arXiv:2303.14037v1 [math.QA] 24 Mar 2023

一类有限余交换 Hopf 代数

´NICOLAS ANDRUSKIEWITSCH、SONIA NATALE、BLAS TORRECILLAS

Abstract. 我们从诺特 Hopf 代数的余有限中心扩张，以及中心 Hopf 子代数的特征标代数群的一个子群出发，构造出一类丰富的 Hopf 代数。该构造从 Tannaka 视角来看十分直观。我们确定了这些新 Hopf 代数何时是余 Frobenius、余半单、诺特或正则，或者具有有限 Gelfand-Kirillov 维数。

1. Introduction

若 Hopf 代数 H 存在正规 Hopf 子代数 A，使得 A 是交换的，且 H 是有限生成的 A-模，则称其为有限扩张交换型。换言之，存在 Hopf 代数正合列 $A \hookrightarrow H \twoheadrightarrow \mathfrak{u}$，其中 A 是交换的，且 $\mathfrak{u}$ 是有限维的。量子群理论中涌现出许多值得关注的有限扩张交换型 Hopf 代数族。对仿射有限扩张交换型 Hopf 代数的系统研究始于 [14]；这里“仿射”指 H 是有限生成代数。

若 Hopf 代数 K 可纳入一个 Hopf 代数的正合列 $\mathfrak{a} \hookrightarrow K \twoheadrightarrow U$，其中 U 是余交换的，且$\mathfrak{a}$是有限维的，则称其为有限余交换型。Lusztig 量子群在单位根处属于有限余交换型。2001年，文献 [6]中出现了一个有限余交换 Hopf 代数的例子，用以反驳关于余 Frobenius Hopf 代数的一个猜想。文献 [35]提出了一类包含该例子、并由适当性质刻画的例子。文献 [15]研究了仿射交换有限型 Hopf 代数 H 的有限对偶 H°；它属于有限余交换型。

本文旨在提出并研究一族有限扩张余交换 Hopf 代数。我们假设基域 $\Bbbk$ 是代数闭域，且特征为0。首先，考虑一个带有中心 Hopf 子代数 A的诺特 Hopf 代数 H；令 $H_\varepsilon = H/HA^+$,

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16T05；18M05。本文主题的研究始于 N. A. 和 S. N. 访问阿尔梅里亚大学期间，谨此感谢该校的热情接待。N. A. 的研究部分得到 CONICET（PIP 11220200102916CO）、FONCyT-ANPCyT（PICT-2019-03660）和 Secyt（UNC）的资助。S. N. 的研究部分得到 Secyt（UNC）的资助。B. T. 的研究部分得到 MICIN 的 PID2020-113552GB-I00、安达卢西亚自治区政府的 FEDER-UAL18-FQM-B042-A 和 P20-0770 项目资助。

其中 $A^+ = \ker^{\varepsilon|A}$。因此，我们得到一个 Hopf 代数扩张

$$(\mathcal{E}) \qquad A \hookrightarrow H \twoheadrightarrow H_\varepsilon.$$

在第 3 节中，对于前仿射代数群 G =Alg(A,$\Bbbk$) 的任意子群 Γ，我们定义 Γ 的一个适当子群 Γ_{fd}，以及有限对偶 H° 的一个 Hopf 子代数$\mathcal{H}(\Gamma)$，它是 Hopf 代数的一个扩张

$$(\mathcal{F}^\Gamma) \qquad H_\varepsilon^\circ \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma) \twoheadrightarrow \Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}.$$

从 Tannaka 视角来看，$\mathcal{H}(\Gamma)$ 上有限维余模的范畴等价于范畴 rep H 的全子范畴 $\mathscr{C}_\Gamma$：该范畴由有限维 H-模构成，其中 A 的作用是半单的，且其特征属于 Γ；因此，$\mathscr{C}_\Gamma$ 中的对象带有 Γ-分次。

在第4节中，我们进一步假设扩张 ($\mathcal{E}$) 是裂开的，且 dim $H_\varepsilon < \infty$。那么 H 是一个有限生成的 A-模，A 是诺特的，G 是一个代数群，$\Gamma_{\mathrm{fd}} = \Gamma$，($\mathcal{F}^\Gamma$) 变成 $H_\varepsilon^* \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma) \twoheadrightarrow \Bbbk\Gamma$，因此 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是有限余交换型。我们建立了 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的若干性质：

定理1.1。(i) 如果 Γ 是有限生成的，那么 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是仿射的。

(ii) $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是余 Frobenius 的。(iii) $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是余半单的，当且仅当 H_ε 是半单的。(iv) 如果 Γ 是有限生成的，那么 GK维数 $\mathcal{H}(\Gamma) < \infty$，当且仅当 Γ 是幂零扩张有限群。(v) $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是诺特的，当且仅当 Γ 是多循环有限扩张。(vi) 如果 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是诺特的，那么它是正则的，当且仅当 H_ε 是半单的。

定理1.1在第4节中证明，参见注 4.10 以及定理4.14、4.15、4.18、4.21和4.24。这些结果的关键在于 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是强 Γ 分次的，并且 Γ 作为代数群的子群是线性的，也就是说，可嵌入到 $GL(n,\Bbbk)$ 中，其中 n 是某个对象。

在证明定理4.24的过程中，我们发现了一个一般性的、似乎是新的判据：若一个 Hopf 代数包含一个有限维的正规非半单 Hopf 子代数，则它不是正则的，见引理4.23。

本文内容安排如下。第2节介绍本文所需的已知事实。第 3 节在一般背景下介绍 Hopf 代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 和扩张 ($\mathcal{F}^\Gamma$)，并确立一些基本性质。第4节研究满足上述限制的 Hopf 代数$\mathcal{H}(\Gamma)$。第5节专门讨论例子。

记号。自然数记作 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。给定 $m < n \in \mathbb{N}_0$，我们令 $\mathbb{I}_{m,n} = \{i \in \mathbb{N}_0 : m \le i \le m\}$ 以及 $\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_{1,n}$。“代数”指含幺结合代数。从一个 $\Bbbk$-代数 A 到一个 $\Bbbk$-代数 B 的代数同态空间记作 Alg(A, B)。有限维左 R-模的范畴（其中 R 是一个代数）记作 rep R。所有 Hopf 代数都假定具有双射反粒子。我们用 $M \le N$ 表示在给定范畴中 M 是 N 的子对象。

Hopf 代数的记号是标准的： Δ 表示余乘法， ε 表示余单位， $\mathcal{S}$ 表示反粒子。对于余乘法和余作用，我们使用 Heynemann-Sweedler 记号。

2. Preliminaries

关于本文中用到的 Hopf 代数的基本事实，请参阅 [42, 45] 。给定一个余代数 K 和一个代数 H，$\mathrm{Hom}(K,H)$ 中关于卷积可逆的元素构成的群记为 $\mathrm{Reg}(K,H)$。

2.1. 余模代数裂分。这类代数已在 [13, 25]中研究过；我们回顾相关事实。设 H 为一个 Hopf 代数， R 为一个右余模代数，其余作用 $\rho: R \to R\otimes H$ ，并设 $R^{\mathrm{co}\,H} = \{x \in R: \rho(x) = x\otimes 1\}$。对于左余模代数 T，类似地定义${}^{\mathrm{co}\,H}T$。

例如，若 $\pi: C \to B$ 是一个 Hopf 代数映射，则 C 通过 $\rho = (\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta$（分别通过 $\lambda = (\pi\otimes \mathrm{id})\Delta$）成为右（分别为左）余模代数。 π 的右余不变量代数和左余不变量代数为

$$C^{\mathrm{co}\,\pi} = C^{\mathrm{co}\,B} = \{x \in C : (\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta(x) = x\otimes 1\},$$
$${}^{\mathrm{co}\,\pi}C = {}^{\mathrm{co}\,B}C = \{x \in C : (\pi\otimes \mathrm{id})\Delta(x) = 1\otimes x\}.$$

我们考察代数扩张 $R^{\mathrm{co}\,H} \subset R$ 的三种性质：

(i) 若典范映射 $\mathrm{can}: R\otimes_{R^{\mathrm{co}\,\pi}} R \to R\otimes H$（定义为 $x\otimes y \mapsto (x\otimes 1)\rho(y)$）为双射，则 $R^{\mathrm{co}\,H} \subset R$ 是 H-伽罗瓦扩张。(ii) 若 $R^{\mathrm{co}\,H} \subset R$ 作为左$R^{\mathrm{co}\,H}$-模和右 H-余模满足正规基性质，则 $R^{\mathrm{co}\,H} \subset R$ 具有正规基性质。(iii) 若存在 $\chi \in \mathrm{Reg}(H,R)$，使得 χ 是 H-余模的态射，即 $\rho\chi = (\chi\otimes \mathrm{id})\Delta$，则 $R^{\mathrm{co}\,H} \subset R$ 是裂开的。

定理 2.1. [25] 扩张 $R^{\mathrm{co}\,H} \subset R$ 是裂开的，当且仅当它是H-伽罗瓦扩张并且具有正规基性质。□

例 2.2. [55] 设 G 是一个单位元为 e 的群， R 是一个代数。 R 上的 $\Bbbk G$-余模代数结构等价于代数$R = \oplus_{g\in G} R_g$的一个 G-分次；此处 $R^{\mathrm{co}\,H} = R_e$。现在，“R 是强 G-分次的”意为

$$R_g R_h = R_{gh}, \qquad \text{for all } g,h \in G.$$

当且仅当 R 是强 G-分次的， $R_e \subset R$ 才是 $\Bbbk G$-Galois 的。

2.2. Hopf代数扩张。这一概念在许多论文中都有讨论，参见例如 [33, 8, 47, 31, 50, 52, 38, 16]。遵循 [1, 8] 并结合[47] ，我们称以下 Hopf 代数态射序列

$$A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$$

当满足以下条件时，该序列是正合的：

(i) ι是单射。 (iii) $\ker\pi = C\iota(A)^+$.
(ii) π 是满射。 (iv) $\iota(A) = C^{\mathrm{co}\,\pi}$.

在这种情况下，我们也称 C 是 B 由 A 扩张而成的扩张。

C 的左、右伴随作用分别记为 ad_ℓ、ad_r：$C \to \mathrm{End}\, C$，其定义如下：

$$\mathrm{ad}_\ell(x)(y) = x_{(1)}y\mathcal{S}(x_{(2)}), \qquad \mathrm{ad}_r(x)(y) = \mathcal{S}(x_{(1)})yx_{(2)}, \qquad x, y \in C.$$

注意

$$\mathrm{ad}_r(x)(y) = \mathcal{S}^{-1}\left(\mathrm{ad}_\ell(\mathcal{S}(x))\mathcal{S}(y)\right), \qquad x, y \in C.$$

Hopf 代数 C 的 Hopf 子代数 A 若在其中一种伴随作用下稳定（因而在两种作用下都稳定），则称其为正规子代数。

引理 2.3。设 A 是 Hopf 代数 C 的 Hopf 子代数，且 $B := C/A^+C$。

(i) 若 A 正规，则 $A^+C = CA^+$。(ii) 若 $A^+C = CA^+$，则它是一个 Hopf 理想，B 是一个 Hopf 代数，且商映射 $\pi: C \to B$ 是 Hopf 代数态射。(iii) 若 $A^+C = CA^+$，且 C 是一个忠实平坦的 A-模（关于左乘或右乘），则 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 是正合的，π 是忠实余平坦的，且A是正规的。

(i) 的逆命题，以及霍普夫代数是否在 Hopf 子代数上忠实平坦，都是未决问题。

证明。(i)、(ii) 很容易；(iii) 见 [42, 3.4.3]；另参见 [8, 1.2.4], [47, 1.4] [53]。 □

注 2.4。Hopf 代数 C 在 Hopf 子代数 A上忠实平坦，前提是以下条件之一成立：

(i) 维数为$C < \infty$；事实上，C 是一个自由的 A-模 [44]；(ii) [47, 3.3] A 是中心的，且 C 是诺特的；(iii) [47, 2.1] A 是正规的，且维数为 $A < \infty$；事实上，C 是一个自由的 A-模。

设 C 是一个 Hopf 代数。C 的左、右余伴随作用分别是余模结构（左、右）ϱ_ℓ、ϱ_r：$C \to C \otimes C$ 定义如下：

$$\varrho_\ell(x) = x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(3)}) \otimes x_{(2)}, \qquad \varrho_r(x) = x_{(2)} \otimes \mathcal{S}(x_{(1)})x_{(3)}, \qquad x \in C.$$

