] 的证明）构造某些交替。随后利用这些交替证明，所考虑的交错和可等价地用不同的单纯复形来表述 [KR89, 推论 3.4]。虽然第二种方法可能无法提供概念上的解释，但它灵活得多，可用于获得更精确的结果（例如参见 [Rob96], [Rob00], [Rob02a], [Rob02b], [KLLS19]以及 [Ros]）。

本节沿着这些思路，构造精确的交替，以便在有限约化群的情形下，为 Dade 猜想和特征三元组猜想导出消去定理。利用上一节讨论的 $\gamma_{\ell,e}$ 和 $\omega_{\ell,e}$ 的性质，我们能够消去所有非阿贝尔且不满足 e-闭合条件的 ℓ-链所作的贡献。接下来的步骤将通过考虑包含关系来完成这一点

$$\mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}} \hookrightarrow \mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)^{\omega_{\ell,e}} \hookrightarrow \mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F) \hookrightarrow \mathcal{S}_\ell(\mathbf{G}^F)$$

并假设适当的条件。下一节中，我们将构造剩余 ℓ-链与 e-分裂 Levi 子群的单纯复形之间的双射

$$\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}}\right) \longleftrightarrow \Delta\left(\mathcal{L}_e(\mathbf{G},F)\right)$$

并将 Dade 猜想和特征三元组猜想改写为关于 e-分裂 Levi 子群的表述。随后，我们借助作者在[Ros22b]中提出的猜想，重新得到这些表述。得益于这一结果，我们便可运用 Deligne–Lusztig 理论和广义 Harish-Chandra 理论的工具，研究非定义特征下有限约化群的 Dade 猜想和特征三元组猜想。

引理 3.8。设 G 是一个有限群，ℓ 是整除 G 阶的素数，Z 是 G的一个中心 ℓ-子群。对于每个稳定 Z 的 G 的有限自同构群 A，在 $\Delta(\mathcal{S}_\ell(G,Z))$中都存在一个 A-交替 $\Delta(\mathrm{Ab}_{\ell,Z}(G,Z))$。

证明。固定一个属于集合 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G,Z))$、但不属于$\Delta(\mathrm{Ab}_{\ell,Z}(G,Z))$ 的 ℓ-链 $\sigma = \{Z = P_0 < P_1 < \cdots < P_n\}$，并注意到商群 P_n/Z不是阿贝尔群，也就是说，$[P_n,P_n]$不包含于 Z。此外，注意到如果 Q是包含 P_{n-1}的 P_n的极大子群，那么 Q在 P_n中正规，且商群 P_n/Q是阿贝尔群。这意味着 $[P_n,P_n] \le Q$，因而 $[P_n,P_n]P_{n-1} \le Q < P_n$。接下来，由于 $[P_n,P_n]$ 不包含于 $Z = P_0$，我们可以找到唯一的指标 $1 \le m \le n$，使得 $[P_n,P_n]$包含于 P_m，但不包含于 P_{m-1}。特别地，我们有 $P_{m-1} < [P_n,P_n]P_{m-1} \le P_m$。然后，我们可以将 $\phi(\sigma)$ 定义为由 σ 得到的 ℓ-链：若满足$[P_n,P_n]P_{m-1} < P_m$，则添加项 $[P_n,P_n]P_{m-1}$；若满足 $[P_n,P_n]P_{m-1} = P_m$，则移除项 P_m。注意，新的ℓ-链 $\phi(\sigma)$ 属于 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G,Z))$，但不属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_{\ell,Z}(G,Z))$。事实上，$\phi(\sigma)$ 以 $Z = P_0$ 开始，因为 $m \ge 1$；而 $\phi(\sigma)$ 的末项是 P_n，因为 $[P_n,P_n]P_{n-1} < P_n$。因此，我们证明了赋值 $\sigma \mapsto \phi(\sigma)$ 定义了一个从 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G,Z)) \setminus \Delta(\mathrm{Ab}_{\ell,Z}(G,Z))$ 到其自身的映射。此外，根据上述构造，并回想起 $[P_n,P_n]$ 是 P_n的特征子群，我们进一步推出 $\phi(\phi(\sigma)) = \sigma$，且对所有 $\alpha \in A$，都有 $\phi(\sigma)^\alpha = \phi(\sigma^\alpha)$；显然，$|\phi(\sigma)| = |\sigma| \pm 1$。这表明 ϕ是在 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G,Z))$ 中 $\Delta(\mathrm{Ab}_{\ell,Z}(G,Z))$ 的一个 A-交替。 □

现在设 G、 F、 q和 ℓ如前几节所述。我们现在考虑其项为阿贝尔群、但不一定弱 e-闭的 ℓ-链。

命题 *3.9.* 假设 ℓ 对 G 良好，并设 e 是一个正整数。那么，在 $\Delta(Ab_\ell(G^F, Z^\circ(G)_\ell^F)$ 中存在一个 $\Delta(Ab_\ell(G^F, Z^\circ(G)_\ell^F)^{\omega_\ell,e})$ 的 $Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$-交替。

证明. 首先注意，根据引理 3.2 (iii)，每个弱 e-闭阿贝尔 ℓ-子群 A 都包含 $Z := \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{G})_\ell^F$；根据 $\gamma_{\ell,e}$ 的定义， Z 是 e-闭的。现在，令 $\sigma = \{Z = A_0 < A_1 < \cdots < A_n\}$ 为一个属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z))$、但不包含于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_\ell,e})$ 的 ℓ-链。对每个$0 \le i \le n$，定义弱 e-闭阿贝尔 ℓ-子群 $P_i := \omega_{\ell\, e}^{t_{A_i}}(A_i)$，其中 t_{A_i} 是引理 3.7 (iii) 中引入的非负整数。根据 ℓ-链 σ 的选取，我们知道存在一个指标 m，使得 A_m 不是弱 e-闭的，也就是说，满足 $A_m < \omega_{\ell\, e}^{t_{A_m}}(A_m) = P_m$。特别要注意，上述讨论表明 $m \ge 1$。取满足此条件的最大指标 $1 \le m$，并注意，只要 $m < n$， m 的最大性与引理 3.7 (i) 一起意味着 $P_m = \omega_{\ell\, e}^{t_{A_m}}(A_m) \le \omega_{\ell\, e}^{t_{A_m}}(A_{m+1}) = A_{m+1}$，因而 $A_m < P_m \le A_{m+1}$。现在，若 $m = n$，我们将 $\phi(\sigma)$ 定义为这样一个 ℓ-链：在 ℓ-链 σ 的末尾添加弱e-闭 ℓ-子群 P_m。另一方面，若 $m < n$，则我们将 $\phi(\sigma)$ 定义为这样一个 ℓ-链：若 $P_m < A_{m+1}$，就把 P_m 添加到 σ；若$P_m = A_{m+1}$，就移除项 A_{m+1}。注意，无论哪种情况，新的 ℓ-链 $\phi(\sigma)$ 都以 Z 为首项，且仍包含项 A_m。此外，由构造可知， P_m 是弱 e-闭的，因此相对于新定义的 ℓ-链 $\phi(\sigma)$，指标 m 与上述定义中满足条件的最大指标相同。特别地，这表明 $\phi(\sigma)$ 是一个属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z))$、但不属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_\ell,e})$ 的阿贝尔 ℓ-链，并且 $\phi(\phi(\sigma)) = \sigma$。此外，引理 3.7 (ii) 表明映射 ϕ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-等变的，而显然 $|\phi(\sigma)| = |\sigma| \pm 1$。现在我们可以得出结论： ϕ 是 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_\ell,e})$ 在 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z))$ 中的一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-交替，证毕。 □

在证明下一个结果之前，我们需要以下引理。从现在起，我们假设 e coin- cideswith $e_\ell(q)$。

引理 3.10. 假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$，并令 $e = e_\ell(q)$。若 A 是 $\mathbf{G}^F$ 的阿贝尔 ℓ-子群，则 $\gamma_{\ell,\ e}(A) \le \mathbf{Z}(\mathbf{G})_\ell^F$ 当且仅当 $A \le \mathbf{Z}(\mathbf{G})_\ell^F$。

