arXiv:2303.14091v1 [math.RT] 24 Mar 2023

关于奇点范畴与三角矩阵代数的一个注记

Yongyun Qin

云南师范大学数学学院，中国云南昆明 650500。电子邮箱：qinyongyun2006@126.com

摘要

设 $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ 是一个 Artin 代数，${}_BM_A$ 是一个 B-A-双模。我们证明，若 ${}_BM$ 是半单的且 M_A 是投射的，则相应的奇点范畴之间存在三角等价 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$。由此，我们得到了一种描述某些有界箭图代数的奇点范畴的新方法。

数学主题分类（2020）：16E35；16G10；16G20；18G80。

关键词：奇点范畴；三角矩阵代数；Gorenstein 缺陷范畴；再黏合。

1 引言

全文中，A 是一个 Artin 代数，而 mod$A$ 是有限生成右 A-模的范畴。按照 [7], ，A 的奇点范畴 $D_{sg}(A)$ 是 A 上有限生成模的有界导出范畴对完美复形全子范畴取 Verdier 商所得的范畴。它以同调意义刻画代数 A 的奇点性，即当且仅当 $D_{sg}(A) = 0$时，A 具有有限全局维数。此外，奇点范畴还能捕捉代数 [7]的稳定同调特征。众所周知，戈伦斯坦代数的奇点范畴可以用戈伦斯坦投射（也称极大 Cohen-Macaulay）A-模的稳定范畴来刻画 [7, 16]。近年来，许多人尝试描述一些特殊代数类的奇点范畴，例如 Nakayama代数 [13, 31, 32], 、温和代数 [17], 、戈伦斯坦单项式

代数 [12, 23], 、二次单项代数 [11] 以及根基平方为零的代数 [9]。

研究奇点范畴的一种方法，是比较彼此相关的代数的奇点范畴。幂等元约化 [8, 27, 33], 箭头消去 [14], 同调理想[10], 简单粘合代数 [22], 三角矩阵代数 [8, 20, 21, 27, 34]和再黏合 [20, 28]背景下都曾对此进行研究。特别地，Lu 证明，若 $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ 是域上的有限维三角矩阵代数，且 ${}_BM_A$ 作为 B-A-双模是投射的，那么 Λ 的奇点范畴和 Gorenstein 缺陷范畴分别等价于 A 和 B的相应范畴的直和（见 [21, 命题 4.2 和定理 4.4]的证明）。回顾一下，Gorenstein 缺陷范畴是奇点范畴对 Gorenstein 投射模的稳定范畴的同构像取 Verdier 商所得的商范畴；一般而言，奇点范畴上的三角等价并不能推出 Gorenstein 缺陷范畴上的此类等价。因此，Lu 的结果引出了以下自然问题：能否弱化 Lu 的假设，使得仅得到所需的奇点范畴等价，而不能得到 Gorenstein 缺陷范畴等价？或者，在什么条件下有等价 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$？我们通过以下定理回答第二个问题，该定理在本文中列为定理 3.3。

定理 I. 设 $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ 是一个 Artin 代数，${}_BM_A$ 是一个 B-A-双模。若 ${}_BM$ 是半单的，且 M_A 是投射的，则存在一个三角等价 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$。

定理 I 可用于约化某些有界箭图代数的奇点范畴。设 $\Lambda = kQ/I$ 是域 k上的一个有界箭图代数。假设 Q存在两个不相交的满子箭图，分别记为 Γ和 $\bar{\Gamma}$，满足：(1) $Q_0 = \Gamma_0 \cup \bar{\Gamma}_0$；(2) 至少存在一条从 Γ_0 到 $\bar{\Gamma}_0$的箭头，且不存在从 $\bar{\Gamma}_0$ 到 Γ_0的箭头；(3) I 由 $I \cap k\Gamma$, $I \cap k\bar{\Gamma}$ 和 $\alpha\beta$生成，其中 α 是 Γ_1 中的一条箭头，β 是从 Γ_0 到 $\bar{\Gamma}_0$的一条箭头。于是 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$，其中 $A = k\Gamma/(I \cap k\Gamma)$且 $B = k\bar{\Gamma}/(I \cap k\bar{\Gamma})$。更多细节见推论 4.1和例4.2。

