arXiv:2303.13983v1 [math.CA] 24 Mar 2023

分离傅里叶乘子与舒尔乘子

´Cédric Arhancet、Christoph Krieger、Christian Le Merdy 和 Safoura Zadeh

Abstract. 设 G 为一个局部紧幺模群，设 $1 \le p < \infty$，设 $\phi \in L^\infty(G)$，并假设与 ϕ 相关联的傅里叶乘子 M_ϕ 在非交换 L^p-空间 $L^p(VN(G))$ 上有界。那么， M_ϕ： $L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是分离的（即，对于任意 $a,b \in L^p(VN(G))$， $\{a^*b = ab^* = 0\} \Rightarrow \{M_\phi(a)^* M_\phi(b) = M_\phi(a)M_\phi(b)^* = 0\}$），当且仅当存在 $c \in \mathbb{C}$ 和一个连续特征 ψ： $G \to \mathbb{C}$，使得 $\phi = c\psi$ 几乎处处局部成立。这给出了在 $p \neq 2$ 时， $L^p(VN(G))$ 上等距傅里叶乘子的刻画。接下来，设 Ω 是一个 σ-有限测度空间，设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$，并假设与 ϕ 相关联的舒尔乘子在 Schatten 空间$S^p(L^2(\Omega))$ 上有界。我们证明，该乘子是分离的，当且仅当存在一个常数$c \in \mathbb{C}$ 以及两个酉元 $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$，使得 $\phi(s,t) = c\,\alpha(s)\beta(t)$ 在 Ω^2. 上几乎处处成立。这给出了在 $p \neq 2$ 时， $S^p(L^2(\Omega))$ 上等距舒尔乘子的刻画。

2020 年数学主题分类：主要分类 46L51，次要分类 43A15、46B04。关键词：傅里叶乘子、舒尔乘子、非交换 L^p-空间、等距映射。

1. 引言

设 Γ 是一个局部紧阿贝尔群，设 $1 \le p \neq 2 < \infty$，且 T： $L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ 是一个有界傅里叶乘子。一个可追溯至 Parrott [27] 和 Strichartz[33] 的经典定理断言， T 是等距映射，当且仅当存在 $c \in \mathbb{C}$，满足 $|c| = 1$，并且 $u \in \Gamma$，使得 $T = c\tau_u$。这里， τ_u： $L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ 是由 $\tau_u(f) = f(\cdot - u)$ 定义的平移算子。

在过去十年中，与群冯·诺依曼代数相关的非交换 L^p-空间上的傅里叶乘子已成为非交换分析中的重要课题，其应用涉及算子代数的逼近性质、奇异积分与 Calderon-Zygmund 算子，以及非交换概率和量子信息。特别参见 [2, 9, 16, 17, 20, 25, 26]。因此，理解非交换框架下等距傅里叶乘子的结构，便成为一个自然的问题。事实上，这项工作的最初动机，就是将 Parrott-Strichartz 定理推广到这一框架中。

具体而言，设 G 是一个局部紧群，令 $VN(G)$ 表示其群冯·诺依曼代数，并令 λ： $L^1(G) \to VN(G)$ 为与 G 的左正则表示相关联的压缩表示。假设 G 是幺模的。这保证了 $VN(G)$ 上的普朗歇尔权重 τ_G 实际上是一个正规半有限忠实迹。对于任意 $1 \le p < \infty$，令 $L^p(VN(G))$ 表示与 $(VN(G)\ \tau_G)$ 相关联的非交换 L^p 空间。傅里叶乘子 T： $L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是如下形式的算子

$$T(\lambda(f)) = \lambda(\phi f),$$

其中 ϕ 是 $L^\infty(G)$ 的一个固定元素，且 f 属于 $L^1(G)$ 的某个适当稠密子空间。在此情形下，我们令 $T = T_\phi$。更多细节请参见第3节开头。

我们通过证明以下结果推广了 Parrott-Strichartz 定理，其中$VN(G)$起到 Γ 和 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}$ 的作用：$|z| = 1\}$：若 $p \neq 2$，则傅里叶乘子T_ϕ：$L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$是等距映射，当且仅当存在 $c \in \mathbb{T}$和一个连续特征 ψ：$G \to \mathbb{T}$，使得 $\phi = c\psi$ 局部几乎处处成立。

我们实际上考虑更一般的分离傅里叶乘子类。按照[22], 的说法，若算子 T：$L^p(M) \to L^p(M)$ 作用于某个非交换 L^p-空间 $L^p(M)$，则称其为分离的，若对于任意不相交的 a、$b \in L^p(M)$（即 $a^*b = ab^* = 0$），其像 $T(a)$ $T(b)$也不相交。众所周知，若 $p \neq 2$，则$L^p(M) \to L^p(M)$上的任意等距映射都是分离的。这可由 Yeadon 关于非交换 L^p 空间 [36] 上等距映射的刻画推出（另见 [22]）。我们证明，对于任意 $1 \leq p < \infty$ （包括 $p = 2$的情形），$L^p(VN(G))$上的傅里叶乘子 T_ϕ 是分离的，当且仅当存在$c \in \mathbb{C}$ 和一个连续特征 ψ：$G \to \mathbb{T}$，使得 $\phi = c\psi$ 局部几乎处处成立。

上述两个刻画定理在第3节中得到证明。第 4 节补充讨论傅里叶乘子。

第5节专门讨论作用于 Schatten 类上的舒尔乘子。设 $(\Omega\ \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$，并令 T_ϕ 表示作用于希尔伯特–施密特空间 $S^2(L^2(\Omega))$ 上的相应舒尔乘子（详情见下文）。设 $1 \leq p < \infty$，并假设 T_ϕ 在 Schatten 空间 $S^p(L^2(\Omega))$ 上有界。我们证明，T_ϕ: $S^p(L^2(\Omega)) \to S^p(L^2(\Omega))$ 是分离的，当且仅当存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 和两个酉元 α、$\beta \in L^\infty(\Omega)$，使得 $\phi(s,t) = c\,\alpha(s)\beta(t)$ 在 Ω^2. 上几乎处处成立。当 $p \neq 2$ 时，这给出了 $S^p(L^2(\Omega))$ 上等距舒尔乘子的刻画。

2. Preliminaries on separating maps

设 $\mathcal{M}$ 是一个配备正规半有限忠实迹 τ 的半有限冯·诺依曼代数。假设 $\mathcal{M} \subset B(H)$ 在某个希尔伯特空间 H 上作用。令 $L^0(\mathcal{M})$ 表示
$*$ 上所有闭的、稠密定义的（可能无界）且τ-可测算子构成的代数。对于任意 $1 \leq p < \infty$, 与 $(\mathcal{M}, \tau)$ 相关联的非交换 L^p 空间 $L^p(\mathcal{M})$ 可定义为

$$L^p(\mathcal{M}) := \big\{x \in L^0(\mathcal{M}) : \tau(|x|^p) < \infty\big\}.$$

设 $\|x\|_p := \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}$，对任意 $x \in L^p(\mathcal{M})$ 均成立。则配备 $\|\cdot\|_p$ 的 $L^p(\mathcal{M})$ 是一个巴拿赫空间。为方便起见，记 $L^\infty(\mathcal{M}) := \mathcal{M}$，并令 $\|.\|_\infty$ 表示算子范数。对于任意 $1 \leq p < \infty$，令 $p' = \frac{p}{p-1}$ 为 p 的共轭指标。对于任意 $x \in L^p(\mathcal{M})$ 和$y \in L^{p'}(\mathcal{M})$，乘积 xy 属于 $L^1(\mathcal{M})$，且 $|\tau(xy)| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$。我们还可以得到等距识别 $L^p(\mathcal{M})^* \simeq L^{p'}(\mathcal{M})$，其中对偶配对定义为

$$\langle y, x\rangle = \tau(xy), \qquad x \in L^p(\mathcal{M}),\ y \in L^{p'}(\mathcal{M}).$$

我们用 $L^p(\mathcal{M})^+$ 表示 $L^p(\mathcal{M})$ 的正元素锥。关于 $L^0(\mathcal{M})$ 上代数运算的细节、$L^p(\mathcal{M})$ 的构造以及更多性质，请读者参阅 [29]及其中的参考文献。

我们指出，若对某个希尔伯特空间 H 有 $\mathcal{M} = B(H)$，则通常的迹 tr: $B(H)^+ \to [0,\infty]$ 是一个正规、半有限且忠实的迹，而与 $(B(H), \mathrm{tr})$ 相关联的非交换 L^p-空间就是 Schatten 类 $S^p(H)$。

如果 $a^*b = ab^* = 0$，我们称 a、$b \in L^0(\mathcal{M})$ 不相交。若一个有界算子 $T: L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$，$1 \le p \le \infty$，满足：每当 a、$b \in L^p(\mathcal{M})$ 不相交时，$T(a)$ 与 $T(b)$ 也不相交，则称其为分离的。

冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 上的 Jordan $*$-同态是一个线性映射 $J: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，满足 $J(a^2) = J(a)^2$ 且 $J(a^*) = J(a)^*$，对每个 $a \in \mathcal{M}$ 均成立。显然，Jordan $*$-同态是正的，即若 $a \in \mathcal{M}^+$，则 $J(a) \in \mathcal{M}^+$。提醒读者，Jordan $*$-同态并不总是 $*$-同态。例如，矩阵上的转置映射是一个 Jordan $*$-同态。

不过，我们有如下引理，其中（1）由恒等式 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + (ab + ba)$ 得出，而（2）由 [18, 10.5.22(iii)] 给出。

引理 2.1. 设 $J: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个 Jordan $*$-同态。

（1）对所有 $a, b \in \mathcal{M}$，有 $J(ab + ba) = J(a)J(b) + J(b)J(a)$。

（2）若 $a, b \in \mathcal{M}$ 满足 $ab = ba$，则有 $J(ab) = J(a)J(b)$。

我们还记录以下性质以供后续使用。这里，若映射 $J: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是弱*-连续的，则称其为正规映射。

引理 2.2. 设 $J: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个正规 Jordan $*$-同态。

（1）核 $\ker(J)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个 w^*-闭理想。（2）若 $(e_i)_i$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个有界网，且 $e_i \to 0$ 和 $e_i^* \to 0$ 在强算子拓扑下收敛，则 $J(e_i) \to 0$ 在强算子拓扑下收敛。

证明。（1）设 $J: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规 Jordan $*$-同态。一个众所周知的定理断言，存在两个冯诺依曼代数 $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$，一个冯诺依曼代数嵌入 $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}$，一个正规 $*$-同态 $\pi: \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ 以及一个正规反 $*$-同态 $\sigma: \mathcal{M} \to \mathcal{M}_2$，使得对所有 $a \in \mathcal{M}$，$J(a) = \pi(a) \oplus \sigma(a)$。（关于这一结果，参见 [32, 定理 3.3] 或 [11, 推论 7.4.9.]。）于是 $\ker(J) = \ker(\pi) \cap \ker(\sigma)$，因此 $\ker(J)$ 是弱*-闭理想。

（2）设 $(e_i)_i$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个有界网，使得 $e_i \to 0$ 和 $e_i^* \to 0$ 强收敛。写作 $(e_i^* e_i \zeta | \eta) = (e_i \zeta | e_i \eta)$，可得对所有 $\zeta, \eta \in \mathcal{H}$，$(e_i^* e_i \zeta | \eta) \to 0$。由于 $(e_i^* e_i)_i$ 有界，这意味着 $e_i^* e_i \to 0$ 在 $\mathcal{M}.$ 的弱*-拓扑中成立。因此，$\pi(e_i^* e_i) \to 0$ 弱收敛。写作 $\|\pi(e_i)\zeta\|^2 = (\pi(e_i^* e_i)\zeta | \zeta)$，我们推得 $\pi(e_i) \to 0$ 强收敛。同样，用 $e_i e_i^*$ 替代 $e_i^* e_i$，可得 $\sigma(e_i) \to 0$ 强收敛。因此，$J(e_i) \to 0$ 强收敛。□

下面的命题在分离映射的研究中发挥着基础性作用。该命题由 [22] 和 [14] 分别独立证明。

命题 2.3. [22, 注 3.3 和命题 3.11] 设 $1 \le p < \infty$。有界算子 $T: L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$ 是分离的，当且仅当存在一个正规 Jordan $*$-同态 $J: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$、一个偏等距算子 $w \in \mathcal{M}$，以及一个与 $\mathcal{M}$相伴的正算子 B，满足以下条件：

(a) $T(a) = wBJ(a)$, *for all* $a \in \mathcal{M} \cap L^p(\mathcal{M})$;