证明。首先注意，若 $A \le \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F$，则 $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A) = \mathrm{G}$，因此立即得到 $\gamma_{\ell,e}(A) = \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F$。反过来，假设 $\gamma_{\ell,e}(A) = \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F$，并定义 $\mathrm{H} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A))^{\Phi_e})$，使得 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F = \mathrm{Z}(\mathrm{H})_\ell^F$。现在， [CE04, 命题 13.19] 表明，$(\mathrm{G}\ F)$ 的 e-分裂 Levi 子群 H 与中心化子 $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(\mathrm{Z}(\mathrm{H})_\ell^F)$ 重合，因此 $\mathrm{G} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(\mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F) = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(\mathrm{Z}(\mathrm{H})_\ell^F) = \mathrm{H}$，从而 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A))_{\Phi_e} \le \mathrm{Z}(\mathrm{G})$。接着，仿照 [CE04], 的证明，我们可以应用 [CE04, 引理 22.3] ，证明对每个非负整数 a，均有 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A))_{\Phi_{e\ell^a}} \le \mathrm{Z}(\mathrm{G})$。这表明 $\mathrm{G} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$，因为根据引理 1.8 (iii)，中心化子 $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(A)$ 是一个 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 $E_\ell(q)$-分裂 Levi 子群。最后，我们得出结论： $A \le \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F$，如上所述。 □

由此直接推论可得以下关于弱 e-闭阿贝尔 ℓ-子群的推论。

推论 3.11. 假设 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$，并令 $e = e_\ell(q)$。若 A 是 $\mathbf{G}^F$ 的一个弱 e-闭阿贝尔ℓ-子群，则 $\gamma_{\ell,e}(A) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F_\ell$当且仅当 $A = \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F_\ell$。

证明。这可由引理 3.10 和引理 3.2 (iii) 立即推出。事实上，由于 $\mathrm{Z(G)}^F_\ell \le \gamma_{\ell,e}(A)$，条件 $\gamma_{\ell,e}(A) \le \mathrm{Z(G)}^F_\ell$等价于等式 $\gamma_{\ell,e}(A) = \mathrm{Z(G)}^F_\ell$。另一方面，当 A 是弱 e-闭的时，我们知道 $\mathrm{Z(G)}^F_\ell \le A$，因此等式 $A = \mathrm{Z(G)}^F_\ell$等价于条件 $A \le \mathrm{Z(G)}^F_\ell$。

□

最后，我们说明如何去掉那些弱 e-闭但非 e-闭的阿贝尔 ℓ-子群。

命题 *3.12.* 假设 $\ell \in \pi(G\ F)$，并令 $e = e_\ell(q)$。那么，在 $\Delta(Ab_\ell(G^F, Z(G)^F_\ell)^{\omega_{\ell,e}})$ 中存在一个 $\Delta(Ab_\ell(G^F, Z(G)^F_\ell)^{\omega_{\ell,e}})$ 的 $Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$-交替 $\Delta(Ab_\ell(G^F, Z(G)^F_\ell)^{\gamma_{\ell,e}})$。

证明。定义 $Z := \mathrm{Z(G)}^F_\ell = \mathrm{Z^\circ(G)}^F_\ell$，并令 $\sigma = \{Z = A_0 < A_1 < \cdots < A_n\}$ 为属于集合 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_{\ell,e}})$ 的一个 ℓ-链。由于该 ℓ-链 σ 的每一项 A_i 都是弱 e-闭的，应用引理 3.7 (iv)，可找到一个非负整数 r_{A_i}，使得阿贝尔 ℓ-子群 $P_i := \gamma_{\ell\, e}^{r_{A_i}}(A_i)$ 是 e-闭的。还需注意，P_i 包含于 A_i，因为映射 $\gamma_{\ell,e}$ 限制在弱 e-闭阿贝尔 ℓ-子群的集合上，并且满足：对于每个 $Q \in \mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_{\ell,e}}$，$\gamma_{\ell,e}(Q) \le Q\gamma_{\ell,e}(Q) = \omega_{\ell,e}(Q) = Q$。现在，假设 ℓ-链 σ 不属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\gamma_{\ell,e}})$。换言之，假设存在某个指标 m，使得$\gamma_{\ell,e}(A_m) < A_m$，或者等价地，使得 $P_m < A_m$。我们进一步选择满足此性质的最小指标 m。首先，将引理 3.3 用于 $\mathrm{L} = \mathrm{G}$，可知 $m > 0$，因为 Z 是一个 e-闭ℓ-子群。其次，由指标 m 的最小性可知，A_{m-1} 是 e-闭的，因此根据引理 3.7 (i)，$A_{m-1} = \gamma_{\ell\, e}^{r_{A_m}}(A_{m-1}) \le \gamma_{\ell\, e}^{r_{A_m}}(A_m) = P_m$。因此，我们得出结论：$A_{m-1} \le P_m < A_m$。现在，我们定义一个新的 ℓ-链 $\phi(\sigma)$：若 $A_{m-1} < P_m$，则将 ℓ-子群 P_m 作为中间项插入ℓ-链 σ 中，置于 A_{m-1} 与 A_m 之间。另一方面，若$A_{m-1} = P_m$，则通过从 σ 中移除项 A_{m-1} 来定义新的 ℓ- 链 $\phi(\sigma)$。注意，这一构造产生了一个 ℓ- 链 $\phi(\sigma)$，它属于集合 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_{\ell,e}})$，但不属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\gamma_{\ell,e}})$。事实上，根据引理 3.7 (iv)，新 ℓ-链 $\phi(\sigma)$ 的每一项都是弱 e-闭的；$\phi(\sigma)$ 的首项是 Z，因为根据推论 3.11，出现 $Z = P_m$ 意味着 $A_m = Z$；而且，项 A_m 不是 e-闭的，并且属于 $\phi(\sigma)$。此外，注意到$|\phi(\sigma)| = |\sigma| \pm 1$，且 ϕ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-等变的。最后，我们需要证明，$\phi^2$ 在 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_{\ell,e}}) \setminus \Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\gamma_{\ell,e}})$ 上与恒等映射一致。为此，注意构造 $\phi(\sigma)$ 仅通过添加或移除严格包含于 A_m 中的 e-闭阿贝尔 ℓ-子群来修改链 σ。因此，在 ℓ-链 $\phi(\sigma)$ 中，不是 e-闭的最小项仍然是 A_m，故 $\phi(\phi(\sigma)) = \sigma$。这表明 ϕ 在 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\omega_{\ell,e}})$ 中定义了 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, Z)^{\gamma_{\ell,e}})$ 的一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-交替。

□

4 Dade 猜想与特征三元组猜想

我们现在应用第 3 节中得到的结果，尤其是第 3.2 节所述的交替，来证明有限约化群情形下 Dade 猜想和特征三元组猜想的消去定理。这些消去定理使我们能够证明，在适当的假设下，作者在 [Ros22b] 中提出的猜想蕴含 Dade 猜想

及其以特征三元组猜想形式表述的归纳条件。本节的结果改进了 [Ros22b，第 7 节3] 中的结果；该节讨论了较简单的大素数情形。

4.1 猜想的陈述

设 G 是一个有限群，并考虑 G 的一个 ℓ-块 B、一个非负整数 d，以及 G 的一个固定子群 Z 的不可约特征标 λ。对于每条链 $\sigma \in \Delta(\mathrm{S}_\ell(G, Z_\ell))$ 和稳定子 G_σ 的每个 ℓ- 块 b，注意 Brauer 诱导块 b^G 是根据 [KR89, 引理 3.2] 定义的。此外，注意 Z 稳定链 σ，因此包含于 G_σ 中。我们将 $k^d(B_\sigma, \lambda)$ 定义为 G_σ 中位于 λ 之上、具有 ℓ-缺陷 d，且满足 $\mathrm{bl}(\vartheta)^G = B$ 的不可约特征标 ϑ 的个数。这里，$\mathrm{bl}(\vartheta)$ 表示包含 ϑ 的 G_σ 的唯一 ℓ- 块。

Dade 射影猜想 4.1 ([Dad94, 猜想 15。5])。设 G 是一个有限群，并考虑 $\mathbf{Z}(G)$ 的一个子群 Z。那么

$$\sum_{\sigma \in \Delta(\mathcal{S}_\ell(G, Z_\ell))/G} (-1)^{|\sigma|} k^d(B_\sigma, \lambda) = 0$$