设 τ 是通常的翻转。注意，

$$\varrho_r(x) = \left(\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1}\right)\tau\left(\varrho_\ell(\mathcal{S}(x))\right), \qquad x \in C.$$

满射 Hopf 代数映射 $\pi: C \to B$ 称为余正规的，或者简称 B 是 C的一个余正规商，如果 $\ker\pi$ 是 ϱ_ℓ和 ϱ_r 之一的子余模，因而也是二者的子余模（注意，此处术语与 [8]不同）。

引理 2.5。设 $\pi: C \to B$ 是一个霍普夫代数的满态射。

(i) 若 π 是余正规，则 $C^{\mathrm{co}\,\pi} = {}^{\text{余}\pi}C$。

(ii) $A := C^{\mathrm{co}\,\pi}$ 等于 ${}^{\text{余}\pi}C$，当且仅当 A 是 C 的 Hopf 子代数。

(iii) 如果 π 是余正规且 C 是忠实余平坦的（左或右） B-余模，那么 $A := C^{\mathrm{co}\,\pi} \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 是正合的，且 ι 是忠实平坦的。

证明。(i): [8, 1.1.7]; (ii) [8, 1.1.4]; (iii): [8, 1.2.14], [47, 1.4], [53]。 □

引理 2.6. 如果 $\pi: C \to B$ 是霍普夫代数之间的满态射，且B 是余半单的，那么 C 是忠实余平坦的 B-余模。

证明。由于 B 是余半单的， C 是余平坦的；但满霍普夫代数映射的余平坦性根据 [23,注释（第 247] 页）可推出忠实余平坦性。□

2.3. Hopf 代数的裂扩张。这些扩张例如在[1, 8, 16, 48, 49]中已有讨论。给定 Hopf 代数 H 和 K，我们考虑 $\mathrm{Reg}(K,H)$ 中由下式给出的子群:

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_1(K,H) &= \{\phi \in \mathrm{Reg}(K,H) : \phi(1) = 1\},\\ \mathrm{Reg}_\varepsilon(K,H) &= \{\phi \in \mathrm{Reg}(K,H) : \varepsilon\phi = \varepsilon\},\\ \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(K,H) &= \mathrm{Reg}_1(K,H) \cap \mathrm{Reg}_\varepsilon(K,H).\end{aligned}$$

定义—引理 2.7. 正合列 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 称为裂分的，若满足以下等价条件之一:

(i) 存在 $\chi \in \mathrm{Reg}_1(B,C)$，使得 $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta\chi = (\chi \otimes \mathrm{id})\Delta$；(ii) 存在 $\xi \in \mathrm{Reg}_\varepsilon(C,A)$，使得 $\xi(ac) = a\xi(c) \quad \forall a \in A, c \in C$；(iii) 存在一个 A-模态射 $\xi: C \to A$ 以及一个B-余模态射 $\chi: B \to C$，使得 $\xi\chi = \varepsilon_B 1_A$ 且 $(\iota\xi) * (\chi\pi) = \mathrm{id}_C$。

若出现这种情况，则 $\xi(1) = 1, \varepsilon\chi = \varepsilon$，因此 $\pi\chi = \mathrm{id}_B$ 且 $\xi\iota = \mathrm{id}_A$。证明见[1, 3.1.14] 。

2.4. Hopf 中心与 Hopf 余中心。设 H 是一个 Hopf 代数。我们回顾 [1]中的若干事实。

- [1, 2.2.3] 存在一个极大（相对于包含映射而言）的中心 Hopf 子代数 $\mathcal{HZ}(H)$, 称为 H的 Hopf 中心。
- [1, 2.3.8] 商霍普夫代数映射 $q: H \to K$ 称为余中心的，如果它满足

$$(q \otimes \mathrm{id})\Delta = (q \otimes \mathrm{id})\Delta^{\mathrm{op}}.$$

存在一个极小的余中心 Hopf 代数映射 $\mathfrak{q}: H \to \mathcal{HC}(H)$；滥用记号，将 $\mathcal{HC}(H)$称为 H的 Hopf 余中心。这里的极小是指，任意余中心映射 $q: H \to K$ 都可经由 $\mathfrak{q}$分解。

- 若 $\dim H < \infty$，则 $\mathcal{HZ}(H)^* \simeq \mathcal{HC}(H^*)$，且 $\mathcal{HZ}(H^*) \simeq \mathcal{HC}(H)^*$。

引理 2.8. [1, 3.3.9] 设 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 为一个正合列。

(i) 如果 A 在 C 中是中心的，且 $\mathcal{HZ}(B) \simeq \Bbbk$，那么 A 是 C 的 Hopf 中心。

(ii) 如果 $\pi\colon C\to B$ 是余中心的，且 $\mathcal{HC}(A)\simeq\Bbbk$，那么 $B\simeq\mathcal{HC}(C)$。 □

注 2.9. 设 H 是有限维单霍普夫代数（即不含非平凡的真正规 Hopf 子代数）。

(i) 若 H 不是交换的，则 $\mathcal{HZ}(H)\simeq\Bbbk$。

(ii) 若 H 不是余交换的，则 $\mathcal{HC}(H)\simeq\Bbbk$。

(iii)（N. A. 和 H.-J.Schneider, [1]的附录）。与单李代数相关联的小量子群及其抛物子代数都是单 Hopf 代数，因此它们的 Hopf 中心和余中心都是平凡的。

2.5. 余循环与扭元。设 H 是一个 Hopf 代数。霍普夫2-余循环[24]，或简称余循环，是一个卷积可逆的线性映射 $\sigma\colon H\otimes H\to\Bbbk$，满足 $\sigma(x_{(1)},y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)},z)=\sigma(y_{(1)},z_{(1)})\sigma(x,y_{(2)}z_{(2)})$，$\sigma(x,1)=\sigma(1,x)=\varepsilon(x)$，对所有 x、y、$z\in H$均成立。于是我们得到一个新的 Hopf 代数 H_σ，其余代数为 H，乘法由 σ共轭，即:

$$x\cdot_\sigma y=\sigma(x_{(1)},y_{(1)})\,x_{(2)}y_{(2)}\,\sigma^{-1}(x_{(3)},y_{(3)}),\qquad x,y\in H. \tag{2.1}$$

对偶地，H的扭元是一个元素 $F=F_{(1)}\otimes F_{(2)}\in H\otimes H$，满足

$$(1\otimes F)(\mathrm{id}\otimes\Delta)(F)=(F\otimes 1)(\Delta\otimes\mathrm{id})(F),\quad(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(F)=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(F)=1$$

并且存在逆元 $F^{-1}=F_{(-1)}\otimes F_{(-2)}$。那么，$H^F$，带有余乘法 $\Delta^F:=F\Delta F^{-1}$ 的代数 H 是一个 Hopf 代数。这些定义与对偶相容，也就是说，扭元的转置是余循环，等等。

例 2.10. 现在设 Γ 是一个带单位元 e 的群，且 A 是一个 Hopf 代数。假设 $A=\oplus_{\kappa\in\Gamma}A_\kappa$ 是一个 Γ-分次代数，每个齐次分量 A_κ 都是子余代数，且 $\mathcal{S}(A_\kappa)=A_{\kappa^{-1}}$。那么 A_e 是 A 的 Hopf 子代数。设 $F=F_{(1)}\otimes F_{(2)}\in A_e\otimes A_e$ 是 A_e 的一个扭元。那么 F 是 A 的一个扭元，并且仍是一个 Γ- 分次代数：$A^F=\oplus_{\kappa\in\Gamma}A^F_\kappa$，其中 A^F_κ 又是一个子余代数，即余乘法由 F 共轭的 A_κ。

3. Hopf algebras with a central Hopf subalgebra

3.1. 霍普夫系统。设 A 是诺特霍普夫代数 H 的一个中心 Hopf 子代数，并令 $G=\mathrm{Alg}(A,\Bbbk)$ 为由 A 定义的前仿射代数群；其单位元为余单位 ε。给定 $\kappa\in G$，令

$$\mathfrak{M}_\kappa=\ker\kappa\in\operatorname{Specmax}A,\qquad \mathfrak{I}_\kappa=H\mathfrak{M}_\kappa=\mathfrak{M}_\kappa H,\qquad H_\kappa=H/\mathfrak{I}_\kappa.$$

由于 A 是中心的，H_κ 是一个代数（乘法为 m_κ，单位元为 u_κ），且自然投影 $p_\kappa\colon H\to H_\kappa$ 是代数映射。若 $\kappa,\gamma\in G$，则

$$\Delta(\mathfrak{M}_{\kappa\gamma})\subset\mathfrak{M}_\kappa\otimes A+A\otimes\mathfrak{M}_\gamma\implies\Delta(\mathfrak{I}_{\kappa\gamma})\subset\mathfrak{I}_\kappa\otimes H+H\otimes\mathfrak{I}_\gamma,$$
$$\mathcal{S}(\mathfrak{M}_\kappa)=\mathfrak{M}_{\kappa^{-1}}\implies\mathcal{S}(\mathfrak{I}_\kappa)=\mathfrak{I}_{\kappa^{-1}}.$$

因此，对于任意 $\kappa,\gamma\in G$，都存在定义良好的代数态射

$$\Delta_{\kappa,\gamma}: H_{\kappa\gamma}\to H_\kappa\otimes H_\gamma, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{S}_\kappa: H_\kappa\to H^{\mathrm{op}}_{\kappa^{-1}}, \tag{3.2}$$

满足

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Delta} & H\otimes H \\ {\scriptstyle p_{\kappa\gamma}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\kappa\otimes p_\gamma} \\ H_{\kappa\gamma} & \xrightarrow{\Delta_{\kappa,\gamma}} & H_\kappa\otimes H_\gamma, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mathcal{S}} & H^{\mathrm{op}} \\ {\scriptstyle p_\kappa}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\kappa^{-1}}} \\ H_\kappa & \xrightarrow{\mathcal{S}_\kappa} & H^{\mathrm{op}}_{\kappa^{-1}}. \end{array} \tag{3.3}$$

由余结合性和反粒子公理，对任意 κ、γ、$\nu\in G$，有

$$(\Delta_{\kappa,\gamma}\otimes \mathrm{id}_{H_\nu})\Delta_{\kappa\gamma,\nu}=(\mathrm{id}_{H_\kappa}\otimes\Delta_{\gamma,\nu})\Delta_{\kappa,\gamma\nu}: H_{\kappa\gamma\nu}\to H_\kappa\otimes H_\gamma\otimes H_\nu, \tag{3.4}$$

$$(\mathrm{id}_{H_\kappa}\otimes\varepsilon)\Delta_{\kappa,\varepsilon}=\mathrm{id}_{H_\kappa}=(\varepsilon\otimes\mathrm{id}_{H_\kappa})\Delta_{\varepsilon,\kappa}, \tag{3.5}$$

$$m_\kappa(\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}_{\kappa^{-1}})\Delta_{\kappa,\ \kappa^{-1}}=u_\kappa\varepsilon=m_\kappa(\mathcal{S}_{\kappa^{-1}}\otimes\mathrm{id})\Delta_{\kappa^{-1},\ \kappa} \tag{3.6}$$

特别地，H_ε 是 H的一个商 Hopf 代数。换言之，$(H_\kappa)_{\kappa\in G}$是 [1]意义下的一个 Hopf 系统。由引理 2.3 (iii) 和注 2.4 (ii)，有一个 Hopf 代数正合列

$$A\overset{\iota}{\hookrightarrow}H\twoheadrightarrow H_\varepsilon.$$

给定 $\kappa\in G$，通过以下方式赋予其 H_ε-双余模代数结构：H_κ

$$\varrho_\kappa:=\Delta_{\kappa,\varepsilon}: H_\kappa\to H_\kappa\otimes H_\varepsilon,\qquad \lambda_\kappa:=\Delta_{\varepsilon,\kappa}: H_\kappa\to H_\varepsilon\otimes H_\kappa;$$

clearly $\varrho_\kappa p_\kappa=(p_\kappa\otimes p_\varepsilon)\Delta_H,\qquad \lambda_\kappa p_\kappa=(p_\varepsilon\otimes p_\kappa)\Delta_H.$