(b) $w^*w = J(1) = s(B)$; (c) 对所有 $a \in \mathcal{M}$, B 的每个谱投影都与 $J(a)$ 对易。

这里, $s(B)$ 表示 B 的支集。此外, 三元组 (w, B, J) 是唯一的。

Yeadon [36] 证明了, $L^p(\mathcal{M})$ 上的所有等距映射 $p \neq 2$ 都是分离的, 并且具有上述分解。基于此, 对于上述的 T, 我们将 (w, B, J) 称为 T 的 Yeadon 三元组。

引理 2.4. 设 $T\colon L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$ 是一个分离映射, 并令 (w, B, J) 表示其 Yeadon 三元组。若 T 的值域稠密, 则 $J(1) = 1$, 且 w 是一个酉元。

证明. 证明只需对 [24, 注3.2] 稍作修改即可。 □

引理 2.5. 设 $1 \leq p, q < \infty$。设 $T\colon L^p(\mathcal{M}) + L^q(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M}) + L^q(\mathcal{M})$, 并假设 $T\colon L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$ 和 $T\colon L^q(\mathcal{M}) \to L^q(\mathcal{M})$ 有界。若 $T\colon L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$ 是分离映射, 则 $T\colon L^q(\mathcal{M}) \to L^q(\mathcal{M})$ 也为分离映射。

证明。设 $\mathcal{E} := \{e \in \mathcal{M} : e$ 是一个投影, 且 $\tau(e) < \infty\}$。假设 $T\colon L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$ 是分离的。由于 $\mathcal{E} \subseteq L^p(\mathcal{M}) \cap L^q(\mathcal{M})$, 算子 $T\colon L^q(\mathcal{M}) \to L^q(\mathcal{M})$ 也在 $\mathcal{E}$ 上保持不相交性。根据 [22, 注3.12 (i)], $T\colon L^q(\mathcal{M}) \to L^q(\mathcal{M})$ 是分离的。□

3. A characterization of separating Fourier multipliers

设 G 是一个局部紧群, 其左 Haar 测度 μ 定义在 Borel 集的 σ-代数上。我们用 ds 表示 $d\mu(s)$。记 λ 为 G的左正则表示, 其定义为

$$\lambda\colon G \to B(L^2(G)); \quad [\lambda(s)f](t) = f(s^{-1}t).$$

左正则表示 λ 确定了 $L^1(G)$的一个表示, 也记作 λ, 定义为

$$\lambda\colon L^1(G) \to B(L^2(G)), \quad \lambda(g)\eta = g * \eta,$$

对所有 $g \in L^1(G)$ 和 $\eta \in L^2(G)$ 均成立。这里, 卷积为 $g * \eta(t) = \int_G g(s)\eta(s^{-1}t)ds$。我们有 $\lambda(g) = \int_G g(s)\lambda(s)\, ds$, 其中算子积分是在强算子意义下理解的。

对于任意函数 $g\colon G \to \mathbb{C}$, 我们令

$$\check{g}(t) = g(t^{-1}) \qquad \text{and} \qquad g^*(t) = \overline{g(t^{-1})},$$

对所有 $t \in G$。

我们用 e 表示 G的单位元。此外, 对于任意 Borel集 $A \subseteq G$, 我们用 χ_A 表示 A的示性函数。

令 $VN(G) \subseteq B(L^2(G))$ 表示由 $\{\lambda(s) : s \in G\}$生成的冯·诺依曼代数。这与由 $\{\lambda(g) : g \in L^1(G)\}$生成的冯·诺依曼代数相同。当 G 是$\widehat{\ }$阿贝尔时, 有 $VN(G) \simeq L^\infty(G)$, 其中 G 是 G的对偶群。

我们用 $(\cdot\,|\,\cdot)$ 表示 $L^2(G)$ 上的内积。群 G 的傅里叶代数定义为

$$A(G) = \{(\lambda(\,\cdot\,)\zeta|\eta) : \zeta, \eta \in L^2(G)\} \subseteq C_b(G).$$

对于逐点乘积和如下定义的范数，这是一个巴拿赫代数，其中任意 $\psi \in A(G)$ 均满足

$$\|\psi\|_{A(G)} = \inf\{\|\zeta\|_2\|\eta\|_2\},$$

其中下确界取遍所有满足 $\psi = (\lambda(\cdot)\zeta|\eta)$ 的 $\zeta, \eta \in L^2(G)$。我们注意到，后续还会用到一个等价写法: $A(G) = \{\zeta * \eta\colon\ \zeta, \eta \in L^2(G)\}$。

We 回顾一下， $A(G)^* \simeq VN(G)$ 在由 b 给出的对偶配对下是等距的 y

$$\langle \lambda(s), \psi\rangle = \psi(s), \qquad \psi \in A(G),\ s \in G. \tag{3.1}$$

假设 G 是幺模的。我们将使用所谓的普朗歇尔迹

$$\tau_G : VN(G)^+ \longrightarrow [0, +\infty],$$

相关内容可参见 [35, 第 VII 节。3] （另见 [3]）。我们注意到， τ_G 是一个正规半有限忠实迹。这使我们可以考虑与 τ_G相关的非交换 L^p-空间 $L^p(VN(G))$。回顾一下，若 G 是离散的，则 G是幺模的，且 τ_G 是归一化的。此外， $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$若 G 是阿贝尔的，则 G 是幺模的，且 $L^p(VN(G)) = L^p(G)$，其中 G 表示 G的对偶群。

众所周知，对于任意 $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$， $\lambda(g) \in L^2(VN(G))$ 满足 $\|\lambda(g)\|_2 = \|g\|_2$ （例如参见 [3, 第 6.1] 节）。因此，将 λ 限制在 $L^1(G) \cap L^2(G)$ 上，可延拓为从 $L^2(G)$ 到 $L^2(VN(G))$ 中的等距映射。事实证明，后者是满射，从而得到一个酉等同

$$L^2(VN(G)) \simeq L^2(G). \tag{3.2}$$

利用记 号 U_λ： 对于上述酉映射， $L^2(G) \to L^2(VN(G))$，有

$$\tau_G\big(U_\lambda(\zeta)U_\lambda(\eta)\big) = \int_G \zeta(t)\check{\eta}(t)\,dt, \qquad \zeta, \eta \in L^2(G). \tag{3.3}$$

由于 $L^1(VN(G))^* \simeq VN(G)$，我们得到一个等距等同

$$A(G) \simeq L^1(VN(G)).$$

由 (3.1) 和 (3.3) 不难推出，这一等同由映射$A(G) \to L^1(VN(G))$ 给出，该映射对所有 ζ, $\eta \in L^2(G)$ 都将 $\zeta * \eta$ 取为 $U_\lambda(\check{\ }\eta)U_\lambda(\ \check{}\zeta)$。细节留给读者。

令 $C_c(G)$ 表示定义在 G 上的连续紧支撑函数空间。令 $C_c(G) * C_c(G)$ 表示 $f_1 * f_2$ 的线性张成，其中 $f_1, f_2 \in C_c(G)$。众所周知，

$$\lambda\big(C_c(G) * C_c(G)\big) \subseteq L^1(VN(G)) \cap VN(G),$$

并且，对于所有 $1 \le p < \infty$， $\lambda\big(C_c(G) * C_c(G)\big)$ 在 $L^p(VN(G))$ 中稠密。证明可参见 [7, 命题 3.4] （情形 $p = 1$）以及 [5, 命题 4.7] （其他情形）。另请注意，由于 $C_c(G) * C_c(G)$ 在 $L^1(G)$ 中稠密， $\lambda\big(C_c(G) * C_c(G)\big)$ 在$VN(G)$ 中弱*-稠密。

引理 3.1。设 $K \subseteq G$ 是一个紧集。存在函数 $\psi \in A(G)$，使得对于所有 $s \in K$， $\psi(s) = \mu(K)$。

证明。证明过程请参见 [19, 命题 2.3.2.]。

□

本文主要结果的某些表述在群 G为 σ-紧集时更为简洁，这意味着 G 是可数个紧子集的并。下面这个众所周知的引理将这一性质与群 G可能具有的其他可数性性质联系起来。为求完整起见，我们给出证明。

引理 3.2. 设 G 是一个局部紧群。则有以下蕴含关系：

G 是第二可数的 $\implies G$ 是 σ-紧集 $\iff$ G 的 Haar测度是 σ-有限的。

此外，剩下的蕴含关系并不成立。也就是说，存在一个（σ-）紧群，它不是第二可数的。

证明. 若 G 是第二可数的，则根据定义，其拓扑有一个可数基。由于 G 是局部紧的，这个基可以选为由相对紧集组成O_k， $k \geq 1$。因此，

$$G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{O_k},$$

因此 G 是 σ-紧集。

接下来，我们证明，对于 Haar测度， μ的 σ-紧性与 σ-有限性等价。回忆 [8, 命题 2.4]指出， G 存在一个开、闭且 σ-紧的子群 G_0。因此，$G = \bigcup_{y\in Y} yG_0$ 对于某个代表左陪集的子集 $Y \subseteq G$ ，其并为不交并。我们声称， Y 可选为至多可数，当且仅当 G 是 σ-紧的；而这又当且仅当 Haar测度是 σ-有限的。事实上，若 Y 至多可数，由于对所有 $y \in Y$， yG_0 都是 σ-紧的，故 G 是 σ-紧的。若 G 是 σ-紧的，设$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ 且K_n紧，则对任意 $n \in \mathbb{N}$， $\mu(K_n) < \infty$ ，因此 G 是 σ-有限的。最后，设 G 是 σ-有限的，设$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ 且对任意 $n \in \mathbb{N}$都有 $\mu(H_n) < \infty$ 。根据 [8, 命题 2.22], ， $\mu(H_n)$有限这一事实意味着 $Y_n := \{y \in Y : H_n \cap yG_0 \neq \emptyset\}$ 至多可数。因此， $Y' := \{y \in Y : G \cap yG_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(H_n \cap yG_0) \neq \emptyset\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ 也至多可数。但显然， $Y' = Y$。

最后，对于最后一个陈述，只需取紧的非第一可数群$G = \mathbb{T}^{\mathbb{R}}$。□

下文中我们使用空间 $L^\infty(G)$。其定义需要谨慎处理。当 G 是σ-紧集时， $L^\infty(G)$ 按通常方式定义。但当 G 不是 σ-紧集时，根据上述引理 3.2，左 Haar 测度 μ 不是 σ-有限的。在这种情况下，若按通常方式定义 $L^\infty(G)$，则 $L^1(G)$ 与 $L^\infty(G)$ 之间的对偶性可能会失效。正如 [8, 第 2 节3], 所解释的，可以通过如下修改 $L^\infty(G)$ 的定义来挽救这种对偶性。若对每个 Borel集 F， $E \cap F$ 都是 Borel集，则称集合 $E \subseteq G$ 为局部Borel集。若对于每个 Borel集 F，只要 $\mu(F) < \infty$，就有 $\mu(E \cap F) = 0$ ，则称局部Borel集为局部零测集。若对每个 Borel集 $A \subseteq \mathbb{C}$， $f^{-1}(A)$ 都是局部 Borel集，则称函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ 为局部可测函数。若某个性质除在一个局部零测集上之外处处成立，则称该性质几乎处处局部成立。

有了这些定义，令 $L^\infty(G)$ 表示所有局部可测函数 ϕ 的空间： $G \to \mathbb{C}$ 这些函数除局部零测集外均有界，并且模去局部几乎处处为零的函数。于是 $L^\infty(G)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为

$$\|\phi\|_\infty = \inf\big\{c : |\phi(t)| \leq c \text{ locally almost everywhere}\big\}.$$

注意，对于任意 $1 \le p < \infty$，任意 $f \in L^p(G)$ 都有一个 σ-有限支集，因此对于所有 $\phi \in L^\infty(G)$，ϕf 是 $L^p(G)$ 中定义良好的元素。

因此，可以为所有 $\phi \in L^\infty(G)$ 和所有 $f \in L^1(G)$ 定义 $\int_G \phi f$，而此对偶配对给出等距同一对应 $L^\infty(G) \simeq L^1(G)^*$。当 G 是 σ-紧集时，按上述方式定义的 $L^\infty(G)$ 与通常定义相同。

定义 3.3。对于任意 $\phi \in L^\infty(G)$，令 $M_\phi\colon \lambda(C_c(G) * C_c(G)) \to VN(G)$ 定义如下：

$$M_\phi(\lambda(f)) := \lambda(\phi f), \qquad f \in C_c(G) * C_c(G).$$

对于任意 $1 \le p < \infty$，若上述映射可延拓为一个有界算子（仍记为）$M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$，则称 M_ϕ 是 $L^p(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子。下文将此简写为“$M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是一个有界傅里叶乘子”。

同样，如果 $p=\infty$，我们称 M_ϕ 是 $VN(G)$ 上的有界傅里叶乘子，若上述映射可延拓为一个有界的弱*-连续算子 $M_\phi\colon VN(G) \to VN(G)$。