我们指出，上述约化情形曾在 [2, 3] 中针对 ϕ-维数进行研究，而对于奇点范畴，已知一个类似结果，即箭头删除操作。也就是说，设 Λ 与上文相同，且满足除将条件 (3) 替换为 $I = \langle I \cap k\Gamma, I \cap k\bar{\Gamma} \rangle$ 之外的所有条件，则存在三角等价 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$，它诱导出

Gorenstein 缺陷范畴 $[14, 29]$ 之间的等价。因此，如果我们只考虑奇点范畴上的等价，推论 4.1 放宽了 $[14]$ 的条件，参见备注 4.3。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾一些相关定义和约定。第 3 节证明定理 I，第 4 节则利用定理 I 化简某些有界箭图代数的奇点范畴。

2 定义与约定

本节将固定本文所用的记号，并回顾一些基本定义。

全文中，所有代数均为交换 Artin 环 R 上的 Artin 代数。设 A 是这样的一个代数，令 rad(A) 表示 A 的 Jacobson 根基。我们用 Mod$A$ 表示右 A-模范畴，并将左 A-模视为右 A^{op}-模，其中 A^{op} 是 A 的对代数。用 mod$A$ 和 proj$A$ 表示 Mod$A$ 的全子范畴，它们分别由所有有限生成模和有限生成投射模组成。对于 $M \in \text{mod}A$，令 rad(M) 表示 M 的 Jacobson 根基，并令 add(M) 表示 mod$A$ 的全加性子范畴，它由 M 的有限个副本的直和的所有直和项组成。

K^b(proj$A$) 表示 proj$A$ 上复形的有界同伦范畴，而 $\mathcal{D}$(Mod$A$)（分别为 $\mathcal{D}^b$(mod$A$)）表示 Mod$A$ （分别为 mod$A$）上复形的导出范畴（分别为有界导出范畴）。我们用 $[-]$ 表示复形上的移位函子。

通常，我们只写 $\mathcal{D}A$（分别为 $\mathcal{D}^b(A)$），而不写 $\mathcal{D}$(Mod$A$)（分别为 $\mathcal{D}^b$(mod$A$)）。在同构意义下， K^b(proj$A$) 中的对象恰好是 $\mathcal{D}A$ 中的所有紧对象。为方便起见，我们不区分 K^b(proj$A$) 与 A 的完美导出范畴 $\mathcal{D}_{\text{per}}(A)$，也就是 $\mathcal{D}A$ 中由所有紧对象组成的满三角子范畴，这不会造成任何混淆。此外，我们也不区分 $\mathcal{D}^b(A)$ 与其经由典范嵌入到 $\mathcal{D}A$ 后的本质像。

按照 $[7, 25]$, , A 的奇点范畴是 Verdier 商 $D_{sg}(A) = \mathcal{D}^b(A)/K^b(\text{proj}A)$。有限生成的 A-模 M 称为 Gorenstein 投射模，如果存在一个正合列

$$P^\bullet = \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \longrightarrow \cdots$$

投射模A的，且满足 $M = \text{Ker}d^0$，使得对于每个 $Q \in$投射模A，$\text{Hom}_A(P^\bullet, Q)$ 都是正合的。记 Gproj$A$ 为 mod$A$ 中由 Gorenstein 投射

模组成的子范畴。众所周知，Gproj$A$ 是一个 Frobenius 范畴，因此其稳定范畴 Gproj$A$ 是一个三角范畴。此外，存在一个典范三角函子 F : Gproj$A \to D_{sg}(A)$，它将 Gorenstein 投射模映射到相应的、集中于零次的茎复形 [7]，；而 Verdier 商 $D_{def}(A) := D_{sg}(A)/\mathrm{Im}F$ 称为 A [6]的 Gorenstein 缺陷范畴。

设 $\mathcal{T}_1$、$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_2$ 为三角范畴。相对于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的 $\mathcal{T}$ 的再黏合由下式给出

$$\mathcal{T}_1 \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\overset{i_*=i_!}{\longrightarrow}}}}}} \mathcal{T} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\overset{j^!=j^*}{\longrightarrow}}}}}} \mathcal{T}_2 \tag{R}$$

使得

(R1) (i^*, i_*)、$(i_!, i^!)$、$(j_!, j^!)$ 和 (j^*, j_*) 是三角函子的伴随对；**(R2)** i_*、$j_!$ 和 j_* 是全嵌入；**(R3)** $j^!i_* = 0$ （因此 $i^!j_* = 0$ 和 $i^*j_! = 0$ 也成立）；**(R4)** 对每个 $X \in \mathcal{T}$，存在如下三角

$$\begin{gathered} j_!j^!X \to X \to i_*i^*X \to \\ i_!i^!X \to X \to j_*j^*X \to \end{gathered}$$