引理 3.1. [4, 引理 3.1] 若 H 是 H_ε-裂开的，则 H_κ也是如此，$\forall\kappa\in G$。 □

注记 3.2. 若 H 是 H_ε-裂开的，则 $H_\kappa\neq 0$，即 $\mathfrak{I}_\kappa\neq H$。为此，考虑满足 $\xi(ah)=a\xi(h)$ 的 $\xi\in\mathrm{Reg}_\varepsilon(H,A)$，对所有 $a\in A, h\in H$ 均成立；参见定义—引理 2.7。于是 $\xi(\mathfrak{I}_\kappa)=\xi(\mathfrak{M}_\kappa H)\subset\mathfrak{M}_\kappa$。因此，若 $\mathfrak{I}_\kappa=H$，则 $1\in\mathfrak{I}_\kappa$，从而 $1=\xi(1)\in\xi(\mathfrak{I}_\kappa)=\mathfrak{M}_\kappa$，矛盾。

3.2. 张量范畴。令 $\mathscr{C}$ 为 $\mathsf{rep}\,H$ 的全子范畴，其对象是 A 以半单方式作用的对象。因此，若 $V\in\mathscr{C}$，则

$$V=\bigoplus_{\kappa\in G}V_\kappa,\qquad \text{where}\qquad V_\kappa=\{v\in V: z\cdot v=\kappa(z)v\quad\forall z\in A\}.$$

给定 $\kappa\in G$，我们通过沿 p_κ 的限制，将 $\mathsf{rep}\,H_\kappa$ 识别为 $\mathsf{rep}\ H$ 的一个子范畴 $\mathscr{C}_\kappa$。那么 $\mathscr{C}_\kappa$ 确实是 $\mathscr{C}$ 的一个全子范畴；若 $V\in\mathscr{C}$，则 $V_\kappa\in\mathscr{C}_\kappa$。换言之

$$\mathscr{C}=\bigoplus_{\kappa\in G}\mathscr{C}_\kappa. \tag{3.7}$$

由 (3.3) 可知，$\mathscr{C}$在张量积和对偶运算下封闭。显然，它是一个对取子商封闭的全子范畴，因此是 $\mathsf{rep}\,H$ [26, 4.11.1]的张量子范畴。不过请注意，$\mathscr{C}$并不对

扩张封闭，参见第 3.4 小节关于 $\operatorname{rep} H$ 的讨论。由 (3.3) 还可知，(3.7) 是张量范畴的一个分次，也就是说

$$\mathscr{C}_\kappa \otimes \mathscr{C}_\gamma \to \mathscr{C}_{\kappa\gamma}, \qquad (\mathscr{C}_\kappa)^* = \mathscr{C}_{\kappa^{-1}}.$$

由注记 3.2 可知，若 H 是 H_ε-裂开的，则该分次是忠实的。正如我们接下来将证明的，当 $\dim H_\varepsilon$ 有限时，这一结论同样成立。

命题 3.3. 若 $\dim H_\varepsilon$ 有限，则分次 $\mathscr{C} = \bigoplus_{\kappa\in G} \mathscr{C}_\kappa$ 是忠实的。因此，$H_\kappa \neq 0$ 对所有 $\kappa \in \Gamma$均成立。

证明. 令 $\mathcal{A}$ 为 $\operatorname{rep} A$ 的全子范畴，其对象 W 均为半单的，即

$$W = \bigoplus_{\kappa\in G} W_\kappa, \qquad \text{where} \qquad W_\kappa = \{w \in W : z \cdot w = \kappa(z)w, \quad \forall z \in A\}.$$

我们有一个分次 $\mathcal{A} = \bigoplus_{\kappa\in G} \mathcal{A}_\kappa$，其中 $\mathcal{A}_\kappa$ 是 $\operatorname{rep} A$的全子范畴，其对象为满足 $W = W_\kappa$的那些 W。该分次是忠实的，因为由 κ 支撑的一维表示属于 $\mathcal{A}_\kappa$。

限制函子 $\operatorname{rep} H \to \operatorname{rep} A$ 诱导出函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathcal{A}$。我们断言 F 是主导的，也就是说，对于每个对象 $W \in \mathcal{A}$，都存在一个对象 $V \in \mathscr{C}$，使得 W 是 $F(V)$ 的子对象。为此，回忆一下，H 在 A上是忠实平坦的，参见注 2.4 (ii)。于是，包含映射 $A \hookrightarrow H$在 $\operatorname{rep} A$中诱导出一个单态射 $W = A\otimes_A W \hookrightarrow H\otimes_A W$；根据假设，后者是有限维 H-模 $H \otimes_A W$的限制。显然，W 的像包含于 $H \otimes_A W$ 的 A-根基 V中；由于 A 在 H中是中心的，该根基是 $\mathscr{C}$的一个对象。分次 (3.7) 的忠实性由以下事实得出：对所有 $\kappa \in G$，$F(\mathscr{C}_\kappa) \subseteq \mathcal{A}_\kappa$。□

定义 3.4. 设 $\Gamma \leq G$。那么 $\mathscr{C}_\Gamma$ 表示由 $\mathscr{C}_\kappa$, $\kappa \in \Gamma$生成的 $\mathscr{C}$ 的全子范畴，也就是说，它是 $\operatorname{rep} H$ 的全子范畴，其对象满足 A 通过 Γ中的特征以半单方式作用。换言之

$$\mathscr{C}_\Gamma = \bigoplus_{\kappa\in\Gamma} \mathscr{C}_\kappa. \tag{3.8}$$

3.3. 矩阵系数。设 R 是一个代数。给定 $V \in \operatorname{rep} R$ 及其相应表示 $\vartheta_V\colon R \to \operatorname{End} V$，转置映射 ${}^t\vartheta_V\colon (\operatorname{End} V)^* \to R^*$ 的像记为 C_V；其元素称为 V的矩阵系数。显然，C_V 是有限对偶 R° 的一个子余代数，并且

$$R^\circ = \bigcup_{V\in\operatorname{rep} R} C_V.$$

给定一个代数态射 $\phi : R \to T$，转置映射 ${}^t\phi : T^* \to R^*$诱导出一个余代数态射 $\phi^\circ\colon T^\circ \to R^\circ$。显然，若 $V \in \operatorname{rep} T$，且 $V^\phi \in \operatorname{rep} R$ 是沿着 ϕ 限制得到的，那么 $\phi^\circ(C_V) = C_{V^\phi}$。

此外，如果 R 和 T 是霍普夫代数，且 ϕ 是霍普夫代数态射，那么 $\phi^\circ : T^\circ \to R^\circ$ 也是霍普夫代数态射。

我们考虑 H° 的子余代数

$$C(\kappa) := \bigcup_{W\in \operatorname{rep} H_\kappa} C_{W^{p_\kappa}}, \quad \kappa \in G. \tag{3.9}$$

换言之， $p_\kappa^\circ : H_\kappa^\circ \to C(\kappa)$ 是余代数的一个同构。特别地， $C(\varepsilon) \simeq H_\varepsilon^\circ$ 作为 Hopf 代数同构。

设 Γ 是 G 的任意子群。我们引入

$$\mathcal{H}(\Gamma) := \sum_{\kappa\in\Gamma} C(\kappa). \tag{3.10}$$

根据 (3.3)， $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是 H° 的一个 Hopf 子代数。注意，第 3.2 小节中的子范畴 $\mathscr{C}_\kappa$ 等价于有限维右 $C(\kappa)$-余模范畴。此外， $\mathscr{C}_\Gamma$ 与有限维 $\mathcal{H}(\Gamma)$-余模张量范畴张量等价。

设 $\Gamma_{\mathrm{fd}} := \{\kappa \in \Gamma : \operatorname{rep} H_\kappa \neq 0\} = \{\kappa \in \Gamma : C(\kappa) \neq 0\}$。显然， Γ_{fd} 是 Γ 的子群，但它可能严格更小。

例 3.5. 设 $\mathfrak{h}_n$ 为 n 阶海森堡李代数，其基为 $x_i, y_i, z, i \in \mathbb{I}_n$，其中 z 是中心的，$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$, $[x_i, y_j] = \delta_{ij} z$, $i, j \in \mathbb{I}_n$。由引理 2.3 (ii)，我们有一个 Hopf 代数正合列

$$\Bbbk[z] \hookrightarrow U(\mathfrak{h}_n) \twoheadrightarrow R$$

其中 R 是由 $2n$ 个变量构成的多项式环。现在， $\mathbb{G} = \operatorname{Alg}(\Bbbk[z], \Bbbk)$ 是代数群 $(\Bbbk, +)$；对于任意 $\kappa \in \mathbb{G} \setminus 0$， $H_\kappa = U(\mathfrak{h}_n)/\langle z - \kappa\rangle$ 同构于由 $2n$ 个变量构成的 Weyl 代数。该代数是单代数且无限维，因此没有非零有限维表示。因此，对于任意 $\Gamma \leq \mathbb{G}$， Γ_{fd} 都是平凡的。

以下是本节的主要结果。回顾一下， $\iota : A \to H$ 是包含映射。令 $\varpi : \mathcal{H}(\Gamma) \to A^\circ$ 为 $\iota^\circ : H^\circ \to A^\circ$ 的限制，并令 $\imath : H_\varepsilon^\circ \simeq C(\varepsilon) \to \mathcal{H}(\Gamma)$ 为包含映射。

定理 3.6。代数 $\mathcal{H}(\Gamma) = \bigoplus_{\kappa\in\Gamma_{\mathrm{fd}}} C(\kappa)$ 是忠实的 Γ_{fd}-分次代数，且有以下 Hopf 代数正合列：

$$H_\varepsilon^\circ \overset{\imath}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(\Gamma) \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}. \tag{3.11}$$

证明。设 (κ_j) 是 G 中由不同元素组成的有限族。于是

$$\bigcap_{j\neq i} \mathfrak{M}_{\kappa_j} + \mathfrak{M}_{\kappa_i} \overset{(\star)}{=} A \overset{(\#)}{\Longrightarrow} \bigcap_{j\neq i} \mathfrak{I}_{\kappa_j} + \mathfrak{I}_{\kappa_i} = H \overset{(*)}{\Longrightarrow} \Big(\sum_{j\neq i} C(\kappa_j)\Big) \cap C(\kappa_i) = 0.$$

这里，$(\star)$是交换代数中的一个标准事实，而(#)显然成立。我们来证明$(*)$：若 $f \in C(\kappa)$，则$f_{|\mathfrak{I}_\kappa} = 0$。因此，若 $f \in \Big(\sum_{j\neq i} C(\kappa_j)\Big) \cap C(\kappa_i)$，则 $f_{|\bigcap_{j\neq i} \mathfrak{I}_{\kappa_j} + \mathfrak{I}_{\kappa_i}} = 0$，从而 $f = 0$。因此，和$\sum_{\kappa\in\Gamma} C(\kappa)$是直和。由于 H° 的乘法是 Δ的转置，由(3.3)可知，对所有 $\kappa, \gamma \in \Gamma$， $C(\kappa) \cdot C(\gamma) \subseteq C(\kappa\gamma)$。

接下来我们断言 $\operatorname{Im}\varpi \simeq \Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}$，因此(3.11)中的映射 ϖ 是有意义的。事实上，若 $V \in \operatorname{rep} H_\kappa$，则 A 通过 κ 作用于 V，因此 $C_{\operatorname{Res}_A V} \subseteq \Bbbk\kappa$，且该等式成立当且仅当 $V \neq 0$。这意味着 $\operatorname{Im}\varpi \subseteq \Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}$，根据 Γ_{fd}的定义即可得到该等式。

我们的下一个目标是证明

$$H_\varepsilon^\circ = \mathcal{H}(\Gamma)^{\operatorname{co}\varpi}. \tag{3.12}$$

我们先给出以下观察。根据矩阵系数的标准论证，若 $W \in \operatorname{rep} H_\kappa$ and $V = W^{p_\kappa}$，则

$$\varpi(f) = \varepsilon(f)\kappa, \qquad f \in C_V \tag{3.13}$$

其中，H° 的余单位记为 ε。现在，由于每个$C(\kappa)$都是子余代数，(3.12) 即得：给定 $f \in \mathcal{H}(\Gamma)$，写作 $f = \sum_{\kappa\in\Gamma} f_\kappa$，其中 $f_\kappa \in C(\kappa)$。于是由 (3.13),

$$(\mathrm{id}\otimes\varpi)\Delta(f) = \sum_{\kappa\in\Gamma} f_\kappa \otimes \kappa,$$

因此，$f \in \mathcal{H}(\Gamma)^{\operatorname{co}\varpi}$ 当且仅当 $f \in C(\varepsilon)$。