设 $1 \le p < \infty$。我们回顾一下 [3,第 6.1] 节中的结论：如果 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是一个有界傅里叶乘子，那么 $M_\phi\colon L^{p'}(VN(G)) \to L^{p'}(VN(G))$ 也是一个有界傅里叶乘子，其中 p' 是 p 的共轭指标。此外，$M_{\check{\phi}}\colon L^{p'}(VN(G)) \to L^{p'}(VN(G))$ 是一个有界傅里叶乘子，而且该算子实际上是 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 的伴随算子。

由 (3.2) 可知，对于任意 $\phi \in L^\infty(G)$，$M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 是一个有界傅里叶乘子，其中

$$\|M_\phi\colon L^2(VN(G)) \longrightarrow L^2(VN(G))\| = \|\phi\|_{L^\infty(G)}. \tag{3.4}$$

事实上，像之前一样，记 $U_\lambda\colon L^2(G) \to L^2(VN(G))$ 为酉映射，它将任意 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ 映到 $\lambda(f)$，见 (3.2)。令 $\pi\colon L^\infty(G) \to B(L^2(G))$ 定义为 $[\pi(\phi)](f) = \phi f$，对所有 $\phi \in L^\infty(G)$ 及所有 $f \in L^2(G)$ 均成立。则 π 是等距映射。由于对于任意 $\phi \in L^\infty(G)$，$U_\lambda \pi(\phi) U_\lambda^*$ 在 $C_c(G) * C_c(G)$ 上与 M_ϕ 重合，因此我们得到 M_ϕ 是 $L^2(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子，并且 $M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 与 $U_\lambda \pi(\phi) U_\lambda^*$ 重合。由于 $U_\lambda \pi(\,\cdot\,) U_\lambda^*$ 是等距映射，等式 (3.4) 得证。（另见 [3,引理 6.5]。）由上可知，傅里叶乘子 $M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 满足

$$M_\phi(U_\lambda(f)) = U_\lambda(\phi f), \qquad f \in L^2(G).$$

注记 3.4. 若 $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty(G)$ 满足 M_{ϕ_1} 和 M_{ϕ_2} 在 $\lambda(C_c(G) * C_c(G))$ 上重合，则由 (3.4) 可知，算子 $M_{\phi_1-\phi_2} = M_{\phi_1} - M_{\phi_2}\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 等于 0，因此 $\phi_1 = \phi_2$ 局部几乎处处成立。

在本节余下部分，我们固定一个网 $(f_i)_{i\in I}$，它属于 $C_c(G) * C_c(G)$，并满足：对于所有 $i \in I$，$f_i \ge 0$ 和 $\int_G f_i(s)\, ds = 1$，f_i 的支集均包含于 e 的某个紧邻域 V_i 中；网 $(V_i)_{i\in I}$ 是递减的，且 $\bigcap_{i\in I} V_i = \{e\}$。令 $e_i := \lambda(f_i)$。那么对所有 $i \in I$，有

$$e_i \in L^1(VN(G)) \cap VN(G) \qquad \text{and} \qquad \|e_i\|_{VN(G)} \le 1.$$

引理 3.5。我们在强算子拓扑中同时具有 $e_i \to 1$ 和 $e_i^* \to 1$。

Proof. 设 $\zeta \in L^2(G)$。由于每个 f_i 都是非负且经过 L^1 归一化的，我们有 e

$$\|e_i(\zeta) - \zeta\|_{L^2(G)} = \Big\| \int_G f_i(t)\,(\lambda(t)\zeta - \zeta)\; dt \Big\|_{L^2(G)} \leq \int_G f_i(t)\; \|\lambda(t)\zeta - \zeta\|_{L^2(G)}\, dt.$$

由于 $\lambda(t) \to 1$ 在强算子拓扑下收敛至 $t \to e$，关于 $(f_i)_{i\in I}$ 的假设保证当 $i \to \infty$ 时，右端趋于 0。因此，$\|e_i(\zeta) - \zeta\|_{L^2(G)} \to 0$。

这表明 $e_i \to 1$ 强收敛。由于 $e_i^* = \lambda(f_i^*)$ 与 f_i^* 具有和 f_i 相同的性质，我们也有 $e_i^* \to 1$ 强收敛。□

我们令 $C_b(G)$ 表示 G 上有界连续函数构成的空间。

下面的引理表明，本文所考虑的有界傅里叶乘子 $VN(G) \to VN(G)$ 的定义与文献 [6] 中的定义一致。

引理 3.6. 设 $\phi \in L^\infty(G)$，并假设 M_ϕ 是 $VN(G)$ 上的有界傅里叶乘子。则存在 $\psi \in C_b(G)$，使得 $\phi = \psi$ 局部几乎处处成立，并且

$$M_\psi(\lambda(s)) = \psi(s)\lambda(s), \qquad s \in G.$$

证明。假设 $M_\phi\colon VN(G) \to VN(G)$ 是一个有界傅里叶乘子。我们来证明，对于任意 $s \in G$，

$$M_\phi(\lambda(s)) \in \mathrm{Span}\{\lambda(s)\}. \tag{3.5}$$

固定 $s \in G$。对于所有 $i \in I$, $\lambda(s)e_i = \int_G f_i(t)\lambda(st)dt$，因此 $M_\phi(\lambda(s)e_i) = \int_G \phi(st) f_i(t)\lambda(st)\, dt$，其中这些积分是在强算子拓扑下定义的。因此，对于所有 $\varphi \in A(G)$，我们有

$$\begin{aligned}\langle M_\phi(\lambda(s)e_i), \varphi\rangle &= \int_G \phi(st) f_i(t) \langle \lambda(st), \varphi\rangle\, dt \\ &= \int_G \phi(st) f_i(t) \varphi(st)\, dt.\end{aligned}$$

取 $\varphi \in A(G)$，使得 $\varphi(s) = 0$。由上可得

$$|\langle M_\phi(\lambda(s)e_i), \varphi\rangle| \leq \|\phi\|_\infty \int_G f_i(t) |\varphi(st) - \varphi(s)|\, dt.$$

由于 φ连续，上述不等式右侧在 $i \to \infty$ 时趋于零。此外，由引理 3.5，$\lambda(s)e_i \to \lambda(s)$ 在强算子拓扑下成立。由于 $(e_i)_{i\in I}$ 有界，这意味着 $\lambda(s)e_i \to \lambda(s)$ 在弱*-拓扑下成立。因此，$M_\phi(\lambda(s)e_i) \to M_\phi(\lambda(s))$ 在弱*-拓扑下成立。于是，$\langle M_\phi(\lambda(s)e_i)\ \varphi\rangle \to \langle M_\phi(\lambda(s))\ \varphi\rangle$。我们得到$\langle M_\phi(\lambda(s))\ \varphi\rangle = 0$。因此，$M_\phi(\lambda(s)) \in \{\varphi\colon\ \varphi(s) = 0\}^\perp$ 在对偶性 $A(G)^* \simeq VN(G)$ 中成立。由于 $\mathrm{Span}\{\lambda(s)\}_\perp = \{\varphi\colon\ \varphi(s) = 0\}$，我们推出 (3.5)。

令 $\psi\colon\ G \to \mathbb{C}$ 为唯一满足如下条件的函数：对所有 $s \in G$, $M_\phi(\lambda(s)) = \psi(s)\lambda(s)$。$A(G) \to A(G)$ 的预伴随算子是由 ψ 给出的逐点乘法。根据 [6, 1.1. Definition]，后的注释，函数 ψ 因此是连续的。

接下来，我们证明 $\phi = \psi$ 局部几乎处处。对任意 $f \in C_c(G) * C_c(G)$，有$\lambda(f) = \int_G f(t)$ $\lambda(t)\ dt$。该强算子拓扑积分在 $VN(G)$ 中绝对收敛，因此

$$\begin{aligned} M_\phi(\lambda(f)) &= \int_G f(t) M_\phi(\lambda(t))\, dt \\ &= \int_G f(t)\psi(t)\lambda(t)\, dt \\ &= M_\psi(\lambda(f)). \end{aligned}$$

这意味着 $M_\phi = M_\psi$ 在 $C_c(G) * C_c(G)$上，结论由注3得出。 4.

关于证明 [6, 1.1. 定义], 所需的 G 正则性，请参阅 [19, 定理 2.3.8，第 53]页。另请参阅 [3,定义 6.3]之后的讨论。□

令 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{C}$的单位圆。称同态 $\varphi\colon\ G \to \mathbb{T}$ 为特征。用 $Hom(G, \mathbb{T})$表示 G上的所有特征的集合。 $Hom(G, \mathbb{T})$与 $Hom(\frac{G}{[G,G]}, \mathbb{T})$之间存在一个自然同构，其中 $[G, G]$ 表示G [13, 的换位子群(23.8) 定理，第 358 页-359]。当 G 是完美群时，即 $[G, G] = G$， G 上的唯一特征是平凡特征，也就是说， $Hom(G, \mathbb{T}) = \{1\}$。完美群的例子包括非阿贝尔单群以及特殊线性群 $SL_n(\mathbb{K})$，其中 $\mathbb{K}$是一个固定的域。

以下是本节的主要结果。根据此定理和上面的观察，我们可以看到，存在分离傅里叶乘子相对较少的群。

定理 3.7. 假设 G 是一个局部紧幺模 σ-紧群，设 $1 \leq p < \infty$，并设 $\phi \in L^\infty(G)$。以下条件等价。

(i) 映射 M_ϕ 是 $L^p(VN(G))$上的有界傅里叶乘子，且算子$M_\phi\colon\ L^p(VN(G)) \to L^p($ $VN(G))$是分离的。(ii) 存在一个常数 $c \in \mathbb{C}$ 和一个连续特征 $\psi\colon\ G \to \mathbb{T}$，使得 $\phi = c\psi$ 几乎处处成立。

证明将在一系列中间结果之后给出。

引理3.8. 设 $\mathcal{M}$为一个半有限冯诺依曼代数。设$(x_j)_j$是 $\mathcal{M} \cap L^2(\mathcal{M})$中的一个网，且sup $\|x_j\|_\infty < \infty$。若 $\|x_j\|_2 \to 0$，则 $x_j \to 0$ 在 $\mathcal{M}$的弱*-拓扑下成立。

证明。取 $y \in L^1(\mathcal{M}) \cap L^2(\mathcal{M})$。我们有

$$|\langle y, x_j\rangle| \leq \|y\|_2 \|x_j\|_2 \to 0,$$

因此 $\langle y, x_j\rangle \to 0$。由于 $L^1(\mathcal{M}) \cap L^2(\mathcal{M})$ 在 $L^1(\mathcal{M})$ 中稠密，且 $(x_j)_j$ 在 $\mathcal{M}$ 中有界，这意味着对于所有 $y \in L^1(\mathcal{M})$， $\langle y, x_j\rangle \to 0$。也就是说， $x_j \to 0$ 在 $\mathcal{M}$ 的弱 *-拓扑下。□

在下面的引理中， G 不一定是 σ-紧集。

引理 3.9。设 $\phi \in L^\infty(G)$。假设傅里叶乘子 $M_\phi\colon\ L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 是分离的且非零。

(1) 对任意紧集 $K \subseteq G$，限制 $\phi|_K$ 几乎处处在 K 上非零。(2) 算子 $M_\phi\colon\ L^2(VN(G))$ $\to L^2(VN(G))$ 的值域稠密。

(3) 对任意紧集 $K \subseteq G$，存在一个连续函数 $\Phi\colon K \to \mathbb{C}$，使得$\phi|_K = \Phi$ 在 K 上几乎处处成立。

证明。(1) 设 K 是 G 的紧子集。令 $N_K(\phi) := \{s \in K : \phi(s) = 0\}$。我们证明 $N_K(\phi)$ 是零测集。反设 $N_K(\phi)$ 有正测度。我们证明存在 $a_0 \in K$，使得对于 a_0 的任意开邻域 V，$\mu(N_K(\phi) \cap V) > 0$。反设对于任意 $a \in K$，都存在 a 的一个开邻域 V_a，使得 $\mu(N_K(\phi) \cap V_a) = 0$。由于 K 是紧集且 $\{V_a\}_{a\in K}$ 覆盖 K，因此存在一个有限子覆盖 $\{V_{a_j}\}_{j=1}^n$，它也覆盖 K。现在注意到

$$\mu(N_K(\phi)) = \mu(N_K(\phi) \cap (\cup_{j=1}^n V_{a_j})) = \mu(\cup_{j=1}^n (N_K(\phi) \cap V_{a_j})) \leq \sum_{j=1}^n \mu(N_K(\phi) \cap V_{a_j}) = 0,$$