对于每个亏缺群严格包含 Z_ℓ 的 ℓ-块 B *of* G、每个非负整数 d，以及每个不可约特征标 λ *of* Z。

令 $Z = 1$，即可得到 Dade 猜想的通常版本。此外，利用 Quillen 关于单纯复形 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G, Z_\ell))$ 可缩性的标准论证，除非 Z_ℓ 与 $\mathrm{O}_\ell(G)$ 重合，否则上述交错和显然为零。

在 [中，Spä17], 将 Dade 射影猜想 4.1 归结为一个关于拟单群的命题，称为 Dade猜想的归纳条件（参见 [Spä17，定义 6.7]）。该条件以特征三元组猜想的形式陈述，我们现在对此进行说明。设 G 为有限群，B 为 G的一个 ℓ-块， d 为上述的一个非负整数。现在假设 Z 是 G中一个中心的 ℓ-子群。定义集合 $\mathrm{C}^d(B, Z)$，其元素为满足以下条件的有序对 (σ, ϑ)： σ 是属于单纯复形 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(G, Z))$ 的一条链，且 ϑ 是稳定子 G_σ 的一个不可约特征标，具有 ℓ-亏缺 d，并且满足 $\mathrm{bl}(\vartheta)^G = B$。我们用 $\mathrm{C}^d(B)$ 表示 $\mathrm{C}^d(B, 1)$。注意，尽管以往的论文（例如 [Spä17] 和 [Ros22a]）将这一记号用于集合 $\mathrm{C}^d(B, \mathrm{O}_\ell(G))$，但不会引起混淆，因为我们总可以假设 $\mathrm{O}_\ell(G)$ 是中心的（参见 [Ros22a，引理 2.3]），而且本文的最终结果假设 $\mathrm{Z}(G)$ 的阶与 ℓ 互素。接下来，将 $\mathrm{C}^d(B, Z)$ 分拆为其子集 $\mathrm{C}^d(B, Z)_\pm$，这些子集由满足 $(-1)^{|\sigma|} = \pm 1$ 的有序对 (σ, ϑ) 构成。此外，注意到 G 通过共轭作用于 $\mathrm{C}^d(B, Z)_\pm$，并用 $\mathrm{C}^d(B, Z)_\pm/G$ 表示相应的 G-轨道 $\overline{(\sigma, \vartheta)}$ 的集合。下文中，我们将自由使用特征三元组的 G-块同构这一概念，记作 $\sim_G$，该概念由 [Spä17，定义 3.6] 引入。更多细节请参阅该文。

特征三元组猜想 4.2 ([Spä17，猜想 6。3])。设 G 是一个有限群，并考虑 G 的一个中心 ℓ-子群 Z，以及 G 的一个 ℓ-块 B，其亏缺群严格包含 Z。假设 $G \trianglelefteq X$。那么，对于每个非负整数 d，存在一个 $\mathbf{N}_X(Z)_B$-等变双射

$$\Omega : \mathcal{C}^d(B, Z)_+/G \to \mathcal{C}^d(B, Z)_-/G$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, G_\sigma, \vartheta\right) \sim_G \left(X_{\rho,\chi}, G_\rho, \chi\right)$$

对于每个$(\sigma,\vartheta)\in\mathcal{C}^d(B,Z)_+$以及$(\rho,\chi)\in\Omega(\overline{(\sigma,\vartheta)})$。

接下来，我们将介绍 [Ros22b、猜想 C 和猜想 D]。与前面的章节一样，设 (G F) 是定义在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限约化群，且 ℓ 是一个不整除 q的素数。从现在起，在本节余下部分中，假设 $e = e_\ell(q)$ 如第 1.4 节所定义。接下来，考虑 G^F的一个 ℓ-块 B、一个非负整数 d，以及 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F$的某个子群 Z 的不可约特征标 λ。令 $k^d(B,\lambda)$ 表示包含在 ℓ-块 B中、位于 λ之上且具有 ℓ-缺陷 d的不可约特征标的数量。类似地，令 $k_c^d(B,\lambda)$ 表示这类特征标中还具有 e-尖点性的特征标数量（参见 [GM20，定义 3.5.19]）。对于每个 $\sigma\in\Delta(\mathrm{L}_e^\star(\mathrm{G}\ F))$，定义$k^d(B_\sigma,\lambda)$ 为稳定子 G_σ^F 的不可约特征标 ϑ 中位于 λ之上、具有 ℓ-缺陷 d，且满足 $\mathrm{bl}(\vartheta)^G$ 有定义并与 B相同的特征标数量。尽管后一项关于块诱导的条件不同于 [Ros22b，第 5 节1], 中给出的条件，但在下文所考虑的假设下，根据 [Ros22b，引理 5.5], 两者是等价的。此外，此处我们考虑的是一个稍具一般性的陈述，允许出现中心特征 λ，正如 Dade 猜想的射影版本中所考虑的那样。

猜想 4.3 ([Ros22b，猜想 C])。设 ℓ-块 B 属于$\mathbf{G}^F$，d是一个非负整数，且 λ 是$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的某个子群的不可约特征标。那么

$$k^d(B,\lambda)=k_c^d(B,\lambda)+\sum_{\rho\in\Delta(\mathcal{L}_e^\star(\mathbf{G},F))/\mathbf{G}^F}(-1)^{|\rho|+1}k^d(B_\rho,\lambda).$$

现在，定义集合 $\mathrm{CP}_e(B)$，其元素为满足 $\mathrm{bl}(\mu)^{\mathbf{G}^F}$ 有定义且等于 B的 e-尖点对 (M μ)（参见 [GM20，定义 3.5.19]），并考虑其子集 $\mathrm{CP}_e^\star(B)$，其中由满足 M 真包含于 G 的此类尖点对构成。此外，令 $\mathrm{Ab}(\mu)$ 为 M^F的不可约特征标集合，其元素形式为 $\nu\mu$，其中 ν是 M^F的某个线性特征。最后，定义集合 $\mathrm{L}_e^d(B)$，其元素为四元组 (σ, M, $\mathrm{Ab}(\mu)$ ϑ)，其中 σ是单纯复形 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$ 的一条链，其最小项为 L（在这种情况下，L 包含于 σ的每一项中，因此正规化该链）；(M μ) 是集合 $\mathrm{CP}_e^\star(B)$ 中满足 $\mathrm{M}\le\mathrm{L}$ 的一个元素；而 ϑ是稳定子 G_σ^F的一个不可约特征标，具有 ℓ-缺陷 d，其块 $\mathrm{bl}(\vartheta)$诱导到 G^F，并满足 $\mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F}=B$，且属于某个 e-Harish-Chandra 级数 $\mathrm{E}(\mathrm{L}^F,(\mathrm{M}\ \mu'))$（参见 [GM20，3.5.24]）之上，其中 $\mu'\in\mathrm{Ab}(\mu)$。更多细节请参见 [Ros22b，第 5.2]节。与特征三元组猜想类似，我们根据链的奇偶性将 $\mathrm{L}_e^d(B)$划分为两个子集 $\mathrm{L}_e^d(B)_\pm$，并将相应的 G^F-轨道集合记为 $\mathrm{L}_e^d(B)_\pm/\mathrm{G}^F$。

猜想 4.4 ([Ros22b, 猜想 D])。对于 $\mathbf{G}^F$ 的每个 ℓ-块 B 以及每个非负整数d，都存在一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_B$-等变双射

$$\Lambda:\mathcal{L}_e^d(B)_+/\mathbf{G}^F\to\mathcal{L}_e^d(B)_-/\mathbf{G}^F$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta},\mathbf{G}_\sigma^F,\vartheta\right)\sim_{\mathbf{G}^F}\left(X_{\rho,\chi},\mathbf{G}_\rho^F,\chi\right)$$

对于每个 $(\sigma, M, Ab(\mu)\ \vartheta)\in L_e^d(B)_+$ 和 $(\rho, K, Ab(\kappa)\ \chi)\in L_e^d(B)_-$，它们的 G^F-轨道在 Λ 下相对应，并且 $X:=G^F\rtimes Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$。