要证明 (3.11) 的正合性，还需说明 $\ker \varpi = \mathcal{H}(\Gamma)(H_\varepsilon^\circ)^+$。根据引理 2.6，$\mathcal{H}(\Gamma)$ 在 $\Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}$ 上是忠实余平坦的。由引理 2.5 (iii)，只需证明 ϖ 是余正规；这由 A 的中心性可得：取 $f \in \mathcal{H}(\Gamma)$，则 $(\mathrm{id}\otimes\varpi)\varrho_\ell(f) = f_{(1)}\mathcal{S}(f_{(3)}) \otimes \varpi(f_{(2)}) = 0$ 当且仅当 $\langle f_{(1)}\mathcal{S}(f_{(3)})\ h\rangle\langle\varpi(f_{(2)})\ a\rangle = 0$ 对所有 $h \in H$、$a \in A$ 均成立。现在

$$\begin{aligned}\langle f_{(1)}\mathcal{S}(f_{(3)}), h\rangle\langle\varpi(f_{(2)}), a\rangle &= \langle f_{(1)}, h_{(1)}\rangle\langle f_{(3)}, \mathcal{S}(h_{(2)})\rangle\langle\varpi(f_{(2)}), a\rangle \\ &= \langle f, h_{(1)}a\mathcal{S}(h_{(2)})\rangle = \varepsilon(h)\langle f, a\rangle.\end{aligned}$$

因此，若 $f \in \ker\varpi$，则 $f_{(1)}\mathcal{S}(f_{(3)}) \otimes \varpi(f_{(2)}) = 0$，故 $\ker\varpi$ 是关于 ϱ_ℓ的子余模，即 ϖ 是余正规的。□

注 3.7. 若 $\Gamma' \leq \Gamma$，则 $\mathcal{H}(\Gamma')$ 是 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的 Hopf 子代数，$\Gamma'_{\mathrm{fd}} \leq \Gamma_{\mathrm{fd}}$，并且存在一个正合列的态射

$$\begin{array}{ccccc} H_\varepsilon^\circ & \hookrightarrow & \mathcal{H}(\Gamma') & \twoheadrightarrow & \Bbbk\Gamma'_{\mathrm{fd}} \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ H_\varepsilon^\circ & \hookrightarrow & \mathcal{H}(\Gamma) & \twoheadrightarrow & \Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}. \end{array}$$

注 3.8. 投影 $\mathcal{H}(\Gamma) \to \Bbbk\Gamma_{\mathrm{fd}}$ 是余中心的。

证明。由 A 在 H 中的中心性可得。 □

最后，我们确立 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的一些性质，见 §4.2。首先回顾：

定理 3.9. [5, 2.10, 2.13] 设 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ 是一个 Hopf 代数正合列，其中 C 作为 B-余模是忠实余平坦的。那么，C 是余 Frobenius（分别为余半单）当且仅当 A 和 B 是余 Frobenius（分别为余半单）。□

将定理 3.9 应用于正合列 (3.11)，参见引理 2.6，可得：推论 3.10. $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是余 Frobenius（分别为余半单）当且仅当 H_ε° 是余 Frobenius（分别为余半单）。□

3.4. rep H的一个分次。给定 $V \in \mathrm{rep}\, H$，我们定义

$$V_{(\kappa)} = \{v \in V : (z - \kappa(z))^n \cdot v = 0 \quad \forall z \in A, \quad \text{for some } n \in \mathbb{N}\}.$$

因此，由一个经典论证可得 $V = \bigoplus_{\kappa \in G} V_{(\kappa)}$。给定 $\kappa \in G$，我们引入 rep H的全子范畴 $\mathscr{C}_{(\kappa)}$，其对象是满足$V = V_{(\kappa)}$的 $V \in \mathrm{rep}\ H$。因此

$$\mathrm{rep}\, H = \bigoplus_{\kappa \in G} \mathscr{C}_{(\kappa)}. \tag{3.14}$$

由于 $\mathscr{C}_\kappa \subset \mathscr{C}_{(\kappa)}$，$\mathscr{C}$ 的分次 (3.7) 继承自 (3.14)。

命题 3.11. 分解 (3.14) 是张量范畴的一个分次。若 $\dim H_\varepsilon < \infty$，则该分次是忠实的。

证明. 设 $V, W \in \mathrm{rep}\ H$。我们首先注意到，$V \in \mathscr{C}_{(\kappa)}$ 当且仅当存在一个滤过

$$0 = V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

使得对所有 $i \in \mathbb{I}_{0,\ n}$，均有 $V_i/V_{i-1} \in \mathscr{C}_\kappa$。因此，若 $V \in \mathscr{C}_{(\kappa)}$ 且 $W \in \mathscr{C}_{(\gamma)}$，并具有类似的滤过 $0 = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_m = W$，则 $V \otimes W$ 的滤过由 $(V \otimes W)_{-1} = 0$ 给出，且

$$(V \otimes W)_j = \sum_{r,s \geq 0, r+s=j} V_r \otimes W_s, \quad j \geq 0,$$

是穷尽的，并满足 $(V \otimes W)_j/(V \otimes W)_{j-1} \in \mathscr{C}_{\kappa\gamma}$。事实上，给定 r 和 s，取 $v \in V_r$ 和 $w \in W_s$。根据假设，对任意 $z \in A$，我们有

$$z \cdot v \in \kappa(z)v + V_{r-1}, \qquad z \cdot w \in \gamma(z)w + W_{s-1},$$

因此

$$\begin{aligned} z \cdot (v \otimes w) &= z_{(1)} \cdot v \otimes z_{(2)} \cdot w \in (\kappa(z_{(1)})v + V_{r-1}) \otimes (\gamma(z_{(2)})w + W_{s-1}) \\ &\subseteq \kappa\gamma(z)(v \otimes w) + V_r \otimes W_{s-1} + V_{r-1} \otimes W_s + V_{r-1} \otimes W_{s-1} \\ &\subseteq \kappa\gamma(z)(v \otimes w) + (V \otimes W)_{r+s-1}. \end{aligned}$$

因此 $\mathscr{C}_{(\kappa)} \otimes \mathscr{C}_{(\gamma)} \hookrightarrow \mathscr{C}_{(\kappa\gamma)}$。现在，若 $v \in V_i$ 且 $f \in V^*$，则对任意 $z \in A$，我们有 $\langle z \cdot f,\ v\rangle = \langle f,\ \mathcal{S}(z) \cdot v\rangle = \langle f,\ \kappa^{-1}(z) \cdot v + v'\rangle$，其中某个 $v' \in V_{i-1}$。因此

$$\langle (z - \kappa^{-1}(z)) \cdot f, v\rangle = \langle f, v'\rangle.$$

反复迭代可知，对于如上所述的 n，有 $(z - \kappa^{-1}(z))^{n+1} \cdot f = 0$。因此 $(\mathscr{C}_{(\kappa)})^* = \mathscr{C}_{(\kappa^{-1})}$。

注意到，前面的论证表明，范畴 rep A 也带有一个分次 rep $A = \bigoplus_{\kappa \in G} \mathcal{A}_{(\kappa)}$，其中 $\mathcal{A}_{(\kappa)}$ 是 rep A 的全子范畴，其对象是满足 $V = V_{(\kappa)}$ 的那些 V。现在，这个分次是忠实的，因为由 κ 支撑的一维表示属于 $\mathcal{A}_{(\kappa)}$。

现在假设 $\dim H_\varepsilon < \infty$。与命题 3.3 中一样，限制函子 $F\colon \operatorname{rep} H \to \operatorname{rep} A$ 是占优的，这意味着分次 (3.14) 是忠实的。□

定义 3.12。设 $\Gamma \leq G$。那么，$\mathscr{C}_{(\Gamma)}$ 表示由 $\mathscr{C}_{(\kappa)}$、$\kappa \in \Gamma$生成的 $\operatorname{rep} H$ 的全子范畴，换言之，$\mathscr{C}_{(\Gamma)} = \bigoplus_{\kappa\in\Gamma} \mathscr{C}_{(\kappa)}$。我们引入

$$\mathcal{H}((\Gamma)) \coloneqq \sum_{W\in\mathscr{C}_{(\Gamma)}} C_W;$$

这是 H° 的一个 Hopf 子代数，而 $\mathscr{C}_{(\Gamma)}$ 与有限维 $\mathcal{H}((\Gamma))$-余模的张量范畴张量等价。

Hopf 代数 $\mathcal{H}((\Gamma))$ 将在别处研究。

4. 有限扩张余交换 Hopf 代数

4.1. 关于假设的讨论。如同上一节，我们固定一个带有中心 Hopf 子代数 A 的诺特霍普夫代数 H；因此有 Hopf 代数正合列 $(\mathcal{E})$：$A \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{p_\varepsilon}{\twoheadrightarrow} H_\varepsilon$。设 $G = \operatorname{Alg}(A, \Bbbk)$。

4.1.1. 关于 H_ε 的假设。考虑以下假设：

假设 4.1. H 是一个有限生成的 A-模，即 $(h_i)^{i\in\mathbb{I}_N}$ 在 A 上生成 H。

假设 4.2. H_ε 是有限维的。

注 4.3. 假设 4.1 蕴含假设 4.2。一般而言，对于任意 $\kappa \in G$，我们有

$$\dim H_\kappa \leq N. \tag{4.1}$$

反过来，若扩张 $(\mathcal{E})$ 还是裂开的，则假设 4.2 蕴含假设 4.1。

问题 1. 假设 4.2 是否总是蕴含假设 4.1?

例 4.4。假设 4.2 并不意味着 $(\mathcal{E})$ 的劈裂性；参见 Oberstand Schneider 在 [42, 第 3] 节中的例子。

若 (4.1) 成立，则有限对偶 H°（定义见 (3.9)）的子余代数 $C(\kappa)$ 可通过余代数单射 $p_\kappa^t\colon H_\kappa^* \to H^\circ$ 与有限维余代数 H_κ^* 等同。特别地，$C(\varepsilon) \simeq H_\varepsilon^* = H_\varepsilon^\circ$。

引理 4.5。若假设 4.2 成立，则对所有 $\kappa \in G$，$\dim H_\kappa = \dim H_\varepsilon$。

Compare with [26, Theorem 3.5.2].

证明。首先回顾，对于任意 Hopf 代数 K 和右 K-余模 V，存在右 K-余模的一个同构

$$V \otimes K \to V_{\text{trivial}} \otimes K, \qquad v \otimes k \mapsto v_{(0)} \otimes v_{(1)}k, \qquad v \in V,\ k \in K.$$

因此，若维数 $V<\infty$，则 $V\otimes K\simeq K^{\dim V}$。类似地， $K\otimes V\simeq K^{\dim V}$。考虑余代数分解

$$\mathcal{H}(\Gamma)=\bigoplus_{\kappa\in\Gamma}C(\kappa),$$

其中，依照 (4.1)，$\dim C(\kappa)<\infty$ 。回顾一下， $\mathscr{C}_\kappa$ 是有限维 $C(\kappa)$-余模的范畴。根据前面的讨论，对于任意 $\gamma\in\Gamma$,

$$\bigoplus_{\kappa\in\Gamma}(C(\kappa)\otimes C(\gamma))\simeq\mathcal{H}(\Gamma)\otimes C(\gamma)\simeq\mathcal{H}(\Gamma)^{\dim C(\gamma)}\simeq\bigoplus_{\kappa\in\Gamma}C(\kappa)^{\dim C(\gamma)}$$

作为 $\mathcal{H}(\Gamma)$-余模。注意， $C(\kappa)\otimes C(\gamma)\in\mathscr{C}_{\kappa\gamma}$；而 $C(\kappa)^{\dim C(\gamma)}\in\mathscr{C}_\kappa$。因此

$$C(\kappa)\otimes C(\gamma)\simeq C(\kappa\gamma)^{\dim C(\gamma)},\qquad\text{for all }\kappa,\gamma\in\Gamma. \tag{4.2}$$

通过类似的论证，利用同构 $C(\kappa)\otimes\mathcal{H}(\Gamma)\simeq\mathcal{H}(\Gamma)^{\dim C_{(\kappa)}}$，我们还可得到

$$C(\kappa)\otimes C(\gamma)\simeq C(\kappa\gamma)^{\dim C(\kappa)},\qquad\text{for all }\kappa,\gamma\in\Gamma. \tag{4.3}$$

现在，由命题 3.3，$\dim C(\kappa)\neq 0$。比较 (4.2) 和 (4.3) 两式中的维数，对于所有 $\kappa,\gamma\in\Gamma$，我们得到 $\dim C(\kappa)=\dim C(\gamma)$。这就证明了该引理。□

