arXiv:2303.14051v1 [math.QA] 24 Mar 2023

GL(2)表示型量子群的卡拉比–丘性质

XIAOLAN YU 和 XINGTING WANG

Abstract. 本文证明，Mrozinski 在 [9] 中引入的量子群 $\mathcal{G}(A,B)$及其 Hopf–Galois 对象都是扭曲卡拉比-丘代数，并明确给出它们的 Nakayama 自同构。

Introduction

为分类余表示半环同构于 GL(2) 的余半单Hopf代数，C. Mrozinski 引入了一族新的Hopf代数 [9]，如下所示。

设 $\Bbbk$ 为代数闭域。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geqslant 2$，并令 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$。代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 由生成元 $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$、$\mathbb{D}$、$\mathbb{D}^{-1}$ 生成，并满足以下关系

$$u^t A u = A\mathbb{D}, \quad uBu^t = B\mathbb{D}, \quad \mathbb{D}\mathbb{D}^{-1} = 1 = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{D}, \tag{1}$$

其中 u 是矩阵 $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$，$u^t$ 表示其转置。这个代数具有自然的Hopf代数结构，见 [9, 命题 2.1]。令

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}, \text{ for some } q \in \Bbbk^{\times}.$$

Hopf 代数 $\mathcal{G}(A_q, A_q^{-1})$ 就是 $\mathcal{O}$(一般线性群$_q$(2))，即量子群一般线性群$_q$(2)上的函数代数。对于矩阵 $A \in$ 一般线性群$_n(\Bbbk)$，[5], Dubois-Violette 和 Launer 将 Hopf 代数 $\mathcal{B}(A)$ 定义为与 A 相关联的非退化双线性形式的量子自同构群。从 $\mathcal{G}(A, A^{-1})$ 到 Hopf 代数 $\mathcal{B}(A)$ 存在一个满射Hopf代数态射。根据定义，Hopf 代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 可以视为 Hopf 代数 $\mathcal{B}(A)$ 的推广。

在 [1, 定理 6.1 和推论 6.3], 中，Bichon 证明 Hopf 代数 $\mathcal{B}(A)$ 是维数为 3 的光滑代数，并满足庞加莱对偶。这等价于说，它们是维数为

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16T05, 16E40, 16E65.

Key words and phrases. Calabi-Yau 代数；量子群；余群胚。1

3 的扭曲 Calabi–Yau（简称 CY）代数（定义 1.4）。金兹堡在2006 [8] 引入了 CY 代数，以将 CY 流形的几何性质迁移到非交换代数几何中。如今，CY 代数及其范畴化与非交换几何、簇代数、拓扑场论以及非交换代数的表示论紧密交织。扭曲（或“斜”）CY 代数是 CY 代数的推广。对于一个扭曲 CY 代数，存在一个所谓的中山自同构。这个代数自同构在相差一个内自同构的意义下是唯一的。CY 代数是其中中山自同构为内自同构的扭曲 CY 代数。事实上，扭曲 CY 性质已被研究多年，甚至早在 CY 代数的定义出现之前，人们就以 Artin-Schelter（简称 AS）正则性的概念对其进行研究。AS正则代数在非交换射影几何的研究中发挥着核心作用。一个连通分次代数是分次扭曲 CY 代数，当且仅当它是 AS-正则的（参见 [10, 引理 1.2]）。因此，扭曲 CY 代数也可以看作 AS正则代数的推广。特别是在 Hopf 代数的情形下，文献 [4] （参见 [10, 引理 1.3]）证明了诺特AS正则Hopf代数是扭曲 CY 代数（在 [4]中，扭曲 CY 性质称为“刚性 Gorenstein”）。

本文的主要目的是证明代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 是扭曲 Calabi-Yau 代数。我们构造了平凡 Yetter–Drinfeld 模 $_{\mathbb{K}}$ 在 $\mathcal{G}(A,B)$ 上的自由 Yetter–Drinfeld 分解（定义 1.7）（定理 2.3）。由此，我们得到以下主要定理。

定理 1. 设 $A,B \in$一般线性群$_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$，使得 $B^tA^tBA = \lambda I_n$对某个 $\lambda \in _{\mathbb{K}}{}^{\times}$成立。代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 是扭曲卡拉比-丘代数，其中中山自同构 μ定义为 $\mu(u) = (A^t)^{-1}AuB^tB^{-1}$ 以及 $\mu(_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = _{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}$。

在同调性质的研究中，一个普遍的经典问题是寻找在各种“变形”下保持不变的同调不变量。受文献 [14], 中关于 Hopf代数 $\mathcal{B}(A)$ 的扭曲卡拉比-丘性质讨论的启发，作者提出了以下问题：

问题 2：设 H 和 L 是两个 Hopf 代数，且它们的余模范畴单体等价。假设 H 是扭曲 Calabi–Yau。那么 L 总是扭曲 Calabi–Yau 吗?

设 $m,n \in \mathbb{N}, n,m \geqslant 2$，并设 $A,B \in$一般线性群$_n(\mathbb{K})$ $C,D \in$一般线性群$_m(\mathbb{K})$，使得 $B^tA^tBA = \lambda I_n$，$D^tC^tDC = \lambda I_m$且 $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t) = \mu$，其中某个$\lambda,\mu \in _{\mathbb{K}}{}^{\times}$成立。那么，$\mathcal{G}(A,B)$ 和 $\mathcal{G}(C,D)$ 上的余模范畴是单体等价的 [9]。定理 1 表明，代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 为研究上述问题提供了一个有趣的例子。

作为定理 1 的推论，我们证明代数$\mathcal{G}(A,B)$的 Hopf–Galois 对象也是扭曲 Calabi-Yau 代数（定理 3.2）。

我们所构造的自由 Yetter–Drinfeld 分解的另一个应用涉及 Gerstenhaber-Schack 上同调（[6, 7]），这是一种 Hopf 代数特有的上同调理论。它有助于证明 Hopf 代数理论中的一些基本结果。双代数上同调是 Gerstenhaber-Schack 上同调的一个特例。当代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 余半单时，我们计算了它的双代数上同调，并证明 $\mathcal{G}(A,B)$ 的 Gerstenhaber-Schack 上同调维数为 4。

1. Preliminaries

本文中，我们始终在代数闭域 $\Bbbk$ 上进行讨论。除非另有说明，所有代数和向量空间均定义在 $\Bbbk$ 上。不加修饰的张量 $\otimes$ 表示 $\otimes_{\Bbbk}$，Hom 表示 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}$。对于代数 A，我们用 A^{op} 表示 A 的反代数，用 A^e 表示 A的包络代数 $A\otimes A^{op}$。一个A-双模可以视为一个 A^e-模。

对于一个 A-双模 M 和一个代数自同构 μ，我们将由 $M^\mu \cong M$ 定义的 A-双模记为 M^μ，其中其向量空间为 $M^\mu \cong M$，并且对所有 a、$b \in A$ 和 $m \in M$，有 $a \cdot m \cdot b = am\mu(b)$。类似地，我们也有 ${}^\mu M$ 的概念。众所周知，$A^\mu \cong A$ 作为 A-双模当且仅当 μ 是 A 的内自同构。

对于 Hopf 代数，其余乘法和余作用采用 Sweedler（省略求和符号）记法。右 H-余模范畴记为 $\mathcal{M}^H$。设 H 是一个 Hopf 代数，且 $\xi : H \to \Bbbk$ 是一个代数同态。我们用 $[\xi]^l$ 表示 ξ 的左绕行自同构，其定义为

$$[\xi]^l(h) = \xi(h_{(1)})h_{(2)},$$

对任意 $h \in H$。ξ 的右绕行自同构 $[\xi]^r$ 也可类似定义。也就是说，对任意 $h \in H$,

$$[\xi]^r(h) = \xi(h_{(2)})h_{(1)}.$$

容易验证，左绕行自同构和右绕行自同构都是 H 的代数自同构（参见 [4, §2.5]）。

1.1. 余群胚。

Hopf 代数的余模范畴之间的幺半等价可以用余群胚的语言来描述。

定义 1.1. 余群胚 $\mathcal{C}$ 由以下部分组成：

- 对象集合 ob($\mathcal{C}$)。

- 对于任意 $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，一个代数 $\mathcal{C}(X, Y)$。
- 对于任意 $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，代数同态

$$\Delta_{XY}^{Z} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z) \otimes \mathcal{C}(Z,Y) \text{ and } \varepsilon_X : \mathcal{C}(X,X) \to \mathbb{K}$$

以及线性映射

$$S_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,X)$$

使得对于任意 $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，下列图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{\Delta_{X,Y}^{Z}} & \mathcal{C}(X,Z)\otimes\mathcal{C}(Z,Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_{X,Y}^{T}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{X,Z}^{T}\otimes \mathrm{id}} \\ \mathcal{C}(X,T)\otimes\mathcal{C}(T,Y) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta_{T,Y}^{Z}} & \mathcal{C}(X,T)\otimes\mathcal{C}(T,Z)\otimes\mathcal{C}(Z,Y), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,Y) & & \mathcal{C}(X,Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_{X,Y}^{Y}} \searrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{X,Y}^{X}} \searrow \\ \mathcal{C}(X,Y)\otimes\mathcal{C}(Y,Y) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon_Y} \mathcal{C}(X,Y), & \mathcal{C}(X,X)\otimes\mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{\varepsilon_X\otimes\mathrm{id}} \mathcal{C}(X,Y). \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}(Y,X) & \xleftarrow{u} & \mathbb{K} & \xleftarrow{\epsilon_X} & \mathcal{C}(X,X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{K} \xrightarrow{u} \mathcal{C}(X,Y) \\ \uparrow{\scriptstyle m} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{X,X}^{Y}} & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{C}(Y,X)\otimes\mathcal{C}(Y,X) & & \xleftarrow{S_{X,Y}\otimes\mathrm{id}} & & \mathcal{C}(X,Y)\otimes\mathcal{C}(Y,X) & & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes S_{Y,X}} \mathcal{C}(X,Y)\otimes\mathcal{C}(X,Y). \end{array}$$

余群胚的公理与定义群胚的公理互为对偶。注意，对于任意对象 $X \in \mathcal{C}$，$\mathcal{C}(X,X)$ 是一个 Hopf 代数。若对于任意 $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，$\mathcal{C}(X,Y)$ 都是非零代数，则称余群胚 $\mathcal{C}$ 是连通的。

我们对余群胚使用 Sweedler 记号。设 $\mathcal{C}$ 是一个余群胚。对于任意 $a^{X,Y} \in \mathcal{C}(X,Y)$，我们记

$$\Delta_{X,Y}^{Z}(a^{X,Y}) = a_{(1)}^{X,Z} \otimes a_{(2)}^{Z,Y}.$$

以下命题描述了“反粒子”的性质。关于余群胚的其他性质，请读者参阅 [2]。

命题 1.2. [2, 命题 2.13] 设 $\mathcal{C}$ 为一个余群胚，且令 $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$。

(i) $S_{Y,X} : \mathcal{C}(Y,X) \to \mathcal{C}(X,Y)^{op}$ 是一个代数同态。(ii) 对任意 $Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 和 $a^{Y,X} \in \mathcal{C}(Y,X)$，

$$\Delta_{X,Y}^{Z}(S_{Y,X}(a^{Y,X})) = \sum S_{Z,X}(a_2^{Z,X}) \otimes S_{Y,Z}(a_1^{Y,Z}).$$

关于余群胚的详细介绍，请参阅 [2]。

在 [11], Schauenburg 指出，两个 Hopf 代数 H 和 L 上的余模范畴单体等价（称为 Morita-Takeuchi 等价），当且仅当它们之间存在一个 H-L-双伽罗瓦对象。后来，Bi-chon [2] 引入了余群胚的概念，为 Hopf（双）伽罗瓦对象提供了一个范畴论背景。

定理 1.3. [2, 定理 2.10, 2.12] 设 $\mathcal{C}$ 是一个连通余群胚。那么对于任意的 X, $Y \in \mathcal{C}$，我们有互为逆的幺半范畴等价

