arXiv:2303.14164v1 [math.LO] 24 Mar 2023

双关系框架上的相容逻辑 G¨odel 模态逻辑*

Marta B´ılkov´a[1][0000−0002−3490−2083]、Sabine Frittella[2][0000−0003−4736−8614] 和 Daniil Kozhemiachenko[2][0000−0002−1533−8034]

[1] 捷克科学院计算机科学研究所，布拉格 bilkova@cs.cas.cz[2] INSA 卢瓦尔河谷中心，奥尔良大学，LIFO EA 4022，法国
sabine.frittella@insa-cvl.fr, daniil.kozhemiachenko@insa-cvl.fr

摘要。我们进一步发展了相容逻辑 G¨odel 模态逻辑 KG[2]。本文考察其一个版本 KG[2±]，该版本赋予了克里普克语义，定义在取值为 $[0,1]$ 的框架上，其中包含两个模糊关系 R^+ 和 R^-（分别表示对断言和否认的信任度），以及两个赋值 v_1 和 v_2（分别表示真支持和假支持），并由德摩根否定 $\neg$ 将它们联系起来。
我们证明，与 KG[2], KG[2±] *does not* 扩展 G¨odel 模态逻辑 $\mathfrak{GR}$ 形成对比的是，2 和 $\Diamond$ 不可相互定义。我们还表明，若干重要的框架类都是 KG[2±] 可定义的（尤其是清晰框架、单关系框架和有限分支框架）。对于有限分支框架上的 KG[2±]，我们构造了一种可靠且完备的约束语义树演算，并据此给出一个判定程序。利用该判定程序，我们证明 KG[2±] 的可满足性和有效性属于 PSPACE。

关键词：模态逻辑 · G¨odel 逻辑 · 相容悖论逻辑 · 约束语义树

1 引言

相容悖论逻辑的特征是拒绝蕴涵爆炸原理，即 $p, \neg p \models q$（或者说，不认为 $p \wedge \neg p \rightarrow q$ 有效）。其动机非常简单：即使前提相互矛盾，认为由此可以推出字面意义上的每一个陈述，也有悖直觉。

同样，在模态逻辑中，当将 2 或 $\Diamond$ 解释为例如信念或义务时，$2(p \wedge \neg p) \rightarrow \Box q$ 和 $\Diamond(p \wedge \neg p) \rightarrow \Diamond q$ 的有效性并不符合我们对信念和义务的理解。事实上，一个人可以相信某个

* Marta B´ílkov´a的研究得到了捷克科学基金会22-01137S号资助。Sabine Frittella和Daniil Kozhemiachenko的研究由ANR JCJC 2019资助，项目为PRELAP（ANR-19-CE48-0006）。本研究是MOSAIC项目的一部分，该项目由欧盟玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助计划资助，资助编号为101007627。

矛盾，却不相信另一个矛盾。我可能负有彼此冲突的道德义务，但并非有义务去做所有事情。因此，在形式化这类概念时，次协调模态逻辑比经典模态逻辑更符合直觉。

次协调模态逻辑 对次协调性的语义表示，传统方法之一是考虑带有两个而非一个赋值的 Kripke 框架 [31,34,15,33,29,30,13]。它们被解释为真与假（或正支持与负支持）的独立支持。这一思想源自 Belnap 和 Dunn 提出的“实用四值逻辑” [2] （又称 BD 或 FDE ——“一级蕴涵”）。

在引入对公式的真与假分别赋值之后，下一步通常是像 [33,13] 中那样引入彼此独立的可及关系：一个关系用于确定模态公式在w处是否为真，另一个则用于确定其在 w 处是否为假。

模糊模态逻辑 在上述情形中，每个公式在任一给定状态下只能取四种“Belnap 值”之一：仅真、仅假、真且假，或既非真也非假。然而，显然有些陈述具有从 0 到 1 的多个真值度：例如，如果 s 是“苹果是酸的”，我有时可能会在一定程度上认同 s。这正是模糊逻辑背后的思想。

将模态陈述纳入考量时，这一想法同样适用：我可能承担不同强度的义务，也可能比起另一个命题，更相信某个命题。因此，我们有义务模糊逻辑、信念模糊逻辑和认知模糊逻辑（例如，参见 [12] 和 [11]）。

不同的（命题）模糊逻辑具有不同的表达能力。粗略来说，可以将它们分为三类：能够表达（截断）加法与减法的逻辑；能够表达 $[0,1]$上的序关系的逻辑；以及两者都无法表达的逻辑。最著名的例子依次是卢卡西维奇逻辑、哥德尔逻辑和乘积逻辑（更多详情例如参见[21] 或 [26] ）。

在形式化自然语言中的模态陈述时，可以合理地预期，一个主体能够对它们进行比较（例如：“我觉得今天下雨的可能性比发生龙卷风更大。”）。另一方面，很少有人会说“我有67%的把握认为Paula的狗是金毛寻回犬”，而“我觉得Paula的狗更像是金毛寻回犬，而不是腊肠犬”则是一句非常自然的话。因此，第二类逻辑似乎是最合理的选择。

G¨odel 模态逻辑及其次协调扩张（命题）G¨odel 逻辑 G 可被视为一种比较真值逻辑，因为公式的取值取决于变量的顺序，而非变量的取值。因此，它非常适合对模态陈述进行形式化。G 与 2 以及 $\Diamond$ （按 [32]的记法为$\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}}$ ）的扩张，其语义建立在$[0,1]$值框架及模糊可及关系之上，最早由 [9]引入，此后得到了深入研究。特别是，2 和 $\Diamond$ 片段的公理化，以及双模态模糊 [10] 和清晰 [32] 逻辑的公理化

已知。此外，模糊和清晰 $\mathfrak{G}\mathfrak{R}$及其单模态片段均为PSPACE完全的 [24,25,7,8]。

双 G¨odel（ [16] 中的对称 G¨odel）逻辑 biG 将 F 扩展为带有 Baaz 的 Delta 算子 $\triangle$。这使得表达严格序成为可能。因此，biG 的模态扩展可以形式化地表达上述这样的陈述：“我认为 Paula 的狗与其说是腊肠犬，不如说是金毛寻回犬”，其中“与其说……不如说……”被理解为“置信度严格更高”。KbiG（在 biG 中加入 2 和 $\Diamond$ 的扩展）于 [6] 提出，并于 [4] 给出了公理化。此外，双 G¨odel 逻辑的时态扩展于 [1] 提出。这两种逻辑的可满足性和有效性都属于 PSPACE。

最后，正如直觉主义逻辑可以扩展为带有德摩根否定的逻辑，G¨odel 逻辑也可以如此扩展（关于直觉主义命题逻辑的扩展，见 [35]；关于 G 的扩展，见 [3,5]）。被否定的公式 $\neg\phi$ 按照预期被解释为“ϕ 为假”。本文关注 G 的一种扩展，该扩展在 $\mathrm{I_4C_4}$[3] from [35] 之后定义 $\neg(\phi \to \phi') \leftrightarrow (\neg\phi' \prec \neg\phi)$ 和 $\neg(\phi \prec \phi') \leftrightarrow (\neg\phi' \to \neg\phi)$。下文将这种逻辑称为 G^2。

G^2 具有一些良好的性质。首先，所有 G^2 联结词都有其对偶。其次，与 G 不同，在任何赋值下，$p \to q$ 和 $q \to p$ 都不一定具有指定值。这意味着并非所有陈述都可以比较。事实上，在推理信念时，可以放心地假设它们并非总是可比较的：人们不必相信今天会有雷暴的程度高于（或低于）他们相信远房亲戚养了两只狗的程度。

G^2 与 2 和 $\Diamond$[4] 的清晰模态扩展在 [6] 中被引入，并在 [4]中被公理化。本文将迈出预期的下一步：我们允许 KG^2 采用模糊框架，并为其配备两个关系：R^+ 和 R^-，分别用于确定模态公式的正支持和负支持。我们称这一逻辑为 $\mathrm{KG}^{2\pm}$。

本文结构 本文余下部分安排如下。第 2 节介绍必要的逻辑预备知识，以及$\mathbf{K}\mathrm{G}^{2\pm}$的语义定义。第 3节建立 $\mathbf{K}$biG、$\mathbf{K}\mathrm{G}^2$,和 $\mathbf{K}\mathrm{G}^{2\pm}$之间的关系。接着，第 4节研究框架类与在其上有效的公式之间的对应关系。第 5节为有限分支框架上的 $\mathbf{K}\mathrm{G}^{2\pm}$ 设计一个可靠且完备的语义树系统，并证明其可满足性和有效性是 PSPACE-完备的。最后，第 6节总结本文的结果，并概述未来工作的计划。

2 语言与语义

为使论述自成一体，我们先介绍 biG 的代数语义，然后据此得到 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 的克里普克语义。

[3] 该逻辑由不同作者分别独立提出[35,23], ，并在[28]中得到进一步研究。它是 Moisil 模态逻辑 [27]的命题片段。我们感谢 Heinrich Wansing 指出了这一点。[4] 请注意，在存在 $\neg$的情况下，我们有 $\neg\Box\neg\phi \leftrightarrow \Diamond\phi$ 和 $\neg\Diamond\neg\phi \leftrightarrow \Box\phi$。