在本文余下部分中，我们假设假设 4.2 成立，且扩张（$\mathcal{E}$）是裂开的，因此假设 4.1 也成立。

4.1.2. 关于 H 的假设。设 H 是一个 Hopf 代数，它含有中心 Hopf 子代数 A，且 H 是有限生成的 A-模。那么

$$H\text{ is Noetherian}\iff A\text{ is Noetherian}\iff A\text{ is affine.}$$

特别地， $G=\mathrm{Alg}(A,\Bbbk)$ 是一个代数群。这些等价关系由下文的引理 4.8 推出，其证明需要两个结果。

定理 4.6. [27] 若 R 是一个右诺特环，且作为交换子环 S 上的右模有限生成，则 S 是诺特的。□

定理 4.7. [41] 设 A 是一个交换 Hopf 代数。那么， A 是诺特的，当且仅当它是仿射的。□

引理 4.8. 设 H 是一个 Hopf 代数，含有一个交换的 Hopf 子代数 A，且 H 是有限生成的 A-模。以下条件等价：
(a) H 是诺特的。
(b) A 是诺特的。(c)
A 是仿射的。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b) 是定理 4.6。(b) $\Rightarrow$ (a)：根据假设， H 是一个诺特 A-模，因此它是一个诺特代数。(b) $\Leftrightarrow$ (c) 是定理 4.7。□

4.1.3. $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的结构。令 $\Gamma \leq G$; 则 $\Gamma_{\mathrm{fd}} = \Gamma$，这是由 4.1 和注记 3.2 得出的。我们主要关注的对象是 Hopf 代数 $\mathcal{H}(\Gamma) = \bigoplus_{\kappa\in\Gamma} C(\kappa)$。根据定理 3.6，它符合正合列

$$(\mathcal{F}^{\Gamma}) \qquad H_\varepsilon^* \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(\Gamma) \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk\Gamma.$$

引理 4.9. 扩张 $(\mathcal{F}^{\Gamma})$ 是裂开的；因此 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是强 Γ-分次的。

证明. 设 $\chi: H_\varepsilon \to H$ 是一个劈裂映射，并设 $\boldsymbol{\xi}: \mathcal{H}(\Gamma) \to H_\varepsilon^*$ 是转置 $\chi^t: H^* \to H_\varepsilon^*$ 的限制。则 $\boldsymbol{\xi}$ 满足定义 — 引理 2.7 (ii) 的条件，因此 $(\mathcal{F}^{\Gamma})$ 是裂开的。第二个结论由定理 2.1 和例 2.2 得出。□

注 4.10. 若族 $(\kappa_i)_{i\in I}$ 生成 Γ，则 $\bigoplus_{i\in I} C(\kappa_i)$ 生成代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$。因此，若 Γ 是有限生成的，则 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是仿射的。

4.1.4. 配对。自然配对 $\langle\,,\rangle: H^*\times H \to \Bbbk$ 可下降为配对$\langle\,,\rangle: \mathcal{H}(\Gamma)\times H \to \Bbbk$。显然，它在一侧非退化。设 $I = \mathcal{H}(\Gamma)^\perp \subseteq H$; 这是一个 Hopf 理想，因为 $\langle\,,\rangle$ 是 Hopf 配对。我们有

$$I = \cap_{\kappa\in\Gamma} C(\kappa)^\perp = \cap_{\kappa\in\Gamma} \mathfrak{I}_\kappa,$$

根据 (3.10)，并且由于所有 H_κ 都是有限维的。设 $\kappa \in \Gamma$ 是 H_κ 的一个表示，且 $\mathsf{c} \in C_{W^{p_\kappa}}$ 是一个矩阵系数。那么，对于任意 $a \in A$，$\langle \mathsf{c}\ a\rangle = \kappa(a)\mathsf{c}$。因此

$$I \cap A = \cap_{\kappa\in\Gamma} C(\kappa)^\perp \cap A = \{a \in A : \kappa(a) = 0 \text{ for all } \kappa \in \Gamma\}.$$

也就是说，$I\cap A$ 是 G 上在 Γ 的扎里斯基闭包 $\overline{\Gamma}$ 上取值为零的函数构成的理想。因此，若 $\overline{\Gamma} \neq G$，则 $I \cap A \neq 0$，于是 $I \neq 0$。我们已经证明:

引理 4.11. 若配对 $\langle\,,\rangle: \mathcal{H}(\Gamma)\times H \to \Bbbk$ 非退化，则 Γ 在 G 中扎里斯基稠密。□

问题 2. 若 Γ 在 G 中扎里斯基稠密，则配对 $\langle\,,\rangle: \mathcal{H}(\Gamma)\times H \to \Bbbk$ 是否非退化? 也就是说，$I\cap A = 0$ 是否蕴含 $I = 0$?

4.1.5. 比较。考虑另一个 Hopf 代数裂分正合列$A' \overset{\iota}{\hookrightarrow} H' \overset{p_\varepsilon}{\twoheadrightarrow} H'_\varepsilon$，其中 H' 诺特且维数为$H'_\varepsilon < \infty$; 令 $G' = \mathrm{Alg}(A', \Bbbk)$。给定子群 $\Gamma \leq G$ 和 $\Gamma' \leq G'$，自然会想知道 Hopf 代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 与 $\mathcal{H}(\Gamma')$ 是否同构（这里滥用了记号，因为初始数据并不相同）。我们给出一个部分解答，适用于许多例子。回想一下，$\varpi: \mathcal{H}(\Gamma)\Bbbk\Gamma$ 是余中心的，参见注 3.8。

命题 4.12. 设 $f: \mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}(\Gamma')$ 是 Hopf 代数的同构。若 $\mathcal{HC}(\mathcal{H}(\Gamma)) = \Bbbk\Gamma$ 且 $\mathcal{HC}(\mathcal{H}(\Gamma')) = \Bbbk\Gamma'$，则 f 诱导同构 $\varphi: \Gamma \to \Gamma'$ 和 $f_0: H_\varepsilon^* \simeq H_\varepsilon'^*$，使下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} H_\varepsilon^* & \hookrightarrow & \mathcal{H}(\Gamma) & \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} & \Bbbk\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ H_\varepsilon'^* & \hookrightarrow & \mathcal{H}(\Gamma') & \overset{\varpi'}{\twoheadrightarrow} & \Bbbk\Gamma'. \end{array}$$

证明. 由于态射 $\varpi' f\colon \mathcal{H}(\Gamma) \to \Bbbk\Gamma'$ 是余中心的，存在唯一的霍普夫代数态射 $\varphi\colon \Bbbk\Gamma \to \Bbbk\Gamma'$，使得 $\varphi\varpi = \varpi' f$。于是 φ 必为同构，再结合 $H_\varepsilon^* = \mathcal{H}(\Gamma)^{co\varpi}$ 且 $H_\varepsilon'^* = \mathcal{H}(\Gamma')^{co\varpi'}$ 这一事实，可知 f 通过限制诱导出同构 $f_0\colon H_\varepsilon^* \simeq H_\varepsilon'^*$，使图表可交换。□

注 4.13. 根据引理 2.8 (ii)，若 H_ε 和 H_ε' 是单且非交换的，或者更一般地，若 $\mathcal{HZ}(H_\varepsilon) \simeq \Bbbk \simeq \mathcal{HZ}(H_\varepsilon')$，则命题 4.12 的假设成立。

4.2. 余根基滤过与余 Frobenius 性质。回顾一下，若 Hopf 代数 K 存在非零的（右）积分，即一个线性泛函 $\int\colon K \to \Bbbk$, $\int \neq 0$，且在左正则表示的对偶作用下不变，则称其具有余 Frobenius 性质。详情及等价刻画列表参见例如 [5, 6] 。

设 $\Gamma \leq G$。推论 3.10 表明 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 具有余 Frobenius 性质。下面的定理将进一步细化这一事实。

定理 4.14。 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的余根基滤过为

$$\operatorname{corad}_n \mathcal{H}(\Gamma) = \bigoplus_{\kappa\in\Gamma} \operatorname{corad}_n C(\kappa), \tag{4.4}$$

因此 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是余 Frobenius 的。

证明。(4.4) 的证明是对 $n \geq 0$ 使用归纳法。对于 $n = 0$，这是 [45, 3.4.3]，的推论，而归纳步骤由 [45, 2.4.3] 得出。于是 (4.1) 蕴含 $\operatorname{corad}_N C(\kappa) = C(\kappa)$，因此 $\operatorname{corad}_N \mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma)$。最后，由于余根基滤过是有限的，$\mathcal{H}(\Gamma)$ 是余 Frobenius 的，参见 [7, 定理 2.1]。□

根据 Larson-Radford 定理，[36], 推论 3.10 还蕴含以下结果。

定理 4.15。 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是余半单的，当且仅当 H_ε 是半单的。 □

4.3. Gelfand-Kirillov 维数。关于这一概念的定义和基本性质，请参见 [34] 。

本小节的主要结果刻画了具有有限 Gelfand-Kirillov 维数的代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$。我们先给出一个一般性说明。设 Γ 是一个群，$R = \bigoplus_{\kappa\in\Gamma} R_\kappa$ 是一个强 Γ-分次代数。

引理 4.16。若对所有 $\kappa \in \Gamma$ 都有 $\dim R_\kappa < \infty$，则 GK维数 $R \geq$ GK维数 $\Bbbk\Gamma$。此外，若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\dim R_\kappa \leq N, \qquad \textit{for all } \kappa \in \Gamma. \tag{4.5}$$

特别地，若 GK维数 $R < \infty$ 有限，则 Γ 具有多项式增长。

证明。首先注意，对于所有 $\kappa \in \Gamma$， $R_\kappa \neq 0$，因为 $0 \neq R_e = R_\kappa R_{\kappa^{-1}}$。给定一个有限子集 $X \subset \Gamma$，令 $R_X = \bigoplus_{\kappa\in X} R_\kappa$。那么，根据 $|X| \leq$，维数 $R_X < \infty$，由

前文可知。对于任意 $Y \subset \Gamma$，我们有 $R_X R_Y = R_{XY}$，因为 R 是强分次的。因此 $(R_X)^n = R_{X^n}$，并且

$$|X^n| \overset{\spadesuit}{\leq} \dim(R_X)^n \overset{\clubsuit}{\leq} N|X^n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

其中，在第二个不等式中，我们假设 (4.5)。现在，$\spadesuit$ 意味着

$$\limsup_{n\to\infty} \log_n |X^n| \leq \operatorname{GKdim} R, \qquad \text{hence } \operatorname{GKdim} \Bbbk\Gamma \leq \operatorname{GKdim} R.$$

假设 (4.5) 成立。设 V 是 R 的一个有限维子空间；显然存在一个有限的 $X \subset \Gamma$，使得 $V \subset R_X$。于是，$\clubsuit$ 意味着

$$\limsup_{n\to\infty} \log_n \dim V^n \leq \limsup_{n\to\infty} \log_n \dim(R_X)^n \leq \operatorname{GKdim} \Bbbk\Gamma,$$

并且等式 GK维数 R = GK维数 $\Bbbk\Gamma$ 成立。 □

回顾一下，如果一个有限生成群含有一个有限指数的正规幂零子群，则称其为幂零扩张有限群。以下是格罗莫夫的一项著名结果：

定理 4.17. [28] 是有限生成群，则 GK维数 $\Bbbk\Gamma < \infty$ 当且仅当 Γ 是幂零扩张有限群。□

接下来假设 Γ 是一个不一定有限生成的群。那么 $\Bbbk\Gamma$ 具有有限 GK维数，当且仅当存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\operatorname{GKdim} \Bbbk\Upsilon < N \text{ for any finitely generated } \Upsilon \leq \Gamma.$$

特别地，Γ 的任意有限生成子群都应是幂零扩张有限群。于是我们得出：

定理 4.18. 设 $\Gamma \leq G$。那么

$$\operatorname{GKdim} \mathcal{H}(\Gamma) = \operatorname{GKdim} \Bbbk\Gamma. \tag{4.6}$$

因此，GK维数 $\mathcal{H}(\Gamma) < \infty$ 当且仅当存在 $N \in \mathbb{N}$，使得任意有限生成的 $\Upsilon \leq \Gamma$ 都是幂零扩张有限群，且 GK维数 $\Bbbk\Upsilon < N$。

证明. 首先假设 Γ 是有限生成的。由引理 4.16 可得 (4.6)，因为 (4.1) 给出 (4.5)。因此，GK维数 $\mathcal{H}(\Gamma) < \infty$ 当且仅当 Γ 具有多项式增长；根据定理 4.17，当且仅当 Γ 是幂零扩张有限群。