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\mathcal{C}(X,X)} & \cong^{\otimes} & \mathcal{M}^{\mathcal{C}(Y,Y)} \\ V & \longmapsto & V\square_{\mathcal{C}(X,X)}\mathcal{C}(X,Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\mathcal{C}(Y,Y)} & \cong^{\otimes} & \mathcal{M}^{\mathcal{C}(X,X)} \\ V & \longmapsto & V\square_{\mathcal{C}(Y,Y)}\mathcal{C}(Y,X) \end{array}$$

反之，若 H 和 L 是满足 $\mathcal{M}^H \cong^{\otimes} \mathcal{M}^L$的 Hopf 代数，则存在一个有 2 个对象 X, Y的连通余群胚，使得 $H = \mathcal{C}(X,X)$ 且$L = \mathcal{C}(Y,Y)$。

1.2. 卡拉比-丘代数。本小节中，我们回顾（扭曲）卡拉比-丘代数的定义。

定义 1.4. 若代数 A 满足

（i） A 是同调光滑的，也就是说，作为 A^e-模， A 有有限长度的有限生成投射分解；（ii）存在 A 的一个自同构 μ ，使得

$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d; \\ A^{\mu}, & i = d, \end{cases} \tag{2}$$

作为 A^e-模。

若存在这样的自同构 μ，则它在内自同构意义下唯一，并称为 A 的中山自同构。若扭曲卡拉比-丘代数的中山自同构是内自同构，则称其为卡拉比-丘代数。下文中，卡拉比-丘简称为 CY。

如引言中所述，扭曲 Calabi-Yau 代数与 Artin-Schelter（AS）正则代数密切相关。

定义 1.5. 设 H 是一个 Hopf 代数，并令 $_{\mathbb{K}}$ 也表示平凡的 H-模。

(i) 若 Hopf 代数 H 满足以下条件，则称其为左 AS-戈伦斯坦：

(a) $\operatorname{injdim}{}_H H = d < \infty$,

(b) $\dim \operatorname{Ext}^i_H({}_H\mathbb{K}, {}_H H) = \begin{cases} 0, & i \neq d; \\ 1 & i = d. \end{cases}$

右 AS-戈伦斯坦 Hopf 代数的定义类似。

(ii) 如果 H 同时是左、右 AS-戈伦斯坦的，则称 H 为 AS-戈伦斯坦。

（iii）此外，如果 H 的整体维数有限，则称 H 为 AS-正则。

与 [4, 定义 1.2], 相比，我们不要求 Hopf 代数 H 是诺特的。对于 AS-正则性，右整体维数总是等于左整体维数。当 H 是 AS-戈伦斯坦且同调光滑时，右内射维数总是等于左内射维数，二者均由整数 d给出，使得 $\operatorname{Ext}^d_{H^e}(H, H^e) \neq 0$。关于这一点的解释，请参见 [14,注 2.1.5] 。

设 H 是内射维数为 d的左 AS-戈伦斯坦 Hopf 代数。一维右 H-模 $\operatorname{Ext}^d_H({}_H\mathbb{K}_H H)$ 通常记作 $\int^l_H$，称为 H的左同调积分。设 $\int^l_H$中有一个非零元素 x，右 H-作用定义了一个代数同态 $\xi : H \to \mathbb{K}$，其定义为 $x \cdot h = \xi(h)x$，对任意 $h \in H$均成立。也就是说，$\int^l_H \cong \mathbb{K}^\xi$是右 H-模。

若 H 是右 AS-戈伦斯坦 Hopf 代数，其内射维数为 d，则可以类似地定义右同调积分 $\int^r_H = \operatorname{Ext}^d_H(\mathbb{K}^H, H_H)$。存在代数同态 $\eta : H \to \mathbb{K}$，使得 $\int^r_H \cong {}_\eta\mathbb{K}$作为左 H-模。

下面的引理概述了扭曲 CY Hopf 代数与 AS-戈伦斯坦 Hopf 代数（不一定是诺特的）之间的关系。这些结果可能是众所周知的。为方便读者，我们在此列出。

引理 1.6. 设 H 是一个具有双射反 antipode 的 Hopf 代数。则以下条件等价:

(i) H 是扭曲 Calabi–Yau；**(ii)** H 是左 AS-戈伦斯坦代数，且左平凡模 ${}_H\mathbb{K}$ 存在一个有界投射分解，其中每一项都是有限生成的；**(iii)** H 是右 AS-Gorenstein，且右平凡模 $\mathbb{K}_H$ 存在一个有界投射分解，其中每一项都是有限生成的。

现在假设 H 是扭曲 Calabi–Yau。

(iv) 设 μ 是 H的中山自同构。作为右 H-模，有 $\int_H^l \cong {}_{\mathbb{K}^\xi}$；作为左 H-模，有 $\int_H^r \cong {}_{\eta}\mathbb{K}$，其中 ξ 和 η 分别是由 $\xi = \varepsilon\mu$ 和 $\eta = \varepsilon\mu^{-1}$定义的代数同态。

(v) 若我们知道 $\int_H^l \cong {}_{\mathbb{K}^\xi}$ 作为右 H-模，其中 $\xi : H \to \mathbb{K}$ 是代数同态，则 H 的一个中山自同构由 $\mu = S^2[\xi]^l$给出。或者，代数自同构 $S^{-2}[\eta S]^r$ 也是 H的一个中山自同构，其中 $\eta : H \to \mathbb{K}$ 是代数同态，且 $\int_H^r \cong {}_{\eta}\mathbb{K}$ 作为左 H-模。

证明。(i)、(ii) 和 (iii) 的等价性由 [14, 推论 2.1.7] 得出。因此，若 H 是扭曲 Calabi–Yau 代数，则 H 既是左 AS-Gorenstein 也是右 AS-Gorenstein，也就是说，H 是 AS-Gorenstein。

(iv) 可由 [17]中的引理 2.15 和注 2.16 得出。

(v) 设 ξ 是代数同态，满足 $\int_H^l \cong {}_{\mathbb{K}^\xi}$ 作为右 H-模。由 [14], 中的命题 2.1.6 的证明可知

$$\mathrm{Ext}^i_{H^e}(H, H^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d; \\ H^\mu, & i = d, \end{cases}$$

其中，自同构 μ 由 $\mu(h) = \xi(h_{(1)})S^2(h_{(2)})$ 定义。也就是说，$S^2[\xi]^l$是 H的一个中山自同构。类似地，令 $\eta : H \to \mathbb{K}$ 为代数同态，使得作为左 H-模，$\int_H^r \cong {}_{\eta}\mathbb{K}$ 有

$$\mathrm{Ext}^i_{H^e}(H, H^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d; \\ {}_{S^2[\eta]^r}H, & i = d. \end{cases}$$

因此，$(S^2[\eta]^r)^{-1} = S^{-2}[\eta S]^r$ 也是 H的一个中山自同构。 □

1.3. Yetter-Drinfeld 模。令 H 为一个 Hopf 代数。H 上的一个（右-右）Yetter-Drinfeld 模 V 同时是一个右 H-模和右 H-余模，并满足相容条件

$$\delta(v \cdot h) = v_{(0)} \cdot h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})v_{(1)}h_{(3)},$$

对任意 $v \in V$、$h \in H$均成立。Yetter-Drinfeld 模范畴通常记作 $\mathcal{YD}^H_H$。

设 H 是一个 Hopf 代数，且 V 是一个右 H-余模。Bichon 在 [1, 命题 3.1] 中定义的 Yetter-Drinfeld 模 $V \boxtimes H$ 如下：右 H-模结构由右侧的乘法定义，而

右余模结构由线性映射定义

$$\begin{array}{rcl} V\otimes H & \to & V\otimes H\otimes H \\ v\otimes h & \mapsto & v_{(0)}\otimes h_{(2)}\otimes S(h_{(1)})v_{(1)}h_{(3)}. \end{array}$$

若 Yetter-Drinfeld 模同构于某个右 H-余模 V 的 $V\boxtimes H$，则称其为 H 上的自由模。

自由 Yetter-Drinfeld 模显然也是右 H-模上的自由模。若 V 是有限维的，则称自由 Yetter-Drinfeld 模 $V\boxtimes H$ 为有限生成的。

定义 1.7. 设 H 是一个 Hopf 代数，且设 $M\in\mathcal{YD}_H^H$。M 的自由 Yetter-Drinfeld 模分解是一个由自由 Yetter-Drinfeld 模组成的复形

$$\mathbf{P}_\bullet:\cdots\to P_{i+1}\to P_i\to\cdots\to P_1\to P_0\to 0$$

以及一个 Yetter-Drinfeld 模态射 ε: $P_0\to M$，使得该复形

$$\cdots\to P_{i+1}\to P_i\to\cdots\to P_1\to P_0\xrightarrow{\epsilon}M\to 0$$

是一个正合列。

定理 1.3 中的幺半等价可以扩展到 Yetter-Drinfeld 模范畴。

设 $\mathcal{C}$为一个余群胚，$X,Y\in$属于 ob($\mathcal{C}$)，且 V是一个右 $\mathcal{C}(X,X)$-模。根据 [2, 命题 6.2], ，我们知道 $V\otimes\mathcal{C}(X,Y)$ 具有由下式定义的右 $\mathcal{C}(Y,Y)$-模结构:

$$(v\otimes a^{X,Y})\leftarrow b^{Y,Y}=v\cdot b^{X,X}_{(2)}\otimes S_{Y,X}(b^{Y,X}_{(1)})a^{X,Y}b^{X,Y}_{(3)}.$$

结合由 $1\otimes\Delta^Y_{X,Y}$, $V\otimes\mathcal{C}(X,Y)$ 定义的右 $\mathcal{C}(Y,Y)$-余模结构，它是 $\mathcal{C}(Y,Y)$ 上的 Yetter-Drinfeld 模。若进一步假设 V是一个 Yetter-Drinfeld 模，则 $V\square_{\mathcal{C}(X,X)}\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $V\otimes\mathcal{C}(X,Y)$ 的 Yetter-Drinfeld 子模。

定理 1.8. [1, 定理 4.4] 设 $\mathcal{C}$ 是一个连通余群胚。那么对于任意 $X,Y\in$属于 ob($\mathcal{C}$)，函子

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{YD}^{\mathcal{C}(X,X)}_{\mathcal{C}(X,X)} & \longrightarrow & \mathcal{YD}^{\mathcal{C}(Y,Y)}_{\mathcal{C}(Y,Y)} \\ V & \longmapsto & V\square_{\mathcal{C}(X,X)}\mathcal{C}(X,Y) \end{array}$$

是幺半范畴的等价。此外，我们还有自然同构

$$\begin{array}{rcl} (V\square_{\mathcal{C}(X,X)}\mathcal{C}(X,Y))\boxtimes\mathcal{C}(Y,Y) & \longrightarrow & (V\boxtimes\mathcal{C}(X,X))\square_{\mathcal{C}(X,X)}\mathcal{C}(X,Y) \\ v\otimes a^{XY}\otimes b^{YY} & \longmapsto & v\otimes b^{XX}_{(2)}\otimes S_{Y,X}(b^{Y,X}_{(1)})a^{XY}b^{XY}_{(3)}. \end{array}$$

对任意 $v\in V, a^{XY}\in\mathcal{C}(X,Y)$ $b^{YY}\in\mathcal{C}(Y,Y)$。

2. A resolution of the trivial Yetter-Drinfeld module

设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，且 $A, B \in$ 一般线性群$_n(\mathbb{K})$ 满足 $B^tA^tBA = \lambda I_n$，其中某个非零标量为 λ。可以直接验证 $A^tB^tAB = \lambda I_n$ 也成立。回顾引言中定义的代数 $\mathcal{G}(A, B)$。注意，根据关系 (1)，在 $\mathcal{G}(A, B)$ 中，下列交换关系成立，

$$BA_{\mathbb{D}}u = u_{\mathbb{D}}BA.$$

也就是说，$_{\mathbb{D}}u_{\mathbb{D}}{}^{-1} = A^{-1}B^{-1}uBA$。

代数 $\mathcal{G}(A, B)$ 具有 Hopf 代数结构，其余乘法定义为

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj} (1 \leqslant i, j \leqslant n), \quad \Delta(_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = {}_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1} \otimes {}_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1},$$