在讨论本章节的主要结果之前，请注意，猜想 4.3 是猜想 4.4 的推论（见 [Ros22b, 定理 E]），而后者已被归结为某些关于特征标可延拓性的条件

适用于 e-分裂 Levi 子群的特征标 [Ros22c]。最近，这些猜想针对幺幂特征标子集的改编版本已在 [Ros23] 中针对 A、B、C 型群得到验证。

4.2 有限约化群的消去定理

结合第 3.2 节中构造的交替，我们得到 Dade 射影猜想 4.1 和特征三元组猜想 4.2 的消去定理。更准确地说，我们证明，这些猜想所预言的交错和及双射中，唯一有贡献的链，其项都是 e-闭阿贝尔 ℓ-子群。我们沿用前几节中的 G、 F、 q 和 ℓ，并回顾一下，我们假设 $e = e_\ell(q)$。首先，我们考察 Dade 射影猜想 4.1 中的交错和。

定理 4.5。 设 $(\mathbf{G}\ F)$ 是一个有限约化群，并考虑一个不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ 之阶的素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$。固定一个 ℓ-块 B，一个非负整数 d，以及子群 Z （它是 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的子群）的一个不可约特征标 λ。则

$$\sum_{\sigma\in\Delta(\mathcal{S}_\ell(\mathbf{G}^F))/\mathbf{G}^F}(-1)^{|\sigma|}k^d(B_\sigma,\lambda)=\sum_{\rho\in\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathbf{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}})/\mathbf{G}^F}(-1)^{|\rho|}k^d(B_\rho,\lambda). \tag{4.1}$$

证明。在上述假设下，子群 Z 和 $\mathrm{Z(G)}_\ell^F$ 是平凡的，因此我们有 $\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, \mathrm{Z(G)}_\ell^F) = \mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F) = \mathrm{Ab}_{\ell,Z}(\mathrm{G}^F, Z)$ 和 $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F, Z) = \mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 由此，根据引理 3.8、命题 3.9 和命题 3.12，分别得到：在所有 ℓ-子群$\Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$构成的单纯复形中，阿贝尔 ℓ-子群 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F))$构成的单纯复形存在一个 G^F-交替 ϕ_1；在 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F))$ 中，弱 e-闭阿贝尔 ℓ-子群$\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\omega_{\ell,e}})$构成的单纯复形存在一个 G^F-交替 ϕ_2；在 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\omega_{\ell,e}})$ 中， e-闭阿贝尔 ℓ-子群 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}})$构成的单纯复形存在一个 G^F-交替 ϕ_3。现在结合 ϕ_1, ϕ_2和 ϕ_3，我们得到在所有 ℓ-子群 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$构成的单纯复形中， e-闭阿贝尔 ℓ-子群 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}})$构成的单纯复形存在一个 G^F-交替。更确切地说，我们定义映射

$$\phi:\Delta\left(\mathcal{S}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\right)\setminus\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)^{\gamma_{\ell,e}}\right)\to\Delta\left(\mathcal{S}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\right)\setminus\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)^{\gamma_{\ell,e}}\right)$$

通过设定

$$\phi(\sigma):=\begin{cases}\phi_1(\sigma), & \text{if } \sigma\in\Delta\left(\mathcal{S}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\right)\setminus\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\right)\\ \phi_2(\sigma), & \text{if } \sigma\in\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)\right)\setminus\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)^{\omega_{\ell,e}}\right)\\ \phi_3(\sigma), & \text{if } \sigma\in\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)^{\omega_{\ell,e}}\right)\setminus\Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F\right)^{\gamma_{\ell,e}}\right)\end{cases}$$

对于每个属于 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$ 但不属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 的单形 σ。根据此定义，可以立即验证映射 ϕ 满足定义 1.4 的要求。接下来，我们定义 G^F-稳定函数

$$f_{B,d,\lambda}(H):=\begin{cases}\left|\left\{\ \psi\in\mathrm{Irr}(H)\ \middle|\ \begin{array}{c}\mathrm{bl}(\psi)^G \text{ is defined and equal to } B,\\ \psi \text{ has } \ell\text{-defect } d \text{ and lies above } \lambda\end{array}\right\}\right|, & \text{if } \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F\le H\\ 0, & \text{if } \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F\not\le H\end{cases}$$

对于 G^F 的每个子群 H。由于中心 $\mathrm{Z(G)}^F$ 包含在每个稳定子 G_σ^F 中，并且块诱导（按 Brauer 的含义）是从 G_σ^F 到 G^F 定义的（参见 [KR89, 引理 3.2]），注意到 $f_{B,\ d,\ \lambda}(\mathrm{G}_\sigma^F)$ 与每个 $\sigma\in\Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$ 的 $k^d(B_\sigma,\lambda)$ 相同。结论由此可由

应用引理 1.6（$f = f_{B,\ d,\ \lambda}$），并考察单纯复形 $\mathrm{X} := \Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$ 和 $\mathrm{X}' := \Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_{\ell,\ e}})$ 得出。 □

接下来，我们考虑特征三元组猜想中的双射。为此，我们需要引入一些额外的记号。更确切地说，令 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)$ 表示 $\mathrm{C}^d(B)$ 的子集，它由满足 σ 属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_\ell,e})$ 的那些对 (σ,ϑ) 组成。接着，我们将 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)^{\mathrm{c}}$ 定义为 $\mathrm{C}^d(B)$ 中 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)$ 的补集。注意，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$ 在这两个集合上作用，因为 $\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_\ell,e}$ 是 $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F)$ 的 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-稳定子集。然后，照例，我们定义 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)_{\pm} := \mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B) \cap \mathrm{C}^d(B)_{\pm}$，并将相应的 G^F-轨道集合记为 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)_{\pm}/\mathrm{G}^F$。补集 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)^{\mathrm{c}}$ 也采用类似的记号。用这些记号，我们有以下定理。

定理 4.6。 设$(\mathbf{G},\ F)$是一个有限约化群，并取一个不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶的素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G},\ F)$。固定$\mathbf{G}^F$ 的一个 ℓ-块 B 以及一个非负整数 d。那么存在一个$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_B$-等变双射

$$\Upsilon : \mathcal{C}^d_{\gamma_{\ell,e}}(B)^{\mathrm{c}}_+/\mathbf{G}^F \to \mathcal{C}^d_{\gamma_{\ell,e}}(B)^{\mathrm{c}}_-/\mathbf{G}^F$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}^F_\sigma, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}^F_\rho, \chi\right)$$

对每个$(\sigma,\vartheta) \in \mathcal{C}^d_{\gamma_{\ell,e}}(B)^{\mathrm{c}}_+$ 以及$(\rho,\chi) \in \Upsilon((\overline{\sigma,\vartheta}))$，并且其中 $X := \mathbf{G}^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$。

证明。 与定理 4.5 的证明相同，我们可以构造从 e-闭阿贝尔 ℓ-子群的单纯复形 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 到所有 ℓ-子群的单纯复形 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$ 的 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-交替 ϕ。我们定义映射

$$\Upsilon' : \mathcal{C}^d_{\gamma_{\ell,e}}(B)^{\mathrm{c}}_+ \to \mathcal{C}^d_{\gamma_{\ell,e}}(B)^{\mathrm{c}}_-$$

令

$$\Upsilon'(\sigma,\vartheta) := (\phi(\sigma),\vartheta)$$

对每个 $(\sigma,\vartheta) \in \mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)_+$。注意，由于 ϕ 的性质，这个映射是良定义的 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$-等变双射。事实上，由于 ϕ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$-等变的（尤其是 G^F-等变的），我们知道 $\mathrm{G}^F_\sigma = \mathrm{G}^F_{\phi(\sigma)}$，因此 ϑ 是 $\mathrm{G}^F_{\phi(\sigma)}$ 的不可约特征标。此外，由于 $|\phi(\sigma)| = |\sigma| \pm 1$，我们推得该对 $(\phi(\sigma)\ \vartheta)$ 属于 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)^{\mathrm{c}}_-$。还要注意，$\Upsilon'$ 是一个双射：Υ' 的逆映射很容易描述为 $(\Upsilon')^{-1}(\phi(\sigma)\ \vartheta) := (\phi(\phi(\sigma))\ \vartheta) = (\sigma,\vartheta)$。此外，再次利用 ϕ 的等变性质，注意到 $X_\sigma = X_{\phi(\sigma)}$，因此