其中指向 X 和从 X 出发的箭头分别是伴随对的余单位和单位 [4]。

相对于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的 $\mathcal{T}$ 的左（分别为右）再黏合，是 **(R)** 的上面（分别为下面）两行，使得 i^*、i_*、$j_!$ 和 $j^!$（分别为 i_*、$i^!$、$j^!$ 和 j_*）满足上述条件 [5, 19, 26]。在一些文献中，左（分别为右）再黏合也称为上（分别为下）再黏合。

设 $\mathcal{T}_1$、$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_2$ 为三角范畴，n 为正整数。相对于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的 $\mathcal{T}$ 的一个 n 重再黏合由以下 $n+2$ 层三角函子给出

$$\begin{array}{ccccc} & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ \mathcal{T}_1 & & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}_2 \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\ & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

使得任意连续三层构成一个再黏合 [5, 30]。

3 奇点范畴与三角矩阵代数

设 A 和 B 是两个 Artin 代数，${}_BM_A$ 是一个 B-A-双模，且 ${}_BM$ 半单、M_A 投射。假设 $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ 是一个三角矩阵代数，$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$、$e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是两个幂等元。由 [1, 例 3.4] 可知，存在一个二重再粘合

$$\mathcal{D}A \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\overset{i_*}{\longrightarrow}}} \mathcal{D}\Lambda \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\overset{j^*}{\longrightarrow}}} \mathcal{D}B\,,$$

其中 $i_* = - \otimes^L_A e_1\Lambda$、$i^! = - \otimes_\Lambda \Lambda e_1$、$j^* = - \otimes_\Lambda \Lambda e_2$ 和 $j_* = - \otimes^L_B \Lambda/\Lambda e_1\Lambda$。由于 ${}_A(e_1\Lambda) = {}_AA$ 且 ${}_B(\Lambda/\Lambda e_1\Lambda) = {}_BB$，我们有 $i_* \cong - \otimes_A e_1\Lambda$ 和 $j_* \cong - \otimes_B \Lambda/\Lambda e_1\Lambda$，因此 i_*（分别是 j_*）将 A（分别是 B）上的模映到 Λ 上的模。显然，i_*、$i^!$、j_* 和 j^* 限制为模范畴之间的正合函子，进而在有界导出范畴上诱导出四个三角函子。由 [1, 引理 2.9 (e)], 可知，i_* 和 j^* 都限制为 K^b(proj)。此外，由于 $i^!\Lambda = \Lambda e_1 \cong A \oplus M$ 和 M_A 是投射的，我们有 $i^!$ 限制为 K^b(proj)，j_* 也如此（见 [1,命题 3.2]）。因此，i_*、$i^!$、j_* 和 j^* 在奇点范畴上诱导出四个三角函子，分别记为 $\widetilde{i}_*$、$\widetilde{i}^!$、$\widetilde{j}_*$ 和 $\widetilde{j}^*$；由 [21, 引理 2.3] 可知，奇点范畴之间存在一个右 recollement

$$D_{sg}(A) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\widetilde{i}_*}{\longrightarrow}}} D_{sg}(\Lambda) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\widetilde{j}^*}{\longrightarrow}}} D_{sg}(B)\,.$$

以下引理对于我们的观察至关重要。

引理 3.1. 设 $i_* = - \otimes_A e_1\Lambda : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}\Lambda$ 和 $j_* = - \otimes_B \Lambda/\Lambda e_1\Lambda : \mathrm{mod}B \to \mathrm{mod}\Lambda$ 是模范畴之间的两个函子。那么对于任意 $X \in \mathrm{mod}A$ 和 $Y \in \mathrm{mod}B$，有 $\Omega_\Lambda(i_*(X)) \in \mathrm{Im}i_*$，且 $\Omega_\Lambda(j_*(Y)) \cong j_*(Y') \oplus P$，其中 $Y' \in \mathrm{mod}B$ 且 $P \in$ 投射模Λ。