余单位定义为

$$\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} \ (1 \leqslant i, j \leqslant n), \quad \varepsilon(_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = 1,$$

反粒子定义为

$$S(u) = {}_{\mathbb{D}}{}^{-1}A^{-1}u^tA, \quad S(_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = {}_{\mathbb{D}}{}^{\mp 1}.$$

反粒子显然是双射的。此外，容易验证 $S^2 = \Phi * \mathrm{id} * \Phi$ 具有主权特征 Φ：$\mathcal{G}(A, B) \to {}_{\mathbb{K}}$ 由代数映射 $u \mapsto BA^t$ 和 $_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1} \mapsto \lambda^{\pm 1}$ 或定义

$$S^2(u) = {}_{\mathbb{D}}{}^{-1}A^{-1}A^tu(A^t)^{-1}A_{\mathbb{D}} = BA^tu(A^t)^{-1}B^{-1}, \quad S^2(_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = {}_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}.$$

假设域 $_{\mathbb{K}}$的特征为 0。那么，余表示半环与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ 的余表示半环同构的 Hopf代数，恰好是满足 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$ 且对某个 $\lambda \in {}^{\times}$ $X^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\ AB^t\ X + {}_{\mathbb{K}}$有 $1 = 0$ 1 $B^tA^tBA = \lambda I_n$ 的 Hopf代数 $\mathcal{G}(A, B)$，并且方程 tr( ) 的任意解都是一般的（[9, 定理 .2]）。

对于引言中的矩阵 $A_q \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}$ $=$ $\mathcal{O}$ 2 $A\ B \in$ $_n$ $n \geqslant 2$ $B^tA^tBA = \lambda I_n$ ( )，我们有 $\mathcal{G}(A_q, A_q^{-1})$ $(\mathrm{GL}_q(\ ))$。设 , GL ($_{\mathbb{K}}$) ( ) 满足对某个 $\lambda \in {}_{\mathbb{K}}{}^{\times}$，并设 $q \in {}_{\mathbb{K}}{}^{\times}$ 满足 $q^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)q + 1 = 0$。文献 [9] 证明了 $\mathcal{G}(A, B)$ 与 $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(2))$ 上的余模的幺半范畴等价。

在本节中，我们将构造平凡 Yetter–Drinfeld 模 $_{\mathbb{K}}$ 在 $\mathcal{G}(A, B)$ 上的一个自由 Yetter–Drinfeld 分解。我们首先回顾 [9] 中定义的余群胚。

2.1. 余群胚。设 $m,n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$，且令 $A,B\in$一般线性群$_n(\Bbbk)$ $C,D\in$一般线性群$_m(\Bbbk)$。代数 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 定义如下。它由以下元素生成

$$(u_{ij}^{AB,CD})_{1\leqslant i,j\leqslant n},\quad \mathbb{D}^{AB,CD},\quad \mathbb{D}^{-1}_{AB,CD}$$

满足

$$u^tAu=C\mathbb{D},\quad uDu^t=B\mathbb{D},\quad \mathbb{D}^{AB,CD}\mathbb{D}^{-1}_{AB,CD}=1=\mathbb{D}^{-1}_{AB,CD}\mathbb{D}^{AB,CD},\tag{3}$$

其中，u 是矩阵（$u^{AB}{}_{,ij}{}^{CD}$）$_{1\leqslant i,j\leqslant n}$。类似地，在 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 中，我们有

$$BA\mathbb{D}u\ =\ u\mathbb{D}DC\quad\text{or}\quad CD\mathbb{D}u^t=u^t\mathbb{D}AB.$$

也就是说，$\mathbb{D}u\mathbb{D}^{-1}=A^{-1}B^{-1}uDC$ 或 $\mathbb{D}u^t\mathbb{D}^{-1}=D^{-1}C^{-1}u^tAB$。在不会引起混淆时，我们将分别用 u_{ij}、$\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}^{-1}$ 表示 $u^{AB}{}_{,ij}{}^{CD}$、$\mathbb{D}^{AB,CD}$ 和 $\mathbb{D}^{-1}_{AB,CD}$。显然，$\mathcal{G}(A,B|A,B)=\mathcal{G}(A,B)$。

对于任意的 $A,B\in\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$、$C,D\in\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ 和 $X,Y\in\mathrm{GL}_p(\Bbbk)$，定义以下映射：

$$\begin{array}{rcl}\Delta^{XY}_{AB,CD}:\mathcal{G}(A,B|C,D) & \longrightarrow & \mathcal{G}(A,B|X,Y)\otimes\mathcal{G}(X,Y|C,D)\\ u_{ij} & \longmapsto & \sum_{k=1}^{p}u_{ik}\otimes u_{kj}\\ \mathbb{D}^{\pm1} & \longmapsto & \mathbb{D}^{\pm1}\otimes\mathbb{D}^{\pm1},\end{array}\tag{4}$$

$$\begin{array}{rcl}\varepsilon_{AB}:\mathcal{G}(A,B) & \longrightarrow & \Bbbk\\ u_{ij} & \longmapsto & \delta_{ij}\\ \mathbb{D}^{\pm1} & \longmapsto & 1,\end{array}\tag{5}$$

$$\begin{array}{rcl}S_{AB,CD}:\mathcal{G}(A,B|C,D) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C,D|A,B)^{op}\\ u & \longmapsto & \mathbb{D}^{-1}A^{-1}u^tC\\ \mathbb{D}^{\pm1} & \longmapsto & \mathbb{D}^{\mp1}\end{array}\tag{6}$$

显然，$S_{AB,CD}$ 是双射。

与 $\mathcal{G}(A|B)$ 相关联的余群胚是在 [9, 定义 3.3] 的基础上，根据 [9,引理 3.2] 引入的。

定义 2.1。余群胚 $\mathcal{G}$ 是按如下方式定义的余群胚：

(i) $\mathrm{ob}(\mathcal{G})=\{(A,B)\in$一般线性群$_n(\Bbbk)\times$一般线性群$_n(\Bbbk)\ n\geqslant 1\}$。
(ii) 对于 (A,B)、$(C,D)\in\mathrm{ob}(\mathcal{G})$，代数 $\mathcal{G}(A,B,|C,D)$ 是按式 (3) 定义的代数。(iii) 结构映射 $\Delta^{\bullet}_{\bullet,\bullet}$、$\varepsilon_{\bullet}$ 和 $S_{\bullet,\bullet}$ 分别由式 (4)、(5) 和 (6) 定义。

引理 2.2。 [9, 推论 3。6] 设 $\lambda,\mu\in\mathbb{K}^{\times}$。考虑 $\mathcal{G}$ 的满子余群胚 $\mathcal{G}^{\lambda,\ \mu}$，其对象为

$$\mathrm{ob}(\mathcal{G}^{\lambda,\mu})=\{(A,B)\in\mathrm{ob}(\mathcal{G})|B^tA^tBA=\lambda I_n\ and\ \mathrm{tr}(AB^t)=\mu\}$$

那么 $\mathcal{G}^{\lambda,\ \mu}$ 是一个连通余群胚。

设 $m\ n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ $A\ B\in\ {}_{n}\mathbb{K}$ $C\ D\in\ {}_{m}\mathbb{K}$ $B^tA^tBA=$，$\lambda I_n\ \ D^tC^tDC=\lambda I_m$ $AB^t\ =\ CD^t\ =\mu$ $\lambda\ \mu\in\ ^{\times}$ 且 , GL ( ) , GL ( ) 满足 , 且对于某个 ,$\mathbb{K}$，有 tr( ) tr( )。那么 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 根据上述引理是一个非零代数。根据命题 2.8], ，它是一个 $\mathcal{G}(A,B)$-$\mathcal{G}(C,D)$-双伽罗瓦对象。余张量积 $\mathcal{G}(A,B)$-$\mathcal{G}(C,D)$ 诱导如下幺半范畴的等价（定理 1.3 和定理 1.8），

$$\mathcal{M}^{\mathcal{G}(A,B)}\cong^{\otimes}\mathcal{M}^{\mathcal{G}(C,D)},\quad \mathcal{YD}^{\mathcal{G}(A,B)}_{\mathcal{G}(A,B)}\cong^{\otimes}\mathcal{YD}^{\mathcal{G}(C,D)}_{\mathcal{G}(C,D)}.$$

2.2. 分解。设 $A,B\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{k})\ (n\geqslant 2)$。现在我们构造代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 上平凡 Yetter–Drinfeld 模 k 的一个自由 Yetter–Drinfeld 分解。基本的 n 维 $\mathcal{G}(A,B)$-余模 $V_{A,B}$定义如下。它有一个基 $v^A_{1\ \ B},\ldots,v^A_{n\ \ B}$。余模作用$\rho:V_{A,B}\to V_{A,B}\otimes\mathcal{G}(A,B)$ 定义为 $\rho(v^A_{i\ \ B})=\sum_{k=1}^n v^A_{k\ \ B}\otimes u_{ki}$。对偶向量空间 $V^*_{A,B}$是一个 $\mathcal{G}(A,B)$-余模，其余模作用 $\rho:V^*_{A,B}\to V^*_{A,B}\otimes\mathcal{G}(A,B)$ 定义为 $\rho(v^A_{i\ \ B^*})=\sum_{j=1}^n v^A_{j\ \ B^*}\otimes S(u_{ij})$。在不会引起混淆时，$V_{A,B}$ 的基简称为 $v_1,\ldots,v_n$。

定理 2.3. 设 $A,B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\ (n\geqslant 2)$ 满足 $B^tA^tBA=\lambda I_n$，其中某个 $\lambda\in\mathbb{K}^{\times}$，并令 $\mathcal{G}=\mathcal{G}(A,B)$。设 $V_{A,B}$ 和 $W_{A,B}$ 均为基本的 n 维 $\mathcal{G}(A,B)$-余模。我们用 $v_i^*\otimes v_j$ 和 $w_i^*\otimes w_j$ 分别表示 $V^*_{A,B}\otimes V_{A,B}$ 和 $W^*_{A,B}\otimes W_{A,B}$ 的基。以下复形是作为 $\mathcal{G}(A,B)$ 上的 Yetter-Drinfeld 模的 ${}_{\mathbb{K}}$ 的自由 Yetter–Drinfeld 分解,

$$0\to{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}\xrightarrow{\psi_4}(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\boxtimes\mathcal{G}\oplus{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}\xrightarrow{\psi_3}(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\boxtimes\mathcal{G}\oplus(W^*_{A,B}\otimes W_{A,B})\boxtimes\mathcal{G}$$

(7)

$$\xrightarrow{\psi_2}{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}\oplus(W^*_{A,B}\otimes W_{A,B})\boxtimes\mathcal{G}\xrightarrow{\psi_1}{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}\xrightarrow{\varepsilon}{}_{\mathbb{K}}\to 0,$$

其中态射定义如下,

$$\begin{array}{rccl}\psi_4:&{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}&\longrightarrow&(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\boxtimes\mathcal{G}\oplus{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}\\&x&\longmapsto&\sum_{i,j}v_i^*\otimes v_j\otimes((A^tB)_{ij}-(AuB^t)_{ij})x+({}_{\mathbb{D}}-1)x,\end{array}$$

$\psi_3:(V^*_{A,\ B}\otimes V_{A,\ B})\boxtimes\mathcal{G}\oplus{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}\longrightarrow(V^*_{A,\ B}\otimes V_{A,\ B})\boxtimes\mathcal{G}\oplus(W^*_{A,\ B}\otimes W_{A,\ B})\boxtimes\mathcal{G}$

定义为

$$\begin{aligned}
\psi_3' : (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} &\longrightarrow (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \\
v_i^* \otimes v_j \otimes x &\longmapsto v_i^* \otimes v_j \otimes x + \textstyle\sum_{k,l} v_k^* \otimes v_l \otimes (uB^t)_{il}(B^{-1})_{jk} x \\
&\quad + \textstyle\sum_{k,l} w_k^* \otimes w_l \otimes \frac{1}{\lambda}(B^t A^t)_{ik}(BA)_{lj} \mathbb{D} x - w_i^* \otimes w_j \otimes x, \\
\psi_3'' : {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} &\longrightarrow (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \\
x &\longmapsto \textstyle\sum_{i,j} v_i^* \otimes v_j \otimes (A^t B)_{ij} x \\
&\quad + \textstyle\sum_{i,j} w_i^* \otimes w_j \otimes ((AuB^t)_{ij} - (A^t B)_{ij}) x,
\end{aligned}$$