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}^F_\sigma, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\phi(\sigma),\vartheta}, \mathbf{G}^F_{\phi(\sigma)}, \vartheta\right).$$

现在，若将 Υ 定义为由 Υ' 在相应的 G^F-轨道集合上诱导的映射，我们便得到一个具有陈述中所要求性质的双射。 □

4.3 将 ℓ-链替换为 e-链

现在，我们的目标是利用上一节所述的消去定理，建立 Dade 射影猜想 4.1 与猜想 4.3 之间，以及特征三元组猜想 4.2 与猜想 4.4 之间的联系。首先，通过应用引理 3.3 中给出的 e-闭阿贝尔 ℓ-子群的刻画，我们构造一个等变双射，将属于 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$ 的 e-链集合映射到属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 的 ℓ-链集合；也就是说，映射到由 e-闭阿贝尔 ℓ-子群构成的 ℓ-链。保持 G、F、q 和 ℓ 如上，并假设 $e = e_\ell(q)$。

引理 4. 7. 假设 ℓ 对 $\mathbf{G}$ 是好的，且不整除 $|\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F : \mathbf{Z}^\circ(\mathbf{G})^F|$。则映射

$$\iota : \Delta\left(\mathcal{L}_e(\mathbf{G}, F)\right) \to \Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F, \mathbf{Z}(\mathbf{G})_\ell^F\right)^{\gamma_{\ell,e}}\right)$$
$$\{\mathbf{L}_i\}_i \mapsto \left\{\mathbf{Z}(\mathbf{L}_i)_\ell^F\right\}_i$$

and

$$\delta : \Delta\left(\mathrm{Ab}_\ell\left(\mathbf{G}^F, \mathbf{Z}(\mathbf{G})_\ell^F\right)^{\gamma_{\ell,e}}\right) \to \Delta\left(\mathcal{L}_e(\mathbf{G}, F)\right)$$
$$\{A_i\}_i \mapsto \left\{\mathbf{C}_\mathbf{G}\left(\mathbf{Z}^\circ\left(\mathbf{C}_\mathbf{G}^\circ(A_i)\right)_{\Phi_e}\right)\right\}_i$$

是 $Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$-等变双射，满足 $\delta = \iota^{-1}$；并且对于每个属于 $\Delta(L_e(G\ F))$ 的 e-链 σ，以及每个属于 $\Delta(Ab_\ell(G^F, Z(G)_\ell^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 的 ℓ-链 ρ，都有 $|\iota(\sigma)| = |\sigma|$ 和 $|\delta(\rho)| = |\rho|$。

证明。注意，正如引理 3.3 中所说明的，对于每个 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 e-分裂 Levi 子群 L，$\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F = \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})_\ell^F$ 都是一个 e-闭阿贝尔 ℓ-子群。因此，给定一个 e-链 $\sigma \in \Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$，并回忆 G 是 σ 的首项，我们可推得 $\iota(\sigma)$ 属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F)^{\gamma_{\ell,e}})$。另一方面，对于 G 的每个 ℓ-子群 A，中心化子 $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(A))^{\Phi_e})$ 都是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 e-分裂 Levi 子群。由于 $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(\mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F))^{\Phi_e}) = \mathrm{G}$，我们推得，只要 ρ 是以 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F$ 为起始项的 G^F 的 ℓ-链，$\delta(\rho)$ 就属于 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$；特别地，当 $\rho \in \Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 时亦然。这说明 ι 和 δ 是定义良好的。也可直接验证，两个映射都与 $\mathrm{Aut}_\mathbb{F}(\mathrm{G}^F)$ 的作用可交换。

接下来，考虑一个 e-链 $\sigma \in \Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$，并注意到 $\delta(\iota(\sigma))$ 的各项为 $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(\mathrm{Z}(\mathrm{L}_i)_\ell^F))^{\Phi_e})$。但根据引理 1.7，后者与 L_i 相同。反过来，若 ρ 是一个属于 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F, \mathrm{Z}(\mathrm{G})_\ell^F)^{\gamma_{\ell,\ e}})$ 的 ℓ-链，则 $\iota(\delta(\rho))$ 的各项为 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(A_i))^{\Phi_e}))_\ell^F = \gamma_{\ell,\ e}(A_i) = A_i$，其中最后一个等式源于 A_i 是 e-闭的这一事实。这表明 $\delta = \iota^{-1}$。

最后，我们需要证明 ι 和 δ 都保持链长。若 L 和 L′ 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 e-分裂 Levi 子群，且 $\mathrm{L} < \mathrm{L}'$，那么根据 [CE04，命题 13.19]，必有 $\mathrm{Z}(\mathrm{L}')_\ell^F < \mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F$。此外，若 A 和 A' 是满足 $A < A'$ 的 e-闭阿贝尔 ℓ-子群，则有 $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(A))^{\Phi_e}) > \mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(A'))^{\Phi_e})$。事实上，注意到 $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(A))^{\Phi_e}) \geq \mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{C}_\mathrm{G}^\circ(A'))^{\Phi_e})$，并且不可能取等号，否则将推出 $A = \gamma_{\ell,e}(A) = \gamma_{\ell,e}(A') = A'$。由此可知，$\iota$ 和 δ 按要求保持链长。 □

在子序列中 在证明中，我们使用以下对 [Ros22b 命题 4.18] 的推广 .

引理 4.8. 设$(\mathbf{G}\ F)$为有限约化群，其对偶群为$(\mathbf{G}^*, F^*)$，并考虑一个不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G}^*)^{F^*}$的素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}^*, F^*)$。若 χ是 $\mathbf{G}^F$ 的一个 e-尖点特征，则 χ具有ℓ零缺陷。

证明。设 s 是 G^{*F^*} 的一个半单元，其（有理）Lusztig级数包含特征标 χ（见 [GM20, 定义 2.6.1 和定理 2.6.2]）。按照 [Ros22b 命题 4.18], 的证明进行，并注意到该论证的第一部分在我们的假设下仍然成立，我们可得 $\chi(1)_\ell = |G^F|_\ell/|Z(H)^F|_\ell$，其中 $H := C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$。还需证明 ℓ 不整除 $Z(H)^F$的阶，等价地，证明 $Z := Z(H)^F_\ell = 1$。首先，根据 [CE99 命题 1.10]，注意到 $Z^\circ(G^*)^{\Phi_e} = Z^\circ(H)^{\Phi_e}$，因此 G^* 是包含 H 的唯一 (G^*, F^*) 的 e-分裂 Levi 子群。另一方面，Levi 子群的基本性质表明，H 包含于 $K := C_{\mathbf{G}^*}(Z^\circ(C^\circ_{\mathbf{G}^*}(Z))^{\Phi_e})$，且 K 是 (G^*, F^*) 的一个 e-分裂 Levi 子群。因此 $K = G^*$，从而 $Z(K)^F_\ell = Z(G^*)^F_\ell$。最后，注意到 $Z(K)^F_\ell = \gamma_{\ell,e}(Z)$，引理 3.10 表明 Z 包含于 $Z(G^*)^{F^*}_\ell$ 中；由于后者在假设下是平凡的，我们便得到 $Z = 1$，证毕。

□

现在我们应用定理 4.5 和引理 4.7，将 Dade 的投射猜想 4.1 中的交错和改写为单纯复形 $\Delta(L_e(G\ F))$ 中链的形式。

命题 4.9. 设 $(\mathbf{G}\ F)$ 是有限约化群，并设素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$ 不整除 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶。固定一个 ℓ-块 B *of* $\mathbf{G}^F$、一个非负整数 d，以及 $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的某个子群 Z 的一个不可约特征标 λ。那么

$$\sum_{\sigma \in \Delta(\mathcal{S}_\ell(\mathbf{G}^F))/\mathbf{G}^F} (-1)^{|\sigma|} k^d(B_\sigma, \lambda) = \sum_{\rho \in \Delta(\mathcal{L}_e(\mathbf{G}, F))/\mathbf{G}^F} (-1)^{|\rho|} k^d(B_\rho, \lambda) \tag{4.2}$$