证明。已知，右 Λ-模可表示为三元组 (X, Y, f)，其中 $X \in \mathrm{mod}A$、$Y \in \mathrm{mod}B$，且 $f\colon Y \otimes_B M \to X$ 是右 A-模之间的态射。显然，投射 Λ-模的形式为 $(P, 0, 0)$ 和 $(Q \otimes_B M, Q, \mathrm{id})$，其中 $P \in \mathrm{proj}A$ 且 $Q \in \mathrm{proj}B$。对于任意 $X \in \mathrm{mod}A$

以及 $Y \in \mathrm{mod}B$，有 $i_*(X) = X \otimes_A e_1\Lambda \cong (X, 0, 0)$ 和 $j_*(Y) = Y \otimes_B \Lambda/\Lambda e_1\Lambda \cong (0, Y, 0)$。令 P_X 为 X_A 的投射覆盖，$\Omega_A(X)$ 为 X_A 的上同调核。于是我们有一个正合列

$$0 \to (\Omega_A(X), 0, 0) \to (P_X, 0, 0) \to (X, 0, 0) \to 0.$$

由于 $(P_X, 0, 0) \in$ 投射模Λ，我们得到 $\Omega_\Lambda(X, 0, 0) \cong (\Omega_A(X), 0, 0)$，差别仅在于一些投射 Λ-模的直和项。因此，$\Omega_\Lambda(i_*(X)) \cong (\Omega_A(X), 0, 0) = i_*(\Omega_A(X)) \in \mathrm{Im}i_*$。

令 Q_Y 为 Y_B的投射覆盖，$\Omega_B(Y)$为 Y_B的上同调核。那么我们有正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_B(Y) \xrightarrow{i} Q_Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0\,,$$

and

$$0 \to (Q_Y \otimes_B M, \Omega_B(Y), i \otimes \mathrm{id}) \to (Q_Y \otimes_B M, Q_Y, \mathrm{id}) \to (0, Y, 0) \to 0.$$

由于 $(Q_Y \otimes_B M, Q_Y, \mathrm{id}) \in$ 投射模Λ，我们得到 $\Omega_\Lambda(0, Y, 0) \cong (Q_Y \otimes_B M, \Omega_B(Y)\ i \otimes \mathrm{id})$。注意到 $\mathrm{Im}i \subseteq \mathrm{rad}(Q_Y)$，于是 $\mathrm{Im}(i \otimes \mathrm{id}) \subseteq \mathrm{rad}(Q_Y) \otimes_B M = (Q_Y \mathrm{rad}B) \otimes_B M \cong Q_Y \otimes_B \mathrm{rad}M$，由于 ${}_BM$是半单的，这等于零。因此，我们得出 $i \otimes \mathrm{id} = 0$，进而

$$(Q_Y \otimes_B M, \Omega_B(Y), i \otimes \mathrm{id}) \cong (Q_Y \otimes_B M, 0, 0) \oplus (0, \Omega_B(Y), 0).$$

由于 M_A 是投射的且 $Q_Y \in \mathrm{add}B$，我们有 $Q_Y \otimes_B M \in \mathrm{add}M_A \subseteq \mathrm{proj}A$，进而 $(Q_Y \otimes_B M, 0, 0) \in \mathrm{proj}\Lambda$。令 $P = (Q_Y \otimes_B M, 0, 0)$，且$Y' = \Omega_B(Y)$。于是得到 $\Omega_\Lambda(0, Y, 0) \cong (Q_Y \otimes_B M, 0, 0) \oplus (0, \Omega_B(Y), 0) = P \oplus j_*(Y')$，其中 $Y' \in \mathrm{mod}B$ 且 $P \in \mathrm{proj}\Lambda$。 □

~ ~引理 3.2. 保持上述记号不变。则 $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\mathrm{Im}j_*, \mathrm{Im}i_*) = 0$.

证明. 对任意 $X^\bullet \in D_{sg}(A)$，存在某个 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $X \in \mathrm{mod}A$，使得 $X^\bullet \cong X[n]$ 属于 $D_{sg}(A)$，见 [9, 引理 2.1]。类似地，任意对象$Y^\bullet \in D_{sg}(B)$ 都同构于 $Y[m]$，其中某个 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $Y \in \mathrm{mod}B$。因此，我们有同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\widetilde{j}_*(Y^\bullet), \widetilde{i}_*(X^\bullet)) &\cong \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\widetilde{j}_*(Y[m]), \widetilde{i}_*(X[n])) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\widetilde{j}_*(Y), \widetilde{i}_*(X)[n-m]) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y), i_*(X)[n-m]).\end{aligned}$$