定义 1. bi-G ¨odel 代数 $[0,1]_{\mathsf{G}} = \langle [0,1], 0, 1, \wedge_{\mathsf{G}}, \vee_{\mathsf{G}}, \to_{\mathsf{G}}, \prec, \triangle, \sim \rangle$ 定义如下：对所有 $a, b \in [0,1]$，有 $a \wedge_{\mathsf{G}} b = \min(a,b)$，$a \vee_{\mathsf{G}} b = \max(a,b)$。其余运算定义如下：

$$a \to_{\mathsf{G}} b = \begin{cases} 1, & \text{if } a \le b \\ b & \text{else} \end{cases} \qquad a \prec_{\mathsf{G}} b = \begin{cases} 0, & \text{if } a \le b \\ a & \text{else} \end{cases}$$

$$\sim_{\mathsf{G}} a = \begin{cases} 0, & \text{if } a > 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases} \qquad \triangle_{\mathsf{G}} a = \begin{cases} 0, & \text{if } a < 1 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

注意，$\triangle_{\mathsf{G}}$ 和 $\prec_{\mathsf{G}}$ 可相互定义：

$$\triangle_{\mathsf{G}} a = 1 \prec_{\mathsf{G}} (1 \prec_{\mathsf{G}} a) \qquad a \prec_{\mathsf{G}} b = a \wedge \sim_{\mathsf{G}} \triangle_{\mathsf{G}} (a \to b)$$

定义 2。一个双关系框架是一个元组 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^- \rangle$，其中 $W \neq \varnothing$ 且 1。$R^+, R^- : W \times W \to \{0,1\}$ 当且仅当 $\mathfrak{F}$ 是清晰的[5]；2。$R^+, R^- : W \times W \to [0,1]$ 当且仅当 $\mathfrak{F}$ 是模糊的。

定义 3（语言与语义）。我们固定一个由命题变元组成的可数集合 Prop，并定义语言 $\mathsf{biL}^{\neg}_{\Box,\Diamond}$，其巴科斯-诺尔范式（BNF）文法如下。

$$\mathsf{biL}^{\neg}_{\Box,\Diamond} \ni \phi ::= p \in \mathtt{Prop} \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \to \phi) \mid \Box\phi \mid \Diamond\phi$$

常量 0 和 1、$\vee$、$\prec$、$\triangle$以及 G ¨odel 否定 $\sim$ 均可按通常方式定义：

$$\mathbf{1} ::= p \to p \qquad \mathbf{0} ::= \neg\mathbf{1} \qquad \sim\phi ::= \phi \to \mathbf{0}$$

$$\triangle\phi ::= \mathbf{1} \prec (\mathbf{1} \prec \phi) \qquad \phi \vee \phi' ::= \neg(\neg\phi \wedge \neg\phi') \qquad \phi \prec \phi' ::= \neg(\neg\phi' \to \neg\phi)$$

一个 $\mathsf{KG}^{2\pm}$ 模型是一个元组 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2 \rangle$，其中 $\langle W, R^+, R^- \rangle$ 是清晰或模糊框架，而 $v_1, v_2 : \mathtt{Prop} \to [0,1]$ 则按如下方式扩展到复杂公式。

$$v_1(\neg\phi, w) = v_2(\phi, w) \qquad v_2(\neg\phi, w) = v_1(\phi, w)$$

$$v_1(\phi \wedge \phi', w) = v_1(\phi, w) \wedge_{\mathsf{G}} v_1(\phi', w) \qquad v_2(\phi \wedge \phi', w) = v_2(\phi, w) \vee_{\mathsf{G}} v_2(\phi', w)$$

$$v_1(\phi \to \phi', w) = v_1(\phi, w) \to_{\mathsf{G}} v_1(\phi', w) \qquad v_2(\phi \to \phi', w) = v_2(\phi', w) \prec_{\mathsf{G}} v_2(\phi, w)$$

模态语义如下。

$$v_1(\Box\phi, w) = \inf_{w' \in W} \{ wR^+w' \to_{\mathsf{G}} v_1(\phi, w') \} \qquad v_2(\Box\phi, w) = \sup_{w' \in W} \{ wR^-w' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(\phi, w') \}$$

$$v_1(\Diamond\phi, w) = \sup_{w' \in W} \{ wR^+w' \wedge_{\mathsf{G}} v_1(\phi, w') \} \qquad v_2(\Diamond\phi, w) = \sup_{w' \in W} \{ wR^-w' \to_{\mathsf{G}} v_2(\phi, w') \}$$

我们进一步用 $v(\phi, w) = (x, y)$ 表示 $v_1(\phi, w) = x$ 且 $v_2(\phi, w) = y$。我们还规定 $S(w) = \{w' : wSw' > 0\}$。

我们称 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \models \phi$) 上有效，当且仅当对于 $\mathfrak{F}$ 上任意的 v_1 和 v_2，以及任意的 $w \in \mathfrak{F}$，都有 $v(\phi, w) = (1, 0)$。ϕ 是 $\mathsf{KG}^{2\pm}$ 有效的，当且仅当它在每个框架上都有效。

注 1. 注意，真值支持（v_1）的语义条件与 KbiG 的模态语义一致。此外，假设 R^+ 和 R^- 是清晰的且 $R^+ = R^-$，即可得到 KG^2 的模态语义。关于这些逻辑更详细的语义，请参见 [6] 。

[5] 等价地，清晰框架中的 R^+ 和 R^- 位于 W上。

3 KbiG、KG², 和 KG²±

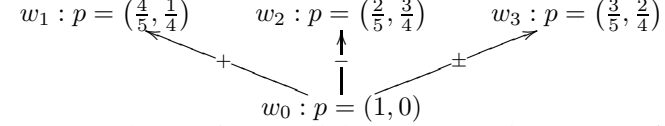
定义 3 让我们有理由相信 $\mathbf{KG}^{2\pm}$ 在某种意义上介于清晰的 $\mathbf{K}$biG与 $\mathbf{KG}^2$之间。本节将探讨以下问题。

1. 在 KbiG 中，2 和 $\Diamond$ 不可相互定义 [6, 命题 3]，但 $\neg\Box\neg p \leftrightarrow \Diamond p$和 $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ 在 KG^2 中有效。在 $\mathrm{KG}^{2\pm}$中，2 和 $\Diamond$ 可相互定义吗？ 2. KG^2 扩展了清晰 KbiG，并且相对于不含 $\neg$的公式是保守的 [6, 命题 2]。$\mathrm{KG}^{2\pm}$（基于单关系或双关系框架）是否扩展了模糊 KbiG？基于双关系框架的清晰 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 是否扩展了清晰 KbiG？我们首先证明，实际上，2 和 $\Diamond$ 在 $\mathrm{KG}^{2\pm}$中不可相互定义。

定理 1. 2 和 $\Diamond$ 不可相互定义。

证明。用 $\mathcal{L}_\Box$ 和 $\mathcal{L}_\Diamond$ 分别表示 $\mathrm{bi}\mathcal{L}^{\neg}_{\Box,\Diamond}$ 中不含 $\Diamond$的片段和不含 2 的片段。要证明此结论，只需找到一个指定点模型 $\langle\mathfrak{M}, w\rangle$，使得不存在 $\mathcal{L}_\Diamond$ 公式能在 w 处与 $\Box p$ 取相同的值，反之亦然。

考虑以下模型（所有变量在由 p 举例说明的所有状态中取值相同）。我们有 $v(\Box p, w_0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$ 和 $v(\Diamond p, w_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{4}\right)$。



容易验证，对于单点非自反框架上、含有一个状态 t 的每个关于一个变量的 $\phi \in \mathrm{bi}\mathcal{L}^{\neg}_{\Box,\Diamond}$，都有 $v(\phi, t) \in \{v(p, t)\ v(\neg p, t), (1, 0), (0, 1)\}$。因此，对于每个 $\chi \in \mathcal{L}_\Box$ 和每个 $\psi \in \mathcal{L}_\Diamond$，都有

$$v(\Box\chi, w_0) \in \left\{(0;1), \left(\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4};\frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{4};\frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5};\frac{1}{4}\right), (1;0)\right\} = X$$

$$v(\Diamond\psi, w_0) \in \left\{(0;1), \left(\frac{4}{5};\frac{2}{4}\right), \left(\frac{2}{4};\frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{4};\frac{4}{5}\right), \left(\frac{2}{5};\frac{2}{4}\right), (1;0)\right\} = Y$$

现在，令 X^c 和 Y^c 分别为 X 和 Y 在命题运算下的闭包。显然，$\left(\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right) \notin Y^c$ 和 $\left(\frac{4}{5};\frac{2}{4}\right) \notin X^c$。也容易通过归纳法验证，对于所有 $\chi' \in \mathcal{L}_\Box$ 和 $\psi' \in \mathcal{L}_\Diamond$，都有 $v(\chi', w_0) \in X^c$ 和 $v(\psi', w_0) \in Y^c$。结论由此得出。

下一个陈述对第二个问题的前半部分给出了否定回答。

定理 2. 模糊 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 并非模糊 KbiG 的扩展。

证明。回忆一下，$\Diamond{\sim}{\sim}p \to {\sim}{\sim}\Diamond p$ 是模糊 G¨odel 模态逻辑的一个定理，而 KbiG 扩展了模糊 $\mathfrak{GR}$ [6, 命题 2]。因此，$\Diamond{\sim}{\sim}p \to {\sim}{\sim}\Diamond p$ 是 KbiG 有效的。考虑下面的模型。

$$w \xrightarrow{R^+ = R^- = \frac{1}{2}} w' : p = \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

显然，$v_2({\sim}{\sim}\Diamond p, w) = 1$，但 $v_2(\Diamond{\sim}{\sim}p, w) = 0$。因此，$v_2(\Diamond{\sim}{\sim}p \to {\sim}{\sim}\Diamond p, w) = 1$，即，$\Diamond{\sim}{\sim}p \to {\sim}{\sim}\Diamond p$ 在 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 中无效。

[6] 参见附录中的完整集合。

请注意，我们在上述定理的证明中使用了一个单关系模糊框架。接下来需要考虑清晰$\mathbf{K}\mathsf{G}^{2\pm}$在双关系框架上的情形。在本节余下部分，我们将证明它确实扩展了清晰$\mathbf{K}\mathsf{biG}$。下一个引理是对 [6, 命题 1]的直接改编。

引理 1. 设 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 是一个清晰模型。进一步设 $\mathfrak{M}^* = \langle W, (R^+)^*, (R^-)^*, v_1^*, v_2^*\rangle$ 如下：$(R^+)^* = R^-, (R^-)^* = R^+$, $v_1^*(p,w) = 1 - v_2(p,w)$，且 $v_2^*(p,w) = 1 - v_1(p,w)$。

Then, $v(\phi, w) = (x, y)$ *iff* $v^*(\phi, w) = (1 - y, 1 - x)$.