$\psi_2 : (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G}$
定义为

$$\begin{aligned}
\psi_2' : (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \\
v_i^* \otimes v_j \otimes x &\longmapsto (u_{ij} - \delta_{ij})x + \textstyle\sum_{k,l} w_k^* \otimes w_l \otimes \frac{1}{\lambda}(B^t A^t)_{ik}(BA)_{lj} \mathbb{D} x \\
&\quad - w_i^* \otimes w_j \otimes x, \\
\psi_2'' : (W_{A,\ B}^* \otimes W_{A,\ B}) \boxtimes \mathcal{G} &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,\ B}^* \otimes W_{A,\ B}) \boxtimes \mathcal{G} \\
w_i^* \otimes w_j \otimes x &\longmapsto -\delta_{ij} x - w_i^* \otimes w_j \otimes x \\
&\quad - \textstyle\sum_{k,l} w_k^* \otimes w_l \otimes (uB^t)_{il}(B^{-1})_{jk} x,
\end{aligned}$$

$$\psi_1 : {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G}$$

定义为

$$\begin{aligned}
\psi_1' : {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \\
x &\longmapsto (\mathbb{D} - 1)x, \\
\psi_1'' : (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \\
w_i^* \otimes w_j \otimes x &\longmapsto (\delta_{ij} - u_{ij})x.
\end{aligned}$$

2.3. 定理 2.3 的证明。在本小节中，我们沿用定理 2.3 中的记号。

设 H 是一个 Hopf 代数。设 $V \in \mathcal{M}^H$ 和 $X \in \mathcal{YD}_H^H$。可以直接验证，以下是一个自然同构（参见 [1, 命题 3.3]）

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(V, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}_H^H}(V \boxtimes H, X) \\
f &\longmapsto \tilde{f}\,(v \otimes h \mapsto f(v)h)\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

引理 2.4. 定理 2.3 中序列 (7) 的映射是 Yetter-Drinfeld 模的态射。

证明。容易验证，下列映射是 $\mathcal{G}$-余模的态射。

$$\begin{aligned}
\gamma_1^V : V_{A,B^*} \otimes V_{A,B} &\longrightarrow {}_{\mathbb{K}}\boxtimes \mathcal{G} \\
v_i^* \otimes v_j &\longmapsto \delta_{ij},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2^V : {V_{A,B}}^* \otimes V_{A,B} &\longrightarrow \mathbb{K} \boxtimes \mathcal{G}\\ v_i^* \otimes v_j &\longmapsto u_{ij},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3^V : {V_{A,B}}^* \otimes V_{A,B} &\longrightarrow {V_{A,B}}^* \otimes V_{A,B} \boxtimes \mathcal{G}\\ v_i^* \otimes v_j &\longmapsto \textstyle\sum_{k,l} v_k^* \otimes v_l \otimes (uB^t)_{il}(B^{-1})_{jk},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4^V : \mathbb{K} &\longrightarrow {V_{A,B}}^* \otimes V_{A,B} \otimes \mathcal{G}\\ 1 &\longmapsto \textstyle\sum_{i,j} v_i^* \otimes v_j \otimes (A^t B)_{ij},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_5^V : \mathbb{K} &\longrightarrow {V_{A,B}}^* \otimes V_{A,B} \otimes \mathcal{G}\\ 1 &\longmapsto \textstyle\sum_{i,j} v_i^* \otimes v_j \otimes (AuB^t)_{ij}.\end{aligned}$$

在上述态射中，将空间 $V_{A,B}$ 替换为空间 $W_{A,B}$，即可得到 $\mathcal{G}$-余模态射 γ_i^W，$i = 1, 2, \cdots, 5$。此外，我们还有以下两个 $\mathcal{G}$-余模态射，

$$\begin{aligned}\gamma_6 : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \boxtimes \mathcal{G}\\ 1 &\longmapsto \mathbb{D} - 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_7 : V_{A,B}^* \otimes V_{A,B} &\longrightarrow W_{A,B}^* \otimes W_{A,B} \boxtimes \mathcal{G}\\ v_i^* \otimes v_j &\longmapsto \textstyle\sum_{k,l} w_k^* \otimes w_l \otimes \frac{1}{\lambda}(B^t A^t)_{ik}(BA)_{lj}\mathbb{D} - w_i^* \otimes w_j.\end{aligned}$$

在序列 (7) 中，我们有 $\psi_1' = \tilde{\gamma_6}$, $\psi_1'' = \gamma_1^W - \gamma_2^W$, $\psi_2' = \gamma_2^V - \gamma_1^V + \tilde{\gamma_7}$, $\psi_2'' = -\mathrm{id} - \gamma_1^W - \gamma_3^W$, $\psi_3' = \mathrm{id} + \gamma_3^V + \tilde{\gamma_7}$, $\psi_3'' = \gamma_5^W - \gamma_4^W + \gamma_4^V$, $\psi_4 = \gamma_4^V - \gamma_5^V + \tilde{\gamma_6}$, 其中记号 $\tilde{}$ 与方程 (8) 中的含义相同。因此，态射 ψ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ 都是 Yetter-Drinfeld 模的态射。□

引理 2.5. 定理 2.3 中的序列 (7) 是一个复形。

证明. 容易验证 $\varepsilon\psi_1 = 0$。也容易验证以下方程成立。

$$\tilde{\gamma_1^U}\tilde{\gamma_3^U} = \tilde{\gamma_2^U},\ \tilde{\gamma_3^U}\tilde{\gamma_4^U} = \tilde{\gamma_5^U},\ \tilde{\gamma_3^U}\tilde{\gamma_5^U} = \tilde{\gamma_4^U} + \tilde{\gamma_4^U}\tilde{\gamma_6^U},\ \tilde{\gamma_2^U}\tilde{\gamma_3^U} = \tilde{\gamma_1^U} + \tilde{\gamma_6}\tilde{\gamma_1^U},\ \text{for } U = V, W$$

$$\tilde{\gamma_1^V}\tilde{\gamma_4^V} = \tilde{\gamma_1^W}\tilde{\gamma_4^W},\ \ \tilde{\gamma_2^V}\tilde{\gamma_4^V} = \tilde{\gamma_1^W}\tilde{\gamma_5^W},\ \ \tilde{\gamma_7}\tilde{\gamma_i^V} = \tilde{\gamma_i^W}\tilde{\gamma_6},\ i = 4, 5,$$

$$\tilde{\gamma_2^V}\tilde{\gamma_3^V} = \tilde{\gamma_1^V} + \tilde{\gamma_1^W}\tilde{\gamma_7},\ \tilde{\gamma_7}\tilde{\gamma_3^V} = \tilde{\gamma_3^W}\tilde{\gamma_7},\ \tilde{\gamma_6}\tilde{\gamma_2^V} = \tilde{\gamma_2^W}\tilde{\gamma_7}.$$

由这些方程可得 $\psi_1\psi_2 = \psi_2\psi_3 = \psi_3\psi_4 = 0$。因此，序列 (7) 是一个复形。□

为了证明定理 2.3 中的序列 (7) 是正合的，我们需要做一些准备。

引理 2.6. 设 $m, n \in \mathbb{N}, n, m \geqslant 2$，且 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ $C, D \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$，满足 $B^t A^t BA = \lambda I_n$, $D^t C^t DC = \lambda I_m$，并且 $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t) = \mu$，其中 λ, $\mu \in \mathbb{K}^\times$。那么，对于 $\mathcal{G}(A, B)$，定理 2.3 中的序列正合，当且仅当对于 $\mathcal{G}(C, D)$，该序列正合。

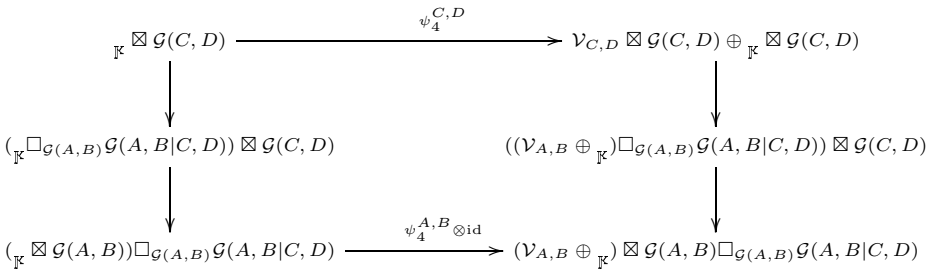
证明。根据 [1, 定理 4.1], 定理 1.8 和引理 2.2，我们得到函子

$$-\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D):\mathcal{YD}^{\mathcal{G}(\mathcal{A},\mathcal{B})}_{\mathcal{G}(\mathcal{A},\mathcal{B})}\to\mathcal{YD}^{\mathcal{G}(\mathcal{C},\mathcal{D})}_{\mathcal{G}(\mathcal{C},\mathcal{D})}$$

是保持 Yetter-Drinfeld 模自由性的幺半范畴的等价。我们需要验证，该函子将定理 2.3 中关于 $\mathcal{G}(A,B)$ 的 Yetter-Drinfeld 模复形转换为定理 2.3 中关于 $\mathcal{G}(C,D)$ 的 Yetter-Drinfeld 模复形。

为简便起见，下文记 $V^*_{A,B}\otimes V_{A,B}=\mathcal{V}_{A,B}$ 和 $W^*_{A,B}\otimes W_{A,B}=\mathcal{W}_{A,B}$。

首先，考虑下面的图表。



由于 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 是一个左 $\mathcal{G}(A,B)$-伽罗瓦对象，我们有同构

$$_{\mathbb{K}}\cong{}_{\mathbb{K}}\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D).$$

我们还有如下 $\mathcal{G}(C,D)$-余模的同构。

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{V}_{C,D}&\longrightarrow&\mathcal{V}_{A,B}\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D),\\ v_i^{C,D*}\otimes v_j^{C,D}&\longmapsto&\sum_{k,l}v_k^{A,B*}\otimes v_l^{A,B}\otimes S_{CD,AB}(u_{ik}^{CD,AB})u_{lj}^{AB,CD}.\end{array}$$

结合定理 1.8 的同构，我们得到复合

$$_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}(C,D)\to({}_{\mathbb{K}}\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D))\boxtimes\mathcal{G}(C,D)\to({}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}(A,B))\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D)$$

由下式给出

$$\begin{array}{rcl}{}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}(C,D)&\longrightarrow&({}_{\mathbb{K}}\boxtimes\mathcal{G}(A,B))\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D)\\ 1\otimes x^{CD,CD}&\longmapsto&x^{AB,AB}_{(2)}\otimes S_{CD,AB}(x^{CD,AB}_{(1)})x^{AB,CD}_{(3)},\end{array}$$