~ ~现在我们将在三种情形下断言 $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y^\bullet)\ i_*(X^\bullet)) = 0$。

情形 1. $n-m=0$。那么，由 [9, 命题 2.3] 或 [18, 例-题 2.3] 可知，$\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y)\ i_*(X)) \cong \lim\!\longrightarrow^{l\geq 0}\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^l(j_*(Y)), \Omega^l(i_*(X)))$。显然，$\mathrm{Hom}_\Lambda(j_*(Y)\ i_*(X)) = \mathrm{Hom}_\Lambda((0, Y, 0), (X, 0, 0)) = 0$，并且引理 3.1 推出，对于任意 $l \geq 1$，$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^l(j_*(Y)), \Omega^l(i_*(X))) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}j_*, \mathrm{Im}i_*) = 0$。因此，我们得到 $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y)\ i_*(X)) = 0$。

情形 2。 $n-m>0$。于是我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y), i_*(X)[n-m]) &\cong \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y)[-n+m], i_*(X))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\Omega_\Lambda^{n-m}(j_*(Y)), i_*(X))\\ &\cong \varinjlim_{l\geq 0}\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^{l+n-m}(j_*(Y)), \Omega^l(i_*(X))).\end{aligned}$$

由引理 3.1 可得 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^{l+n-m}(j_*(Y)), \Omega^l(i_*(X))) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}j_*, \mathrm{Im}i_*)$，其值为零。因此，$\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y)\ i_*(X)[n-m]) = 0$。

情形 3。 $n-m<0$。于是我们有

$$\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y), i_*(X)[n-m]) \cong \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y), \Omega_\Lambda^{m-n}(i_*(X))),$$

并且我们可以用与情形 2 相同的方法证明 $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(j_*(Y)\ i_*(X)[n-m]) = 0$。

□

定理 3.3。设 ${}_BM_A$ 是一个 B-A-双模，其中 ${}_BM$ 是半单的且 M_A 是投射的，并设 $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$。那么

$$D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B).$$

证明。由右 recollement

$$D_{sg}(A) \xrightarrow[\widetilde{i}^!]{\widetilde{i}_*} D_{sg}(\Lambda) \xrightarrow[\widetilde{j}_*]{\widetilde{j}^*} D_{sg}(B),$$

我们有 $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\mathrm{Im}\widetilde{i}_*, \mathrm{Im}\widetilde{j}_*) = 0$，且 $\widetilde{i}_*$ 和 $\mathrm{Im}\widetilde{j}_*$ 都是全忠实的。另一方面，由引理 3.2 可知 $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\mathrm{Im}\widetilde{j}_*, \mathrm{Im}\widetilde{i}_*) = 0$，因此函子 $(\widetilde{i}_*, \widetilde{j}_*) : D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B) \to D_{sg}(\Lambda)$ 是全忠实的。对于任意 $X \in D_{sg}(\Lambda)$，存在一个三角

$$\widetilde{i}_*\widetilde{i}^!X \xrightarrow{\eta} X \xrightarrow{\varepsilon} \widetilde{j}_*\widetilde{j}^*X \xrightarrow{\omega} \widetilde{i}_*\widetilde{i}^!X[1]$$

在 $D_{sg}(\Lambda)$ 中。由于 $\omega \in \mathrm{Hom}_{D_{sg}(\Lambda)}(\mathrm{Im}\widetilde{j}_*, \mathrm{Im}\widetilde{i}_*) = 0$，我们得到 $X \cong \widetilde{i}_*\widetilde{i}^!X \oplus \widetilde{j}_*\widetilde{j}^*X$ 属于 $D_{sg}(\Lambda)$；参见 [15, 1.4 引理] 或 [24, 命题 4.8]。因此，函子 $(\widetilde{i}_*, \widetilde{j}_*) : D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B) \to D_{sg}(\Lambda)$ 是稠密的，进而诱导出 $D_{sg}(\Lambda)$ 与 $D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$ 之间的三角等价。 □

4 应用与例子

本节中，我们将把主要结果应用于由带关系的箭图给出的代数。设 k 是一个代数闭域。那么，任意有限维 k- 代数都同构于 kQ/I，其中 Q 是有限箭图， I 是容许理想。箭图 Q 是一个四元组 (Q_0, Q_1, s, t)，其中 Q_0 和Q_1 是有限的顶点集与箭集， s 和 t 是函数，分别将 Q_1 中的每个箭映到其起点和终点。对于任意两个箭 α_1 和 α_2，若 $t(\alpha_1) = s(\alpha_2)$，则 α_1 与 α_1 的复合记作 $\alpha_1\alpha_2$。