证明. 我们对 ϕ 进行归纳。命题变元的基础情形由 $\mathfrak{M}^*$ 的构造得证。命题联结词的情形由 [3, 命题 5] 得证。我们考虑 $\phi = \Box\psi$ 的情形。

设 $v(\Box\psi, w) = (x, y)$。则 $\inf\{v_1(\psi, w') : wR^+w'\} = x$，且 $\sup\{v_2(\psi, w') : wR^-w'\} = y$。现在，我们将归纳假设应用于 ψ，因此，若 $v(\psi, s) = (x', y')$，则对任意 $s \in R^+(w) = (R^-)^*(w)$ 及 $s' \in R^-(w) = (R^+)^*(w)$，都有 $v_1^*(\psi, s) = 1 - y'$ 且 $v_2^*(\psi, s') = 1 - x'$。但此时 $\inf\{v_1^*(\psi, w') : w(R^+)^*w'\} = 1 - y$，且 $\sup\{v_2^*(\psi, w') : w(R^-)^*w'\} = 1 - x$，如所需。

定理 3. 设 ϕ 是一个无 $\neg$ 公式。那么，ϕ 是清晰 KbiG 有效，当且仅当它是清晰 $\mathsf{KG}^{2\pm}$ 有效。

证明。显然，如果 ϕ 不是 KbiG 有效，那么它也不是 $\mathsf{KG}^{2\pm}$ 有效（回想注 1）。逆向，由引理 1 可知，如果对于某个框架 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^-\rangle$, $w \in \mathfrak{F}$，以及 v_2 在 $\mathfrak{F}$ 上，$v_2(\phi, w) > 0$，那么 $v_1^*(\phi, w) < 1$。但是，ϕ 不包含 $\neg$，因此只依赖于 v_2 和 R^-，由此 v_1^* 是定义在 $\langle W, R^-\rangle$ 上的 KbiG 赋值。因此，ϕ 也不是 KbiG 有效。

注意，引理 1 表明，要检验清晰 $\mathbf{K}\mathsf{G}^{2\pm}$ 有效性，只需检验在分裂模型中 ϕ 是否总是满足 $v_1(\phi, w) = 1$。另一方面，显然，由于定理 $\mathbf{K}\mathsf{G}^{2\pm}$ 2，这一化简不适用于模糊。

4 对应理论与框架可定义性

本节考察清晰和模糊 $\mathbf{K}\mathsf{G}^{2\pm}$ 中框架类的模态（不可）定义性。我们从引理 1 的推论入手，这些推论涉及清晰框架的可定义性。

定义 4. 设 $\mathbb{K}$ 是清晰框架的一个类。若对于每个 $\mathfrak{F} = \langle W、 R\rangle$，都有 $\mathfrak{F} \in \mathbb{K}$ 当且仅当 $\mathfrak{F} \models F(R)$，则称一阶或二阶公式$F$定义了 $\mathbb{K}$。

1. $\mathbb{K}$ 的 $+$对应类是由满足 $R^+\rangle \models F(R^+)$的框架 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^-\rangle$ 组成的框架类 $\mathbb{K}^+$。 2. $\mathbb{K}$ 的 $-$对应类是由满足 $R^-\rangle \models F(R^-)$的框架 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^-\rangle$ 组成的框架类 $\mathbb{K}^-$。 3. $\mathbb{K}$ 的 $\pm$对应类是 $\mathbb{K}^\pm = \mathbb{K}^+ \cap \mathbb{K}^-$。

推论 1. 设 ϕ 是一个定义框架类 $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle\mathbb{K}$ 的 $\neg$-自由公式，且 $\mathbb{K}^{\pm}$ 是 $\mathbb{K}$的 $\pm$对应项。那么， ϕ 在 KG$^{2\pm}$ 中定义 $\mathbb{K}^{\pm}$ 。

证明。假设 ϕ 不能定义 $\mathbb{K}^{\pm}$。那么，或者 (1) 存在 $\mathfrak{F}\notin\mathbb{K}^{\pm}$ 使得$\mathfrak{F}\models\phi$，或者 (2) 对某个 $\mathfrak{H}\in\mathbb{K}^{\pm}$，有 $\mathfrak{H}\not\models\phi$。由于 ϕ 在 KbiG 中定义了 $\mathbb{K}$，显然$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{H}\in\mathbb{K}^{+}$。因此，当 $\mathfrak{F}\notin\mathbb{K}^{-}$或 $\mathfrak{H}\notin\mathbb{K}^{-}$时，我们需要通过反证法进行推理。我们只证明 (1)，因为 (2) 可以用对偶方式处理。

注意，对于定义在 $\mathfrak{F}=\langle W,R^{+},R^{-}\rangle$ 上的每个 $w\in\mathfrak{F}$ 和 v_2，都有 $v_2(\phi,w)=0$。然而，根据引理 1，对于定义在 $\mathfrak{F}$ 上的每个 $w\in\mathfrak{F}$ 和 v_1^{*}，都有 $v_1^{*}(\phi,w)=1$。因此，由于对于每个 v_1^{*}，都存在一个 v_2 可由其得到，所以 ϕ 在框架 $\langle W,R^{-}\rangle$ 上是 KbiG 有效的，其中 R^{-} 无法通过 $F(R^{-})$ 定义。因此，ϕ 在 KbiG 中也不能定义 $\mathbb{K}$。矛盾。

现在自然会问，是否可能定义这样的框架类，它们仅是 KbiG 可定义框架类的 $+$-对应类（或 $-$-对应类）。例如，某个框架类中， R^{+} 自反，但 R^{-} 不一定自反。下一个命题给出了否定的回答。

推论 2. 设 $F(R^{+})$ 和 $F(R^{-})$ 是定义关系 R^{+}和 R^{-}的两个一阶或二阶公式。那么， $\mathbb{K}$清晰框架 $\mathfrak{F}=\langle W$、 R^{+}、 $R^{-}\rangle$的框架类中，只有 R^{+} 可由 $F(R^{+})$定义（相应地，只有 R^{-} 可由 $F(R^{-})$定义）的框架类，不能在 KG$^{2\pm}$ 中定义。

证明。 我们用反证法。假设 ϕ 定义了 $\mathbb{K}$，并设 $\mathfrak{F}\in\mathbb{K}$ 满足$\mathfrak{F}=\langle W$， R^{+}， $R^{-}\rangle$ 使得 $F(R^{-}$在 $\mathfrak{F}$上不成立。现在记 $\mathfrak{F}^{*}=\langle W$， R^{-}， $R^{+}\rangle$。显然， $\mathfrak{F}^{*}\notin\mathbb{K}$。然而，由引理 1，我们有 $\mathfrak{F}^{*}\models\phi$，也就是说， ϕ 不能定义 $\mathbb{K}$。矛盾。

截至目前，我们已经讨论了不同类别清晰框架的可定义性。$2(p\vee q)\ \rightarrow(\Box p\vee\Diamond q)$ 在 $\mathfrak{GR}$ [32] 中定义清晰框架，而 $\triangle\Box p\rightarrow\Box\triangle p$ 在 KbiG [4][7]，中定义清晰框架；然而，KG$^{2\pm}$ 并未扩展 KbiG（也未扩展 $\mathfrak{GR}$），因此，所有清晰框架这一类的可定义性并非显而易见。

定理 4. 令 $\mathfrak{F}=\langle W,R^{+},R^{-}\rangle$。

1. R^{+} 是清晰的，当且仅当 $\mathfrak{F}\models\triangle\Box p\rightarrow\Box\triangle p$。
2. R^{-} 是清晰的，当且仅当 $\mathfrak{F}\models\Diamond\sim\sim p\rightarrow\sim\sim\Diamond p$。

证明。首先注意，对于每个 ϕ和$i\in\{1,2\}$，都有 $v_i(\triangle\phi,w)$ $v_i(\sim\sim\phi,w)\ \in\{0,1\}$。现在令 R^{+} 为清晰的。我们有

$$\begin{aligned} v_1(\triangle\Box p,w)=1 \text{ then } & v_1(\Box p,w)=1\\ \text{then } & \inf\{v_1(p,w'):wR^{+}w'\}=1 \qquad (R^{+}\text{ is crisp})\\ \text{then } & \inf\{v_1(\triangle p,w'):wR^{+}w'\}=1\\ \text{then } & v_1(\Box\triangle p,w)=1 \end{aligned}$$

[7] 分别讨论 $\mathfrak{GR}$ 和 KbiG 中清晰框架的可定义性是有意义的，因为 $\triangle\Box p\rightarrow\Box\triangle p$ 对完备性证明至关重要。

$$
\begin{aligned}
v_2(\triangle\Box p, w) = 0 \text{ then } & v_2(\Box p, w) = 0 \\
\text{then } & \sup_{w' \in W} \{wR^- w' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(p, w')\} = 0 \\
\text{then } & \sup_{w' \in W} \{wR^- w' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(\triangle p, w')\} = 0 \\
\text{then } & v_2(\Box\triangle p, w) = 0
\end{aligned}
$$