这与 $\mu(N_K(\phi)) > 0$ 矛盾。

设 $(U_i)_{i\in I}$ 是 G 中 e（单位元）的一个邻域网，按包含关系定向，并满足 $\cap_{i\in I} U_i = \{e\}$。则对所有 $i \in I$，有 $\mu(a_0U_i \cap N_K(\phi)) > 0$，且我们可以定义

$$h_i := \frac{1}{\mu(a_0U_i \cap N_K(\phi))} \chi_{U_i}\chi_{N_K(\phi)}(a_0 \cdot).$$

对任意 $i \in I$，我们有 $h_i \geq 0$、$\int h_i = 1$，以及 $h_i \in L^1(G) \cap L^2(G)$。此外，$\mathrm{supp}(h_i) = U_i \cap a_0^{-1}N_K(\phi)$，因此，对所有$i \in I$，有$\bigcap_{i\in I} \mathrm{supp}(h_i) = \{e\}$，且 $\phi h_i(a_0^{-1} \cdot) = 0$。

设 (w, B, J) 是 M_ϕ 的 Yeadon 三元组：$L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$。对任意 $i \in I$，设 $\varepsilon_i := \lambda(h_i(a_0^{-1} \cdot))$。我们有 $\varepsilon_i \in L^2(VN(G)) \cap VN(G)$，且$\|\varepsilon_i\|_{VN(G)} \leq 1$。由命题 2.3(a)，$M_\phi(\varepsilon_i) = wBJ(\varepsilon_i)$。此外，$M_\phi(\varepsilon_i) = \lambda(\phi h_i(a_0^{-1}\cdot)) = \lambda(0) = 0$。因此，$wBJ(\varepsilon_i) = 0$。现在应用命题 2.3(b)。由于 $w^*w = s(B)$，我们有 $BJ(\varepsilon_i) = w^*wBJ(\varepsilon_i)$，故 $BJ(\varepsilon_i) = 0$。进一步，$0 \leq J(\varepsilon_i) \leq J(1) = s(B)$，故 $J(\varepsilon_i)$ 的取值属于 $\ker(B)^\perp$。于是，等式 $BJ(\varepsilon_i) = 0$ 意味着 $J(\varepsilon_i) = 0$，即 $\varepsilon_i \in \ker(J)$。由引理 2.2(1)，这意味着对任意 $g \in L^1(G)$ 和任意 $i \in I$，我们有 $\lambda(g)\varepsilon_i \in \ker(J)$。

现在，对于任意的 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$，令 $g = f(\cdot\, a_0)$。我们有

$$\lambda(g)\varepsilon_i = \lambda(g * h_i(a_0^{-1} \cdot)) = \lambda(g(\cdot\, a_0^{-1}) * h_i) = \lambda(f * h_i).$$

由于 $\|f * h_i - f\|_2 \to 0$，由 (3.2) 可得 $\|\lambda(f * h_i) - \lambda(f)\|_{L^2(VN(G))} \to 0$。注意，

$$\|\lambda(f * h_i)\|_\infty \leq \|f * h_i\|_1 \leq \|f\|_1\|h_i\|_1 = \|f\|_1.$$

因此，由引理3.8，$\lambda(f * h_i) \to \lambda(f)$，在 $VN(G)$ 的弱*-拓扑下。由于 $\ker(J)$ 是弱*-闭的，由引理 2.2(1)，我们得到 $\lambda(f)$ 属于 $\ker(J)$。最后，由于空间 $\{\lambda(f) : f \in L^1(G) \cap L^2(G)\}$ 在 $VN(G)$ 中弱*-稠密，我们推得 $\ker(J) = VN(G)$。因此 $M_\phi = 0$，这与假设矛盾。

(2) 任取 $F \in C_c(G) * C_c(G)$。该函数的支集是紧集，记为 $K \subseteq G$。对所有 $\delta > 0$，令 $N_\delta = \{s \in K : |\phi(s)| < \delta\}$。由 (1) 可知，$\phi \neq 0$ 在 K 上几乎处处成立，因此我们有 $\lim_{\delta\to 0} \mu(N_\delta) = 0$。任取 $\delta > 0$，令 $g_\delta := \phi^{-1}\chi_{N_\delta^c}F$。由于 $\phi^{-1}\chi_{N_\delta^c} \in L^\infty(G)$，我们有 $g_\delta \in L^1(G) \cap L^2(G)$。因此，$\lambda(g_\delta)$ 定义良好，$\lambda(g_\delta) \in L^2(VN(G)) \cap VN(G)$，并且

$$M_\phi(\lambda(g_\delta)) = \int \phi(t)g_\delta(t)\lambda(t)dt = \lambda(\chi_{N_\delta^c}F).$$

因此， $\lambda(F) - M_\phi(\lambda(g_\delta)) = \lambda(\chi_{N_\delta}F)$，并且我们有

$$\|\lambda(F) - M_\phi(\lambda(g_\delta))\|_2 = \|\lambda(\chi_{N_\delta}F)\|_2 = \|\chi_{N_\delta}F\|_2,$$

由 (3.2) 得。由于 $\mu(N_\delta) \to 0$，当 $\delta \to 0$ 时，这意味着 $\lim_{\delta\to 0}\|\lambda(F) - M_\phi(\lambda(g_\delta))\|_2 = 0$。因此， $\lambda(F) \in \overline{\text{ran}(M_\phi)}$。由 $\lambda(C_c(G) * C_c(G))$ 在 $L^2(VN(G))$ 中的稠密性可知，这意味着 M_ϕ 的值域在 $L^2(VN(G))$ 中稠密。

(3) 令 w^*M_ϕ 为一个算子，它将任意 $a \in L^2(VN(G))$ 映射到 $w^*M_\phi(a)$。根据[23, 注 4.2], w^*M_ϕ 是正的，也就是说，它将 $L^2(VN(G))^+$ 映射到自身。我们对 [3, 引理 6.10] 中的论证稍作修改。对于所有 $g \in C_c(G)$， $\lambda(g^**g) \in L^2(VN(G))^+$。因此， $w^*M_\phi(\lambda(g^* * g)) \in L^2(VN(G))^+$。于是，

$$(M_\phi(\lambda(g^* * g))\zeta|w(\zeta)) \geq 0,$$

对所有 $\zeta \in L^2(G)$，引理 $[3, 6.10]$ 的证明中的计算表明

$$(M_\phi(\lambda(g^* * g))\zeta|w(\zeta)) = \int_G\int_G \overline{g(t)}g(s)\phi(t^{-1}s)\left(\lambda(t^{-1}s)\zeta|w(\zeta)\right)\,dsdt.$$

这意味着，对于所有 $\zeta \in L^2(G)$，函数 $s \mapsto \phi(s)\,(\lambda(s)\zeta|w(\zeta))$ 按照定义 $[35, \text{VII.3.20}]$ 的意义是正定的。

由极化可知，这意味着对于所有 ζ、$\zeta' \in L^2(G)$， $s \mapsto \phi(s)\,(\lambda(s)\zeta|w(\zeta'))$ 是正定函数的线性组合。由第 (2) 部分和引理 2.4 可知， w 是一个酉元。因此，上述结果实际上表明，对于所有 ζ、$\eta \in L^2(G)$， $s \mapsto \phi(s)\,(\lambda(s)\zeta|\eta)$ 是正定函数的线性组合。根据 $A(G)$ 的定义，这意味着对于所有 $\psi \in A(G)$， $\phi\psi$ 是正定函数的线性组合。由推论 $[35, 3.22]$ 及其证明可知，这意味着对于所有 $\psi \in A(G)$， $\phi\psi$ 局部几乎处处等于一个连续函数。

设 $K \subseteq G$ 为一个紧集，且 $\mu(K) > 0$。根据引理 3.1，存在 $\psi \in A(G)$，使得$\psi|_K > 0$。现在，$(\phi\psi)|_K$ 几乎处处等于一个连续函数。因此， $\phi|_K$ 几乎处处等于一个连续函数。□

注 3.10。注意，若 G 是 σ-紧的，则上述引理意味着：如果 $\phi \in L^\infty(G)$ 满足 $M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 是分离的，那么 ϕ几乎处处等于一个连续函数。

在下一个陈述中，我们使用引理 3.5 之前定义的网 $(e_i)_{i\in I}$.

引理 3.11。设 $\phi \in C_b(G)$，并考虑傅里叶乘子 $M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$。在 $VN(G)$ 的强算子拓扑下，我们有以下收敛。

(1) 对所有 $s \in G$, $M_\phi(\lambda(s)e_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi(s)\lambda(s)$。
(2) 对所有 $s \in G$, $M_\phi(\lambda(s)e_i^2) \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi(s)\lambda(s)$。
(3) 对所有 $s \in G$, $M_\phi(e_i\lambda(s)e_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi(s)\lambda(s)$。

证明. (1) 根据引理 3.5，只需证明对于所有 $s \in G$, $M_\phi(\lambda(s)e_i) - \phi(s)\lambda(s)e_i$在 $VN(G)$ 中收敛到 0。利用关于 $(f_i)_{i\in I}$ 的假设，以及 ϕ 是连续的这一事实，

我们有

$$\begin{aligned}\big\|M_\phi(\lambda(s)e_i)-\phi(s)\lambda(s)e_i\big\|_\infty &= \Big\|\int_G (\phi(st)f_i(t)\lambda(st)-\phi(s)f_i(t)\lambda(st))\,dt\Big\|_\infty \\ &\le \int_G |\phi(st)-\phi(s)|f_i(t)\,dt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

这证明了该结果。

(2) 对所有 $i\in I$，我们有 $e_i^2=\lambda(f_i*f_i)$，$f_i*f_i\ge 0$，$\int_G (f_i*f_i)(s)\,d(s)=1$，且 $\mathrm{supp}(f_i*f_i)\subseteq \mathrm{supp}(f_i)\cdot\mathrm{supp}(f_i)$。因此，使用 f_i*f_i 代替 f_i，(2) 中的收敛可完全仿照 (1) 中的方法证明。

(3) 我们按照 (1) 中的方法论证。令 $s\in G$。由于 $e_i\to 1$ 在强算子拓扑下收敛，且 $(e_i)_{i\in I}$ 有界，$e_i\lambda(s)e_i\to\lambda(s)$ 在强算子拓扑下收敛。因此，我们只需证明 $M_\phi(e_i\lambda(s)e_i)-\phi(s)e_i\lambda(s)e_i$ 在 $VN(G)$ 中收敛到 0。我们有

$$\begin{aligned}&\big\|M_\phi(e_i\lambda(s)e_i)-\phi(s)e_i\lambda(s)e_i\big\|_\infty \\ &= \Big\|\int_G\int_G \phi(rst)f_i(r)f_i(t)\lambda(rst)\,drdt-\int_G\int_G \phi(s)f_i(r)f_i(t)\lambda(rst)\,drdt\Big\|_\infty \\ &\le \int_G\int_G |\phi(rst)-\phi(s)|f_i(r)f_i(t)drdt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

再次利用关于 $(f_i)_{i\in I}$ 的假设，以及 ϕ 是连续的这一事实。 □

定理 3.7 的证明。

$(ii)\Rightarrow(i)$: 不妨设 $c=1$，且 $\phi=\psi$，即 ϕ 是连续特征。任意特征都是正定的，并将 e 映射为 1。因此，根据 [6, 命题 4.2] 和[28, 命题 3.6]，M_ϕ 是 $VN(G)$ 上的有界傅里叶乘子，其中 $\|M_\phi\colon VN(G)\to VN(G)\|=\|M_\phi(1)\|_\infty=|\phi(e)|=1$。根据 [3, 引理 6.4 和引理 6.6]，$M_\phi$ 因此是 $L^p(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子，并且

$$\|M_\phi\colon L^p(VN(G))\longrightarrow L^p(VN(G))\|\le\|M_\phi\colon VN(G)\longrightarrow VN(G)\|.$$

因此，

$$\|M_\phi\colon L^p(VN(G))\longrightarrow L^p(VN(G))\|\le 1. \tag{3.6}$$

由于 ϕ^{-1} 也是连续特征，上述论证同样表明

$$\|M_{\phi^{-1}}\colon L^p(VN(G))\longrightarrow L^p(VN(G))\|\le 1. \tag{3.7}$$

对于任意 $f\in C_c(G)*C_c(G)$，我们有

$$M_{\phi^{-1}}M_\phi(\lambda(f))=M_{\phi^{-1}}(\lambda(\phi f))=\lambda(\phi^{-1}\phi f)=\lambda(f).$$

类似地，$M_\phi M_{\phi^{-1}}(\lambda(f))=\lambda(f)$。因此，$M_\phi$和 $M_{\phi^{-1}}$互为逆映射。由 (3.6) 和 (3.7) 可得，$M_\phi\colon L^p(VN(G))\to L^p(VN(G))$ 是一个等距映射。