推论 4.1. 设 $A = kQ_A/I_A$ 和 $B = kQ_B/I_B$ 是两个有限维代数，$(Q_\Lambda)_0 = (Q_A)_0 \cup (Q_B)_0$, 且 $(Q_\Lambda)_1 = (Q_A)_1 \cup (Q_B)_1 \cup \{\alpha_i\}_{i\in J}$，其中$J$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个有限子集， α_i 是从 $(Q_B)_0$ 到 $(Q_A)_0$ 的一个箭头，对任意$i \in J$均如此。设 $\Lambda = kQ_\Lambda/I_\Lambda$，其中 I_Λ 是由 I_A、 I_B 和 $\alpha\alpha_i$生成的理想，对任意 $\alpha \in (Q_B)_1$和 $i \in J$均如此。则 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$。

证明. 由于不存在从 $(Q_A)_0$ 到 $(Q_B)_0$, 的箭头，我们有 $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$，其中 $M = e_B\Lambda e_A$ 是一个 B-A-双模，且 $e_A = \begin{bmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$和 $e_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_B \end{bmatrix}$。

由定理 3.3可知，要得到所需结论，只需证明 ${}_BM$ 是半单的，且 M_A 是投射的。在 [3, 第 1] 节关于 Morita 环境代数的情形中已提及这些事实，而 Morita 环境代数是三角矩阵代数的一种扩张。为方便读者，我们在此给出证明。

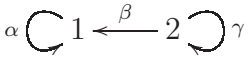
首先，注意到 $\mathrm{rad}({}_BM) = (\mathrm{rad}B)M = (\mathrm{rad}B)e_B\Lambda e_A$，其等于零，因为对于任意 $\alpha \in (Q_B)_1$ 和 $i \in J$， $\alpha\alpha_j \in I_\Lambda$。因此我们得到 $\mathrm{rad}({}_BM) = 0$，从而 ${}_BM$ 是半单的。

对于任意 $i \in J$，令 $t_i := t(\alpha_i)$，并令 e_{t_i} 为 A 中与顶点 t_i 对应的幂等元。令 $p_{i1} + I_A, \cdots, p_{ir_i} + I_A$ 为 $e_{t_i}A$ 的一组基，并令 $f_i : e_{t_i}A \to M = e_B\Lambda e_A$ 为右 A- 模的态射，它将任意 $p_{ij} + I_A$ 映射到 $\alpha_i p_{ij} + I_\Lambda$，其中 $j = 1, \cdots, r_i$。由于 $I_A \subseteq I_\Lambda$，我们得到 f_i 是良定义的。现在我们将证明 $f = (f_i)_{i\in J} : \oplus_{i\in J}(e_{t_i}A) \to M$ 是右 A-模的一个同构，从而 M_A 是投射模。令 q 为 Q_Λ 中一条从 $(Q_B)_0$ 到 $(Q_A)_0$, 、但不属于 I_Λ 的路径。由于 $(\mathrm{rad}B)e_B\Lambda e_A = 0$, 存在某个 $i \in J$ 使得 $q = \alpha_i p$, 其中 p 是 Q_A 中一条以 t_i 开始的路径。因此 f 是满射。对于任意满足 $a_{ij} \in k$ 的 $(\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}p_{ij} + I_A)_{i\in J} \in \oplus_{i\in J}(e_{t_i}A)$，若 $f((\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}p_{ij} + I_A)_{i\in J}) = 0$，则 $\sum_{i\in J}\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}\alpha_i p_{ij} \in I_\Lambda$。注意， $I_\Lambda = \langle I_A, I_B, \mathcal{S}\rangle$，其中 $\mathcal{S} = \{\alpha\alpha_i | i \in J$ 且 $\alpha \in (Q_B)_1\}$。因此存在