一般而言，$\mathcal{H}(\Gamma)$ 的任意有限生成子代数都包含在某个有限生成的 $\Upsilon \leq \Gamma$ 的 $\mathcal{H}(\Upsilon)$ 中，参见注 3.7。因此

$$\operatorname{GKdim} \mathcal{H}(\Gamma) = \sup_{\substack{\Upsilon \leq \Gamma \\ \text{fin. gen.}}} \operatorname{GKdim} \mathcal{H}(\Upsilon) = \sup_{\substack{\Upsilon \leq \Gamma \\ \text{fin. gen.}}} \operatorname{GKdim} \Bbbk\Upsilon = \operatorname{GKdim} \Bbbk\Gamma.$$

因此，(4.6) 一般成立，并且由上述讨论可知该定理由定理 4.17 推出。□

我们列举几个例子以作说明：

(a) GK维数 $\Bbbk\mathbb{Q} = 1$，因为 $\mathbb{Q}$ 的任意有限生成子群都是循环群（且无挠）。由于 $\mathbb{Q}$ 是加法群 $\Bbbk$ 的子群，它可以嵌入任何非环面代数群。

(b) 设 $\mathbb{G}_\infty \leq \Bbbk^\times$ 为所有单位根构成的群。则 GK维数 $\Bbbk\mathbb{G}_\infty = 0$，因为任意有限生成子群都是循环群（且有挠）。现在，$\mathbb{G}_\infty$ 可以嵌入任何含有环面的代数群。

4.4. 诺特性。本小节的一般参考文献是 [40]。回顾一下，若一个可解群的每个子群都是有限生成的，则称它为多循环群；等价地说，它存在一个以循环群为因子的次正规列。此外，若一个群含有有限指数的正规多循环子群，则称它为多循环有限扩张群。多循环群的 Hirsch 数是任一次正规列中无限因子的个数；多循环有限扩张群的 Hirsch 数则是其有限指数正规多循环子群的 Hirsch 数。

一个经典结果指出，多循环有限扩张群的群代数是诺特的 [29]；一个著名的未决问题是，反过来是否也成立。

回顾一下，若一个群满足关于子群的极大条件，则称它为诺特群；如果某个群的群代数是诺特的，那么该群也是诺特的，但反之不成立，见 [32]。然而，对于线性群，Tits 有一个卓越的结果：

定理 4.19. [54] 线性诺特群是多循环有限扩张群。 □

因此，若 Γ 是线性群，则下列条件等价：

$\Bbbk\Gamma$ 是诺特的 $\Leftrightarrow$ Γ 是诺特的 $\Leftrightarrow$ Γ 是多循环有限扩张群。

定理 4.20. [43,定理 5.5] 若 Γ 是多循环有限扩张群，且 R是强 Γ-分次环，则当 R_e 是右诺特时，R 也是右诺特。□

定理 4.21. 设 $\Gamma \leq G$。下列条件等价：

(a) 代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是诺特的。(b) 群 Γ 是多循环有限扩张群（特别地，它是可解的）。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)：回想一下，Γ作为仿射代数群的子群，是线性的。由于 $\Bbbk\Gamma$ 是诺特的，且是 $\mathcal{H}(\Gamma)$的商，定理 4.19 适用。(b) $\Rightarrow$ (a)：由引理 4.9、定理 4.20 和 (4.1) 得出。□

4.5. 正则性。本小节的参考文献是 [40, 第 7]章。与该文献一样，我们使用以下缩写：pd 表示投射维数；r.gldim、l.gldim、gldim 分别表示右整体维数、左整体维数和整体维数。给定代数 R，若 r.gldim R =l.gldim R，则令 gldim R =l. gldim R；若 gldim $R < \infty$，则称 R为正则的。

首先，回顾 [37] 中的估计

$$\text{l. gldim}\, C \leq \text{r. gldim}\, B + \text{l. gldim}\, A \tag{4.7}$$

对于结合代数 A 与 Hopf 代数 B 的交叉积 $C = A\#_\sigma B$ （其反粒子不一定是双射的）。有关这一结果的对偶版本，见 [18] 。显然，若 Hopf 代数 B 的反粒子是双射的，则 l. gldim B = r. gldim B。

我们将估计式 (4.7) 应用于一个 Hopf 代数的裂分正合列（其中各代数均具有双射反粒子） $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$，并假设 $\dim A < \infty$。首先，我们记录

引理4.22. 在上述情形下，如果 A 是半单的且 B 是正则的，那么 C 是正则的，并且 $\operatorname{gldim} C \leq \operatorname{gldim} B$。□

现在，任意有限维 Hopf 代数都是弗罗贝尼乌斯代数，因此 A要么是半单的，要么 $\operatorname{gldim} A = \infty$。后一种情况由以下结果处理，该结果依赖于 Schneider 的一个定理。

引理4.23. 一个 Hopf 代数 K 若含有有限维正规非半单 Hopf 子代数 L，则不是正则的。

证明. 根据 [47, 定理 2.1]， K 是一个 L-模上的自由模。因此

$$\infty = \operatorname{gldim} L \overset{\heartsuit}{=} \operatorname{pd} \Bbbk_L \overset{\diamondsuit}{\leq} \operatorname{pd} \Bbbk_K + \operatorname{pd} K_L = \operatorname{pd} \Bbbk_K,$$

也就是说， K 不是正则的。这里 ♡ 例如由 [37, 2给出。4] 和 ♢ 由 [40, 7.2.1]给出。 □

令 $\Gamma \leq G$。转而考虑裂分扩张 ($\mathcal{F}^\Gamma$)，我们得到以下刻画。

定理 4.24. 假设 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是诺特的。那么 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是正则的，当且仅当 H_ε 是半单的；此时，$\operatorname{gldim} \mathcal{H}(\Gamma) \leq h$，其中 h 是 Γ 的 Hirsch 数。□

证明。由 [36]， H_ε 是半单的，当且仅当 H_ε^* 是半单的。若 H_ε^* 不是半单的，则由引理4.23，$\operatorname{gldim} \mathcal{H}(\Gamma) = \infty$。否则，引理 4.22 蕴含 $\operatorname{gldim} \mathcal{H}(\Gamma) \leq \operatorname{gldim} \Bbbk\Gamma$。当 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 是诺特的时，由定理 4.21 可知 Γ 是多循环有限扩张，因此由 [40, 7 可得 $\operatorname{gldim} \Bbbk\Gamma \leq h$。5.6]。□

5. Examples

5.1. 初步考量。本节讨论第 3 节中定义的 Hopf 代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的例子，见 (3.10)，更具体地说，是第 4 节所作假设下的情形。获得一份相当丰富的例子列表后，为了全面了解这一主题，还需要回答以下问题：

问题3. 给定一个代数群 G，其函数代数为 $\mathcal{O}(G)$，求出所有具有中心 Hopf 子代数 $A \simeq \mathcal{O}(G)$ 的 Hopf 代数 H，使得扩张 $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{p_\varepsilon}{\twoheadrightarrow} H_\varepsilon$ 是裂开的，且 $\dim H_\varepsilon < \infty$。

问题3可以改述如下：

问题4. 给定一个代数群 G 和一个维数为 $\dim \mathfrak{u} < \infty$ 的 Hopf 代数 $\mathfrak{u}$，求出所有裂分扩张 $\mathcal{O}(G) \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \twoheadrightarrow \mathfrak{u}$，使得 $\iota(\mathcal{O}(G))$ 在 H 中是中心的。

众所周知， [8, 31, 38], 这类扩张可以用一组数据 $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$ 来描述，其中包括弱作用、余循环、弱余作用和一个满足一系列公理的循环；中心性会稍微简化这些要求（例如，弱作用是平凡的），但除此之外，这种情形似乎难以处理。

因此，我们还需要了解以下经典问题。

问题5. 给定一个代数群 G （它具有问题3中所述的诺特 Hopf 代数 H），描述它的子群，尤其是有限生成的有限扩张幂零群或多循环有限扩张群。

关于这个问题，不妨回顾以下著名结果。

定理5.1. [12, 51]。任意多循环有限扩张群都是线性的。 □

5.2. 量子函数代数。设 G 是一个半单单连通代数群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，函数代数为 $\mathcal{O}(G)$。设 ℓ 为一个奇数（若 G 有一个 G_2 型的分支，则该整数不被 3 整除），且ϵ 为一个本原 ℓ 次单位根。回顾量子化函数代数$\mathcal{O}_\epsilon(G)$, 例如参见 [21], ，以及小量子群 $\mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$。存在一个 Hopf 代数正合列

$$\mathcal{O}(G) \hookrightarrow \mathcal{O}_\epsilon(G) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$$

它由 [46, 3.3] 裂开。根据定理 5.1，任意多循环有限扩张群Γ 都是某个适当的 G 的子群，因此可导出一个 Hopf 代数 $\mathcal{H}(\Gamma)$。

更多例子可由 [9] 中分类的量子化函数代数的霍普夫代数商给出。

5.3. 尖点霍普夫代数。回顾一下，如果每个简单余模都是一维的，则称 Hopf 代数为尖点的。关于这一概念，见 [10]；关于相关的尼科尔斯代数概念，见 [2]。我们先介绍一个稍后需要的结果。

定理 5.2。 [39, 1.3] 设 $\pi : U \to \mathfrak{u}$ 是 Hopf 代数之间的满射。如果 U 是尖点的，那么带有余作用 $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta$ 的 $\mathfrak{u}$-余模代数 U 是裂开的。□

设 (V, c) 是一个编织向量空间。则张量代数 $T(V)$ 是一个编织分次霍普夫代数。V 的预 Nichols 代数是 $T(V)$ 对一个支撑于次数 $\geqslant 2$ 的分次霍普夫理想取商所得的代数。V 的尼科尔斯代数是 $\mathscr{B}(V) = T(V)/\mathcal{J}(V)$，其中 $\mathcal{J}(V)$ 是其中极大的霍普夫理想。因此， V 的任意预 Nichols 代数 $\mathcal{B}$ 都介于 $T(V)$ 与 $\mathscr{B}(V)$ 之间。

有关以下内容的详情，请参见 [3, 4, 11] 。设 (V, c) 是一个对角型编织向量空间，其辫矩阵为 $\mathfrak{q} = (q_{ij}) \in \left(\Bbbk^\times\right)^{\mathbb{I}\times\mathbb{I}}$，其中 $\mathbb{I} = \{1, \dots, \theta\}$, $\theta \in \mathbb{N}$。假设 Nichols 代数$\mathscr{B}_\mathfrak{q} := \mathscr{B}(V)$ 维数有限，因此 $\mathfrak{q}$ 属于 [30] 中的分类。如 [11], (V, c) 所示，即矩阵 $\mathfrak{q}$，可得以下数据：

- 特征预 Nichols 代数 $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}, \sim}$
- Hopf 代数 $U_\mathfrak{q}$ （ $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$ 的玻色化的 Drinfeld 双）。
- 如 [4, §4.5] 中所作的修改， $\mathcal{Z}_\mathfrak{q}$ 是 $U_\mathfrak{q}$ 的子代数。本小节的例子类源自以下结果。

定理 5.3. 若 $\mathfrak{q}$ 满足技术条件 [4,(4.26)], ，则 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{q}}$ 是 $U_{\mathfrak{q}}$的中心 Hopf 子代数， $M_{\mathfrak{q}} := \mathrm{Alg}(\mathcal{Z}_{\mathfrak{q}}, \Bbbk)$ 是一个可解代数群， $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}} = U_{\mathfrak{q}}/U_{\mathfrak{q}}\mathcal{Z}_{\mathfrak{q}}^{+}$是有限维的，且 Hopf 代数正合列 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow U_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}$ 是裂开的。

证明。这由 [11, 定理 33 和注记 11], 推出；另见 [4, §4.5]中的讨论。定理 5.2 蕴含该正合列具有劈裂性。□

设 $\mathfrak{g}$ 是一个半单李代数， q 是奇数阶单位根；若 $\mathfrak{g}$ 含有一个 G_2型理想，则该阶还需与 3 互素。于是存在合适的 $\mathfrak{q}$ ，使得 $U_{\mathfrak{q}}$同构于 De Concini-Kac-Procesi 量子包络代数$U_q(\mathfrak{g})$，见 [19, 20, 22]。不过，这类例子还涵盖量子超群及更多内容，见 [3, 4]。