如果 $p\neq 2$，由 [36]（另见 [22]）可知，$M_\phi\colon L^p(VN(G))\to L^p(VN(G))$ 是分离的。如果 $p=2$，任取 $1<q\neq 2<\infty$。上述推理表明，$M_\phi\colon L^q(VN(G))\to L^q(VN(G))$ 是分离的。应用引理 2.5，我们推得算子 $M_\phi\colon L^2(VN(G))\to L^2(VN(G))$ 是分离的。

$(i) \Rightarrow (ii)$: 我们假设 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是分离的。由引理 2.5，$M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 也具有分离性。令 (w, B, J) 为其 Yeadon 三元组。我们可以假设 M_ϕ 非零。于是由引理 3.9(2)，$M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 的值域稠密。因此，由引理 2.4 可知 w 是酉元，且 $J(1) = 1$。根据注 3.10，ϕ 几乎处处等于一个连续函数。用该函数替换 ϕ 后，我们现在可以假设 $\phi \in C_b(G)$。

对于任意 $s \in G$，由引理 3.11 和引理 2.1(1),

$$\begin{aligned}\phi(s)\left(\lambda(s)+\lambda(s)\right) &= \lim_{j\to\infty} M_\phi\left(e_j\lambda(s)e_j + \lambda(s)e_j^2\right)\\ &= \lim_{j\to\infty} wBJ\left(e_j\lambda(s)e_j + \lambda(s)e_j^2\right)\\ &= \lim_{j\to\infty} wB\big(J(e_j)J(\lambda(s)e_j) + J(\lambda(s)e_j)J(e_j)\big)\\ &= \lim_{j\to\infty} \big(M_\phi(e_j)J(\lambda(s)e_j) + M_\phi(\lambda(s)e_j)J(e_j)\big),\end{aligned}$$

其中极限是在强算子拓扑下取的。

由引理 3.5，$\lambda(s)e_j \to \lambda(s)$ 和 $(\lambda(s)e_j)^* \to \lambda(s)^*$ 强收敛。因此，由引理 2.2(2)，$J(\lambda(s)e_j) \to J(\lambda(s))$ 强收敛。由引理 3.11(1)，$M_\phi(e_j) \to \phi(e)$ 强收敛。由于 $(M_\phi(e_j))_{j\in I}$ 有界，我们可得 $M_\phi(e_j)J(\lambda(s)e_j) \to \phi(e)J(\lambda(s))$ 强收敛。同理，$M_\phi(\lambda(s)e_j)J(e_j) \to \phi(s)\lambda(s)J(1) = \phi(s)\lambda(s)$ 强收敛。因此，由前面的计算可知，$\phi(s)\left(\lambda(s)+\lambda(s)\right) = \phi(e)J(\lambda(s))+\phi(s)\lambda(s)$，即 $\phi(s)\lambda(s) = \phi(e)J(\lambda(s))$。

由于 ϕ 非零，这意味着 $\phi(e) \neq 0$。令 $\psi := \phi(e)^{-1}\phi$。由上文可得

$$J(\lambda(s)) = \psi(s)\lambda(s), \qquad s \in G. \tag{3.8}$$

现在证明 ψ 是一个特征。令 $s, t \in G$，并回忆 $\lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t)$。一方面，我们有 $J(\lambda(st)) = \psi(st)\lambda(st)$。另一方面，我们有$J(\lambda(s))J(\lambda(t)) = \psi(s)\psi(t)\lambda(st)$。

若 $st = ts$，则 $\lambda(s)\lambda(t) = \lambda(t)\lambda(s)$，故由引理 2.1(2)，可得 $J(\lambda(st)) =J(\lambda(s)\lambda(t)) = J(\lambda(s))J(\lambda(t))$。因此，$\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$。现在假设 $st \neq ts$。由引理 2.1(1)，我们有

$$J(\lambda(s)\lambda(t) + \lambda(t)\lambda(s)) = J(\lambda(s))J(\lambda(t)) + J(\lambda(t))J(\lambda(s)).$$

因此，

$$\psi(st)\lambda(st) + \psi(ts)\lambda(ts) = \psi(s)\psi(t)\lambda(st) + \psi(t)\psi(s)\lambda(ts).$$

由于 $\lambda(st)$ 和 $\lambda(ts)$ 线性无关，上述恒等式意味着 $\psi(st) =\psi(s)\psi(t)$。这证明了 ψ 是一个特征，因此，$\phi = \phi(e)\psi$ 是一个特征的数乘，正如所要求的。□

现在，让我们给出定理 3.7 的一个变体，适用于一般情形，即不假设 G 是 σ-紧集（另见注 3.16）。我们需要以下引理。

引理 3.12. 设 $h_1, h_2\colon G \to \mathbb{C}$ 是两个局部可测函数。当且仅当对于任意紧集 $K \subseteq G$，$h_1|_K = h_2|_K$几乎处处成立时，函数 h_1 和h_2 几乎处处局部相等。

证明. 只需证明：若 $E \subset G$ 是局部Borel，则 E 是局部零，当且仅当对于任意紧集 $K \subseteq G$，$E \cap K$ 的测度为 0。假设此性质成立。根据 [8,命题 2.4]，G 有一个开、闭且 σ-紧的子群 G_0。令 Y 为G 的一个子集，其中每个 G_0的左陪集恰有一个元素。对任意 $y \in Y$，设 E_y : $= E \cap yG_0$ 。由于 G_0 是 σ-紧集，yG_0 也是 σ-紧集。因此，对于所有 $y \in Y$，都有 $\mu(E_y)$ $= 0$。回想第 2.3] 节末尾所述，E 是局部零，当且仅当对于每个 $y \in Y$，都有$\mu(E_y) = 0$。因此，E 是局部零。□

推论 3.13. 设 G 为局部紧幺模。设 $1 \leq p < \infty$，并设 $\phi \in L^\infty(G)$。以下条件等价。

(i) 映射 M_ϕ 是 $L^p(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子，且算子M_ϕ: $L^p(VN(G)) \to L^p$ $(VN(G))$ 是分离的。(ii) 存在常数 $c_0 \in \mathbb{C}$ 和连续特征 ψ: $G \to \mathbb{T}$，使得$\phi = c_0\psi$ 局部几乎处处成立。

证明. 定理 3.7 中蕴含“$(ii) \Rightarrow (i)$”的证明适用于非 σ-紧情形，因此我们只需证明 (i) 蕴含 (ii)。

假设 M_ϕ: $L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是分离的。与定理 3.7 的证明一样，我们可以假设 $p = 2$，且 M_ϕ 非零。我们断言

$$\exists \varphi \in C_b(G) \text{ such that } \varphi = \phi, \text{ locally almost everywhere.} \tag{3.9}$$

为证明这一点，首先注意到，我们可以假设引理 3.5 之前定义的网 $(f_i)_{i\in I}$ 满足以下性质：存在单位元 e 的紧邻域 K_0，使得对所有 i，$\mathrm{supp}(f_i) \subseteq K_0$。令 $L \subseteq G$ 为紧集。令

$$K = K_0LK_0K_0 = \{strq : (s, t, r, q) \in K_0 \times L \times K_0 \times K_0\}.$$

这是一个紧集，因此由引理 3.9(3)，存在连续函数 Φ： $K \to \mathbb{C}$，使得 $\Phi = \phi|_K$ 几乎处处成立。引理 3.11 的证明表明，对所有 $s \in L$，我们有以下强算子拓扑下的收敛：

$$M_\phi(\lambda(s)\, e_i) \to \Phi(s)\lambda(s),\ M_\phi(\lambda(s)e_i^2) \to \Phi(s)\lambda(s), \quad \text{and} \quad M_\phi(e_i\lambda(s)e_i) \to \Phi(s)\lambda(s). \tag{3.10}$$

特别地，取 $L = \{e\}$，我们得到 $c_0 \in \mathbb{C}$ 的存在，使得

$$M_\phi(e_i) \to c_0,$$

在强算子拓扑下。

设 (w, B, J) 是 M_ϕ 的 Yeadon 三元组。定理 3.7 的证明中的论证以及收敛性质 (3.10) 表明，对于任意如上所述的 L, K, Φ，我们有

$$c_0J(\lambda(s)) = \Phi(s)\lambda(s), \quad \text{for all } s \in L. \tag{3.11}$$

由引理 3.9(1) 可知，这意味着 $c_0 \neq 0$。

由以上可知，对于所有 $s \in G$, J，($\lambda(s)$) 与 $\lambda(s)$ 成比例。因此，我们必然有唯一的

$$F\colon G \to \mathbb{C}; \quad J(\lambda(s)) = F(s)\lambda(s), \quad \text{for all } s \in G.$$

此外，对于上述任意的 L、K、Φ，我们有

$$F|_L = c_0^{-1}\Phi|_L.$$

这表明 F 是连续的。为证明这一点，固定 $s_0 \in G$，并应用上述结论，其中取 s_0 的一个紧邻域 L。接着，由 $\Phi\colon K \to \mathbb{C}$ 的连续性可知 $F|_L$ 连续，因此 F 在 s_0 处连续。

令 $\varphi := c_0 F$. 同样，对如上所述的 L, K, Φ，我们得到 $\varphi|_K = \phi|_K$ 几乎处处成立。由引理 3.9，这意味着 $\varphi = \phi$ 局部几乎处处成立。因此，(3.9) 得证。

由于 $M_\varphi = M_\phi$，定理 3.7 证明末尾的论证表明 $\psi := c_0^{-1}\varphi$ 是一个特征。□

注 3.14. 由定理 3.7 中蕴含关系“$(ii) \Rightarrow (i)$”的证明可知，对于任意连续特征 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$ 和任意 $1 \le p < \infty$，傅里叶乘子 $M_\psi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是满射等距映射。因此，由推论 3.13 可知，若 $\phi \in L^\infty(G) \setminus \{0\}$ 满足 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 有界且分离，则 $\|M_\phi\|^{-1} M_\phi$ 是满射等距映射。

推论 3.15。设 $1 \le p \ne 2 < \infty$ 且 $\phi \in L^\infty(G)$。以下条件等价。

(i) 映射 M_ϕ 是 $L^p(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子，且算子 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是等距映射。(ii) 存在 $\delta \in \mathbb{T}$，使得 $\delta\phi$ 在局部几乎处处等于一个连续特征。

证明。由定理 3.7 中蕴含“$(ii) \Rightarrow (i)$”的证明可知，对于任意连续特征 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$，$M_\psi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是等距映射。因此，(ii) 蕴含 (i)。反过来，设 (i) 成立。由于 $p \ne 2$，根据 [36]（另见 [22]），$L^p(VN(G))$ 上的任意等距映射都是分离的。因此，由推论 3.13，存在 $c \in \mathbb{C}$ 和一个连续特征 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$，使得 $\phi = c\psi$ 在局部几乎处处成立。于是 $M_\phi = cM_\psi$，从而 $\|M_\phi\| = |c|\|M_\psi\|$，进而 $|c| = 1$。取 $\delta = c^{-1}$，即可得到 (ii)。□

注意，推论 3.15 在 $p = 2$ 的情形下并不成立。事实上，令 $\phi \in L^\infty(G)$。由 (3.2) 后的讨论可知，$M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 是等距映射，当且仅当 $|\phi| = 1$ 局部几乎处处成立。然而，一般而言，这些等距傅里叶乘子中有许多并非分离的。关于这一点的更多内容，请参见第 4 节。

注 3.16. 若在 (ii) 中将“局部几乎处处”替换为“几乎处处”，则推论 3.13 可能不成立。事实上，如同在 [8, 第 2 节.3], 中，取 $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\text{disc}}$，其中第二个因子赋予离散拓扑。考虑 $Y = \{0\} \times \mathbb{R}_{\text{disc}}$，它是 G 的闭子集，因而是博雷尔集，并令 $\phi = \chi_Y$。对于任意紧集 $K \subseteq G$，由 [8, 命题 2.22] 可得 $\mu(K \cap Y) = 0$。因此 $\phi|_K = 0$ 几乎处处成立。根据引理 3.12，这意味着 $\phi = 0$ 局部几乎处处成立。于是 ϕ 满足推论 3.13 的条件，其中 $M_\phi = 0$。

然而，根据 [8, 命题 2.22]，$\{s \in G : \phi(s) \ne 0\} = Y$ 的 Haar测度是无限的，因此 ϕ 不几乎处处等于 0。因此，ϕ 不可能几乎处处等于某个常数与连续特征的乘积。