证明。应用定理 4.5，我们可以将等式 (4.2) 左侧的交错和替换为相应的和，该和取遍 e-闭阿贝尔ℓ-子群之链的 G^F-共轭类；也就是说，取遍单纯复形 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(G^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 中的 G^F-轨道（见 (4.1)）。接下来注意，在我们的假设下有 $Z(G)^F_\ell = 1$，因此引理 4.7 给出了 δ在 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(G^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 与单纯复形 $\Delta(L_e(G\ F))$ 之间的双射；后者对应于 $(G\ F)$ 的 e-分裂 Levi 子群的偏序集。此外，引理 4.7 中描述的等变性质表明，该双射 δ 保持 G^F-轨道和稳定子不变，即对每个 $\sigma \in \Delta(\mathrm{Ab}_\ell(G^F)^{\gamma_{\ell,e}})$ 和 $\rho = \delta(\sigma)$，都有 $G^F_\sigma = G^F_\rho$。特别地，这表明只要 $\delta(\sigma) = \rho$，$k^d(B_\sigma, \lambda)$ 就与 $k^d(B_\rho, \lambda)$ 相同。由于我们还知道 $|\delta(\sigma)| = |\sigma|$，因此，取遍阿贝尔 e-闭 ℓ-子群之链的 G^F-轨道所得的交错和，与取遍 $(G\ F)$ 的 e-分裂 Levi 子群之链的 G^F-轨道所得的交错和相同，从而得到等式 (4.2)。

□

最后，我们可以在适当的假设下证明 Dade 射影猜想 4.1 与猜想 4.3 等价。我们的下一个结果推广了 [Ros22b，命题 7.10]。

定理 4.10. 设$(\mathbf{G}\ F)$为有限约化群，并设素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F) \cap \pi(\mathbf{G}^*, F^*)$不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的阶，也不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G}^*)^{F^*}$的阶。那么，对于$\mathbf{G}^F$ 的每个具有非平凡缺陷的 ℓ-块 B、每个非负整数 d，以及$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的子群 Z 的每个特征 λ，下列陈述等价：

(i) Dade 射影猜想 *4.1* 对于 B、 d和 λ成立；

(ii) 猜想 *4.3* 对于 B、 d和 λ成立。

证明。 首先，我们注意到在我们的假设下 $Z_\ell = 1$，因此 Dade 射影猜想 4.1 对于 B、 d 和 λ 成立，当且仅当 (4.2) 左侧的交错和等于零。因此，命题 4.9 表明，(i) 等价于 (4.2) 右侧为零。现在，我们按照分拆$\Delta(\mathrm{L}_e(\mathbf{G}\ F)) = \Delta(\mathrm{L}_e^\star(\mathbf{G}\ F)) \cup \{\rho_0\}$，以及其中 $\rho_0 = \{\mathbf{G}\}$，将各项对该交错和的贡献分别列出。由于 $\mathbf{G}_{\rho_0}^F = \mathbf{G}^F$，可知$k^d(B_{\rho_0}, \lambda) = k^d(B, \lambda)$，因此 (i) 等价于等式

$$\sum_{\rho \in \Delta(\mathcal{L}_e^\star(\mathbf{G},F))/\mathbf{G}^F} (-1)^{|\rho|} k^d(B_\rho, \lambda) + k^d(B, \lambda) = 0$$

我们将其改写为

$$k^d(B, \lambda) = \sum_{\rho \in \Delta(\mathcal{L}_e^\star(\mathbf{G},F))/\mathbf{G}^F} (-1)^{|\rho|+1} k^d(B_\rho, \lambda). \tag{4.3}$$

接下来注意到，由于我们的 ℓ-块 B 具有正缺陷，因此其中不可能包含一个 ℓ-缺陷为零的特征（例如参见 [Nav98，定理 3.18]）。然后，应用引理 4.8，我们推得ℓ-块 B不包含任何 e-尖点特征，因此$k_{\mathrm{c}}^d(B, \lambda) = 0$。这表明 (4.3) 等价于猜想 4.3 中所述的等式，因此我们得出 (i) 和 (ii) 等价。 □

上述结果的直接推论是定理 E。

定理 *E* 的证明。 现在假设 G 是单连通型的单代数群，且 ℓ是一个对 G 良好的奇素数，并且不整除 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F$的阶；若 $(\mathrm{G}\ F)$ 具有 D_4 型的有理分量，则 $\ell \neq 3$。那么显然 $\ell \in \pi(\mathrm{G}\ F) \cap \pi(\mathrm{G}^*, F^*)$。此外，由于 G^* 是伴随型， [DM20，命题 2.4.4] 蕴含 $\mathrm{Z}(\mathrm{G}^*) = 1$，因此满足定理 4.10 的假设。考虑平凡子群 $Z = 1$及其平凡特征标 $\lambda = 1_Z$，并注意到对于每个属于 $\Delta(\mathrm{S}_\ell(\mathrm{G}^F))$ 或 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$的$\sigma$，均有 $k^d(B_\sigma) = k^d(B_\sigma, \lambda)$，由此应用定理 4.10 即得所需结果。 □

现在我们开始研究特征三元组猜想。在下一个命题中，我们将证明，在适当的假设下，对于 $\mathbf{G}^F$ 的一个 ℓ-块 B 和一个非负整数 d，$\mathrm{C}^d(B)$ 中的配对 (σ, ϑ) 可以替换为类似的配对，其中我们考虑属于 e-分裂 Levi 子群的单纯复形 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$ 的链。为此，我们定义集合 $\mathrm{C}_e^d(B)$，它由满足以下条件的配对 (ρ, χ) 构成： ρ 属于 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$，而 χ 是稳定子 $\mathbf{G}_\rho^F$ 的一个不可约特征标，具有 ℓ-缺陷 d；并且，如果 $\mathrm{bl}(\chi)$ 表示包含 χ 的 $\mathbf{G}_\rho^F$ 的 ℓ-块，那么诱导的 ℓ-块 $\mathrm{bl}(\chi)^{\mathbf{G}^F}$ 有定义且与 B 相同。请注意，一般而言，$\mathbf{G}_\rho^F$ 到 $\mathbf{G}^F$ 的块诱导是否有定义并不明确；不过，在下文给出的结果中，情况总是如此。

命题 4.11. 设$(\mathbf{G}\ F)$是一个有限约化群，并考虑一个不整除$\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$的素数 $\ell \in \pi(\mathbf{G}\ F)$。固定$\mathbf{G}^F$ 的一个 ℓ-块 B 以及一个非负整数 d。那么存在$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_B$-等变双射

$$\Psi_\pm : \mathcal{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_\pm/\mathbf{G}^F \to \mathcal{C}_e^d(B)_\pm/\mathbf{G}^F$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}_\rho^F, \chi\right)$$

对每个 $(\sigma,\ \vartheta) \in \mathcal{C}^d_{\gamma_\ell,\ e}(B)_\pm$ 以及 $(\rho,\ \chi) \in \Psi_\pm(\overline{(\sigma,\ \vartheta)})$，其中 $X := \mathbf{G}^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$。

证明。由于我们的假设保证 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F_\ell$ 是平凡的，因此可以应用引理 4.7，得到单纯复形 $\Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_\ell,e})$ 与 $\Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$ 之间的一个双射 δ。现在考虑 $\sigma \in \Delta(\mathrm{Ab}_\ell(\mathrm{G}^F)^{\gamma_\ell,e})$ 和 $\rho \in \Delta(\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F))$，其中 $\delta(\sigma) = \rho$。利用 δ 的性质，我们可以推得这两条链具有相同的稳定子 $\mathrm{G}^F_\sigma = \mathrm{G}^F_\rho$，且长度相同，为 $|\sigma| = |\rho|$。特别地，这表明，对于 G^F_ρ 的每个不可约特征标 χ，ℓ-块 $\mathrm{bl}(\chi)$ 按照 [KR89, 引理 3.2] 诱导出 G^F 的一个块。此外，(σ,ϑ) 属于 $\mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,e}(B)_\pm$ 当且仅当 (ρ,ϑ) 属于 $\mathrm{C}^d_e(B)_\pm$；同时，注意到 $X_\sigma = X_\rho$，我们得到