$u \in \langle I_A \rangle$, $v \in \langle I_B \rangle$ 和 $w \in \langle \mathcal{S} \rangle$，使得 $\sum_{i\in J}\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}\alpha_i p_{ij} = u + v + w$。由于 u, v 和 w 都是从 $(Q_B)_0$ 到 $(Q_A)_0$, 的路径的线性组合，我们可以假设 $u = \sum_{i\in J} k_i\alpha_i u_i$, $v = \sum_{i\in J} b_i v_i \alpha_i p_i$ 和 $w = \sum_{i\in J} c_i\beta_i\alpha_i q_i$, 其中 $k_i, b_i, c_i \in k$, $u_i \in I_A$, $v_i \in I_B$, $\beta_i \in (Q_B)_1$, ，且 p_i, q_i 是 Q_A 中以 t_i 开始的路径。因此, $\sum_{i\in J}\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}\alpha_i p_{ij} = \sum_{i\in J} k_i\alpha_i u_i + \sum_{i\in J} b_i v_i\alpha_i p_i + \sum_{i\in J} c_i\beta_i\alpha_i q_i$ 属于 kQ_Λ。由于所有路径构成 kQ_Λ 的一组基，我们得到对于任意 $i \in J$，都有 $b_i = 0 = c_i$，且 $\sum_{i\in J}\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}\alpha_i p_{ij} = \sum_{i\in J} k_i\alpha_i u_i$。于是我们有 $\sum_{i\in J}\alpha_i(\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}p_{ij}) = \sum_{i\in J}\alpha_i(k_i u_i)$ 属于 kQ，这意味着对于任意 $i \in J$，都有 $\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}p_{ij} = k_i u_i \in I_A$。总之，我们得到 $(\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}p_{ij} + I_A)_{i\in J} = 0$，从而 f 是单射。

□

例4.2. 设 $\Lambda = kQ/I$ 是代数，其箭图 Q 为



且 $I = \langle \alpha^3、\ \gamma^2、\ \gamma\beta \rangle$。设 $A = e_1\Lambda e_1 = k[x]/\langle x^3 \rangle$ 和 $B = e_2\Lambda e_2 = k[x]/\langle x^2 \rangle$。那么 A 和 B 都是自内射代数，而代数 A、B 和 Λ 满足推论 4.1 中的所有条件。因此，D_{sg}（Λ）$\cong D_{sg}$（A）$\coprod D_{sg}$（B）$\cong$ mod（$k[x]/\langle x^3 \rangle$）$\coprod$ mod$k$。我们注意到，Λ 是单项代数，由 [12, 定理 4.1] 可知，稳定范畴 GprojΛ 中只有两个不可分解对象。然而，Λ 是非Gorenstein 的，因此嵌入 Gproj$\Lambda \hookrightarrow D_{sg}$（$\Lambda$）不是等价。事实上，根据我们的计算，$D_{sg}$（$\Lambda$）中有三个不可分解对象。

注 4.3. 一般而言，推论 4.1 中的奇异等价并不能诱导 Gorenstein 缺陷范畴之间的等价。考虑上面的例子。A 和 B 的 Gorenstein 缺陷范畴均为零，但 Λ 并非如此，因为 Λ 是非Gorenstein。因此，Λ 的 Gorenstein 缺陷范畴不等价于 A和 B的 Gorenstein 缺陷范畴的直和。不过，如果我们将 $I = \langle \alpha^3、\ \gamma^2、\ \gamma\beta \rangle$ 替换为 $I = \langle \alpha^3、\ \gamma^2 \rangle$，那么就得到一个奇异等价 $D_{sg}(\Lambda) \cong D_{sg}(A) \coprod D_{sg}(B)$，它诱导了相应 Gorenstein 缺陷范畴之间的等价，见 [14, 推论 4.4] 和 [29,推论 4.1]。

致谢。本文得到国家自然科学基金委员会（12061060、11961007）、云南省中青年学术和技术带头人项目（批准号：202305AC160005）以及云南省科技创新团队（批准号：2020CXTD25）的资助。