5.4. 玻色化。关于这一概念（由 Radford 提出，并由 Majid 从范畴角度加以阐释），例如参见 [10] 。Hopf 代数 K 上的 Yetter-Drinfeld 模范畴记作 ${}^{K}_{K}\mathcal{YD}$。

固定一个有限群 L, $V \in {}^{\Bbbk L}_{\Bbbk L}\mathcal{YD}$，使得 $\dim \mathscr{B}(V) < \infty$，并令$K = \mathscr{B}(V)\#\Bbbk L$。我们考虑满足以下条件的有序对 (H, A) 的三种不同情形：H 诺特， A 在 H 中是中心的，扩张 $(\mathcal{E})$ 是裂开的，且 $H_{\varepsilon} \simeq K$。

5.4.1. 群的吹起。假设存在一个群 Λ、一个群满射 $\wp : \Lambda \to L$ ，以及一个映射 $\varsigma : \mathrm{supp}\, V \to \Lambda$ ，使得$V \in {}^{\Bbbk\Lambda}_{\Bbbk\Lambda}\mathcal{YD}$ ，其中分次由 ς 诱导，作用由 $\wp$ 诱导。令 $\Lambda_0 := \ker \wp$。我们断言，以下序列是正合且裂开的：

$$A' := \Bbbk\Lambda_0 \hookrightarrow H' := \mathscr{B}(V)\#\Bbbk\Lambda \xrightarrow{\mathrm{id}\,\#\wp} K.$$

事实上，将向量空间正合列 $(\Bbbk\Lambda)\Bbbk\Lambda_0^{+} \hookrightarrow \Bbbk\Lambda \twoheadrightarrow \Bbbk L$ 与 $\mathscr{B}(V)$ 张量，便可得 $\ker(\mathrm{id}\,\#\wp) = H'(A')^{+}$。也容易看出$\diamond$， $A' \subseteq (H')^{\mathrm{co}\,\mathrm{id}\#\wp}$。现在， H' 根据定理 5.2 是 K-裂开的。因此，由维数论证可知， $\diamond$ 中等号成立。最后，我们需要在每个例子中检验Λ_0 是否是 H' 中的中心元素。

5.4.2. 代数的吹起。这里我们假设存在一个预尼科尔斯代数 $\mathcal{B}$ of V，带有投影 $\pi : \mathcal{B} \to \mathscr{B}(V)$，使得 $\mathcal{B}^{\mathrm{co}\,\pi}$ 是一个（通常的） Hopf 子代数，并且以下序列是正合且裂开的：

$$A'' := \mathcal{B}^{\mathrm{co}\,\pi} \hookrightarrow H'' := \mathcal{B}\#\Bbbk L \xrightarrow{\pi\#\,\mathrm{id}} K.$$

我们还假设 A'' 在 H''中是中心的。

5.4.3. 两者同时膨胀。我们假设存在一个群 Λ 和一个如前所述的预尼科尔斯代数 $\mathcal{B}$ ，使得 $\mathcal{B}^{\mathrm{co}\,\pi}\#\Bbbk\Lambda_0$ 是一个中心的霍普夫子代数，且以下序列正合且裂开：

$$A := \mathcal{B}^{\mathrm{co}\,\pi}\#\Bbbk\Lambda_0 \hookrightarrow H := \mathcal{B}\#\Bbbk\Lambda \xrightarrow{\pi\#\wp} K.$$

5.4.4. 示例：架的包络群。为简单起见，我们固定$n \in \mathbb{I}_{3,\ 5}$并假设 $L = \mathbb{S}_n$，且 $V \in {}^{\Bbbk\mathbb{S}_n}_{\Bbbk\mathbb{S}_n}\mathcal{YD}$ 具有 $\mathscr{B}(V) \simeq \mathsf{FK}_n$（秩为 n的 Fomin-Kirillov 代数），例如参见 [2]。那么 V 的支撑为 $X = \mathcal{O}_2^n$（$\mathbb{S}_n$中的对换共轭类）；这是一个运算 $\triangleright$ 由共轭作用给出的架。X 的包络群为

$$\mathbb{G}_X := \langle e_x : x \in X | e_x\, e_y = e_{x \triangleright y}\, e_x, x, y \in X \rangle.$$

那么存在：(i) 唯一的群同态 $\wp : \mathbb{G}_X \to \mathbb{S}_n$，使得$\wp(e_x) = x,\ x \in X$；(ii) V 在${}^{\mathbb{G}_X}_{\mathbb{G}_X}\mathcal{YD}$中的一个实现，它诱导出一个 Hopf 代数映射 $H' := \mathscr{B}(V)\#\Bbbk\mathbb{G}_X \xrightarrow{\mathrm{id}\,\#\wp} \mathscr{B}(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_n$.。可以证明，对于任意 x、$y \in X$，都有$z := e_x^2 = e_y^2$，并且 $Z := \ker \wp = \langle z \rangle \simeq \mathbb{Z}$。现在显然，对每个 $v \in V$都有 $e_x^2 \cdot v = v$，因此 Z 在 H'中是中心的。于是我们有一个裂分正合列

$$A' := \Bbbk Z \hookrightarrow H' \xrightarrow{\mathrm{id}\,\#\wp} K = \mathscr{B}(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_n.$$

现在众所周知，

$$\mathrm{Alg}(\Bbbk Z, \Bbbk) \simeq \widehat{Z} \simeq \Bbbk^\times, \qquad K^* \simeq \mathscr{B}(W)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n},$$

其中 $W \simeq V^*$ 线性地。因此，对于任意 $\Gamma \leq \Bbbk^\times$，我们有一个扩张

$$\mathscr{B}(W)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n} \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma) \twoheadrightarrow \Bbbk\Gamma.$$

5.4.5. 示例：量子线性空间（有限情形）。此例的输入是一个矩阵 $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,\ j \in \mathbb{I}_\theta}$，其元素是满足以下条件的单位根

$$q_{ij}q_{ji} = 1, \qquad i \neq j \in \mathbb{I}_\theta, \qquad N_i := \mathrm{ord}\, q_{ii} > 1, \qquad i \in \mathbb{I}_\theta.$$

令 M_i 为 $\{\mathrm{ord} q_{ij}$ 的最小公倍数：$j \in \mathbb{I}_\theta\}$，对每个 $i \in \mathbb{I}_\theta$ 均如此。因此 N_i 整除 M_i。对于该输入，我们附加：

◇ The finite abelian group $L = \langle g_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle g_\theta \rangle$ where $\mathrm{ord}\, g_i = M_i$, $i \in \mathbb{I}_\theta$.

⇝◇特征 $\chi_1, \dots \chi_\theta \in L$，由 $\chi_j(g_i) = q_{ij}$, $i, j \in \mathbb{I}_\theta$ 给出。

◇秩为 θ、基为 $\mathsf{g}_1, \dots \mathsf{g}_\theta$ 的自由阿贝尔群 Λ。映射 $\wp : \Lambda \to L$ 的核由 $\wp(\mathsf{g}_i) = g_i$, $i \in \mathbb{I}_\theta$ 给出，记为 Λ_0；也就是说，$\Lambda_0 = \langle \mathsf{g}_1^{M_1}, \dots \mathsf{g}_\theta^{M_\theta} \rangle$。

⇝◇特征 $\boldsymbol{\chi}_1, \dots \boldsymbol{\chi}_\theta \in \Lambda$，由 $\boldsymbol{\chi}_j(\mathsf{g}_i) = q_{ij}$, $i, j \in \mathbb{I}_\theta$ 给出。

◇向量空间 V 具有基 $x_1, \dots x_\theta$，在 ${}^{\Bbbk L}_{\Bbbk L}\mathcal{YD}$ 和 ${}^{\Bbbk\Lambda}_{\Bbbk\Lambda}\mathcal{YD}$ 中由 $\delta(x_i) = g_i \otimes x_i$, $g \cdot x_i = \chi_i(g)x_i$, $\boldsymbol{\delta}(x_i) = \mathsf{g}_i \otimes x_i$, $\mathsf{g} \cdot x_i = \boldsymbol{\chi}_i(x)x_i$ 实现，其中 $i \in \mathbb{I}_\theta$, $g \in L$, $\mathsf{g} \in \Lambda$。这里，δ: $V \otimes \Bbbk L$ 和 $\boldsymbol{\delta}$: $V \otimes \Bbbk\Lambda$ 是余作用。

◇代数 $\mathcal{B} = \Bbbk\langle x_1, \dots, x_\theta | x_i x_j - q_{ij}\, x_j x_i, i \neq j \in \mathbb{I}_\theta \rangle$。

于是有以下事实成立：

• $\mathscr{B}(V)$ 和 $\mathcal{B}$ 在 ${}^{\Bbbk L}_{\Bbbk L}\mathcal{YD}$ 和 ${}^{\Bbbk\Lambda}_{\Bbbk\Lambda}\mathcal{YD}$ 中都是 Hopf 代数。由 $\mathcal{B}$ 到尼科尔斯代数 $\mathscr{B}(V)$ 的自然投影 π 诱导出同构 $\mathscr{B}(V)\simeq\mathcal{B}/\langle x_1^{N_1},\dots,x_\theta^{N_\theta}\rangle$。

• 由 $x_1^{N_1}$、…、$x_\theta^{N_\theta}$生成的子代数与 $\mathcal{B}^{\text{余}\pi}$ 重合，并且我们有一个 Hopf 代数正合列

$$A\coloneqq\mathcal{B}^{\operatorname{co}\pi}\#\Bbbk\Lambda_0\hookrightarrow H\coloneqq\mathcal{B}\#\Bbbk\Lambda\xrightarrow{\pi\#\wp}K. \tag{5.1}$$

引理 5.4. 若对所有 $i\in\mathbb{I}_\theta$ 都有 $N_i=M_i$，则 A 是 H中的中心元素。

证明. 代数 H 由 x_1、…、x_θ、$\mathbf{g}_1^{\pm1}$、…、$\mathbf{g}_\theta^{\pm1}$ 生成，其关系为

$$x_ix_j=q_{ij}\,x_jx_i,\quad i\neq j\in\mathbb{I}_\theta,\quad \mathbf{g}_ix_j=q_{ij}\,x_j\mathbf{g}_i,\quad \mathbf{g}_i\mathbf{g}_j=\mathbf{g}_j\mathbf{g}_i,\quad i,j\in\mathbb{I}_\theta.$$

子代数 A 由 $x_1^{N_1}$、…、$x_\theta^{N_\theta}$、$\mathbf{g}_1^{\pm N_1}$、…、$\mathbf{g}_\theta^{\pm N_\theta}$生成。现在

$$x_i^{N_i}x_j=q_{ij}^{N_i}\,x_jx_i^{N_i},\quad \mathbf{g}_i^{N_i}x_j=q_{ij}^{N_i}\,x_j\mathbf{g}_i^{N_i},\quad \mathbf{g}_ix_j^{N_j}=\begin{cases}q_{ii}^{N_i}\,x_i^{N_i}\mathbf{g}_i, & \text{if } i=j;\\ q_{ji}^{-N_j}\,x_j^{N_j}\mathbf{g}_i & \text{if } i\neq j,\end{cases}$$

对所有 i、$j\in\mathbb{I}_\theta$ 都成立。这就证明了引理。 □

现在，A的余乘法由下式确定

$$\Delta(\mathbf{g}_i^{N_i})=\mathbf{g}_i^{N_i}\otimes\mathbf{g}_i^{N_i},\qquad \Delta(x_i^{N_i})=x_i^{N_i}\otimes1+\mathbf{g}_i^{N_i}\otimes x_i^{N_i},\qquad i\in\mathbb{I}_\theta.$$