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\rho,\vartheta}, \mathbf{G}_\rho^F, \vartheta\right).$$

然后，再次利用 δ 的等变性质，我们可以定义映射 $\Psi_\pm$：将由 G^F 作用在有序对 $(\sigma,\vartheta) \in \mathrm{C}^d_{\gamma_\ell,\ e}(B)_\pm$ 上得到的轨道映射到由 G^F 作用在有序对 $(\delta(\sigma)\ \vartheta) \in \mathrm{C}^d_e(B)_\pm$ 上得到的轨道。正如上文所述，双射 $\Psi_\pm$ 满足所需条件。 □

应用定理 4.6 和命题 4.11，我们可以证明猜想 4.4 蕴含特征三元组猜想 4.2。为此，我们使用了 e-Harish-Chandra 理论中关于 ℓ-奇异系列的结果；该理论由 [Ros22b] 引入，并要求假设 [Ros22b，条件 3.3] 成立。后一个条件根据序关系 $\ll_e$ 描述 Lusztig 归纳的不可约成分（见 [GM20, 3.5.24]），并且与 Cabanes 和 Enguehard 的一个猜想有关（见 [CE99, 记号 1.11] 和 [Ros22b，猜想 3.2]）；该猜想受到 [BMM93，定理 3.11] 的启发。对于本文而言，只需知道当 $e = e_\ell(q)$ 且 $\ell \geq 5$ 对 G 良好时，[Ros22b，条件 3.3] 对单连通群成立（见 [Ros22b，推论 3.7]）。关于更多细节，请参阅 [Ros22b，第 3] 章节。

定理 *4.12.* 设 $(G\ F)$ 为有限约化群，并考虑素数 $\ell \in \pi(G\ F) \cap \pi(G^*, F^*)$，它不整除 $Z(G)^F$ 的阶，也不整除 $Z(G^*)^{F^*}$ 的阶。进一步假设 $\ell \geq 5$，且 *[Ros22b,* 条件 *3.3]* 对 $(G\ F)$ 成立。如果猜想 *4.4* 对 G^F 的一个 ℓ-块 B 成立，且该块具有非平凡缺陷，并且 d 为非负整数，那么特征三元组猜想 *4.2* 对于 B 和 d 相对于包含关系 $G^F \trianglelefteq G^F \rtimes Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$ 成立。

证明。根据假设，我们知道猜想 4.4 对 B 和 d成立，因此存在一个双射 Λ，将 $\mathrm{L}^d_e(B)_+$ 中的 G^F-轨道映到 $\mathrm{L}^d_e(B)_-$ 中的 G^F-轨道；该双射是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$-等变的，并诱导出特征三元组的 G^F-块同构。我们希望利用 Λ 构造一个满足特征三元组猜想 4.2 所要求条件的双射 Ω。首先，考虑一对 $(\sigma,\vartheta) \in \mathrm{C}^d_e(B)_+$，并用 L 表示 σ 中最小的项。继续之前，我们指出，在假设 [Ros22b] 的假设 4.1 成立，并允许 Lusztig 诱导（最终）依赖于抛物子群的选择时，所得结果仍然有效。因此，我们可以应用 [Ros22b，引理 5.5]，得到 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 e-尖点对 $(\mathrm{M}\ \mu)$，其中 $\mathrm{M} \leq \mathrm{L}$，且 ϑ 位于某个特征之上，该特征属于 e-Harish-Chandra 级数 $\mathrm{E}(\mathrm{L}^F, (\mathrm{M}\ \mu))$。接下来，注意到 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 属于集合 $\mathrm{CP}^\star_e(B)$。事实上，由于 B 具有非平凡缺陷，引理 4.8 保证 $\mathrm{CP}_e(B) = \mathrm{CP}^\star_e(B)$；而应用 [Ros22b，命题

4.8 和引理 5.5]，我们可以利用条件 $\mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F} = B$ 证明 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 属于 $\mathrm{CP}_e(B)$。特别地，这表明 $(\sigma, \mathrm{M}, \mathrm{Ab}(\mu)\ \vartheta)$ 是 $\mathrm{L}_e^d(B)_+$ 的一个元素。现在，若 Λ 将 $(\sigma, \mathrm{M}, \mathrm{Ab}(\mu)\ \vartheta)$ 的 G^F-轨道映到 $(\sigma', \mathrm{M}', \mathrm{Ab}(\mu')\ \vartheta')$ 的 G^F-轨道，且分别属于 $\mathrm{L}_e^d(B)_+$ 和 $\mathrm{L}_e^d(B)_-$，那么沿用上述论证可得 (σ', ϑ') 属于 $\mathrm{C}_e^d(B)_-$。将 (σ, ϑ) 的 G^F-轨道映到 (σ', ϑ') 的 G^F-轨道，即可得到一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$-等变双射

$$\Phi : \mathcal{C}_e^d(B)_+/\mathbf{G}^F \to \mathcal{C}_e^d(B)_-/\mathbf{G}^F$$

它诱导特征三元组的 G^F-块同构（这是因为由 Λ 诱导的 G^F-块同构仅取决于 (σ, ϑ) 和 (σ', ϑ')）。接下来，令 $\Psi_\pm$ 为命题 4.11 中引入的双射，并定义映射

$$\Theta : \mathcal{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_+/\mathbf{G}^F \to \mathcal{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_-/\mathbf{G}^F$$

由 $\Theta := \Psi_-^{-1} \circ \Phi \circ \Psi_+$ 给出。显然，Θ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$-等变的；利用 $\sim_{\mathbf{G}^F}$ 的传递性（见 [Spä17，引理 3.8 (a)]），可知它诱导特征三元组的 G^F-块同构。最后，令 Υ 为定理 4.6 给出的映射，并定义

$$\Omega\left(\overline{(\sigma,\vartheta)}\right) := \begin{cases} \Theta\left(\overline{(\sigma,\vartheta)}\right), & \text{if } (\sigma,\vartheta) \in \mathcal{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_+ \\ \Upsilon\left(\overline{(\sigma,\vartheta)}\right), & \text{if } (\sigma,\vartheta) \in \mathcal{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_+^{\mathrm{c}}. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{C}^d(B)_\pm$ 分拆为 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$-不变子集 $\mathrm{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_\pm$ 和 $\mathrm{C}_{\gamma_{\ell,e}}^d(B)_\pm^{\mathrm{c}}$，我们推得 Ω 定义了一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$-等变双射，将 $\mathrm{C}^d(B)_+/\mathrm{G}^F$ 映至 $\mathrm{C}^d(B)_-/\mathrm{G}^F$。此外，$\Omega$ 满足关于 G^F-块特征三元组同构的条件，因为 Θ 和 Υ 也满足该条件。

□

作为上述定理的推论，我们得到定理 F，它说明如何从猜想 4.4 推出 Dade 猜想的归纳条件。

定理 *F* 的证明。 现在假设 G 是一个单连通型的单代数群，并且 G^F 是 $\mathrm{G}^F/\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F$ 的泛覆叠群。进一步假设 $\ell \geq 5$ 对 G 良好，且不整除 $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^F$ 的阶。在此情形下，根据 [Ros22b，推论 3.7]， [Ros22b，条件 3.3] 对 $(\mathrm{G}\ F)$ 成立（注意，只需允许 Lusztig 诱导可能依赖于抛物子群的选择，即可在不假设 Mackey 公式的情况下完成该结果的证明）。因此，我们可以应用定理 4.12，得到一个双射 Ω，它具有特征三元组猜想 4.2 中所述的性质，并且相对于包含关系 $\mathrm{G}^F \trianglelefteq \mathrm{G}^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F) =: X$。特别地，我们有

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}_\rho^F, \chi\right)$$

对于每个 $(\sigma, \vartheta) \in \mathrm{C}^d(B)_+$，其 G^F-轨道在映射 Ω 下与 $(\rho, \chi) \in \mathrm{C}^d(B)_-$ 的轨道相对应。现在， [Spä17, 引理 3.4] 表明，限制特征 $\vartheta_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}$ 的中心与 $\chi_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}$ 的中心重合。若将该群记为 Z，则可推出其阶与 ℓ 互素，因此 [Spä17, 推论 4.5] 得出