对于逆向，设 $wR^+w' = x$ 满足 $x \in (0, 1)$。我们令 $v(p, w') = (x, 0)$，并在其他地方令$v(p, w'') = (1, 0)$。显然， $v(\triangle\Box p, w) = (1, 0)$，但 $v(\Box\triangle p, w) = (0, 0)$。因此， $v(\triangle\Box p \to \Box\triangle p, w) \neq (1, 0)$，证毕。

对偶地考虑 R^- 的情况。对于清晰的 R^-，我们有

$$
\begin{aligned}
v_1(\Diamond\sim\sim p, w) = 1 \text{ then } & \sup_{w' \in W} \{wR^- w' \wedge_{\mathsf{G}} v_1(\sim\sim p, w')\} = 1 \\
\text{then } & \sup_{w' \in W} \{wR^- w' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(p, w')\} > 0 \\
\text{then } & v_1(\Diamond p, w) > 0 \\
\text{then } & v_1(\sim\sim\Diamond p, w) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2(\Diamond\sim\sim p, w) = 0 \text{ then } & \inf\{v_2(\sim\sim p, w') : wR^- w'\} = 0 \qquad (R^- \text{ is crisp}) \\
\text{then } & \inf\{v_2(p, w') : wR^- w'\} < 1 \\
\text{then } & v_2(\Diamond p, w) < 1 \\
\text{then } & v_2(\sim\sim\Diamond p, w) = 0
\end{aligned}
$$

反过来，设 $wR^-w' = y$ 满足 $y \in (0, 1)$。我们令 $v(p, w') = (1, y)$，并在其他地方令 $v(p, w'') = (1, 0)$。显然， $v(\Diamond\sim\sim p, w) = (1, 0)$，但 $v(\sim\sim\Diamond p, w) = (1, 1)$。因此， $v(\Diamond\sim\sim p \to \sim\sim\Diamond p, w) \neq (1, 0)$，证毕。

上述论述突显了清晰与模糊双关系框架之间一个重要的对比：虽然在清晰框架中不可能分别定义 R^+ 和 R^-，但我们可以定义这样一类框架，其中只有 R^+ （或只有 R^-）是清晰的。接下来值得探讨的是，我们能否定义 R^+ 和 R^- 之间的某些关系。特别地，我们证明

1. 存在 w 和 w' 使得 $wR^+w', wR^-w' > 0$ 的框架不可定义；2. 单关系框架（包括清晰和模糊框架）可定义。

定义 5. 设 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 是一个模型。我们将其分裂定义为 $\mathfrak{M}^{\mathsf{s}} = \langle W^{\mathsf{s}}, (R^+)^{\mathsf{s}}, (R^-)^{\mathsf{s}}, v_1^{\mathsf{s}}, v_2^{\mathsf{s}}\rangle$，其中

- $W^{\mathsf{s}} = \{\ulcorner wSw'\urcorner, \ulcorner \varnothing Su\urcorner\colon\ wSw', S \in \{R^+, R^-\}, \neg\exists t\colon\ tSu > 0\}$;
- $\ulcorner uSu'\urcorner S^{\mathsf{s}} \ulcorner wSw'\urcorner = u'Sw'$，其中 $S \in R^+, R^-$; – 对每个 $\ulcorner wSw'\urcorner$和 $i \in \{1, 2\}$， $v_i^{\mathsf{s}}(p, \ulcorner wSw'\urcorner) = v_i(p, w')$。我们还将 $[\![w]\!] = \{\ulcorner \varnothing Sw\urcorner, \ulcorner uSw\urcorner$记为： $S \in \{R^+, R^-\}\}$

显然，不存在满足 $u(R^+)^{\mathsf{s}}u'$ 和 $u(R^-)^{\mathsf{s}}u' > 0$ 的 u、 $u' \in W^{\mathsf{s}}$。我们将这类模型进一步称为分裂模型。

下一个命题很容易证明。

引理 2. 设 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 是一个模型， $\mathfrak{M}^{\mathsf{s}}$ 是其分裂。那么对于每个 $\phi \in$ 双$\mathcal{L}^{\neg}_{\Box,\ \Diamond}$ 和 $w^{\mathsf{s}} \in [\![w]\!]$， $v_i(\phi, w) = v_i^{\mathsf{s}}(\phi, w^{\mathsf{s}})$。

证明. 我们采用归纳法。命题变元的基础情形由 $\mathfrak{M}^{\mathfrak{s}}$ 的构造可知成立。命题联结词的情形显而易见。我们考虑 $\phi = \Box\chi$ 的情形（$\Diamond$ 的情形可对偶地处理）。

令 $\ulcorner uR^+w\urcorner \in [\![w]\!]$ 任意。我们有

$$\begin{aligned} v_1^{\mathfrak{s}}(\Box\chi, \ulcorner uR^+w\urcorner) &= \inf_{\ulcorner wR^+w'\urcorner \in W^{\mathfrak{s}}} \{\ulcorner uR^+w\urcorner (R^+)^{\mathfrak{s}} \ulcorner wR^+w'\urcorner \to_{\mathsf{G}} v_1^{\mathfrak{s}}(\chi, \ulcorner wR^+w'\urcorner)\} \\ &= \inf_{w'\in W} \{wR^+w' \to_{\mathsf{G}} v_1(\chi, w')\} \qquad \text{(by IH)} \\ &= v_1(\Box\chi, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^{\mathfrak{s}}(\Box\chi, \ulcorner uR^+w\urcorner) &= \sup_{\ulcorner wR^-w'\urcorner \in W^{\mathfrak{s}}} \{\ulcorner uR^-w\urcorner (R^-)^{\mathfrak{s}} \ulcorner wR^-w'\urcorner \wedge_{\mathsf{G}} v_2^{\mathfrak{s}}(\chi, \ulcorner wR^-w'\urcorner)\} \\ &= \sup_{w'\in W} \{wR^-w' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(\chi, w')\} \qquad \text{(by IH)} \\ &= v_2(\Box\chi, w) \end{aligned}$$

注意，我们可以应用归纳假设，因为 $\ulcorner uR^+w\urcorner \in [\![w]\!]$、$\ulcorner wR^+w'\urcorner \in [\![w']\!]$ 以及 wR^+w'（分别为 wR^-w'）的取值变为 $\ulcorner uR^+w\urcorner (R^+)^{\mathfrak{s}} \ulcorner wR^+w'\urcorner$（分别为 $\ulcorner uR^-w\urcorner (R^-)^{\mathfrak{s}} \ulcorner wR^-w'\urcorner$）的取值。结论由此得出。

下面的推论显然成立。

推论 3. 对于某些 w、$w' \in \mathfrak{F}$，同时满足 $wR^+w' > 0$ 和 $wR^-w' > 0$ 的（清晰或模糊）框架类 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^-\rangle$ 在 $\mathsf{KG}^{2\pm}$ 中不可定义。

现在我们来证明单关系框架的可定义性。

定理 5. 设 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^-\rangle$。则 $\mathfrak{F} \models \Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$ 当且仅当 $R^+ = R^-$。

证明。设 $R^+ = R^-$，我们有

$$\begin{aligned} v_1(\neg\Diamond\neg p, w) &= v_2(\Diamond\neg p, w) \\ &= \inf_{w'\in W} \{wRw' \to_{\mathsf{G}} v_2(\neg p, w')\} \\ &= \inf_{w'\in W} \{wRw' \to_{\mathsf{G}} v_1(p, w')\} \\ &= v_1(\Box p, w) \end{aligned}$$

v_2 可以用类似的方法处理。

现在设 $R^+ \neq R^-$，即 $wR^+w' = x$ 且 $wR^-w' = y$，其中某些 $w, w' \in \mathfrak{F}$，并且不失一般性地假设 $x > y$。我们定义 p 的取值如下：对所有 $w'' \neq w'$，$v(p, w'') = (1, 0)$，且 $v(p, w') = (x, y)$。显然，$v(\Box p, w) = (1, 0)$，但 $v(\neg\Diamond\neg p, w) = (y, x) \neq (1, 0)$，如所需。

在本文余下部分中，我们将研究有限分支框架上的（模糊）$\mathsf{KG}^{2\pm}$，即满足 $\langle W, R^+$ 其中 $|R^+(w)|, |R^-(w)| < \aleph_0$ 对每个 $w \in W$ 都成立的框架。我们将这种逻辑记作 $\mathsf{KG}^{2\pm}\mathsf{fb}$。这种限制有几个自然的理由。首先，如果我们用这种逻辑来形式化推理，那么假设主体只能考虑有限个备选项是合理的。在经典模态逻辑中，这一假设通常是隐含的，因为它们往往相对于有限分支（甚至有限）模型完备 [14]。在 G¨odel 逻辑的模态扩展中，情况并非如此，因此必须强制加入这一假设。其次，无限分支框架可能存在无见证模型：例如，可能出现 $v(\Diamond p, w) = (1, 0)$，但不存在 $w' \in R^+(w)$ 和 $w'' \in R^-(w)$

使得 $v_1(p, w') = 1$ 且 $v_2(p, w'') = 0$。这会使模态算子的信念解释显得有悖直觉。

我们通过证明模糊和清晰的[8] 有限分支框架可以定义，来结束本节。不过请注意，现在我们需要两个公式。

定理 6. $\mathfrak{F}$ 是有限分支的，当且仅当 $\mathfrak{F} \models {\sim}{\sim}\Box(p \vee {\sim}p)$ 和 $\mathfrak{F} \models \mathbf{1} \prec \Diamond\neg(p \vee {\sim}p)$。