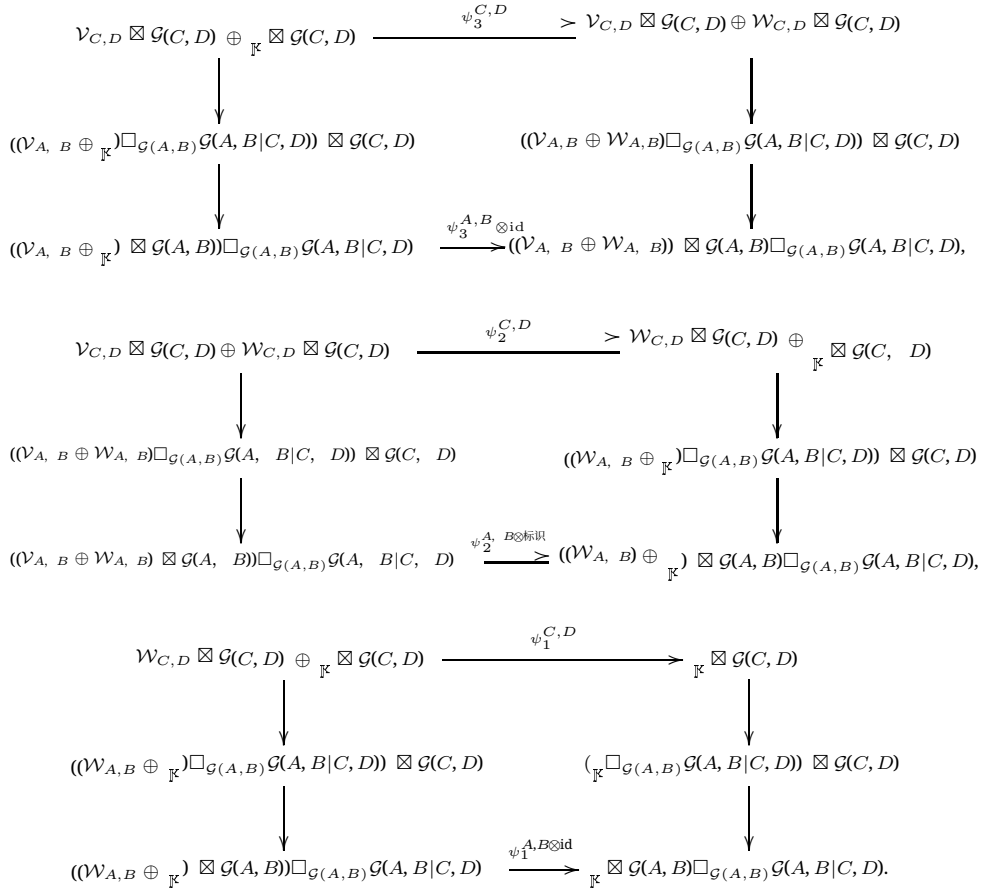
以及复合

$$\mathcal{V}_{C,\ D}\boxtimes\mathcal{G}(C,D)\to(\mathcal{V}_{A,\ B}\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D))\boxtimes\mathcal{G}(C,D)\to\mathcal{V}_{A,\ B}\boxtimes\mathcal{G}(A,B)\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D)$$

由下式给出

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{V}_{C,D}\boxtimes\mathcal{G}(C,D)&\to&\mathcal{V}_{A,B}\boxtimes\mathcal{G}(A,B)\Box_{\mathcal{G}(A,B)}\mathcal{G}(A,B|C,D)\\ v_i^{C,D*}\otimes v_j^{C,D}\otimes x^{CD,CD}&\mapsto&\sum_{k,l}v_k^{A,B*}\otimes v_l^{A,B}\\ &&\otimes x^{AB,AB}_{(2)}\otimes S_{CD,AB}(x^{CD,AB}_{(1)})S_{CD,AB}(u_{ik}^{CD,AB})u_{lj}^{AB,CD}x^{AB,CD}_{(3)}.\end{array}$$

竖直箭头是同构的复合，因此也是同构。验证上述图是交换图是常规但繁琐的工作。类似地，我们有以下交换图，其中竖直态射是同构。



因此，我们得到：当 $\mathcal{G}(A,B)$ 时，定理 2.3 中的序列正合，当且仅当它在 $\mathcal{G}(C,D)$ 时正合。□

为了证明定理 2.3 中的序列 (7) 正合，我们先证明当 $A = A_q, B = A_q^{-1}$ 时该序列正合。这需要几个步骤。我们知道 $\mathcal{G}(A_q, A_q^{-1}) = \mathcal{O}$(一般线性群$_q$(2))。照例，我们令 $a = u_{11}, b = u_{12}, c = u_{21}$ 和 $d = u_{22}$。元素 $\mathbb{D}$ 正是量子行列式 $\mathbb{D}^q := ad - qbc = da - q^{-1}bc$，它是一个中心元。

$\bar{\ }$ $\bar{\ }$回忆一下，对于某个 $q \in \mathbb{K}^\times$， $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2))$ 是由 $\bar{a}$、b、$\bar{c}$、d 生成并满足以下关系的代数

$$\begin{array}{lll} \bar{a}\bar{b} = q\bar{b}\bar{a} & \bar{a}\bar{c} = q\bar{c}\bar{a} & \bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{b} \\ \bar{b}\bar{d} = q\bar{d}\bar{b} & \bar{c}\bar{d} = q\bar{d}\bar{c} & \bar{a}\bar{d} - q\bar{b}\bar{c} = \bar{d}\bar{a} - q^{-1}\bar{b}\bar{c} = 1 \end{array}$$

引理 2.7. 存在一个代数自同构

$$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(2)) \cong \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2))[z^{\pm 1}].$$

证明。容易验证，从 $\mathcal{O}$(一般线性群$_q$(2)) 到 $\mathcal{O}$(SL$_q$(2))$[z^{\pm 1}]^{-}$ $^{-}$的映射将 a, b, c, d 分别映为 $\bar{a}z, bz, \bar{c}, d$，是一个代数自同构。

我们指出，关于 [1]，中的概念，我们有 $E_q = A_{q^{-1}}$。因此，如我们的论文所示， $\mathcal{B}(E_q) = \mathcal{O}(SL_{q^{-1}}(2))$。根据 [1, 引理 5.5]，以下结果就 $O(SL_q(2)) = B(E_{q^{-1}})$ 而言是 [1] 中的引理 5.6。

引理 2.8。设 $\mathcal{A} = \mathcal{O}$(SL$_q$(2))， V 是一个具有基 $\{v_1, v_2\}$ 的二维向量空间。存在一个作为 $\mathcal{A}$-模的$_{\mathbb{K}}$ 的自由分解,

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{\phi_3} (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\phi_2} (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{A} \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathbb{K}} \to 0. \tag{9}$$

态射 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 定义如下,

$\phi_3(x) = v_1^* \otimes v_1 \otimes ((-q + q^{-1}d)x) + v_1^* \otimes v_2 \otimes (-cx) + v_2^* \otimes v_1 \otimes (-bx) + v_2^* \otimes v_2 \otimes ((-q^{-1} + qa)x)$,

$\phi_2(v_1^* \otimes v_1 \otimes x) = v_1^* \otimes v_1 \otimes x + v_2^* \otimes v_1 \otimes (-q^{-1}bx) + v_2^* \otimes v_2 \otimes ax$,
$\phi_2(v_1^* \otimes v_2 \otimes x) = v_1^* \otimes v_1 \otimes bx + v_1^* \otimes v_2 \otimes (1 - qa)x$,$\phi_2(v_2^* \otimes v_1 \otimes x)$
$= v_2^* \otimes v_1 \otimes (1 - q^{-1}d)x + v_2^* \otimes v_2 \otimes cx$,$\phi_2(v_2^* \otimes v_2 \otimes x)$
$= v_1^* \otimes v_1 \otimes dx + v_1^* \otimes v_2 \otimes (-qcx) + v_2^* \otimes v_2 \otimes x$,$\phi_1(v_1^* \otimes v_1 \otimes x)$
$= (a - 1)x$, $\phi_1(v_1^* \otimes v_2 \otimes x) = bx$,$\phi_1(v_2^* \otimes v_1 \otimes x) = cx$, $\phi_1($
$v_2^* \otimes v_2 \otimes x) = (d - 1)x$.

将函子 $- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}]$ 应用于复形 (9)，我们得到以下复形,

$$0 \to \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \xrightarrow{\phi_3'} (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \xrightarrow{\phi_2'} (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \xrightarrow{\phi_1'} \mathcal{A}[z^{\pm 1}],$$

其中 $\phi_i' = \phi_i \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}]$ $(i = 1, 2, 3)$。于是我们得到以下交换图,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_3'} & (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_2'} & (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_1'} & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_3'} & (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_2'} & (V^* \otimes V) \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_1'} & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \end{array} \tag{10}$$

其中 f_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ 是由 $z - 1$ 右乘所定义的态射。

引理 2.9. 我们有

$$cone(f) \to_{\mathbb{K}} \to 0$$

是$_{\mathbb{K}}$ 作为 $\mathcal{A}[z^{\pm 1}]$-模的投射分解。

证明。令 C_1 为以下复形

$$0 \to {}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \xrightarrow{\cdot(z-1)} {}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \to 0.$$

我们有一个态射 g，从 $cone(f)$ 到此复形，

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\phi_3'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\phi_2'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\phi_1'} & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{g_1} & {}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}[z^{\pm 1}] \\
 & & \downarrow{\scriptstyle -f_3} & & \downarrow{\scriptstyle -f_2} & & \downarrow{\scriptstyle -f_1} & & \downarrow{\scriptstyle -f_0} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot(z-1)} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_3'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_2'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_1'} & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{g_0} & {}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}[z^{\pm 1}],
\end{array}$$

其中 $g_0 = \varepsilon \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}]$ 且 $g_1 = -\varepsilon \otimes \mathcal{A}[z^{\pm 1}]$。

由于函子 $- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}]$ 是正合的，很容易看出我们有以下行正合的双复形。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_3'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_2'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\phi_1'} & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}]} & {}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}[z^{\pm 1}] \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot(z-1)} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\phi_3'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\phi_2'} & (V^*\otimes V)\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\phi_1'} & \mathcal{A}[z^{\pm 1}] & \xrightarrow{-\varepsilon\otimes\mathcal{A}[z^{\pm 1}]} & {}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}[z^{\pm 1}].
\end{array}$$

将上述双复形记为 C_2。由无环组装引理 [15,引理 2.7。3], 全复形 Tot(C_2) 是正合的。全复形 Tot(C_2) 就是复形 $cone(g)$。因此， $cone(f)$ 与 C_1 拟同构。我们有以下 $\mathcal{A}[z^{\pm 1}]$-模的正合列。

$$0 \to {}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \xrightarrow{\cdot(z-1)} {}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}] \to {}_{\mathbb{K}} \to 0$$

因此，复形 $cone(f) \to {}_{\mathbb{K}} \to 0$ 是正合的。函子 $- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[z^{\pm 1}]$ 也保持投射性，所以 $cone(f) \to {}_{\mathbb{K}} \to 0$ 是$\mathbb{K}$的一个投射分解。□

引理 2.10. 设$q \in {}_{\mathbb{K}}^{\times}$。当 $A = A_q$ 和 $B = A_q^{-1}$时，定理 2.3 中的序列是正合的。

证明。设 $\mathcal{B} = \mathcal{G}(A_q, A_q^{-1})$。当 $A = A_q$ 和 $B = A_q^{-1}$时，序列 (7) 正是下面的复形，

$$0 \to P_4 \xrightarrow{\psi_4} P_3 \xrightarrow{\psi_3} P_2 \xrightarrow{\psi_2} P_1 \xrightarrow{\psi_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} {}_{\mathbb{K}} \to 0, \tag{11}$$

其中 $P_4 = {}_{\mathbb{K}} \boxtimes \mathcal{B}$, $P_3 = (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{B} \oplus {}_{\mathbb{K}} \boxtimes \mathcal{B}$, $P_2 = (V_{A,B}^* \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{B} \oplus (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{B}$, $P_1 = (W_{A,B}^* \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{B} \oplus {}_{\mathbb{K}} \boxtimes \mathcal{B}$, $P_0 = {}_{\mathbb{K}} \boxtimes \mathcal{B}$，而态射定义如下

$$\psi_4(x) = v_1^* \otimes v_1 \otimes ((-q + q^{-1}d)x) + v_1^* \otimes v_2 \otimes (-cx) + v_2^* \otimes v_1 \otimes (-bx) + v_2^* \otimes v_2 \otimes ((-q^{-1} + qa)x) + ({}_{\mathbb{D}}{}^q - 1)x,$$