注3.17. 当 G 是离散的时，G 上的连续性是自动成立的，且两个局部几乎处处相等的函数必然相等。因此，在推论 3.13 的表述中，我们可以将部分 (ii) 替换为以下稍简单的表述：存在 $c \in \mathbb{C}$ 和一个特征 $\psi\colon G \to \mathbb{C}$，使得 $\phi = c\psi$。

注3.18. De Canni`ere 和 Haagerup [6] 在 $VN(G)$ 上定义了傅里叶乘子，其中包括 G 不是幺模的情形。令 $\phi \in C_b(G)$，并假设 ϕ 诱导一个傅里叶乘子 $M_\phi\colon VN(G) \to VN(G)$，其意义如 [6, 命题 1.2] 所述。假设 M_ϕ 是分离的。若 G 是幺模的，则根据 [22, 引理 3.9]，$M_\phi\colon L^2(VN(G)) \to L^2(VN(G))$ 是分离的。因此，根据推论 3.13，ϕ 是一个特征的倍数。

然而，对于一般的非幺模局部紧群，在 $VN(G)$ 上分离傅里叶乘子的刻画仍是一个开放问题。

注3.19. 设 Γ 是一个局部紧阿贝尔群。设 $G = \Gamma$ 是其对偶群，并回顾 $L^\infty(\Gamma) = VN(G)$。令 $1 \le p < \infty$。对于任意 $u \in \Gamma$，令 $\tau_u\colon L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ 为平移算子，其定义为 $\tau_u(f) = f(\cdot - u)$，对所有 $f \in L^p(\Gamma)$ 均成立。注意，若将$u \in \Gamma$ 视为一个特征 $u\colon G \to \mathbb{T}$，则相应的傅里叶乘子 $M_u\colon L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ 与 τ_u 相同。

设 $T\colon L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ 是一个有界算子。那么，T 与平移算子可交换，也就是说，对于所有 $u \in \Gamma$，均有 $T \circ \tau_u = \tau_u \circ T$，当且仅当 T是一个傅里叶乘子（例如参见 [21, 第4]章）。因此，推论 3.15 得出以下结论：

(*) 若 $p \neq 2$，等距映射 $T\colon L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ 与平移可交换，当且仅当存在 $c \in \mathbb{T}$ 和 $u \in \Gamma$ 使得 $T = c\tau_u$。

这一结论是 Parrott [27] 和 Strichartz [33]提出的经典结果，而推论 3.15 应被视为对后者的推广。

我们注意到，论文 [27, 33] 在 Γ 不一定是阿贝尔群的情形下证明了（$*$）。若 Γ是非阿贝尔群，则结论（$*$）与推论 3.15 无关。

4. Completely positive and completely isometric Fourier multipliers

本节将补充第3节中关于分离的和等距的 L^p-傅里叶乘子的刻画，并提供更多信息。在本节中，我们始终假设G是一个幺模局部紧群。

设 $\mathcal{M}$ 是一个配备正规半有限忠实迹 τ的半有限冯诺依曼代数。对于任意 $n \ge 1$，我们在 $M_n(\mathcal{M})$ 上赋予迹 $\mathrm{tr}_n \otimes \tau$，其中 tr_n是 M_n上的通常迹。对于任意 $1 \le p \le \infty$，由此得到的非交换 L^p-空间 $L^p(M_n(\mathcal{M}))$ 在代数层面上可自然地识别为所有 $n \times n$ 矩阵 $[x_{ij}]_{1 \le i,\ j \le n}$ 其元素x_{ij} 属于 $L^p(\mathcal{M})$的空间。

设 $T\colon L^p(\mathcal{M}) \to L^p(\mathcal{M})$ 是一个有界算子。对于任意 $n \ge 1$，定义 $T_n\colon L^p(M_n(\mathcal{M})) \to L^p(M_n(\mathcal{M}))$ 为 $T_n\big([x_{ij}]\big) = [T(x_{ij})]$,对所有$[x_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$属于 $L^p(M_n(\mathcal{M}))$。按照惯常术语，如果对所有 $n \ge 1$，T_n 都是正的，我们就称 T 完全正。同样，如果对所有 $n \ge 1$，$\|T_n\| \le 1$ 都成立，则称 T 为完全压缩；如果对所有 $n \ge 1$，T_n 都是等距映射，则称 T 为完全等距。

设 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$ 是一个连续特征。则 ψ 是正定的，因此由 [6, 命题 4.2],，傅里叶乘子 $M_\phi\colon VN(G) \to VN(G)$ 是完全正的。定理 3.7 中蕴含关系 “$(ii) \Rightarrow (i)$” 的证明实际上表明，对所有 $1 \le p < \infty$，$M_\psi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 都是完全压缩；进而，对所有 $1 \le p < \infty$，$M_\psi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 都是完全等距映射。因此，作为推论 3.13 的结果，我们得到注 3.14 的以下补充。

推论 4.1. 设 $1 \leq p < \infty$，并设 $\phi \in L^\infty(G) \setminus \{0\}$。假设 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是有界且分离的。那么 $\|M_\phi\|^{-1} M_\phi$ 是完全等距映射。

注 4.2. 设 $1 \leq p < \infty$ 且令 $\phi \in L^\infty(G) \setminus \{0\}$ 满足 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 有界且分离。令 (w, B, J) 为后一个算子的 Yeadon 三元组。根据推论 4.1 和 [15,定理 3.2]，J 是一个 $*$-同态。

我们可以将这一陈述更精确地表述如下。应用推论 3.13，设 $c \in \mathbb{C}$ 令 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$ 为满足 $\phi = c\psi$ 局部几乎处处成立的连续特征。于是$J\colon VN(G) \to VN(G)$ 是与 ψ、$c = \|M_\phi\|$、$B = |c| \cdot 1$ 和 $w = c|c|^{-1} \cdot 1$ 相关联的 L^∞-傅里叶乘子。简单的验证留给读者。

引理 4.3. 设 $1 \leq p < \infty$，并设 $\phi \in L^\infty(G)$。若 M_ϕ 是 $L^p(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子，且 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是等距映射，则 $|\phi| = 1$ 局部几乎处处成立。

证明. $p = 2$ 的情形可由注 3.16 前面的段落得到。设 $1 \leq p \neq 2 < \infty$。由推论 3.13，存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 和连续特征 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$，使得 $\phi = c\psi$ 局部几乎处处成立。我们在推论 4.1 前已经注意到，M_ψ 是完全等距的。由于 $cM_\psi = M_\phi$ 也是等距映射，因此必有 $|c| = 1$。所以，$|\phi| = |c\psi| = |\psi| = 1$ 局部几乎处处成立。□

下面给出引理 4.3 的一个部分逆命题。

命题 4.4. 设 $\phi \in L^\infty(G)$ 满足 $|\phi| = 1$ 局部几乎处处，设 $1 \leq p < \infty$，并假设 $M_\phi\colon L^p(VN(G)) \to L^p(VN(G))$ 是有界傅里叶乘子。若 M_ϕ是完全正的，则 ϕ 局部几乎处处与一个连续特征$\psi\colon G \to \mathbb{T}$重合。

证明. 由于 M_ϕ 是完全正的，根据 [3, 命题 6.11]，可知 ϕ 局部几乎处处等于一个连续正定函数。因此，我们可以假设 ϕ是连续的（且正定）。根据 [35, 命题 VII.3.21], ，存在一个酉表示 $\pi\colon G \to B(H)$，它作用在希尔伯特空间 H 上，并且存在一个向量 $\xi \in H$ 使得

$$\phi(s) = \langle \pi(s)\xi, \xi \rangle, \qquad s \in G. \tag{4.1}$$

由于 $|\phi| = 1$，我们有 $\phi(e) = 1$。因此，由 (4.1) 可得 $1 = \phi(e) = \langle \pi(e)\xi, \xi \rangle = \|\xi\|_H^2$。给定 $s \in G$，应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$1 = |\phi(s)| = |\langle \pi(s)\xi, \xi \rangle| \leq \|\pi(s)\xi\|_H \|\xi\|_H = \|\xi\|_H^2 = 1.$$

根据柯西-施瓦茨不等式的等号成立条件，存在 $\psi(s) \in \mathbb{C}$使得 $\pi(s)\xi = \psi(s)\xi$。

现在，对于任意 $s, t \in G$，一方面

$$\pi(st)\xi = \psi(st)\xi,$$

另一方面，

$$\pi(s)\pi(t)\xi = \pi(s)\psi(t)\xi = \psi(s)\psi(t)\xi.$$

因此，$\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$。最后，$\phi(s) = \langle \pi(s)\xi, \xi \rangle = \psi(s)\|\xi\|_H^2 = \psi(s)$ 对所有 $s \in G$ 均成立。因此，$\phi = \psi$ 是一个特征。□

当假设 $p = 1$ 和 G 是可和的时，我们可以将命题 4.4 中的完全正性假设改为仅要求压缩性。

命题 4.5. 设 G 是一个可和单模局部紧群。设 $\phi \in L^\infty(G)$，并假设 $M_\phi\colon L^1(VN(G)) \to L^1(VN(G))$ 是一个压缩傅里叶乘子。以下条件等价。

(i) M_ϕ 是等距映射。(ii) $|\phi| = 1$ 几乎处处局部成立。(iii) 存在 $c \in \mathbb{T}$ 和一个连续特征 $\psi\colon G \to \mathbb{T}$，使得 $\phi = c\psi$ 几乎处处局部成立。

证明. 蕴含关系“$(i) \Rightarrow (ii)$”已在引理 4.3 中证明。蕴含关系“$(iii) \Rightarrow (i)$”此前已多次讨论（例如，见注 3.14）。现在我们证明“$(ii) \Rightarrow (iii)$”。由于 M_ϕ 是 $L^1(VN(G))$ 上的有界傅里叶乘子，根据引理 3.6，我们可以假设 ϕ 连续。此外，由于 G 是可和的，$VN(G)$ 上傅里叶乘子的符号与 G 的傅里叶-斯蒂尔切斯代数一致。这个经典结果在 [6, 第 456], 页提及，另见 [12, 定理 1]。因此，根据 [7, 引理 2.14], ，存在一个酉表示 $\pi\colon G \to B(H)$，作用在希尔伯特空间 H 上，以及向量 ξ、η 属于 H，使得

$$\phi(s) = \langle \pi(s)\xi, \eta\rangle, \quad s \in G, \qquad \text{and} \qquad \|\xi\|_H = \|\eta\|_H = 1.$$

假设 (ii)。将 ϕ 乘以 $\overline{\phi(e)}$，不妨设 $\phi(e) = 1$。这意味着$1 = \langle \pi(e)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$。由于 $\|\xi\|_H = \|\eta\|_H = 1$，我们推得 $\eta = \xi$。因此，ϕ 满足 (4.1)。所以，命题 4.4 的证明表明 ϕ 是一个特征。□

5. A characterization of separating Schur multipliers

设 (Ω, Σ, μ) 是一个 σ-有限测度空间。对于任意 $f \in L^2(\Omega^2)$，令 $S_f\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 为如下定义的有界算子

$$[S_f(h)](s) = \int_\Omega f(s,t)h(t)\,dt, \qquad h \in L^2(\Omega).$$

我们回顾一下，$S_f \in S^2(L^2(\Omega))$，并且映射 $f \mapsto S_f$ 是从$L^2(\Omega^2)$ 到 $S^2(L^2(\Omega))$ 上的酉算子，参见例如 [30, 定理 VI. 23]。

设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$。根据上述识别 $L^2(\Omega^2) \simeq S^2(L^2(\Omega))$，可以定义一个有界算子 $T_\phi\colon S^2(L^2(\Omega)) \to S^2(L^2(\Omega))$，使得

$$T_\phi(S_f) = S_{\phi f}, \qquad f \in L^2(\Omega^2). \tag{5.1}$$

此外，该算子的范数等于 $\|\phi\|_\infty$。算子 T_ϕ 称为舒尔乘子。

设 $1 \le p < \infty$。如果将 T_ϕ 在 $S^p(L^2(\Omega))$ 上的限制 $\cap S^2(L^2(\Omega))$ 延拓为从 $S^p(L^2(\Omega))$ 到其自身的有界算子，我们就称 T_ϕ 是 Schatten 空间$S^p(L^2(\Omega))$ 上的有界Schur乘子。本节所定义的舒尔乘子至少可追溯至 Haagerup [10] 和 Spronk [31]。

对于任意 $\alpha \in L^\infty(\Omega)$，我们将 $\mathrm{Mult}_\alpha \in B(L^2(\Omega))$ 定义为乘法算子，它将 h 映射到αh，对所有 $h \in L^2(\Omega)$ 均如此。然后我们令

$$\mathcal{D}(\Omega) = \big\{\mathrm{Mult}_\alpha : \alpha \in L^\infty(\Omega)\big\}.$$

这是 $B(L^2(\Omega))$ 的冯·诺依曼子代数，它（作为冯·诺依曼代数）同构于 $L^\infty(\Omega)$。我们将用到以下经典事实：

$$\mathcal{D}(\Omega)' = \mathcal{D}(\Omega), \tag{5.2}$$

其中，$\mathcal{D}(\Omega)'$ 表示 $\mathcal{D}(\Omega)$的交换子。换言之，有界算子V：$L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$属于 $\mathcal{D}(\Omega)$，当且仅当对所有 $\alpha \in L^\infty(\Omega)$，都有 $V \circ \mathrm{Mult}_\alpha = \mathrm{Mult}_\alpha \circ V$。

注意，对于任意 $\alpha \in L^\infty(\Omega)$，映射 $x \mapsto \mathrm{Mult}_\alpha \circ x$ 是一个舒尔乘子。事实上，它与 T_ϕ 一致，其中符号 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$由 $\phi(s,t) = \alpha(s)$给出。同样，对于任意 $\beta \in L^\infty(\Omega)$，映射 $x \mapsto x \circ \mathrm{Mult}_\beta$ 是一个舒尔乘子，其符号 ϕ 由$\phi(s,t) = \beta(t)$给出。

定理 5.1. 设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$，并设 $1 \le p < \infty$。以下各项等价 .