证明。注意，对于每个 $w \in \mathfrak{F}$，$v_1(p \vee {\sim}p, w) > 0$ 且 $v_2(p \vee {\sim}p, w) < 1$。由于$\mathfrak{F}$是有限分支的，$\inf_{w' \in W} \{wSw' \to_{\mathsf{G}} v_1(p \vee {\sim}p, w')\} > 0$ 且 $\sup_{w' \in W} \{wSw' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(p \vee {\sim}p, w')\} < 1$ 对于 $S \in \{R^+, R^-\}$。因此，$v_1(2(p \vee {\sim}p)\ w) > 0$ 且 $v_2(2(p \vee {\sim}p)\ w) < 1$，由此，$v({\sim}{\sim}\Box(p \vee {\sim}p)\ w) = (1, 0)$。同理，$v_1(\Diamond\neg(p \vee {\sim}p)\ w) < 1$ 且 $v_2(\Diamond\neg(p \vee {\sim}p)\ w) > 0$，由此 $v(\mathbf{1} \prec \Diamond\neg(p \vee {\sim}p)\ w) = (1, 0)$。

对于逆向，我们分两种情况：(1) $|R^+(w)| \geq \aleph_0$，或 (2) 对某个 $w \in \mathfrak{F}$，$|R^-(w)| \geq \aleph_0$。在第一种情况下，我们令 $X \subseteq R^+(w)$ 可数，并如下定义 p 的取值：对每个 $w'' \notin X$，$v(p, w'') = (1, 0)$，且 $v(p, w_i) = \big(wR^+w' \cdot \frac{1}{i}, 0\big)$。显然，$\inf_{w' \in W} \{wR^+w' \to_{\mathsf{G}} v_1(p \vee {\sim}p, w')\} = 0$，因此 $v_1({\sim}{\sim}\Box(p \vee {\sim}p)) = 0$，如所需。

在第二种情况下，令 $Y \subseteq R^-(w)$ 可数，并如下定义 p 的取值：对每个 $w'' \notin Y$，$v(p, w'') = (1, 0)$，且 $v(p, w_i) = \big(wR^-w' \cdot \frac{1}{i}, 0\big)$。显然，$\inf_{w' \in W} \{wR^-w' \to_{\mathsf{G}} v_2(\neg(p \vee {\sim}p)\ w')\} = 0$，因此 $v_2(\Diamond\neg(p \vee {\sim}p)) = 0$，且 $v_2(\mathbf{1} \prec \Diamond\neg(p \vee {\sim}p)) = 1$，如所需。

5 约束语义树

证明系统大致可分为两类（更多详情请参见 [20, §2.4] 及其中引用的文献）：内在型证明系统，其证明仅由公式构成；以及外在型证明系统，其证明除了公式之外还包含其他实体，例如明确提及的真值、状态、公式之间的关系等。前者的标准例子是希尔伯特演算系统和根岑演算系统，后者则是表列法和标记系统。

外在演算系统通常会直接形式化语义条件，因此适合用于建立可判定性和复杂性结果。此外，其可靠性与完备性大多可通过例行检查上述规则来证明。最后，外在演算系统通常允许从无效公式的失败证明中明确提取反模型。

本文提出了 $\mathsf{KG}^{2\pm}{}_{\mathsf{fb}}$ 的约束语义树。这个想法最初由 [17,18,19] 提出，他们将约束语义树用作命题卢卡西维茨逻辑 L 的判定程序。[22]提出了一个适用于有理 Pavelka 逻辑的类似演算。在 [3], 中，我们提出了适用于 L^2 和 G^2 的约束语义树——即 L 和 G 的次协调扩张。[6]给出了适用于有限分支 KbiG 和 KG^2 的约束语义树。我们将本文的演算称为 $\mathcal{T}\big(\mathsf{KG}^{2\pm}{}_{\mathsf{fb}}\big)$，它是对 $\mathcal{T}\big(\mathsf{KG}^2_{\mathsf{fb}}\big)$ [6]的改编。

[8] 事实上，*crisp* 有限分支框架的可定义性可由推论 1 得出，因为 ${\sim}{\sim}\Box(p \vee {\sim}p)$ 在 **KbiG** [4, 中定义了有限分支框架。命题 4。3]

定义 6。固定一个状态标签集 W，并令 $\lesssim\in\{<,\leqslant\}$ 和 $\gtrsim\in\{>,\geqslant\}$。进一步令 $w\in\mathsf{W}$、$\mathtt{x}\in\{1,2\}$、$\phi\in\mathrm{bi}\mathcal{L}^{\neg,}_{\Box,\ \Diamond}$以及 $c\in\{0,1\}$。一个结构可以是以下形式之一$w\colon \mathtt{x}\colon\ \phi$、 c、 $w\mathsf{R}^{+}w'$，或 $w\mathsf{R}^{+}w'$。我们用 Str 表示结构集。形式为 $w\colon \mathtt{x}\colon\ p$、 $w\mathsf{R}^{+}w'$和 $w\mathsf{R}^{-}w'$的结构称为原子的（记作 AStr）。

我们将约束表 tableau定义为一棵向下分支的树，其各分支都是包含约束的集合 $\mathfrak{X}\lesssim\mathfrak{X}'$ $(\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}'\in\mathsf{Str})$。每个分支都可以通过应用下方的一条规则来扩展[9]（横线表示分支， i, $j\in\{1,2\}$， $i\neq j$， $w\mathsf{R}^{+}w'$ 和 $w\mathsf{R}^{-}w'$ 出现在该分支上， w'' 在该分支上是新鲜的）。

$$\neg_i\lesssim\frac{w:i:\neg\phi\lesssim\mathfrak{X}}{w:j:\phi\lesssim\mathfrak{X}}\quad \neg_i\gtrsim\frac{w:i:\neg\phi\gtrsim\mathfrak{X}}{w:j:\phi\gtrsim\mathfrak{X}}\quad \rightarrow_1\leqslant\frac{w:1:\phi\rightarrow\phi'\leqslant\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}\geqslant 1\ \Big|\ \begin{array}{c}\mathfrak{X}<1\\ w:1:\phi'\leqslant\mathfrak{X}\\ w:1:\phi>w:1:\phi'\end{array}}\quad \rightarrow_2\geqslant\frac{w:2:\phi\rightarrow\phi'\geqslant\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}\leqslant 0\ \Big|\ \begin{array}{c}\mathfrak{X}>0\\ w:2:\phi'\geqslant\mathfrak{X}\\ w:2:\phi'>w:2:\phi\end{array}}$$

$$\wedge_1\gtrsim\frac{w:1:\phi\wedge\phi'\gtrsim\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w:1:\phi\gtrsim\mathfrak{X}\\ w:1:\phi'\gtrsim\mathfrak{X}\end{array}}\quad \wedge_2\lesssim\frac{w:2:\phi\wedge\phi'\lesssim\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w:2:\phi\lesssim\mathfrak{X}\\ w:2:\phi'\lesssim\mathfrak{X}\end{array}}\quad \rightarrow_1<\frac{w:1:\phi\rightarrow\phi'<\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w:1:\phi'<\mathfrak{X}\\ w:1:\phi>w:1:\phi'\end{array}}\quad \rightarrow_2>\frac{w:2:\phi\rightarrow\phi'>\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w:2:\phi'>\mathfrak{X}\\ w:2:\phi'>w:2:\phi\end{array}}$$

$$\wedge_1\lesssim\frac{w:1:\phi\wedge\phi'\lesssim\mathfrak{X}}{w:1:\phi\lesssim\mathfrak{X}\mid w:1:\phi'\lesssim\mathfrak{X}}\qquad \wedge_2\gtrsim\frac{w:2:\phi\wedge\phi'\gtrsim\mathfrak{X}}{w:2:\phi\gtrsim\mathfrak{X}\mid w:2:\phi'\gtrsim\mathfrak{X}}$$

$$\rightarrow_1\gtrsim\frac{w:1:\phi\rightarrow\phi'\gtrsim\mathfrak{X}}{w:1:\phi\leqslant w:1:\phi'\mid w:1:\phi'\gtrsim\mathfrak{X}}\quad \rightarrow_2\lesssim\frac{w:2:\phi\rightarrow\phi'\lesssim\mathfrak{X}}{w:2:\phi'\leqslant w:2:\phi\mid w:2:\phi'\lesssim\mathfrak{X}}$$

$$\Box_1\gtrsim\frac{w:1:\Box\phi\gtrsim\mathfrak{X}}{w':1:\phi\gtrsim\mathfrak{X}\mid w\mathsf{R}^{+}w'\leqslant w':1:\phi}\qquad \Box_1\leqslant\frac{w:1:\Box\phi\leqslant\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}\geqslant 1\ \Big|\ \begin{array}{c}\mathfrak{X}<1\\ w\mathsf{R}^{+}w''>w'':1:\phi\\ w''{:}1:\phi\leqslant\mathfrak{X}\end{array}}\qquad \Box_1<\frac{w:1:\Box\phi<\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w\mathsf{R}^{+}w''>w'':1:\phi\\ w''{:}1:\phi<\mathfrak{X}\end{array}}$$

$$\Diamond_1\gtrsim\frac{w:1:\Diamond\phi\gtrsim\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w\mathsf{R}^{+}w''\gtrsim\mathfrak{X}\\ w'':1:\phi\gtrsim\mathfrak{X}\end{array}}\quad \Diamond_1\lesssim\frac{w:1:\Diamond\phi\lesssim\mathfrak{X}}{w':1:\phi\lesssim\mathfrak{X}\mid w\mathsf{R}^{+}w'\lesssim\mathfrak{X}}\quad \Box_2\gtrsim\frac{w:2:\Box\phi\gtrsim\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w\mathsf{R}^{-}w''\gtrsim\mathfrak{X}\\ w'':2:\phi\gtrsim\mathfrak{X}\end{array}}\quad \Box_2\lesssim\frac{w:2:\Diamond\phi\lesssim\mathfrak{X}}{w':2:\phi\lesssim\mathfrak{X}\mid w\mathsf{R}^{-}w'\lesssim\mathfrak{X}}$$

$$\Diamond_2\gtrsim\frac{w:2:\Diamond\phi\gtrsim\mathfrak{X}}{w':2:\phi\gtrsim\mathfrak{X}\mid w\mathsf{R}^{-}w'\leqslant w':1:\phi}\qquad \Diamond_2\leqslant\frac{w:2:\Diamond\phi\leqslant\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}\geqslant 1\ \Big|\ \begin{array}{c}\mathfrak{X}<1\\ w\mathsf{R}^{-}w''>w'':2:\phi\\ w''{:}2:\phi\leqslant\mathfrak{X}\end{array}}\qquad \Diamond_2<\frac{w:2:\Diamond\phi<\mathfrak{X}}{\begin{array}{c}w\mathsf{R}^{-}w''>w'':2:\phi\\ w''{:}2:\phi<\mathfrak{X}\end{array}}$$