$\psi_3(v_1^*\otimes v_1\otimes x) = v_1^*\otimes v_1\otimes x+v_2^*\otimes v_1\otimes(-q^{-1}bx)+v_2^*\otimes v_2\otimes ax+w_1^*\otimes w_1\otimes(\mathbb{D}^q-1)x,$
$\psi_3(v_1^*\otimes v_2\otimes x) = v_1^*\otimes v_1\otimes bx+v_1^*\otimes v_2\otimes(1-qa)x+w_1^*\otimes w_2\otimes(\mathbb{D}^q-1)x,$
$\psi_3(v_2^*\otimes v_1\otimes x) = v_2^*\otimes v_1\otimes(1-q^{-1}d)x+v_2^*\otimes v_2\otimes cx+w_2^*\otimes w_1\otimes(\mathbb{D}^q-1)x,$
$\psi_3(v_2^*\otimes v_2\otimes x) = v_1^*\otimes v_1\otimes dx+v_1^*\otimes v_2\otimes(-qc)x+v_2^*\otimes v_2\otimes x+w_2^*\otimes w_2\otimes(\mathbb{D}^q-1)x,$
$\psi_3(x) = w_1^*\otimes w_1\otimes(q-q^{-1}d)x+w_1^*\otimes w_2\otimes cx+w_2^*\otimes w_1\otimes bx+w_2^*\otimes w_2\otimes (q^{-1}-qa)x-v_1^*\otimes v_1\otimes qx-v_2^*\otimes v_2\otimes q^{-1}x,$

$\psi_2(v_1^*\otimes v_1\otimes x) = (a-1)x+w_1^*\otimes w_1\otimes(\mathrm{D}_q-1)x, \psi_2(v_1^*\otimes v_2\otimes x)$
$= bx+w_1^*\otimes w_2\otimes(\mathrm{D}_q-1)x, \psi_2(v_2^*\otimes v_1\otimes x) = cx+w_2^*\otimes w_1\otimes(\mathbb{D}^q-1)x, \psi_2$
$(v_2^*\otimes v_2\otimes x) = (d-1)x+w_2^*\otimes w_2\otimes(\mathrm{D}_q-1)x, \psi_2(w_1^*\otimes w_1\otimes x)$
$= -w_1^*\otimes w_1\otimes x-w_2^*\otimes w_1\otimes(-q^{-1}b)x-w_2^*\otimes w_2\otimes ax-x, \psi_2(w_1^*\otimes w_2\otimes x)$
$= -w_1^*\otimes w_1\otimes bx-w_1^*\otimes w_2\otimes(1-qa)x, \psi_2(w_2^*\otimes w_1\otimes x) = -w_2^*\otimes w_1\otimes($
$1-q^{-1}d)x-w_2^*\otimes w_2\otimes cx, \psi_2(w_2^*\otimes w_2\otimes x) = -w_1^*\otimes w_1\otimes dx-w_1^*\otimes w_2\otimes($
$-qc)x-w_2^*\otimes w_2\otimes x-x,$

$\psi_1(w_1^*\otimes w_1\otimes x) = (1-a)x, \quad \psi_1(w_1^*\otimes w_2\otimes x) = -bx,$

$\psi_1(w_2^*\otimes w_1\otimes x) = -cx,\ \psi_1(w_2^*\otimes w_2\otimes x) = (1-d)x,\ \psi_1(x) = (\mathbb{D}^q-1)x.$

应用引理 2.7 和引理 2.9 中给出的代数同构 $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(2))\cong\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2))[z^{\pm1}]$，我们得到以下复形是正合的，

$$0\to P_4\xrightarrow{\bar\psi_4}P_3\xrightarrow{\bar\psi_3}P_2\xrightarrow{\bar\psi_2}P_1\xrightarrow{\bar\psi_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}\Bbbk\to 0, \tag{12}$$

其中 ψ_i, $i=1,2,3,4$ 是 $\mathcal{B}$-模的态射，定义如下，

$\bar\psi_4(x) = v_1^*\otimes v_1\otimes(-q+q^{-1}d)x+v_1^*\otimes v_2\otimes(-cx)+v_2^*\otimes v_1\otimes(-b)x+(q^{-1})((\mathbb{D})(\mathbb{D}))((q^{-1}+qa)(\mathbb{D}^q-1)),$
$v_2^*\otimes v_2\otimes x$

$\bar\psi_3(v_1^*\otimes v_1\otimes x) = v_1^*\otimes v_1\otimes x+v_2^*\otimes v_1\otimes(-q^{-1}b)x+v_2^*\otimes v_2\otimes a(q^{-1})x+((\mathbb{D}))(\mathbb{D}^q-1),$
$w_1^*\otimes w_1\otimes x$

$\bar\psi_3(v_1^*\otimes v_2\otimes x) = v_1^*\otimes v_1\otimes b(\mathbb{D}^q)^{-1}x+v_1^*\otimes v_2\otimes(1-qa(\mathbb{D}^q)^{-1})x+w_1^*\otimes w_2\otimes(\mathbb{D}^q-1)$
$x, \bar\psi_3(v_2^*\otimes v_1\otimes x) = v_2^*\otimes v_1\otimes(1-q^{-1}d)x+v_2^*\otimes v_2\otimes cx+w_2^*\otimes w_1\otimes(\mathbb{D}^q-1)x,$
$\psi_3(v_2^*\otimes v_2\otimes x) = v_1^*\otimes v_1\otimes dx+v_1^*\otimes v_2\otimes(-qc)x+v_2^*\otimes v_2\otimes x+w_2^*\otimes w_2\otimes(\mathbb{D}^q-1)x,$
$\bar\psi_3(x) = w_1^*\otimes w_1\otimes(q-q^{-1}d)x+w_1^*\otimes w_2\otimes cx+w_2^*\otimes w_1\otimes b(\mathbb{D}^q)^{-1}x+w_2^*\otimes w_2\otimes (q^{-1}-qa(\mathbb{D}^q)^{-1})x,$

$$\bar{\psi}_2(v_1^*\otimes v_1\otimes x) = (a\mathrm{D}_q^{-1}-1)x + w_1^*\otimes w_1\otimes(\mathrm{D}_q-1)x, \bar{\psi}_2(v_1^*\otimes v_2\otimes x) = b\mathrm{D}_q^{-1}x + w_1^*\otimes w_2\otimes(\mathbb{D}^q-1)x, \psi_2(v_2^*\otimes v_1\otimes x) = cx + w_2^*\otimes w_1\otimes(\mathbb{D}^q-1)x, \psi_2(v_2^*\otimes v_2\otimes x) = (d-1)x + w_2^*\otimes w_2\otimes(\mathrm{D}_q-1)x, \bar{\psi}_2(w_1^*\otimes w_1\otimes x)$$
$$= -w_1^*\otimes w_1\otimes x - w_2^*\otimes w_1\otimes(-q^{-1}b\mathrm{D}_q^{-1})x - w_2^*\otimes w_2\otimes a\mathbb{D}^{q^{-1}}x, \bar{\psi}_2(w_1^*\otimes w_2\otimes x)$$
$$= -w_1^*\otimes w_1\otimes b\mathrm{D}_q^{-1}x - w_1^*\otimes w_2\otimes(1-qa\mathrm{D}_q^{-1})x, \bar{\psi}_2(w_2^*\otimes w_1\otimes x)$$
$$= -w_2^*\otimes w_1\otimes(1-q^{-1}d)x - w_2^*\otimes w_2\otimes cx, \psi_2(w_2^*\otimes w_2\otimes x)$$
$$= -w_1^*\otimes w_1\otimes dx - w_1^*\otimes w_2\otimes(-qc)x - w_2^*\otimes w_2\otimes x,$$

$$\bar{\psi}_1(w_1^*\otimes w_1\otimes x) = (1-a\mathbb{D}^{q^{-1}})x,\ \bar{\psi}_1(w_1^*\otimes w_2\otimes x) = -b\mathbb{D}^{q^{-1}}x,$$
$$\psi_1(w_2^*\otimes w_1\otimes x) = -cx,\ \psi_1(w_2^*\otimes w_2\otimes x) = (1-d)x,\ \psi_1(x) = (\mathbb{D}^q-1)x.$$

我们将证明复形 (11) 和 (12) 作为 $\mathcal{B}$-模上的复形是同构的，因此复形 (11) 是正合的。

我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_4 & \xrightarrow{\psi_4} & P_3 & \xrightarrow{\psi_3} & P_2 & \xrightarrow{\psi_2} & P_1 & \xrightarrow{\psi_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0\ , \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_4} & & \downarrow{\scriptstyle g_3} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_4 & \xrightarrow{\bar{\psi}_4} & P_3 & \xrightarrow{\bar{\psi}_3} & P_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & P_1 & \xrightarrow{\bar{\psi}_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中，态射 $g_i,\ i=0,1,2,3,4$ 定义如下：g_0 就是恒等映射，$g_4(x) = x\mathbb{D}^q$；对于 $x\in\mathcal{B}$，g_1, g_2, g_3，它们是右 $\mathcal{B}$-模的态射，由以下映射定义（我们也分别用 g_1, g_2, g_3表示）：

$$g_1\left(w_1^*\otimes w_1, w_1^*\otimes w_2, w_2^*\otimes w_1, w_2^*\otimes w_2, 1\right)$$
$$= \left(w_1^*\otimes w_1\otimes 1, w_1^*\otimes w_2\otimes 1, w_2^*\otimes w_1\otimes 1, w_2^*\otimes w_2\otimes 1, 1\right)\begin{pmatrix}\mathbb{D}^q & & & & \\ & \mathbb{D}^q & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -1 & & & & 1\end{pmatrix},$$

$$g_2\left(v_1^*\otimes v_1, v_1^*\otimes v_2, v_2^*\otimes v_1, v_2^*\otimes v_2, w_1^*\otimes w_1, w_1^*\otimes w_2, w_2^*\otimes w_1, w_2^*\otimes w_2\right)$$
$$= \left(v_1^*\otimes v_1\otimes 1, v_1^*\otimes v_2\otimes 1, v_2^*\otimes v_1\otimes 1, v_2^*\otimes v_2\otimes 1, w_1^*\otimes w_1\otimes 1, w_1^*\otimes w_2\otimes 1, w_2^*\otimes w_1\otimes 1, w_2^*\otimes w_2\otimes 1\right)P,$$

其中， P 是矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbb{D}^q & & & & & & & \\ & \mathbb{D}^q & & & & \mathbb{D}^q & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & \mathbb{D}^q & & & \\ & & & & & \mathbb{D}^q & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \mathbb{D}^q \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & g_3\left(v_1^*\otimes v_1, v_1^*\otimes v_2, v_2^*\otimes v_1, v_2^*\otimes v_2, 1\right) \\ = \quad & \left(v_1^*\otimes v_1\otimes 1, v_1^*\otimes v_2\otimes 1, v_2^*\otimes v_1\otimes 1, v_2^*\otimes v_2\otimes 1, 1\right) \begin{pmatrix} \mathbb{D}^q & & & & \\ & \mathbb{D}^q & & & c\mathbb{D}^q \\ & & 1 & & \\ & & & \mathbb{D}^q & -qa \\ & & & & \mathbb{D}^q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

容易验证， g_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 都是同构。因此我们得出复形 (11) 是正合的。□

现在我们可以证明定理 2.3 中的序列 (7) 是正合的，从而完成定理 2 3 $A\ B \in$ $_n$ $n \geqslant 2$ $B^tA^tBA = .$ 的证明。λI_n $\lambda \in$ $^\times$ $q \in$ $^\times$ $q^2 + \sqrt{\lambda^{-1}}$ AB^t $q + 1 = 0$ 令 , 一般线性群 ($_{\mathbb{K}}$) ( ), 使得对某个 $_{\mathbb{K}}$ 成立。令 $^{\mathbb{K}}$, 使得 tr( ) 。注意，对所有 $a, b \in$ $^{\times}$, $\mathcal{G}(A, B) = \mathcal{G}(aA, bB)$。设 $A' = \sqrt{\lambda^{-1}}A$ 和 $B' = B$。那么 $B'^tA'^tB'A' = I_n$, 且 $\mathrm{tr}(A'B'^t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^{-1}}}\mathrm{tr}(AB^t) = -q^{-1} - q = \mathrm{tr}(A_q(A_q^{-1})^t)$。因此，由引理 2.6 和引理 2.10 以及 $\mathcal{G}(A, B)$ $=\mathcal{G}(A', B')$，定理 2.3 中的序列 (7) 是正合的。□