(i) 映射 T_ϕ 是 $S^p(L^2(\Omega))$上的有界Schur乘子，且由此得到的算子 T_ϕ：$S^p(L^2(\Omega)) \to S^pL^2(L^2(\Omega))$是分离的。(ii) 存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 和两个酉元 $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$，使得

$$\phi(s,t) = c\,\alpha(s)\beta(t) \qquad \textit{for almost every } (s,t) \in \Omega^2.$$

(iii) 存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 和两个酉元 $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$，使得

$$T_\phi(x) = c\,\mathrm{Mult}_\alpha \circ x \circ \mathrm{Mult}_\beta, \qquad x \in S^2(L^2(\Omega)). \tag{5.3}$$

证明。

$(ii) \Rightarrow (iii)$: 令 c, α, β如(ii)中所述，并令 $x \in S^2(L^2(\Omega))$。取 $f \in L^2(\Omega^2)$使得 $x = S_f$。那么对所有 $h \in L^2(\Omega)$，有

$$[x \circ \mathrm{Mult}_\beta(h)](s) = \int_\Omega f(s,t)\beta(t)h(t)\,d\mu(t),$$

因此

$$\begin{aligned}[c\,\mathrm{Mult}_\alpha \circ x \circ \mathrm{Mult}_\beta(h)](s) &= c\alpha(s)\int_\Omega f(s,t)\beta(t)h(t)\,d\mu(t)\\ &= \int_\Omega \phi(s,t)f(s,t)h(t)\,d\mu(t),\end{aligned}$$

对几乎处处的 $s \in \Omega$成立。这说明了(5.3)。

$(iii) \Rightarrow (i)$: 假设对于某些酉元 $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$，(5.3) 成立。显然，$T_\phi$ 可延拓为作用于 $S^p(L^2(\Omega))$ 上的有界算子，并且恒等式 (5.3) 在 $S^p(L^2(\Omega))$ 上成立。

设 $x, y \in S^p(L^2(\Omega))$ 满足 $x^*y = xy^* = 0$。那么

$$\big(\mathrm{Mult}_\alpha \circ x \circ \mathrm{Mult}_\beta\big)^*\big(\mathrm{Mult}_\alpha \circ y \circ \mathrm{Mult}_\beta\big) = \mathrm{Mult}_\beta^* \circ x^* \circ \mathrm{Mult}_\alpha^* \mathrm{Mult}_\alpha \circ y \circ \mathrm{Mult}_\beta$$

由于 α 是 $L^\infty(\Omega)$ 中的一个酉元，算子 Mult_α 是 $B(L^2(\Omega))$ 中的一个酉元，因此上述等式右端等于 $\mathrm{Mult}_\beta^* \circ x^*y \circ \mathrm{Mult}_\beta$，进而等于 0。因此$T_\phi(x)^*T_\phi(y) = 0$。同理，$T_\phi(x)T_\phi(y)^* = 0$。这表明 T_ϕ：$S^p(L^2(\Omega)) \to S^p(L^2(\Omega))$ 是分离的。

$(i) \Rightarrow (ii)$: 为方便起见，在整个证明中我们令 $H = L^2(\Omega)$。由引理 2.5，我们可以假设 $p = 2$。我们用 (w, B, J) 表示分离映射 T_ϕ：$S^2(H) \to S^2(H)$ 的 Yeadon 三元组。

我们可以假设 T_ϕ 非零。由于 $B(H)$ 是一个因子，由引理 4.3] 可知 T_ϕ 是一一映射。根据 T_ϕ 的定义（见 (5.1)），这意味着 $\phi \neq 0$ 几乎处处成立。再次应用该定义，可得 T_ϕ 的值域稠密。由引理 2.4，我们推得 w 是一个酉元，且 $J(1) = 1$。

令 w^*T_ϕ 表示作用于 $S^2(H)$ 的算子，它将任意 $x \in S^2(H)$ 映为 $w^*T_\phi(x)$。根据 [32, 定理 3.3] （另见 [11, 推论 7.4.9.]），存在一个投影 $q \in B(H)$，使得 $x \mapsto qJ(x)$ 是一个 $*$-同态，而 $x \mapsto (1-q)J(x)$ 是一个反-$*$-同态。正如 [23,注 4.3], 中所解释的，这意味着 w^*T_ϕ 取值于

$$L^2\big(qB(H)q\big) \overset{2}{\oplus} L^2\big((1-q)B(H)(1-q)\big) \subset S^2(H).$$

由于 T_ϕ 的值域稠密，且 w 是一个酉元，因此 w^*T_ϕ 的值域也稠密。这迫使 q 等于 0 或 1。因此， $J\colon B(H) \to B(H)$ 或是一个 $*$-同态，或是一个反-$*$-同态。

首先假设 J 是一个 $*$-同态。回顾一下， J 是正规算子。根据正规 $*$-同态的描述（例如参见 [34, 定理 IV.5.5]），存在一个希尔伯特$_2$空间 E 以及一个酉元 $u\colon\ H \to H \otimes E$，使得

$$J(a) = u^*(a \otimes I_E)u, \qquad a \in B(H).$$

2</style}这里 H $\otimes E$ 表示 H 与 E 的希尔伯特张量积，我们以通常方式将其视为

$$B(H) \otimes B(E) \subset B\big(H \overset{2}{\otimes} E\big)$$

。对于所有 $x \in S^2$（H），我们有 T_ϕ（x） $= wBJ$（x），因此 w^*T_ϕ（x） $= BJ$（x）。这意味着

$$u(w^*T_\phi(x))u^* = uBu^*(x \otimes I_E), \qquad x \in S^2(H). \tag{5.4}$$

由于 B 与 J的值域可交换，算子 uBu^* 对所有$x \in S^2$（H）都与 $x \otimes I_E$ 可交换。因此，$uBu^* = I_H \otimes c$，其中 c 是作用于 E上的某个正算子。于是由（5.4）可得 $c \in S^2$（E），并且

$$w^*T_\phi(x) = u^*(x \otimes c)u, \qquad x \in S^2(H).$$

现在回忆一下， w^*T_ϕ 具有稠密值域。因此，上述恒等式意味着 $E = \mathbb{C}$。于是， $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, u 是 $B(H)$ 和 $w^*T_\phi(x)$之间的酉元 $= c\,u^*xu$，对所有 $x \in S^2(H)$均成立。令$v = wu^*$。这是 $B(H)$上的一个酉元，我们得到

$$T_\phi(x) = c\,vxu, \qquad x \in S^2(H).$$

令 $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ 表示 H上的内积。对于任意 $g, h \in H$，令$g \otimes \overline{h} \in B(H)$表示秩一算子，它将任意 $\xi \in H$ 映射为 $(\xi|h)\,g$。那么 $v(g \otimes \overline{h})u = v(g) \otimes u^*(h)$。

Schur 乘子彼此可交换，因此对于任意 $\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$，我们有 e

$$T_\phi\big(\delta x\big) = \delta T_\phi(x), \qquad x \in S^2(H).$$

因此，对所有 $\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$ 和所有 $x \in S^2(H)$， $v\delta xu = \delta vxu$ 都成立。应用这一结果于 $x = g \otimes \overline{h}$，并利用恒等式 $\delta(g \otimes \overline{h}) = \delta(g) \otimes \overline{h}$ 和 $v(g \otimes \overline{h}) = v(g) \otimes \overline{h}$，我们推得

$v(\delta(g)\otimes\overline{h})u=\delta(v(g)\otimes\overline{h})u$，因此

$$v\delta(g)\otimes\overline{u^*(h)}=\delta v(g)\otimes\overline{u^*(h)},\qquad g,h\in H,\ \delta\in\mathcal{D}(\Omega).$$

由于 $u^*\neq 0$，这意味着对于所有 $\delta\in\mathcal{D}(\Omega)$，$v\delta=\delta v$。因此，$v$ 与 $\mathcal{D}(\Omega)$ 可交换。根据 (5.2)，这意味着 $v\in\mathcal{D}(\Omega)$。因此，存在一个酉元 $\alpha\in L^\infty(\Omega)$，使得 $v=\mathrm{Mult}_\alpha$。同样，存在一个酉元 $\beta\in L^\infty(\Omega)$，使得 $u=\mathrm{Mult}_\beta$。由此得到恒等式 (5.3)，(ii) 随即成立。

现在假设 f 是反 $*$-同态。对于任意的 $\widetilde{f}\in L^2(\Omega^2)$，令 $x=S_f$，令 ${}^tx=S_{\widetilde{f}}$。显然，$x\mapsto {}^tx$ 在 $S^2(L^2(\Omega))$ 上的映射可延拓为一个正规反 $*$-同态

$$\rho\colon B(H)\longrightarrow B(H).$$

这个映射是矩阵上的转置映射的类似物。显然，复合映射 $J\circ\rho\colon B(H)\to B(H)$ 是一个正规 $*$-同态。现在按照
$*$-同态的情形进行论证，我们可得存在常数 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 以及两个酉元$\alpha,\beta\in L^\infty(\Omega)$，使得

$$T_\phi(x)=c\,\mathrm{Mult}_\alpha\circ{}^tx\circ\mathrm{Mult}_\beta,\qquad x\in S^2(L^2(\Omega)).$$

由于 α,β 是酉元，Mult_α 和 Mult_β 也是酉元，因此我们有 $\mathrm{Mult}_\alpha^{-1}=\mathrm{Mult}_{\overline{\alpha}}$以及 $\mathrm{Mult}_\beta^{-1}=\mathrm{Mult}_{\overline{\beta}}$。令 ${}^tx=c^{-1}\mathrm{Mult}_{\overline{\alpha}}\circ T_\phi(x)\circ\mathrm{Mult}_{\overline{\beta}}$，由此可推得 $x\mapsto {}^tx$是一个舒尔乘子。

我们来证明，除非 $L^2(\Omega)$ 的维数为 1，否则这是不可能的。若 $x\mapsto {}^tx$ 是一个舒尔乘子，则存在 $\phi_0\in L^\infty(\Omega^2)$，使得

$$\phi_0(s,t)g(s)h(t)=h(s)g(t)\qquad a.e.\text{-}(s,t)\in\Omega^2,\tag{5.5}$$

对所有 $g,h\in L^2(\Omega)$。若 $L^2(\Omega)$ 的维数为 ≥ 2，则存在 $F_1,F_2\in\Sigma$，使得$0<\mu(F_1)<\infty$, $0<\mu(F_2)<\infty$ 且 $F_1\cap F_2=\emptyset$。示性函数 $g=\chi_{F_1}$ 和$h=\chi_{F_2}$ 属于 $L^2(\Omega)$。将 (5.5) 应用于这些函数，可得，对于几乎处处的 $(s,t)\in F_2\times F_1$，有 $h(s)g(t)=0$。由于对于 $(s,t)\in F_2\times F_1$，有 $h(s)g(t)=1$，并且

$$(\mu\otimes\mu)(F_2\times F_1)=\mu(F_2)\mu(F_1)>0,$$

我们得出矛盾。

现在，若处于平凡情形，即 $L^2(\Omega)$ 的维数为 1，则 (ii) 成立。 □

注 5.2. 设 $\phi\in L^\infty(\Omega^2)$，令 $1\leq p\neq 2<\infty$，并假设 T_ϕ 是 $S^p(L^2(\Omega))$ 上的有界Schur乘子。由定理 5.1 和 [36] 可知，若 T 是等距映射，则存在两个酉元 $\alpha,\beta\in L^\infty(\Omega)$，使得对于几乎处处的 $(s,t)\in\Omega^2$，有 $\phi(s,t)=\alpha(s)\beta(t)$。显然，反过来结论也成立。对于离散情形（见下一个注记），这一点已在 [1]中得到证明。