因此，$G\coloneqq\operatorname{Alg}(A,\Bbbk)$ 与 $\mathbb{B}^\theta$ 同构，其中 $\mathbb{B}$ 是 $SL(2,\Bbbk)$ 的博雷尔子群。总之，对于任意 $\Gamma\leq\mathbb{B}^\theta$，我们有一个扩张

$$K^*\hookrightarrow\mathcal{H}(\Gamma)\twoheadrightarrow\Bbbk\Gamma.$$

5.5. 扭转 $\mathcal{H}(\Gamma)$。设 A 是诺特 Hopf 代数 H 的中心 Hopf 子代数，从而有 Hopf 代数正合列 $A\overset{\iota}{\hookrightarrow}H\overset{p_\varepsilon}{\twoheadrightarrow}H_\varepsilon$。给定 $\Gamma\leq G=\operatorname{Alg}(A,\Bbbk)$，令 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 如 (3.10) 所示。设 $\sigma\colon H_\varepsilon\otimes H_\varepsilon\to\Bbbk$ 是一个余循环，参见 §2.5。那么 $\widetilde{\sigma}\coloneqq\sigma(p_\varepsilon\otimes p_\varepsilon)\colon H\otimes H\to\Bbbk$ 是一个余循环。于是

$$z\cdot_\sigma h=zh,\qquad h\cdot_\sigma z=hz,\qquad z\in A,\,h\in H.$$

因此，A 在 $H_{\widetilde{\sigma}}$ 中是中心的。假设 H 是有限生成的 A-模。那么 $H_{\widetilde{\sigma}}$ 是有限生成的 A-模，因而是诺特的，并且我们有 Hopf 代数正合列 $A\xhookrightarrow{\iota}H_{\widetilde{\sigma}}\xrightarrow{p_\varepsilon}(H_\varepsilon)_\sigma$。因此，我们可以重复这些构造，得到一个记作 $\mathcal{H}_\sigma(\Gamma)$ 的 Hopf 代数。

$F={}^t\sigma$ 关于 $H_\varepsilon^*\simeq C(\varepsilon)$ 的扭元自然也是关于 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 以及 H° 的扭元。关于分次代数的扭曲，请参见例 2.10。

命题 5.5. $\mathcal{H}_\sigma(\Gamma)\simeq\mathcal{H}(\Gamma)^F$。

证明。由于 $\mathcal{H}(\Gamma)$ 的子余代数 $C(\kappa)$ 是 $C(\varepsilon)$-双模，因此对于所有 $\kappa \in \Gamma$，$C(\kappa)^F$ 是 $\mathcal{H}(\Gamma)^F$ 的子余代数。注意，对于所有 $\kappa \in \Gamma$，$(H_{\widetilde{\sigma}}).\widetilde{\sigma}\mathfrak{M}_\kappa = H\mathfrak{M}_\kappa$。因此，$(H_{\widetilde{\sigma}})^\circ$ 的子余代数 $C_{\widetilde{\sigma}}(\kappa) := (H_{\widetilde{\sigma}}/(H_{\widetilde{\sigma}}).\widetilde{\sigma}\mathfrak{M}_\kappa)^*$ 包含于 $(H^\circ)^F$ 中，并且它与子余代数 $C(\kappa)^F$ 重合。因此

$$\mathcal{H}(\Gamma)^F = \oplus_{\kappa\in\Gamma} C(\kappa)^F = \oplus_{\kappa\in\Gamma} C_{\widetilde{\sigma}}(\kappa) = \mathcal{H}_\sigma(\Gamma). \quad \square$$

命题 5.5 有以下应用。设 $\mathfrak{u}$ 是一个有限维尖点Hopf代数。在所有已知例子中，关于余根基滤过的分次Hopf代数 $\operatorname{gr}\mathfrak{u}$ 具有 §5.4 中的形式 $\mathscr{B}(V)\#\Bbbk L$，并且对于某个合适的余循环 σ，有 $\mathfrak{u} \simeq (\operatorname{gr}\mathfrak{u})_\sigma$。于是，对于任意一对 (H, A)，若 H 是诺特的，且 A 在 H 中是中心的，则扩张 $(\mathcal{E})$ 是裂开的，并且 $H_\varepsilon \simeq \operatorname{gr}\mathfrak{u}$；这一对 $(H_{\widetilde{\sigma}}, A)$ 具有类似性质，且 $(H_\varepsilon)_\sigma \simeq \mathfrak{u}$。

致谢。N.A. 感谢 Serge Skryabin 通过邮件与其进行了有益的交流，也感谢 Juan Cuadra 在 2020 年上半年进行的有趣线上交谈；这些交流促成了本文的诞生。

References

[1] N. Andruskiewitsch. *Notes on extensions of Hopf algebras*, 《加拿大数学杂志》48，3–42（1996）。[2]。 *An Introduction to Nichols Algebras*。载于《数学与物理中的量子化、几何与非交换结构》。A. Cardona 等编，第 135–195 页，Springer Nature（2017）。[8] N. Andruskiewitsch 和 I. Angiono。 *On finite dimensional Nichols algebras of diagonal type* **7**, 353 573 2017 。《Bull. Math. Sci.》–（）。[4] N. Andruskiewitsch、I. Angiono、M. Yakimov。 *Poisson orders on large quantum groups* 2008 11025 2020 。arXiv:。（）。[5] N. Andruskiewitsch、J. Cuadra。 *On the structure of (co-Frobenius) Hopf algebras*。《J. Noncommut. Geom.》7，83–104（2013）。[6] N. Andruskiewitsch、J. Cuadra、P. Etingof。 *On two finiteness conditions for Hopf algebras with nonzero integral* **14**, 401 440 2015 。《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa》–（）。[7] N. Andruskiewitsch 和 S. Dˇascˇalescu。 *Co-Frobenius Hopf algebras and the coradical filtration* **243**, 145 154 2003 。《Math. Z.》–（）。[8] N. Andruskiewitsch 和 J. Devoto。 *Extensions of Hopf algebras*。《Algebra i Analiz》7（1），22–61（1995）；《St. Petersburg Math. J.》7（1），17–52（1995）。[9] N. Andruskiewitsch 和 G. A. Garcˊıa。 *Finite subgroups of a simple quantum group*。《Compositio Math.》145，第 476–500 页（2009）。[10] N. Andruskiewitsch、H.-J. Schneider。 *Pointed Hopf algebras*。载于《Hopf代数理论最新进展》，MSRI Publ. 43，1–68，Cambridge Univ. Pr.（2002）。[11] I. Angiono。 *Distinguished pre-Nichols algebras*。《Transform. Groups》21，1–33（2016）。[12] L. Auslander。 *On a problem of Philip Hall*。《Ann. Math.》（2）86，112–116（1967）。[13] R. J. Blattner、M. Cohen 和 S. Montgomery。 *Crossed products and inner actions of Hopf algebras* **298**, 671 711 1986 。《Trans. Amer. Math. Soc.》–（）。[14] K. A. Brown 和 M. Couto。 *Affine commutative-by-finite Hopf algebras*。《J. Algebra》573:1，56–94（2021）。[15] K. A. Brown、M. Couto 和 A. Jahn。 *The finite dual of commutative-by-finite Hopf algebras* **65**, 62 89 10 1017 0017089522000052 。《Glasgow Math. J.》–。doi:。/S。[16] N. P. Byott。 *Cleft extensions of Hopf algebras*。《J. Algebra》157，405–429（1993）。*Cleft extensions of Hopf algebras II*。《Proc. London Math. Soc.》（3）67，277–304（1993）。

[17] A. Chirvasitu 和 P. Kasprzak。 *On the Hopf (co)center of a Hopf algebra*。《J. Algebra》464, 第 141–174 页（2016）。[18] S. D
˘ ˘ ˘ ˘
Homological dimension of coalgebras and ascalescu、*crossed coproducts* **23**, 53 65 2001 C. Nastasescu、B. Torrecillas。。《K理论》，第 – 页（）。[19] C. De Concini 和 V. Kac。
Representations of quantum groups at roots of 1。《Progr. Math.》92，471–506，Birkh¨auser, 波士顿（1990）。[20] C. De Concini、V. Kac、C. Procesi。 *Quantum coadjoint action*。《J. Amer. Math. Soc.》5，151–189（1992）。[21] C. De Concini 和 V. Lyubashenko。
Quantum function algebra at roots of 1。《Adv. Math.》108，第 2 期，205–262（1994）。[22] C. De Concini 和 C. Procesi。 *Quantum groups*。载于：《D-模、表示论与量子群》，《数学讲义》1565，31–140，Springer（1993）。[23] Y. Doi。 *On the structure of relative Hopf modules*。《代数通讯》11，243–255（1983）。[24]。 *Braided bialgebras and quadratic bialgebras*，《代数通讯》21，1731–1749（1993）。[25] Y. Doi 和 M. Takeuchi。
Cleft comodule algebras for a bialgebra **14** 。《代数通讯》– 801 818 1986
（）。[26] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych、V. Ostrik， *Tensor categories*。《数学概览与专著》205，美国数学会（2015）。[27] E. Formanek 和 A. V. Jategaonkar。 *Subrings of Noetherian rings*。《美国数学会会刊》46，181–186（1974）。[28] M. Gromov。
Groups of polynomial growth and expanding maps. Appendix by JacquesTits。《Publ. Math., I nst. Hautes ´Etud. Sci.》53，53–78（1981）。[29] P. Hall。
Finiteness conditions for soluble groups 3 **4**, 。《Proc. 419 436 1954
London Math. Soc.》（）– （）。[30] I. Heckenberger。 *Classification of arithmetic root systems*。《Adv. Math.》220，59–124（2009）。[31] I. Hofstetter。
Extensions of Hopf algebras and their cohomological description。《J. Algebra》164，264–298（1994）。[32] S.V. Ivanov。 *Group rings of Noetherian groups*。《数学札记》46，929–933（1989）；译自《数学札记》46，61–66（1989）。[33] Kac, G., *Extensions of groups to ring groups*。《苏联数学文集》5，451–474（1968）。[34] G. Krause 和 T. Lenagan。
Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension。修订版。《数学研究生教材》22。美国数学会（2000）。[35] K. Li、G. Liu。 *The Finite Duals of Affine Prime Regular Hopf Algebras of GK-Dimension One* **8** 3 6829 6879 2023 。《AIMS数学》，（），–（）。[36] R. G. Larson、D. Radford。 *Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple* **117**, 267 289 1988 。《J. Algebra》–（）。[37] M. Lorenz、M. Lorenz。 *On crossed products of Hopf algebras*。《美国数学会会刊》123，33–38（1995）。[38] S. Majid。 *Crossed products by braided groups and bosonization*。《J. Algebra》163，165–190（1994）。[39] A. Masuoka。
On Hopf algebras with cocommutative coradicals。《J. Algebra》144，415–466（1991）。[40] J.C. McConnell 和 J.C. Robson。
Noncommutative Noetherian rings. With the coop- 。据原版更正
eration of L. W. Small 1987
后重印。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），（2001）。[41] R. K. Molnar。 *A commutative Noetherian Hopf algebra over a field is finitely generated* **51**, 501 502 1975 。《美国数学会会刊》–（）。[42] S. Montgomery。 *Hopf Algebras and their Actions on Rings*。AMS（1993），CMBS 82。[43] C. Nastasescu 和 F. Van Oysteyen。 *On strongly graded rings and crossed products*。《Commun. Algebra》10，2085–2106（1982）。

[44] W.D. Nichols 和 M. B. Z¨oller。 *A Hopf algebra freeness Theorem*。《美国数学杂志》111，381–385（1989年）。[45] Radford, D. E. *Hopf algebras*。《纽结与万物系列》49。新泽西州哈肯萨克：世界科技出版公司。xxii，559页（2012年）。[46] P. Schauenburg, H.-J. Schneider。 *Galois type extensions and Hopf algebras*。（2004年）。[47] H.-J. Schneider。 *Some remarks on exact sequences of quantum groups*。《代数通讯》21（9）3337–3358（1993年）。[48] 。 *Zerlegbare Erweiterungen affiner Gruppen*。J. Algebra 66，569–593（1980年）。[49] 。 *Zerlegbare Untergruppen affiner Gruppen*。《数学年刊》255，139–158（1981年）。[50] W. Singer。 *Extension theory for connected Hopf algebras*。J. Algebra 21，1–16（1972年）。[51] R. G. Swan。 *Representations of polycyclic groups*。《美国数学会会刊》18，573–574（1967年）。[52] M. Takeuchi。 *Matched pair of groups and bismash product of Hopf algebras*。《代数通讯》9，841–882（1981年）。[53] 。 *Quotient spaces for Hopf algebras*。《代数通讯》22，2503–2523（1994年）。[54] J. Tits。 *Free subgroups in linear groups*。J. Algebra 20，250–270（1972年）。[55] K. H. Ulbrich。 *Vollgraduierte Algebren*。《汉堡大学数学研讨会论文集》51，136–148（1981年）。

N. A., S. N.: FAMAF-CIEM (CONICET), Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende s/n Ciudad Universitaria 5000 Córdoba , , , Argentina.*Email address*: nicolas.andruskiewitsch@unc.edu.ar, natale@famaf.unc.edu.ar

B. T.: Universidad de Almería, Dpto. Álgebra y Análisis Matemático. E04120 Almería, Spain*Email address*: btorreci@ual.es