参考文献

[1] L. Angeleri H¨ugel、S. K¨onig、Q. Liu 和 D. Yang，《梯子与导出模范畴的简单性》，代数杂志 472（2017），15–66。[2] M. Barrios 和 G. Mata，《关于 Ω^n- 有限与 Ω^∞- 无限表示型代数》，arXiv:1911.02325。[3] M. Barrios 和 G. Mata，《Morita 环境代数上的 Igusa-Todorov ϕ- 维数》，arXiv:2211.06473v1。[4]A. A. Beilinson 、J. Bernstein 和 P. Deligne，《反常层》，Ast´erisque，第 100 卷，法国数学会，1982。[5] A. A. Beilinson、V. A. Ginsburg 和 V. V. Schechtman，《Koszul 对偶》，《几何与物理杂志》5（1988），第 3 期，317–350。[6] P. A. Bergh、D. A. Jørgensen 和 S. Oppermann，《Gorenstein 缺陷范畴》，《数学季刊》66（2015），459–471。[7] R.-O. Buchweitz，《Gorenstein 环上的极大 Cohen-Macaulay 模与 Tate 上同调》，附录作者为 L.L. Avramov、B. Briggs、S.B. Iyengar 和 J.C. Letz，《数学调查与专著》，第 262 卷，美国数学会，2021。[8] X. W. Chen，《奇点范畴、Schur 函子与三角矩阵环》，代数与表示论 12（2009），181–191。[9] X. W. Chen，《根基平方为零的代数的奇点范畴》，《数学文献》16（2011），921–936。[10]X. W. Chen，《由同调满射诱导的奇异等价》，《美国数学会会刊》142（2014），第 8 期，2633–2640。[11] X. W. Chen，《二次单项代数的奇点范畴》，《数学季刊》69（2018），1015–1033。[12] X. W. Chen、D. W. Shen 和 G. D. Zhou，《单项代数上的 Gorenstein-投射模》，《爱丁堡皇家学会会刊》148 A（2018），1115–1134。[13] X. W. Chen 和 Y. Ye，《缩回与 Gorenstein 同调性质》，代数与表示论 17（2014），713–733。

[14] K. Erdmann、C. Psaroudakis 和 Ø. Solberg，《箭头删除操作的同调不变量》，表示理论 26 (2022)，370–387。[15] D. Happel，《有限维代数表示论中的三角范畴》，伦敦数学学会讲义丛书 119 (1988)。[16]D. Happel，《论 Gorenstein 代数》，载于：数学进展，第 95 卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1991 年，第 389–404 页。[17] M. Kalck，《温和代数的奇点范畴》，伦敦数学学会会报 47 (2015)，第 1 期，65–74。[18] B. Keller 和 D. Vossieck，《导出子范畴》（法文，附英文摘要），巴黎科学院院报，I 辑，数学 305 (1987)，第 6 期，225–228。[19] S. König，《倾斜复形、垂直范畴与环的导出范畴的再黏合》，纯粹与应用代数杂志 73 (1991)，211–232。[20] P. Liu 和 M. Lu，《奇点范畴与单态范畴的拼接》，代数通讯 43 (2015)，2443–2456。[21] M. Lu，《三角矩阵代数的 Gorenstein 缺陷范畴》，代数杂志 480 (2017)，346–367。[22] M. Lu，《简单粘合代数的 Gorenstein 性质》，代数与表示论 22 (2019)，517–543。[23] M. Lu 和 B. Zhu，《Gorenstein 单项式代数的奇点范畴》，纯粹与应用代数杂志 225 (2021)，第 8 期，106651。[24]J. I. Miyachi，《代数表示的导出范畴及其应用》，千叶大学，2000 年，网址：http://www.u-gakugei.ac.jp/∼miyachi/seminar.html。[25]D. Orlov，《奇点的三角范畴与 Landau-Ginzburg 模型中的 D-膜》，斯捷克洛夫数学研究所学报 204 (2004)，240–262。[26] B. J. Parshall，《有限维代数与代数群》，当代数学 82 (1989)，97–114。

[27] C. Psaroudakis、Ø. Skartsæterhagen 和 Ø. Solberg，《拼接中的 Gorenstein 范畴、奇异等价与上同调环的有限生成》，美国数学会汇刊 B辑 1 (2014)，45–95。[28] Y. Y. Qin，《导出范畴拼接中的最终同调同构》，代数杂志 563 (2020)，53–73。[29] Y. Y. Qin，《最终同调同构与 Gorenstein 投射模》，arXiv:2203.09211。[30]Y. Y. Qin 和 Y. Han，《通过 - 拼接简化同调猜想》，代数与表示论 19 (2016)，第 2 期，377–395。 nC. M. Ringel，《Nakayama 代数的 Gorenstein 投射模 I》，代数杂志 385 (2013)，241–261。[31] D.W.Shen，《Nakayama 代数的奇点范畴》，代数杂志 429 (2015)，1–18。[32] D. W. Shen，《关于奇异等价与幂等元的一则注记》，《美国数学会会刊》149 (2021)，第 10 期，4067–4072。[33] P. Zhang，《Gorenstein-投射模与对称拼接》，代数杂志 388 (2013)，65–80。