注 5.3. 设 I为一个指标集，且 $(e_i)_{i\in I}$为 ℓ_I^2的标准基。任意 $x\in B(\ell_I^2)$ 都可以表示为一个矩阵 $[x_{ij}]_{i,\ j\in I}$定义为：对所有 $i,j\in I$，$x_{ij}=(x(e_j)|e_i)$。当然，任意有限支撑矩阵 $[x_{ij}]_{i,\ j\in I}$ 都表示 $B(H)$ 中的一个元素（实际上是一个秩一有限秩算子），我们用 $\|[x_{ij}]\|_p$表示该元素的 $S^p(\ell_I^2)$-范数。

设 $\mathfrak{m} = \{m_{ij}\}_{(i,j)\in I^2}$ 为一个有界复数族。若将本节的定义应用于配备计数测度的 $\Omega = I$，则舒尔乘子 $T_{\mathfrak{m}}$ 定义在有限支撑矩阵上如下：

$$T_{\mathfrak{m}}\big([x_{ij}]\big) = [m_{ij}x_{ij}].$$

因此，由注 5.2 可知，以下条件等价：

(i) 存在 $1 \le p \ne 2 < \infty$ 使得

$$\|[m_{ij}x_{ij}]\|_p = \|[x_{ij}]\|_p$$

对于所有有限支撑矩阵 $[x_{ij}]_{i,\ j\in I}$。

(ii) 存在两个族 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 和 $(\beta_j)_{j\in I}$，它们属于 $\mathbb{T}$，且满足

$$m_{ij} = \alpha_i\beta_j, \qquad \text{for all } (i,j) \in I^2.$$

最后，我们刻画一类特殊的舒尔乘子，即可分离的赫尔兹-舒尔乘子。设 G 是一个局部紧 σ紧群（见引理 3.2）。假设 $1 \le p < \infty$。设 $\varphi \in L^\infty(G)$，并通过 $\phi(s,t) = \varphi(s^{-1}t)$ 定义 $\phi \in L^\infty(G^2)$。称舒尔乘子 $T_\varphi^{HS} := T_\phi$ 为赫尔兹-舒尔乘子（符号为 φ）。

在 [4, 命题 4.5], 中证明了，若 Herz-Schur 乘子 $T_\varphi^{HS}\colon\ B(L^2(G)) \to B(L^2(G))$ 具有正定的 φ，且满足 $\varphi(e) = 1$，则它是与一个酉元共轭，当且仅当 φ 是一个特征。

推论 5.4. 设 $1 \le p < \infty$。设 G 为一个局部紧的 σ-紧群。设 T_φ^{HS}为 $S^p(L^2(G))$ 上的有界 Herz-Schur 乘子。则 T_φ^{HS}是分离的，当且仅当存在连续特征 $\psi\colon\ G \to \mathbb{T}$ 和 $c \in \mathbb{C}$，使得 $\varphi = c\psi$ 几乎处处成立。

证明. 若对某个连续特征 ψ，有 $\varphi(s) = c\psi(s)$ 几乎处处等于 $s \in G$，则 Schur 乘子的符号 ϕ 满足 $\phi(s,t) = \varphi(s^{-1}t) = c\psi(s^{-1}t) = c\psi^{-1}(s)\psi(t)$，对几乎处处的 $(s,t) \in G^2$成立。由于 ψ^{-1} 和 ψ 显然是 $L^\infty(G)$ 中的酉元，由定理 5.1，$T_\varphi^{HS} = T_\phi$ 是分离的。

反之，假设 T_φ^{HS}是分离的。由定理 5.1 可知，存在酉元 α、$\beta \in L^\infty(G)$，以及某个 $c \in \mathbb{C}$，使得对几乎处处的 $(s,t) \in G^2$，有 $\varphi(s^{-1}t) = c\alpha(s)\beta(t)$。令 $r \in G$。于是对几乎处处的 $(s,t) \in G^2$，有$c\alpha(s)\beta(t) = \varphi(s^{-1}t) = \varphi((rs)^{-1}(rt)) = c\alpha(rs)\beta(rt)$。撇开平凡情形 $c = 0$ 不论，我们推得

$$\frac{\beta(rt)}{\beta(t)} = \frac{\alpha(s)}{\alpha(rs)} \tag{5.6}$$

对几乎处处的 $(s,t) \in G^2$成立。因此，存在某个 $s \in G$，使得 (5.6) 对几乎处处的 $t \in G$成立。将$\psi(r)$定义为 (5.6) 右侧的表达式，我们便得到对几乎~~处处~~的 $t \in G$，有 $\beta(rt)\ \beta(t)^{-1} = \psi(r)$。具有此性质的函数$\psi\colon\ G \to \mathbb{C}$ 必然唯一。由 $\psi(e) = 1$ 以及

$$\psi(r_1r_2) = \frac{\beta(r_1r_2t)}{\beta(t)} = \frac{\beta(r_1(r_2t))}{\beta(r_2t)}\frac{\beta(r_2t)}{\beta(t)} = \psi(r_1)\psi(r_2) \quad (\text{a.e. } t \in G)$$

我们推知 ψ 是一个特征。由于 ψ 可测，根据 [13, 推论 22.19，第 346], 页，它自动是连续的。由 $\beta(rt) = \beta(t)\psi(r)$ 对几乎处处的 $t \in G$成立，我们通过富比尼论证推知，存在某个 $t \in G$，使得此等式对几乎处处的 $r \in G$成立。因此，β 几乎处处与一个连续函数相等。将这个连续代表选作 β,

我们得到，对于 G中的每个 r， $\beta(rt) = \beta(t)\psi(r)$ 对几乎处处的 $t \in G$成立。由于 β 是连续的，这意味着对所有 r, t 属于 G，都有 $\beta(rt) = \beta(t)\psi(r)$。特别地，对所有 $r \in G$，都有 $\beta(r) = \beta(e)\psi(r)$。利用（5.6），同上可得，对 G中的所有 s，都有 $\alpha(s) = \alpha(e)\psi(s^{-1})$。因此我们推得，对几乎处处的 $(s,t) \in G^2$，都有 $\varphi(s^{-1}t) = c\alpha(e)\beta(e)\psi(s^{-1}t)$。所以， φ几乎处处等于一个连续特征的倍数。□

致谢：C´edric Arhancet 和 Christoph Krieger 获得了法国国家研究署 ANR 的资助（项目编号 ANR-18-CE40-0021，项目 HAS-CON）。Christoph Krieger 获得了项目编号为 ANR-17-CE40-0021 的资助（项目 Front）。Christian Le Merdy 获得了 ANR 项目“群与量子群上的非交换分析”（编号：ANR-19-CE40-0002）的资助。Safoura Zadeh 获得了克莱蒙奥弗涅大学 I-SITE Emergence 项目 MultiStructure（傅里叶乘子与舒尔乘子的调和分析）的资助。

References

[1] C. Arhancet，关于舒尔乘子的非交换 Fig`a-Talamanca–Herz 代数，《积分方程与算子理论》70（2011），第4期，485—510页。[2] C. Arhancet，通过量子群上的傅里叶乘子研究量子信息论，预印本，2020，arXiv:2008.12019。[3] C. Arhancet and C. Kriegler，非交换 Lp 空间上的投影、乘子与可分解映射，即将在《法国数学会回忆录》（2023），177（新系列）发表。
[4] J. Crann and M. Neufang，源自抽象调和分析的量子信道，《物理学杂志 A》46（2013），第4期，045308，共22页。[5] M. Daws，非交换空间上傅里叶代数乘子的表示，《加拿大数学杂志》63（2011），第4期，798–825页。[6] J. De Cannière and U. Haagerup，某些单李群及其离散子群的傅里叶代数乘子，《美国数学杂志》107（1985），455–500页。[7] P. Eymard，局部紧群的傅里叶代数（法语），《法国数学会通报》92（1964），181–236页。[8] G. Folland，《抽象调和分析教程》，数学教材，博卡拉顿，2016。[9] A. González-Pérez and M. Junge and J. Parcet，通过索伯列夫维数研究群代数上的光滑傅里叶乘子，《高等师范学校科学年刊》（第4辑）50（2017），第4期，879–925页。
[10] U. Haagerup，算子代数上完全有界映射的分解，未发表，丹麦欧登塞大学，1980。
[11] H. Hanche-Olsen and E. Størmer，约当算子代数，数学专著与研究丛书系列档案，第21卷。波士顿—伦敦—墨尔本：皮特曼高级出版计划。VIII，1984。[12] C. Herz，傅里叶-斯蒂尔切斯变换的一种推广，《傅里叶研究所年刊》24（1974），第3期，145–157页。[13] E. Hewitt and K. A. Ross，抽象调和分析，第I卷，第二版，《数学科学基础丛书》115。施普林格出版社，柏林—纽约，1979。
[14] G. Hong， S. K. Ray and S. Wang，非交换 Lp 空间上正算子的极大遍历不等式，预印本，2019，arXiv:1907.12967[15] M. Junge and Z. Ruan and D. Sherman，非交换空间上 2-等距映射的分类，《以色列数学杂志》150（2005），285–314页。[16] M. Junge and T. Mei and J. Parcet，群冯诺依曼代数上的光滑傅里叶乘子，《几何与泛函分析》24（2014），第6期，1913–1980页。

[17] M. Junge and T. Mei and J. Parcet，非交换黎斯变换——维数无关界与傅里叶乘子，《欧洲数学会杂志》（JEMS）20（2018），第3期，529–595页。[18] R. V. Kadison and J.R. Ringrose，《算子代数理论基础》，第二卷，《数学研究生教材》16，美国数学会，1997。
[19] E. Kaniuth and A. T.-M. Lau，局部紧群上的傅里叶代数与傅里叶-斯蒂尔切斯代数，《数学调查与专著》231。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。xi+306 页。
[20] V. Lafforgue and M. de la salle，不具有完全有界逼近性质的非交换 L^p空间，《杜克数学杂志》160（2011），第1期，71–116页。[21] R. Larsen，乘子理论导论，施普林格出版社，纽约—海德堡，1971。xxi+282 页。[22] C. Le Merdy and S. Zadeh，非交换 L^p空间上的 ℓ^1-压缩映射，《算子理论杂志》85:2（2021），417–442页。[23] C. Le Merdy and S. Zadeh，非交换 Lp 空间上分离映射的因子分解，《印第安纳大学数学杂志》71（2022），第5期，1967–2000页。
[24] C. Le Merdy and S. Zadeh，非交换 L^p空间上的满射分离映射，《数学新闻》295（2022），第1期，175–188页。[25] T. Mei and É. Ricard，自由希尔伯特变换，《杜克数学杂志》166（2017），第11期，2153–2182页。[26] J. Parcet and É. Ricard and M. de la salle，SL_n（$\mathbb{R}$）中的傅里叶乘子，《杜克数学杂志》171（2022），第6期，1235–1297页。[27] S. Parrott，等距乘子，《太平洋数学杂志》25（1968），159–166页。[28] V. Paulsen，完全有界映射与算子代数，剑桥大学出版社，2002。
[29] G. Pisier and Q. Xu，非交换 L^p空间，《巴拿赫空间几何手册》第2卷，第1459–1517页，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，2003。[30] M. Reed and B. Simon，现代数学物理方法。I. 泛函分析，第二版，学术出版社，纽约，1980，xv+400页。[31] N. Spronk，可测舒尔乘子与傅里叶代数的完全有界乘子，《伦敦数学会会刊》（第3辑）89（2004），第1期，161–192页。[32] E. Størmer，关于 C^*代数的约当结构，《美国数学会汇刊》120（1965），438–447页。[33] R. Strichartz，群代数的同构，《美国数学会会刊》17（1966），858–862页。[34] M. Takesaki，算子代数理论。I.，施普林格出版社，纽约—海德堡，1979。[35] M. Takesaki，算子代数理论。II.，《数学科学百科全书》125。《算子代数与非交换几何》6。施普林格出版社，柏林，2003。[36] F. Y. Yeadon，非交换 L^p空间上的等距映射，《剑桥哲学会数学学报》90（1981），41–50页。电子邮箱：cedric.arhancet@protonmail.com6 rue Didier Daurat, 81000 Albi, France电子邮箱：christoph.kriegler@uca.frUniversité Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63000 Clermont-Ferrand, France电子邮箱：clemerdy@univ-fcomte.fr Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR 6623, CNRS, Université BourgogneFranche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France电子邮箱：jsafoora@gmail.comUniversité Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63000 Clermont-Ferrand, France