3. The Calabi-Yau property

本节将证明代数 $\mathcal{G}(A, B)$ 是扭曲 Calabi-Yau 代数。

定理 3.1. 设 $A, B \in \mathrm{GL}_n($ $_{\mathbb{K}}$) $(n \geqslant 2)$，满足 $B^tA^tBA = \lambda I_n$，其中某个 $\lambda \in$ $^{\times}$。代数 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A, B)$ 是一个扭曲 Calabi-Yau 代数，其中中山自同构 μ 定义为 $\mu(u) = (A^t)^{-1}AuB^tB^{-1}$，且 $\mu($ $^{\pm 1}$) $=$ $^{\pm 1}$。

证明。我们沿用定理 2.3 中的记号。由定理 2.3 可知，右平凡模 $^{\mathbb{K}}$ 有一个有界投射分解，且每一项都是有限生成的。根据引理 1.6，要证明 $\mathcal{G}(A, B)$ 是扭曲 Calabi-Yau 代数，只需证明 $\mathcal{G}(A, B)$ 是右 AS-Gorenstein。

将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(-, \mathcal{G})$ 作用于分解 (7) 并进行标准识别后，我们得到以下复形

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\psi_1^t} \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G} \xrightarrow{\psi_2^t} \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B}) \\ \xrightarrow{\psi_3^t} \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B}) \xrightarrow{\psi_4^t} \mathcal{G} \to 0, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\psi_1^t : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{i,j} x(\delta_{ji}-u_{ji})\otimes w_i^*\otimes w_j + x(\mathbb{D}-1),\end{aligned}$$

$$\psi_2^t\colon \mathcal{G}\otimes(W_{A,\ B}^*\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}\otimes(W_{A,\ B}^*\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,\ B}^*\otimes V_{A,\ B})$$

定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\\ x\otimes w_i^*\otimes w_j &\longmapsto -x\otimes w_i^*\otimes w_j - x\textstyle\sum_{k,l}(uB^t)_{li}(B^{-1})_{kj}\otimes w_k^*\otimes w_l\\ &\quad +x\textstyle\sum_{k,l}\frac{1}{\lambda}(BA)_{ik}(B^tA^t)_{lj}\mathbb{D}\otimes v_k^*\otimes v_l - x\otimes v_i^*\otimes v_j,\\ \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\\ x &\longmapsto -x\delta_{ij}\otimes w_i^*\otimes w_j + x(u_{ji}-\delta_{ji})\otimes v_i^*\otimes v_j,\end{aligned}$$

$$\psi_3^t\colon \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\longrightarrow\mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})$$

定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\\ x\otimes w_i^*\otimes w_j &\longmapsto x((AuB^t)_{ji}-(A^tB)_{ji})\\ &\quad +x\textstyle\sum_{k,l}\frac{1}{\lambda}(BA)_{ik}(B^tA^t)_{lj}\mathbb{D}\otimes v_k^*\otimes v_l - x\otimes v_i^*\otimes v_j,\\ \mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\\ x\otimes v_i^*\otimes v_j &\longmapsto (A^tB)_{ji}x + x\otimes v_i^*\otimes v_j + \textstyle\sum_{k,l}(uB^t)_{li}(B^{-1})_{kj}\otimes v_k^*\otimes v_l,\end{aligned}$$

$$\psi_4^t : \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\longrightarrow\mathcal{G}$$

定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\\ x &\longmapsto x(\mathbb{D}-1),\\ \mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\\ x\otimes v_i^*\otimes v_j &\longmapsto x[(A^tB)_{ji}-(AuB^t)_{ji}].\end{aligned}$$

与构造分解 (7) 类似，我们有一个作为左 $\mathcal{G}$-模的 $\mathbb{K}$ 的如下自由分解。

$$0\to\mathcal{G}\xrightarrow{\varphi_4}\mathcal{G}\otimes(W_{A,\ B}^*\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}\xrightarrow{\varphi_3}\mathcal{G}\otimes(W_{A,\ B}^*\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,\ B}^*\otimes V_{A,\ B})$$

$$\xrightarrow{\varphi_2}\mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})\xrightarrow{\varphi_1}\mathcal{G}\to 0,$$

其中的态射定义如下:

$$\begin{aligned}\varphi_4 : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\otimes(W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{i,j} x[(AB^t)_{ji}-(A^tuB)_{ji}]\otimes w_i^*\otimes w_j + x(\mathbb{D}-1),\end{aligned}$$

$$\varphi_3\colon\ \mathcal{G}\otimes\ (W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\ \oplus\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}\otimes\ (W_{A,B}^*\otimes W_{A,B})\ \oplus\mathcal{G}\otimes\ (V_{A,B}^*\otimes V_{A,B})$$

由以下内容定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\otimes(W^*_{A,B}\otimes W_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\otimes(W^*_{A,B}\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\\
x\otimes w_i^*\otimes w_j &\longmapsto x\otimes w_i^*\otimes w_j + x\textstyle\sum_{k,l}(A^tu)_{li}(A^{-1})_{kj}\otimes w_k^*\otimes w_l\\
&\quad + x\textstyle\sum_{k,l}\frac{1}{\lambda}(B^tA^t)_{ki}(BA)_{jl}\mathbb{D}\otimes v_k^*\otimes v_l - x\otimes v_i^*\otimes v_j,\\
\mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\otimes(W^*_{A,B}\otimes W_{A,B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\\
x &\longmapsto x(AB^t)_{ji}\otimes w_i^*\otimes w_j + x((A^tuB)_{ji}-(AB^t)_{ji})\otimes v_i^*\otimes v_j,
\end{aligned}$$

$\varphi_2\colon \mathcal{G}\otimes(W^*_{A,\ B}\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,\ B}\otimes V_{A,\ B})\longrightarrow\mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,\ B}\otimes V_{A,\ B})$ 定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\otimes(W^*_{A,B}\otimes W_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\\
x\otimes w_i^*\otimes w_j &\longmapsto x(u_{ji}-\delta_{ji})\\
&\quad + x\textstyle\sum_{k,l}\frac{1}{\lambda}(B^tA^t)_{ki}(BA)_{jl}\mathbb{D}v_k^*\otimes v_l - x\otimes v_i^*\otimes v_j,\\
\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\\
x\otimes v_i^*\otimes v_j &\longmapsto -x\delta_{ji} - x\otimes v_i^*\otimes v_j - x\textstyle\sum_{k,l}(A^tu)_{li}A^{-1}_{kj}\otimes v_k^*\otimes v_l,
\end{aligned}$$

$$\varphi_1:\mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B})\longrightarrow\mathcal{G}$$

定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\\
x &\longmapsto x(\mathbb{D}-1),\\
\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,B}\otimes V_{A,B}) &\longrightarrow \mathcal{G}\\
x\otimes v_i^*\otimes v_j &\longmapsto x(\delta_{ji}-u_{ji}).
\end{aligned}$$

记 $Q_0=Q_4=\mathcal{G}$, $Q_3=\mathcal{G}\otimes(W^*_{A,\ B}\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}$, $Q_2=\mathcal{G}\otimes(W^*_{A,\ B}\otimes W_{A,\ B})\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,\ B}\otimes V_{A,\ B})$, $Q_1=\mathcal{G}\oplus\mathcal{G}\otimes(V^*_{A,\ B}\otimes V_{A,\ B})$。设 ν 为由 $\nu(u)=A^{-1}A^tuB(B^t)^{-1}$ 和 $\nu(\mathbb{D}^{\pm1})=\mathbb{D}^{\pm1}$定义的自同构。下图交换

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & Q_4 & \xrightarrow{\psi_1^t} & Q_3 & \xrightarrow{\psi_2^t} & Q_2 & \xrightarrow{\psi_3^t} & Q_1 & \xrightarrow{\psi_4^t} & Q_0 & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \\
0 & \longrightarrow & {}_\nu Q_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & {}_\nu Q_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & {}_\nu Q_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & {}_\nu Q_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & {}_\nu Q_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中态射 f_i, $i=0,1,\cdots,4$ 的定义如下。

$$\begin{aligned}
f_4:\mathcal{G} &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G}\\
x &\longmapsto -\nu(x),
\end{aligned}$$

$$f_3:\mathcal{G}\otimes(W^*\otimes W)\oplus\mathcal{G}\longrightarrow{}_\nu\mathcal{G}\otimes(W^*\otimes W)\oplus{}_\nu\mathcal{G}$$

定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\otimes(W^*\otimes W) &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G}\otimes(W^*\otimes W)\oplus{}_\nu\mathcal{G}\\
x\otimes w_i^*\otimes w_j &\longmapsto \textstyle\sum_{p,q=1}^n -B_{pi}A_{qj}\nu(x)\otimes w_p^*\otimes w_q,\\
\mathcal{G} &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G}\otimes(W^*\otimes W)\oplus{}_\nu\mathcal{G}\\
x &\longmapsto -\nu(x),
\end{aligned}$$

$$f_2 : \mathcal{G} \otimes (W^* \otimes W) \oplus \mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) \longrightarrow {}_\nu\mathcal{G} \otimes (W^* \otimes W) \oplus {}_\nu\mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V)$$

定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \otimes (W^* \otimes W) &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G} \otimes (W^* \otimes W) \oplus {}_\nu\mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) \\ x \otimes w_i^* \otimes w_j &\longmapsto \sum_{p,q=1}^n B_{pi} A_{qj} \nu(x) \otimes w_p^* \otimes w_q, \\ \mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G} \otimes (W^* \otimes W) \oplus {}_\nu\mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) \\ x \otimes v_i^* \otimes v_j &\longmapsto -\sum_{p,q=1}^n B_{pi} A_{qj} \nu(x) \otimes v_p^* \otimes v_q, \end{aligned}$$

$$f_1 : \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) \longrightarrow {}_\nu\mathcal{G} \oplus {}_\nu\mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V)$$

定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G} \oplus {}_\nu\mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) \\ x \otimes v_i^* \otimes v_j &\longmapsto \sum_{p,q=1}^n B_{pi} A_{qj} \nu(x) \otimes v_p^* \otimes v_q, \\ \mathcal{G} &\longrightarrow {}_\nu\mathcal{G} \oplus {}_\nu\mathcal{G} \otimes (V^* \otimes V) \\ x &\longmapsto \nu(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0 : \mathcal{G} &\longrightarrow \oplus_\nu \mathcal{G} \\ x &\longmapsto \nu(x). \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{G}}({}_{\mathbb{K}}, \mathcal{G}) \cong \begin{cases} 0, & i \neq 4; \\ \eta_{\mathbb{K}}, & i = 4, \end{cases}$$

其中， η 是代数同态 $\varepsilon\nu : \mathcal{G} \to {}_{\mathbb{K}}$，也就是说，

$$\eta(u) = A^{-1}A^t B (B^t)^{-1} \quad \text{and} \quad \eta({}_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = 1.$$

因此，代数 $\mathcal{G}$ 是右 AS-Gorenstein 的。由引理 1.6 可知，代数 $\mathcal{G}$ 是一个带有中山自同构 $S^{-2}[\eta S]^r$的扭曲卡拉比-丘代数。我们有 $S^{-2}(u) = \mathrm{D}(A^t)^{-1} A u A^{-1} A^t \mathrm{D}^{-1}$ 以及 $S^{-2}({}_{\mathbb{D}}{}^{\pm 1}) = \mathrm{D}^{\pm 1}$。因此，$S^{-2}[\eta S]^r$ 是由$(S^{-2}[\eta S]^r)(u) = \mathrm{D}(A^t)^{-1} A u B^t B^{-1} \mathrm{D}_{-1}$ 和$(S^{-2}[\eta S]^r)(\mathrm{D}^{\pm 1}) = \mathrm{D}^{\pm 1}$定义的自同构。令 μ 为由 $\mu(u) = (A^t)^{-1} A u B^t B^{-1}$ 和 $\mu(\mathrm{D}^{\pm 1}) = \mathrm{D}^{\pm 1}$定义的自同构。它与 $S^{-2}[\eta S]^r$ 仅相差一个内自同构，因此代数 μ 也是$\mathcal{G}(A, B)$的一个中山自同构。□