A tableau's branch $\mathcal{B}$ is closed *iff one of the following conditions applies:*

- *the transitive closure of $\mathcal{B}$ under $\lesssim$ contains $\mathfrak{X}<\mathfrak{X}$;*
- $0\geqslant 1\in\mathcal{B}$、 $\mathfrak{X}>1\in\mathcal{B}$或 $\mathfrak{X}<0\in\mathcal{B}$。

当且仅当语义树的所有分支都闭合时，该语义树才是闭合的。我们称存在一个关于 ϕ的表 tableau 证明，当且仅当存在从 $w{:}1:\phi<1$和 $w{:}2:\phi>0$开始的闭合语义树。

开放分支 $\mathcal{B}$ 是完备的，当且仅当满足以下条件。

$*$ 如果一条规则的所有前提都出现在 $\mathcal{B}$上，那么它唯一的结论[10] 就会出现在 $\mathcal{B}$上。

在继续进行完备性证明之前，我们先说明 $\mathcal{T}\big(\mathrm{KG}^{2\pm}{}_{\mathsf{fb}}\big)$的工作原理。首先，我们在下表中总结语义树条目的含义。

条目	解释
$w{:}\,1:\phi\leqslant w'{:}\,2:\phi'$	$v_1(\phi,w)\ \leq v_2(\phi',w')$
$w{:}\,2:\phi\leqslant c$	$v_2(\phi,w)\ \leq c$与 $\ c\in\{0,1\}$
$w\mathsf{R}^{-}w'\leqslant w'{:}\,2:\phi$	$wR^{-}w'\leq v_2(\phi,w')$

[9]如果 $\mathfrak{X}<1$， $\mathfrak{X}<\mathfrak{X}'\in\mathcal{B}$或 $0<\mathfrak{X}'$， $\mathfrak{X}<\mathfrak{X}'\in\mathcal{B}$，则规则仅应用于 $\mathfrak{X}<\mathfrak{X}'$。

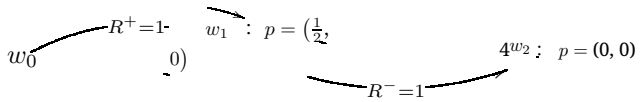
[10]请注意，分支规则有 *two*个结论。

定义 7（分支实现）。模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ with$W = \{w : w$ 出现在 $\mathcal{B}\}$ 上，当且仅当存在函数 $\mathrm{rl} : \mathrm{Str} \to [0,1]$ s.t.，使得对于每个 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}' \in \mathrm{Str}$ with $\mathfrak{x} = w : \mathrm{x} : \phi$, $\mathfrak{y} = w_i \mathrm{R}^+ w_j$, and $\mathfrak{y}' = w_i' \mathrm{R}^- w_j'$，以下条件成立（$\mathrm{x} \in \{1,2\}, c \in \{0,1\}$）。

– 若 $\mathfrak{z} \lesssim \mathfrak{z}' \in \mathcal{B}$，则 $\mathrm{rl}(\mathfrak{z}) \,.\, \mathrm{rl}(\mathfrak{z}')$。– $\mathrm{rl}(\mathfrak{x}) = v_{\mathrm{x}}(\phi, w)$，$\mathrm{rl}(c) = c$，$\mathrm{rl}(\mathfrak{y}) = w_i R^+ w_j$，$\mathrm{rl}(\mathfrak{y}') = w_i' R^- w_j'$

现在让我们举一个失败的证明的例子，其中包含一个完全开放分支（以下用 ☹ 标记），并构造一个实现它的模型。

$w_0 : 1 : \Box p \to \Box\neg\Diamond p < 1$
$w_0 : 1 : \Box p > w_0 : \Box\neg\Diamond p$
$w_0 \ \Box\neg\Diamond p < 1 : \mathrm{R} :: w_0 \ ^+ w_1 > w_1 \ 1$
$\neg\Diamond p w_1 : 1 : \neg\Diamond p < w_0 : 1 : \Box p$
$w_1 : 2 : \Diamond p < w_0 : 1 : \Box p w_1 : 2 :$
$\Diamond p < w_1 : 1 : p w_1 \mathrm{R}^- w_2 > w_2 :$
$2 : p w_2 : 2 : p < w_1 : 1 : p$☹



证明过程如下：首先，应用所有可能的命题规则，然后应用引入新状态的模态规则，接着应用使用新引入状态的模态规则。重复这一过程，直到将所有结构分解为原子。

然后，我们从标记为 ☹ s.t.$v_1(\Box p \to \Box\neg\Diamond p, w_0) < 1$ 的完全开放分支中提取一个模型。我们将该分支上的 w's 用作载体，并为变量和关系赋值，使其与 .. 相对应。

定理 7（$\mathcal{T}\left(\mathrm{KG}^{2\pm}{}_{\mathsf{fb}}\right)$ 完备性）。 ϕ 是 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 有效的，当且仅当存在一个 ϕ的语义树证明。

证明。 我们改编了 [6, 定理 3] 中的技术，并且只考虑最重要的情形。

对于可靠性，我们证明：若规则的前提得到实现，那么至少一个结论也得到实现。注意，由于我们使用的是有限分支框架，定义 3 中的下确界和上确界会变为最大值和最小值。由于命题规则与 $\mathcal{T}\left(\mathbf{KG}^2_{\mathsf{fb}}\right)$ [6]中的完全相同，我们只考虑最有趣的模态规则情形。我们处理 $\Box_1\gtrsim$（参见定义 6），并证明若 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 实现了规则的前提，那么它也实现了其中一个结论。

不失一般性，假设 $\mathfrak{x} = w'' : 2 : \psi$，并令 $\mathfrak{M}$ 实现 $w : 1 : \Box\phi \geqslant w'' : 2 : \psi$。现在，由于 R^+ 是有限分支的，我们有 $\min_{w' \in W}\{w\mathrm{R}^+w' \to_{\mathsf{G}} v_1(\phi, w')\} \geq v_2(\psi, w)$，因此对每个 $w' \in W$，若 $wR^+w' > 0$[11]，则 $v_1(\phi, w') \geq v_2(\psi, w'')$ 或 $w\mathrm{R}^+w' \geq v_2(\psi, w'')$。由此，规则的至少一个结论成立。

其他规则也可以用类似的方法处理。由于闭分支不可满足，结论得证。

为证明完备性，我们证明可以为每个完全开放分支 $\mathcal{B}$ 构造一个实现模型。首先，我们令 $W = \{w : w$ 出现在 $\mathcal{B}\}$ 中。将集合

[11] 回顾一下，如果 $u\mathrm{R}^+u' \notin \mathcal{B}$，我们就设定 $u\mathrm{R}^+u' = 0$。

在 $\mathcal{B}$ 上出现的原子结构记为 AStr($\mathcal{B}$)，并令 $\mathcal{B}^+$ 为 $\mathcal{B}$ 在 .. 下的传递闭包。现在，我们赋予取值。对于 $i \in \{1,2\}$，若 $w\colon i\colon p \geqslant 1 \in \mathcal{B}$，则令 $v_i(p,w) = 1$。若 $w\colon i\colon p \leqslant 0 \in \mathcal{B}$，则令 $v_i(p,w) = 0$。若 $w\mathrm{S}w' < \mathfrak{X} \notin \mathcal{B}^+$，则令 $w\mathrm{S}w' = 1$。若 $w\colon i\colon p$ 或 $w\mathrm{S}w'$ 未出现在 $\mathcal{B}$ 上，则令 $v_i(p,w) = 0$ 并令 $w\mathrm{S}w' = 0$。

对于每个 str $\in$AStr，我们现在设定

$$[\mathsf{str}] = \left\{ \mathsf{str}' \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathsf{str} \leqslant \mathsf{str}' \in \mathcal{B}^+ \text{ and } \mathsf{str} < \mathsf{str} \notin \mathcal{B}^+ \\ \text{or} \\ \mathsf{str} \geqslant \mathsf{str}' \in \mathcal{B}^+ \text{ and } \mathsf{str} > \mathsf{str}' \notin \mathcal{B}^+ \end{array} \right\}$$

用 $\#^{\mathsf{str}}$ 表示 [str] 的数量。由于 $\mathcal{B}^+$ 中唯一可能的环是 str 6 str′ $\leqslant \ldots \leqslant$ str，且其中所有元素都属于 [str],，显然 $\#^{\mathsf{str}} \leq 2 \cdot |\mathrm{AStr}(\mathcal{B})| \cdot |W|$。令 $[\mathsf{str}] \prec [\mathsf{str}']$，当且仅当存在 $\mathsf{str}_i \in [\mathsf{str}]$ 和 $\mathsf{str}_j \in [\mathsf{str}']$，使得 $\mathsf{str}_i < \mathsf{str}_j \in \mathcal{B}^+$。现在我们按如下方式为这些结构赋值：

$$\mathsf{str} = \frac{|\{[\mathsf{str}'] : [\mathsf{str}'] \prec [\mathsf{str}]\}|}{\#^{\mathsf{str}}}$$