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}/Z, \mathbf{G}_\sigma^F/Z, \overline{\vartheta}\right) \sim_{\mathbf{G}^F/Z} \left(X_{\rho,\chi}/Z, \mathbf{G}_\rho^F/Z, \overline{\chi}\right)$$

其中，我们用 $\overline{\vartheta}$ 和 $\overline{\chi}$ 表示通过膨胀分别与 ϑ 和 χ 对应的特征。最后，注意到 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$ 诱导有限群 $\mathbf{G}^F$ 的所有自同构（见 [GLS98, 1.15]），并应用 [Ros22b, 引理 7.6]，即可得到 ℓ-块B 和非负整数 d 的 Dade 猜想的归纳条件。

□

参考文献

[Alp87] J. L. Alperin. 有限群的权. 载于《阿卡塔有限群表示会议》（加利福尼亚州阿卡塔, 1986），《纯粹数学专题讨论会论文集》第47卷，第369–379页. 美国数学会，普罗维登斯, 罗得岛州，1987年.[Ben98] D. J. Benson.《表示与上同调》第二卷，《剑桥高等数学研究丛书》第31卷. 剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1998年. 群与模的上同调.[BS08] D. J. Benson and S. D. Smith.《散在群的分类空间》，《数学调查与专著》第147卷. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年.[Bou84] S. Bouc. 某些有序集的同调.《巴黎科学院报告》数学系列 I，299(2):49–52，1984年.[BMO12] C. Broto, J. M. Møller, and B. Oliver. 李型有限群融合系统之间的等价. J. Amer. Math. Soc., 25(1):1–20，2012年.[BFS] M. Broué, P. Fong, and B. Srinivasan. 幺幂块的 Dade 猜想. 未发表的笔记.[BM92] M. Broué and G. Malle. 有限域上约化群的泛型 Sylow 定理. Math. Ann., 292(2):241–262，1992年.[BMM93] M. Broué, G. Malle, and J. Michel. 有限约化群的泛型块. Astérisque, (212):7–92, 1993年.[Bro75] K. S. Brown. 群的欧拉示性数：p的分数部分.《数学发明》，29(1):1–5, 1975年.[Bro76] K. S. Brown. 离散群的高维上同调. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 73(6):1795–1797，1976年.[Bro79] K. S. Brown. 几乎有限维群. 载于《群的同调理论》（1977年达勒姆专题讨论会论文集），《伦敦数学会讲义系列》第36卷，第27–70页. 剑桥大学出版社，剑桥-纽约，1979年.[CE94] M. Cabanes and M. Enguehard. 关于幺幂块及其普通特征.《数学发明》，117(1):149–164，1994年.[CE99] M. Cabanes and M. Enguehard. 关于有限约化群的块与扭曲诱导. Adv. Math., 145(2):189–229，1999年.[CE04] M. Cabanes and M. Enguehard.《有限约化群表示论》，《新数学专著》第1卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2004年。

[CS13] M. Cabanes and B. Späth. 连通中心有限约化群中的等变性与可延拓性. Math. Z., 275(3-4):689–713，2013年.[Dad92] E. C. Dade. 块中的特征标计数 I.《数学发明》，109(1):187–210，1992年.[Dad94] E. C. Dade. 块中的特征标计数 II. J. Reine Angew. Math., 448:97–190，1994年.[DM20] F. Digne and J. Michel.《李型有限群的表示》，《伦敦数学会学生文本》第95卷. 剑桥大学出版社，第二版，2020年.[Dwy97] W. G. Dwyer. 有限群分类空间的同调分解. Topology, 36(4):783–804，1997年.[Dwy98] W. G. Dwyer. 有限群分类空间的尖锐同调分解. 载于《群表示：上同调、群作用与拓扑学》（华盛顿州西雅图, 1996），《纯粹数学专题讨论会论文集》第63卷，第197–220页. 美国数学会，普罗维登斯, 罗得岛州，1998年.[GM20] M. Geck and G. Malle. 李型有限群的特征标理论：导览，《剑桥高等数学研究丛书》第187卷. 剑桥大学出版社，2020年.[GLS98] D. Gorenstein, R. Lyons, and R. Solomon.《有限单群的分类》第3号，第一部分，A章，《数学调查与专著》第40卷. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年.[Gro02] J. Grodal. 通过子群复形研究高阶极限. Ann. of Math. (2), 155(2):405–457，2002年.[Gro23] J. Grodal. 通过同伦论研究有限群的内平凡模. J. Amer. Math. Soc., 36(1):177–250，2023年.[GS06] J. Grodal and S. D. Smith. 尖锐群同调分解的传递. Adv. Math., 200(2):525–538，2006年.[JM92] S. Jackowski and J. McClure. 通过初等阿贝尔子群对分类空间作同伦分解. Topology, 31(1):113–132，1992年.[JMO92] S. Jackowski, J. McClure, and B. Oliver. 通过 BG 的G-作用对自映射作同伦分类 I. Ann. of Math. (2), 135(1):183–226，1992年.[KLLS19] R. Kessar, M. Linckelmann, J. Lynd, and J. Semeraro. 融合系统的权猜想. Adv. Math., 357:106825, 40，2019年.[KM15] R. Kessar and G. Malle. Lusztig 诱导与有限约化群的 ℓ-块. Pacific J. Math., 279(1-2):269–298，2015年.[KR89] R. Knörr and G. R. Robinson. 关于 Alperin 猜想的一些评述. J. London Math. Soc. (2), 39(1):48–60，1989年.[Møl19] J. M. Møller. 子空间偏序集的等变欧拉示性数. J. Combin. Theory Ser. A, 167:431–459, 2019年.[Møl21] J. M. Møller. 酉建筑的等变欧拉示性数. J. Algebraic Combin., 54(3):915–946，2021年。

[Møl22] J. M. Møller. 辛建筑的等变欧拉示性数。Graphs Combin., 38(3):第 91 号论文, 41 页，2022。[Nav98] G. Navarro. 有限群的特征标与块，伦敦数学会讲义系列第 250 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998。[Nav18] G. Navarro. 特征标理论与 McKay猜想，剑桥高等数学研究丛书第 175 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。[Qui78] D. Quillen. 群的非平凡 p-子群偏序集的同伦性质。Adv. in Math., 28(2):101–128, 1978。[Rob96] G. R. Robinson. 局部结构、顶点与 Alperin猜想。Proc. London Math. Soc. (3), 72(2):312–330, 1996。[Rob00] G. R. Robinson. p-可解群的 Dade 射影猜想。J. Algebra, 229(1):234– 248, 2000。[Rob02a] G. R. Robinson. 与 Alperin 和 Dade 猜想相关的消去定理。J. Algebra, 249(1):196–219, 2002。[Rob02b] G. R. Robinson. 更多与 Alperin 和 Dade 猜想相关的消去定理。J. Algebra, 249(2):463–471, 2002。[Ros] D. Rossi. 特征三元组猜想的约化定理。准备中。[Ros22a] D. Rossi. p-可解群的特征三元组猜想。J. Algebra, 595:165–193, 2022。[Ros22b] D. Rossi. 有限约化群中的计数猜想与 e-局部结构。arXiv:2204.00428, 2022。[Ros22c] D. Rossi. 归纳局部-整体条件与广义Harish-Chandra理论。arXiv:2204.10301, 2022。[Ros23] D. Rossi. 幺幂特征标的局部-整体原理。arXiv:2301.05151, 2023。[Spä17] B. Späth. Dade 射影猜想的约化定理。J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 19(4):1071–1126, 2017。[Thé93] J. Thévenaz. 等变 K-理论与 Alperin猜想。J. Pure Appl. Algebra, 85(2):185–202, 1993。[TW91] J. Thévenaz 和 P. J. Webb. 具有群作用的偏序集的同伦等价。J. Combin. Theory Ser. A, 56(2):173–181, 1991。[Tit74] J. Tits. 球型建筑与有限BN对。数学讲义，第 386 卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1974。[Web87] P. J. Webb. 群上同调中的一种局部方法。Comment. Math. Helv., 62(1):135–167, 1987。

奥伯沃尔法赫数学研究所 黑森林街9-11号,
77709 奥伯沃尔法赫-瓦尔克，德国电子邮件
地址：damiano.rossi.math@gmail.com