我们在本节末尾讨论 Hopf–Galois 对象的卡拉比-丘性质。[9, 定理 5.3,5.4] 给出了 $\mathcal{G}(A, B)$ 上伽罗瓦对象的分类。设 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$ 满足 $B^t A^t B A = \lambda I_n$，其中某个 $\lambda \in {}_{\mathbb{K}}{}^{\times}$。左 $\mathcal{G}(A, B)$-伽罗瓦对象是代数 $\mathcal{G}(A, B|C, D)$，其中 $C, D \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ $(m \geqslant 2)$ 满足 $D^t C^t D C = \lambda I_m$ 且 $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$。

作为定理 3.1 的推论，我们得到以下结果。

定理 3.2. 设 $m,n\in\mathbb{N},n,m\geqslant 2$，并设 $A,B\in$一般线性群$_n(\Bbbk)$ $C,D\in$一般线性群$_m(\Bbbk)$，满足 $B^tA^tBA=\lambda I_n$, $D^tC^tDC=\lambda I_m$，且 tr(AB^t) $=$tr(CD^t) $=\mu$，其中某个 $\lambda,\mu\in\Bbbk^\times$。代数 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 是扭曲 Calabi–Yau，其中山自同构 μ 定义为 $\mu(u)=(A^t)^{-1}AuD^tD^{-1}$ 以及 $\mu(\mathbb{D}^{\pm1})=\mathbb{D}^{\pm1}$。

证明。由定理 3.1 和引理 1.6 可知，代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 是 AS-戈伦斯坦的，其左同调积分 ξ 由 $\xi(u)=(A^t)^{-1}AB^tB^{-1}$和 $\xi(\mathrm{D}^{\pm1})=1$定义。根据 [16, 定理 2.5],，我们得出代数 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 是一个扭曲卡拉比-丘代数，其中山自同构为 $\mu'=S_{CD,AB}S_{AB,CD}[\xi]^l_{AB,CD}$，其中$[\xi]^l_{AB,CD}$ 是 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 的左绕自同构，由$[\xi]^l_{AB,CD}(x)=\xi(x^{AB},{}_{AB}(1))x^{AB},{}_{CD}(2)$ 定义，对任意 $x\in\mathcal{G}(A,B|C,D)$。在 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 中，我们有

$$S_{CD,AB}S_{AB,CD}(u)=A^{-1}(B^t)^{-1}uD^tC,\quad S_{CD,AB}S_{AB,CD}(\mathbb{D}^{\pm1})=\mathbb{D}^{\pm1}.$$

因此，自同构 $\mu'=S_{CD,AB}S_{AB,CD}[\xi]^l_{AB,CD}$ 由下式定义

$$\mu'(u)=(A^t)^{-1}B^{-1}uD^tC,\quad \mu'(\mathbb{D}^{\pm1})=\mathbb{D}^{\pm1}.$$

设 μ 为由下式定义的代数自同构

$$\mu(u)=(A^t)^{-1}AuD^tD^{-1},\quad \mu(\mathbb{D}^{\pm1})=\mathbb{D}^{\pm1}.$$

在 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 中，我们还有 $\mathbb{D}^{-1}u\mathbb{D}=BAuC^{-1}D^{-1}$。因此，代数自同构 μ和 μ'仅相差一个内自同构。所以，代数自同构 μ也是 $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ 的中山自同构。

4. Gerstenhaber-Schack cohomology

Hopf 代数以 Hopf 双模为系数的 Gerstenhaber-Schack 上同调由 [6, 7] 借助显式双复形引入。由于 Hopf 双模范畴与 Yetter-Drinfeld 模范畴等价，我们可以使用 Yetter-Drinfeld 模。设 H 是一个 Hopf 代数， V是 A上的一个 Yetter-Drinfeld 模。 A以 V为系数的 Gerstenhaber-Schack 上同调通常记作 $\mathrm{H}^*_{GS}(H,V)$。Gerstenhaber-Schack 上同调的一个特例是双代数上同调，记作 $\mathrm{H}^*_b(H)$ $=\mathrm{H}^*_{GS}(H,\Bbbk)$。

Taillefer 证明了 Gerstenhaber-Schack 上同调实际上是一个 Ext 函子（[12, 13]）

$$\mathrm{H}^*_{GS}(H,V)\cong\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{YD}^H_H}(\Bbbk,V). \tag{13}$$

这种描述可以视为 Gerstenhaber–Schack 上同调的定义。

Hopf 代数 H 的 Gerstenhaber–Schack 上同调维数定义为

$$\mathrm{cd}_{GS} = \sup\{n : \mathrm{H}^*_{GS}(H, V) \neq 0 \text{ for some } V \in {}^H_H\mathcal{YD}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

定理 4.1. 假设 $char(\Bbbk) = 0$。设 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ $(n \geqslant 2)$，使得 $B^t A^t B A = \lambda I_n$ 对某个 $\lambda \in \Bbbk^\times$ 成立，且方程 $X^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)X + 1 = 0$ 的任意解都是一般的。那么我们可以得到以下结论：

(i) $\mathcal{G}(A, B)$ 的双代数上同调如下

$$\mathrm{H}^n_b(\mathcal{G}(A, B)) \cong \begin{cases} 0 & n \neq 0, 1, 3, 4 \\ \Bbbk & n = 0, 1, 3, 4. \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{G}(A, B)$ 的 Gerstenhaber–Schack 上同调维数为 4。

证明。设 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A, B)$。

(i) 我们有

$$\mathrm{H}^*_b(\mathcal{G}) = \mathrm{H}^*_{GS}(\mathcal{G}, \Bbbk) \cong \mathrm{Ext}^*_{{}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}}(\Bbbk, \Bbbk).$$

根据假设，代数 $\mathcal{G}(A, B)$ 是余半单的。因此，$\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ 中的每个对象都是投射的。根据 [1, 命题 3.1 和推论 3.4]，，每个自由 Yetter- Drinfeld 模都是 ${}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}$ 中的投射对象，并且范畴 ${}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}$ 有足够的投射对象。因此，$\mathcal{G}$ 的双代数上同调就是将函子 $\mathrm{Hom}_{{}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}}(-, \Bbbk)$ 应用于平凡 Yetter-Drinfeld 模 $\Bbbk$ 的任意投射分解后所得复形的上同调。我们可以使用定理 2.3 中的分解 (7)。沿用其中的记号。令 $\mathrm{P}_\cdot$ 表示以下复形

$$0 \to \Bbbk \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\psi_4} (V^*_{A,B} \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \oplus \Bbbk \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\psi_3} (V^*_{A,B} \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \oplus (W^*_{A,B} \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G}$$
$$\xrightarrow{\psi_2} \Bbbk \boxtimes \mathcal{G} \oplus (W^*_{A,B} \otimes W_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G} \xrightarrow{\psi_1} \Bbbk \boxtimes \mathcal{G} \to 0$$

容易看出

$$\mathrm{Hom}_{{}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}}(\Bbbk \boxtimes \mathcal{G}, \Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^{\mathcal{G}}}(\Bbbk, \Bbbk) \cong \Bbbk.$$

$V_{A,\ B}$ 和 $W_{A,\ B}$ 都是基本余模。我们有

$$\mathrm{Hom}_{{}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}}((V^*_{A,B} \otimes V_{A,B}) \boxtimes \mathcal{G}, \Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^{\mathcal{G}}}(V^*_{A,B} \otimes V_{A,B}, \Bbbk) \cong \Bbbk.$$

因此，$\mathrm{Hom}_{{}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}\mathcal{YD}}(\mathrm{P}_\cdot, \Bbbk)$ 同构于以下复形

$$0 \to \Bbbk \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}} \Bbbk^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \Bbbk^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \Bbbk^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \Bbbk \to 0.$$

通过计算上同调，我们得到关于 $\mathcal{G}(A,B)$ 的双代数上同调的上述结果。

(ii) 代数 $\mathcal{G}(A,B)$ 是余半单的，正如 (i) 的证明中所述，每个自由 Yetter-Drinfeld 模都是 $\mathcal{YD}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}$ 中的投射对象，且范畴$\mathcal{YD}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}$ 有足够多的投射对象。设 V 为一个 Yetter-Drinfeld 模，则 Gerstenhaber-Schack 上同调 $\mathrm{H}^*_{GS}(H,V)$ 是将函子 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{YD}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}}(-,V)$ 作用于平凡 Yetter–Drinfeld 模 $\Bbbk$ 的任意投射分解后得到的复形的上同调。根据定理 2.3，平凡模 $\Bbbk$ 有一个长度为 4 的投射分解。因此 $\mathrm{cd}_{GS}\mathcal{G} \leqslant 4$。然而，(i) 中计算的双代数上同调表明 $\mathrm{cd}_{GS}\mathcal{G} \geqslant 4$。总之，我们得到 $\mathrm{cd}_{GS}\mathcal{G} = 4$。□

致谢。Yu 获得国家自然科学基金项目（编号：11871186）的资助。Wang 部分获得西蒙斯合作资助（编号：688403）和美国空军科学研究办公室项目（编号：FA9550-22-1-0272）的资助。

References

[1] J. Bichon,
Hochschild homology of Hopf algebras and free Yetter-Drinfeld resolutions ofthe counit,
《Compos. Math.》149（2013），第4期，658–678。[2] J. Bichon,
Hopf-Galois objects and cogroupoids, 《Rev. Un. Mat. Argentina》55（2014），第2期，11–69。[3] J. Bichon,
Gerstenhaber-Schack and Hochschild cohomologyies of Hopf algebras, 《Doc. Math.》21（2016），955-986。[4] K. A. Brown 和 J. J. Zhang,
Dualizing complexes and twisted Hochschild (co)homologyfor Noetherian Hopf algebras,
《J. Algebra》320（2008），第5期，1814–1850。[5] M. Dubois-Violette，G. Launer,
The quantum group of a non-degenerate bilinear form, 《Phys. Lett. B》245（1990），175–177。[6] M. Gerstenhaber，S. Schack，*Bialgebra cohomology,
deformations and quantum groups*, 《Proc. Nat. Acad. Sci. USA》87（1990），第1期，78-81。[7] M. Gerstenhaber，S. Schack，*Algebras, bialgebras, quantum groups,
and algebraic defo-rations*, 《Contemp. Math.》134（1992），51-92。[8] V. Ginzburg,
Calabi-Yau algebras，arXiv:AG/0612139。[9] C. Mrozinski，*Quantum groups of GL*(2)
representation type, 《J. Noncommut. Geom.》8（2014），第1期，107–140。g[10] M. Reyes，D. Rogalski 和 J.J. Zhang，*Twisted Calabi-Yau algebras and Homologicalidentities*,
《Adv. Math.》264（2014），308–354。[11] P. Schauenburg，*Hopf bigalois extensions*,
《Comm. Algebra》24（1996），第12期，3797–3825。[12] R. Tailefer,
Cohomology theories of Hopf bimodules and cup-product, 《Algebr. Represent. Theory》7（2004），第5期，471-490。[13] R. Tailefer，*Injective Hopf bimodules,
cohomologies of infinite dimensional Hopf algebras
and graded commutativity of the Yoneda product*, 《J. Algebra》276（2004），第1期，259-279。[14] X. Wang，X. Yu 和 Y. Zhang,
Calabi-Yau property under monoidal Morita-Takeuchiequivalence, 《Pacific J. Math.》290（2017），第2期，481-510。[15] C. Weibel，*An introduction to homological algebra*,
《剑桥高等数学研究丛书》第38卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。[16] X. L. Yu,
Hopf-Galois objects of Calabi-Yau Hopf algebras, 《J. Algebra Appl.》15（2016），第10期，1650194，共19页。[17] X. L. Yu，F. VanOysteayen 和 Y. H. Zhang,
Cleft extensions of Koszul twisted Calabi-Yau algebras, 《Israel J. Math.》214（2016），第2期，785–829。

Xiaolan YUDepartment of Mathematics, Hangzhou Normal University,
Hangzhou, Zhejiang310036, China

Email address: xlyu@hznu.edu.cn

Xingting WangDepartment of Mathematics, Louisiana State University,
Baton Rouge, Louisiana70803, USA

Email address: xingtingwang@lsu.edu