显然，仅包含原子结构和常量的约束现在均已满足。为了证明所有其他约束也都得到满足，我们证明：如果规则的至少一个结论得到满足，那么其前提也得到满足。证明通过逐一考察各条规则的情形来完成。我们只考察 $\Box_1\gtrsim$ 的情形，并且不失一般性地假设 $\mathfrak{X} = w'':2:\psi$。

对于 $\Box_1\gtrsim$，假设对于每个 w'，只要 $w\mathrm{R}^+w'$ 出现在分支上，$w'{:}1:\phi \geqslant w''\colon 2:\psi$ 或 $w\mathrm{R}^+w' \leqslant w'{:}1:\phi$ 就是可实现的。因此，根据归纳假设，对于每个 $w' \in R^+(w)$，都有 $v_1(\phi,w') \geq v_2(\psi,w'')$ 或 $wR^+w' \leq v_1(\phi,w')$。于是，$v_1(\Box\phi,w) \geq v_2(\psi,w'')$，且 $w{:}1:\Box\phi \geqslant w''{:}2:\psi$ 得以实现。

现在我们可以使用 $\mathcal{T}\big(\mathbf{KG}^{2\pm}_{\mathsf{fb}}\big)$ 来获得预期的有限模型性质，以及满足（或证伪[12]）模型的规模上界。

推论4. 设 $\phi \in \mathrm{bi}\mathcal{L}^{\neg}_{\Box,\,\Diamond}$ 不是 $\mathrm{KG}^{2\pm}_{\mathsf{fb}}$ 有效，且 k 是其中模态算子的数量。那么存在一个大小为 $\leq k^{k+1}$、深度为 $\leq k$ 的模型 $\mathfrak{M}$，并且 $w \in \mathfrak{M}$ 满足以下条件：$v_1(\phi,w) \neq 1$ 或 $v_2(\phi,w) \neq 0$。

证明。 根据定理7，如果 ϕ 是不$\mathbf{KG}^{2\pm}_{\mathsf{fb}}$ 有效，我们可以使用表列法构造一个反例模型。从定义 6 中的规则也可以清楚地看出，所构造模型的深度上界为 ϕ 中嵌套模态算子的最大数量。模型的宽度上界为同一嵌套层级上的模态算子的最大数量。

现在，利用模型大小的上界，我们可以将 $\mathrm{KG}^{2\pm}_{\mathsf{fb}}$ 中的可满足性问题归约为在这样的模型上的可满足性问题：其中子公式的取值和关系都取自某个有限的双 G¨odel 代数。这使我们无需比较不同状态下的公式，因此可以逐个分支构造满足模型。我们改编自 [6] 的算法。

定理 8. $\mathrm{KG}^{2\pm}_{\mathsf{fb}}$ 有效性和可满足性是 PSPACE 完全的。

[12] 可满足性与可证伪性（非有效性）可以相互归约：ϕ 可满足，当且仅当 $\sim\!\sim(\phi \prec \mathbf{0})$ 可证伪；ϕ 可证伪，当且仅当 $\sim\!\sim(\mathbf{1} \prec \phi)$ 可满足。

证明。 关于成员资格，由定理 7 的证明可知， ϕ 在 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 上可满足（可证伪），当且仅当所有变量、 $w\mathrm{R}^+w'$以及$w\mathrm{R}^-w'$都取自 $\mathrm{V} = \left\{0, {}^{1}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}, \ldots, {}^{\#^{\mathsf{str}}-1}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}, 1\right\}$，且在这些赋值下 $\overline{\phi}$ 得到满足（被证伪）。

由于 $\#^{\mathsf{str}}$ 有上界，我们现在可以用带标签的公式和以下形式的关系结构替换约束： $w : i : \phi = \mathrm{v}$ 或 $w\mathrm{S}w' = \mathrm{v}$（$\mathrm{v} \in \mathrm{V}$），从而避免比较不同状态下公式的取值。若分支中包含 $w : i : \psi = \mathrm{v}$ 和 $w : i : \psi = \mathrm{v}'$（其中 $\mathrm{v} \neq \mathrm{v}'$），则关闭该分支。

现在，我们用适用于带标签结构的规则替换 $\mathcal{T}\left(\mathrm{KG}^{2\pm}{}_{\mathrm{fb}}\right)$ 规则。下面给出替换 $\Diamond_1^{\lesssim}$ 的规则[13] 作为示例。

$$\frac{w : 1 : \Diamond\phi = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}}{w\mathrm{R}^+w' = 1 \;\middle|\; w : 1 : \phi = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}} \;\middle|\; w\mathrm{R}^+w' = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}} \;\middle|\; w : 1 : \phi = 1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; w\mathrm{R}^+w' = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}} \;\middle|\; w : 1 : \phi = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}} \qquad \frac{w : i : \Diamond\phi = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}; (w\mathrm{R}^+w' \text{ occurs on the branch})}{w' : i : \phi = {}^{r-1}\!/_{\#^{\mathsf{str}}} \mid w\mathrm{R}^+w' = {}^{r-1}\!/_{\#^{\mathsf{str}}} \mid \ldots \mid w' : i : \phi = 0}$$

请注意，这种形式的规则使我们无法比较不同状态下公式的取值。

现在，我们可以用多项式空间为 ϕ 构造一个满足模型。我们从 $w_0 : 1 : \phi = 1$开始（ $w_0 : 1 : \phi = 0$的算法相同），并开始应用命题规则（首先应用那些不需要分支的规则）。如果执行分支规则，我们就选取一个分支，只处理该分支：直到该分支关闭，此时再选取另一个分支；或者直到没有可应用的规则（此时模型构造完成）；或者直到需要应用模态规则才能继续。在此阶段，我们只需存储 ϕ 的子公式及标记其在 w_0处取值的标签。

现在，我们猜测一个模态公式（例如， $w_0 : 1 : \Diamond\chi = {}^{1}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}$），其分解需要引入一个新状态（$w_1$），然后应用这条规则。接着，我们应用所有需要分支上出现 $w_0\mathrm{R}^+w_1$ 的模态规则（同样，如果这些规则要求分支，我们只猜测其中一个分支），然后从命题规则重新开始。如果遇到矛盾，则该分支闭合。同样，唯一需要存储的新条目是 ϕ 的子公式（现在模态算子更少）、它们在 w_1 处的取值，以及关系项 $w_0\mathrm{R}^+w_1$ 及其取值。由于模型的深度为 $O(|\phi|)$，且我们逐个处理模态公式，因此需要将 ϕ 的子公式及其取值存储 $O(|\phi|)$ 次，所以只需要 $O(|\phi|^2)$ 的空间。

最后，如果没有规则可应用且不存在矛盾，我们就将 $w_0 : 2 : \Diamond\chi = {}^{1}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}$ 标记为“安全”。现在，我们删除其下方语义树中的所有条目，并选取另一个尚未标记且需要引入新状态的模态公式。逐一处理这些公式，就能逐个分支构造模型。但由于模型每个分支的长度都不超过 $O(|\phi|)$，并且一旦确认模型的某个分支不含矛盾，我们就会将其删除，因此只需要多项式空间。

[13] 对于 w 处 $\Diamond\phi$ 的一个取值 $\mathrm{v} > 0$，我们添加一个能够见证 v 的新状态；对于分支上的一个状态，则猜测一个小于 v 的取值。其他模态规则也可以类似地改写。

为证明 PSPACE 困难性，我们给出一个从 K 有效性出发的归约。具体而言，对于每个 ϕ 上的 $\{\mathbf{0}, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond\}$，我们构造两个公式：

1. $\phi^{\triangledown}$ s.t. K $\models \phi$ 当且仅当对于每个框架 $\mathfrak{F}$、赋值 v_1 以及 $w \in \mathfrak{F}$, $v_1(\phi^{\triangledown}, w) = 1$；2. $\phi^{\triangle}$ s.t. K $\models \phi$ 当且仅当对于每个框架 $\mathfrak{F}$、赋值 v_2 以及 $w \in \mathfrak{F}$, $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\triangle}, w) = 0$。为构造 $\phi^{\triangledown}$，我们借鉴了 [8, 定理 21] 中的思路，并在 ϕ 的每个子公式前加上 $\sim\!\sim$。由于 $\mathfrak{GR}$ 的语义与定义 3 中的 v_1 条件一致，因此这一约化成立。

对于 $\phi^{\triangle}$，我们采用以下归纳定义

$$
\begin{aligned}
p^{\triangle} &= \triangle p \\
(\chi \circ \psi)^{\triangle} &= \chi^{\triangle} \bullet \psi^{\triangle} && (\circ, \bullet \in \{\wedge, \vee\}, \circ \neq \bullet) \\
(\chi \to \psi)^{\triangle} &= \psi^{\triangle} \prec \chi^{\triangle} \\
(\heartsuit \chi)^{\triangle} &= \spadesuit(\chi^{\triangle}) && (\heartsuit \neq \spadesuit, \heartsuit, \spadesuit \in \{\Box, \Diamond\})
\end{aligned}
$$

可以通过归纳法验证，对于每个清晰的有限分支 $\mathfrak{F}$ 及其上的每个经典赋值 v，均有 $\mathfrak{F}, \mathrm{v}$ $w \vDash \phi$ 当且仅当 $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\triangle}, w) = 0$，并且$\mathfrak{F}, \mathrm{v}$ $w \nvDash \phi$ 当且仅当 $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\triangle}, w) = 1$，前提是 $v_2 = \mathrm{v}$。

反之，设 $\mathfrak{M} = \langle W, R^{+}, R^{-}, v_1, v_2 \rangle$ 是一个 $\mathrm{KG}^{2\pm}{}_{\mathfrak{fb}}$ 模型。设 $\mathfrak{M}^{!} = \langle W, R^{!}, v^{!} \rangle$ 满足：$wR^{!}w'$ 当且仅当 $wR^{-}w' = 1$，并且 $w \in v^{!}(p)$ 当且仅当 $v_2(p, w) = 1$。同样，容易验证，对于每个 $\mathfrak{M}$, $v_2(\phi^{\triangle}, w)$, $= 1$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^{!}, w \vDash \phi$。

由此可得

1. 如果 ϕ 不是 K 有效的，那么存在 $\mathfrak{F}, w \in \mathfrak{F}$ 和 v_2，使得 $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\triangle}, w) \neq 0$;
2. 如果存在 $\mathfrak{F}, w \in \mathfrak{F}$ 和 v_2，使得 $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\triangle}, w) \neq 0$，那么 ϕ 不是 K 有效的。

6 结论

本文研究了在双关系模糊框架和清晰框架上进行解释的一致性容忍 G¨odel 模态逻辑。具体而言，我们证明（定理 2 和 3），清晰 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 扩展了清晰双 G¨odel 模态逻辑 KbiG，而模糊 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 并不扩展模糊 KbiG。此外，我们证明，所有 KbiG 可定义的清晰框架类的双关系对应类也都是 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 可定义的（推论1）。我们还证明，有限分支的清晰框架和模糊框架都是可定义的。对于有限框架上的 $\mathrm{KG}^{2\pm}$（$\mathrm{KG}^{2\pm}{}_{\mathfrak{fb}}$），我们构造了一个可靠且完备的约束语义树演算，并证明 $\mathrm{KG}^{2\pm}{}_{\mathfrak{fb}}$的有效性和可满足性是 PSPACE 完全的。

仍有若干问题尚待解决。首先，我们希望为清晰和模糊 $\mathrm{KG}^{2\pm}$建立公理化体系。其次，尽管可以合理地猜想，所有框架上的 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 也是 PSPACE 完全的，但要将 [8] 中的技术改编过来并不容易，因为 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 既不扩展 KbiG，也没有否定范式。

此外，似乎“传统的”模糊框架类定义（$\Box p \to p$对于自反框架，$\Box p \to \Diamond p$ 对于满足 $R^{+}(w)\ R^{-}(w) \neq \varnothing$ 对每个 w都成立的框架，等等）也定义了 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 中对应的 $\pm$。当然，这一般并非如此：$\Diamond\phi$ 也定义了满足 $R(w) \neq \varnothing$ 对每个 w 都成立的框架，只要 ϕ 是 KbiG 有效的；但 $\mathrm{KG}^{2\pm}$ 并不扩张 KbiG，因此并非每个 $\Diamond\phi$ 都能用作此类定义。另一个问题是：给定一个无 $\neg$的 ϕ和一个满足 $\mathfrak{F} \models_{\mathbf{KbiG}} \phi$的单关系 $\mathfrak{F}$，是否总能构造出一个满足 $\mathfrak{F}^{\pm} \models \phi$的双关系 $\mathfrak{F}^{\pm}$？

参考文献

1. Aguilera, J., Di´eguez, M., Fern´andez-Duque, D., McLean, B.: 时间与 G¨odel：PSPACE 中的模糊时态推理。载于：逻辑、语言、信息与计算，计算机科学讲义，第 13368 卷，第 18–35 页。施普林格国际出版社，尚（2022） 2. Belnap, N.: 计算机应当如何思考。载于：Omori, H., Wansing, H.（编），Belnap-Dunn逻辑新论，Synthese文库（认识论、逻辑、方法论与科学哲学研究），第 418 卷。施普林格，尚（2019） 3. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 双层模糊逻辑的约束语义树。载于：Das, A., Negri, S.（编），基于解析语义树及相关方法的自动推理。计算机科学讲义，第 12842 卷，第 20–37 页。施普林格国际出版社（2021） 4. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 清晰 bi-G¨odel 模态逻辑及其次协调扩张。https://arxiv.org/abs/2203.01060（2022） 5. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D., Majer, O.: 双层框架中的定性推理。《国际近似推理杂志》154，84–108（2023年3月） 6. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 次协调 G¨odel 模态逻辑。载于：自动推理，计算机科学讲义，第 13385 卷，第 429–448 页。施普林格国际出版社，尚（2022） 7. Caicedo, X., Metcalfe, G., Rodr´ıguez, R., Rogger, J.: G¨odel 模态逻辑的有限模型性质。载于：逻辑、语言、信息与计算国际研讨会。第 226–237 页。施普林格（2013） 8. Caicedo, X., Metcalfe, G., Rodr´ıguez, R., Rogger, J.: 基于序的模态逻辑的可判定性。《计算机与系统科学杂志》88，53–74（2017年9月） 9. Caicedo, X., Rodriguez, R.: 标准 G¨odel 模态逻辑。《逻辑学研究》 94(2)，189–214（2010） 10. Caicedo, X., Rodr´ıguez, R.: $[0,1]$值 Kripke 框架上的双模态 G¨odel 逻辑。《逻辑与计算杂志》25(1)，37–55（2015） 11. Da˘nkov´a, M., B˘ehounek, L.: 博弈中多智能体概率推理的模糊邻域语义。载于：Lesot, M.J., Vieira, S., Reformat, M., Carvalho, J., Wilbik, A., Bouchon-Meunier, B., Yager, R.（编），知识型系统中的信息处理与不确定性管理。第 680–693 页。施普林格国际出版社，尚（2020） 12. Dellunde, P., Godo, L.: 在道义逻辑中引入等级。载于：Meyden, R.v., Torre, L.v.（编），计算机科学中的道义逻辑。第 248–262 页。施普林格柏林海德堡出版社，柏林、海德堡（2008） 13. Drobyshevich, S.: 基于FDE的模态逻辑的一般框架。《逻辑学研究》108(6)，1281–1306（2020年12月） 14. Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y., Vardi, M.Y.: 关于知识的推理。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥（2003） 15. Goble, L.: 次协调模态逻辑。《逻辑与分析》49(193)，3–29（2006），http://www.jstor.org/stable/44084814 16. Grigolia, R., Kiseliova, T., Odisharia, V.: 自由与投射的双模态对称 g¨odel 代数。《逻辑学研究》104(1)，115–143（2016） 17. H¨ahnle, R.: 一种从演绎到整数规划的新翻译。载于：国际人工智能与符号数学计算会议。第 262–275 页。施普林格（1992）

18. H¨ahnle, R.：多值逻辑与混合整数规划。《数学与人工智能年鉴》12(3-4)，231–263（1994） 19. H¨ahnle, R.：多值逻辑的语义树。载于：D'Agostino, M., Gabbay, D., H¨ahnle, R., Posegga, J.（编）《语义树方法手册》，第529–580页。施普林格科学与商业媒体（1999） 20. H¨ahnle, R.：高级多值逻辑。载于：Gabbay, D., Guenthner, F.（编）《哲学逻辑手册》第2卷，第297–395页。施普林格荷兰，多德雷赫特（ 2001 10 1007 978 94 017 0452 6_5 ）。 21 ´ https://doi.org/ . / - - - - . Hajek, P.：《模糊逻辑元数学》。逻辑趋势4，施普林格，多德雷赫特（1998） 22. Lascio, L.d., Gisolfi, A.：有理帕维尔卡逻辑的分级语义树。《国际智能系统杂志》20(12)，1273–1285（2005） 23. Leitgeb, H.：Hype：一种超内涵逻辑系统（及其在语义悖论中的应用）。《哲学逻辑杂志》48(2)，305–405（2019） 24. Metcalfe, G., Olivetti, N.：G¨odel 模态逻辑的证明系统。载于：国际自动推理分析语义树及相关方法会议，第265–279页。施普林格（2009） 25. Metcalfe, G., Olivetti, N.：迈向 G¨odel 模态逻辑的证明论。《计算机科学中的逻辑方法》7（2011） 26. Metcalfe, G., Olivetti, N., Gabbay, D.：《模糊逻辑证明论》。应用逻辑丛书36，施普林格（2008） 27. Moisil, G.：模态逻辑。《数学与物理研究》2，3–98（1942） 28. Odintsov, S., Wansing, H.：劳特利星号与超内涵性。《哲学逻辑杂志》50，33–56（2021） 29. Odintsov, S., Wansing, H.：具有 Belnap 式真值的模态逻辑。《应用非经典逻辑杂志》20(3)，279–301（2010）。https://doi.org/10 301 30 3166 20 279 . /jancl. . - . Odintsov, S., Wansing, H.：解构基于 FDE 的次协调模态逻辑。《逻辑学研究》105(6)，1221–1254（2017）。https://doi.org/10 9 31 1007 11225 017 9753 . /s - - - . Priest, G.：《非经典逻辑导论》。从如果到是。剑桥大学出版社，第2版（2008） 32. Rodriguez, R., Vidal, A.：清晰 G¨odel 模态逻辑的公理化。《逻辑学研究》109，367–395（2021） 33. Sherkhonov, E.：构造逻辑上的模态算子。《逻辑与计算杂志》18(6)，815–829（2008年10月） 34. Wansing, H.：关联模态逻辑。载于：Schmidt, R., Pratt-Hartmann, I., Reynolds, M., Wansing, H.（编）AiML-2004：《模态逻辑进展》。模态逻辑进展，第5卷，第387–399页（2005） 35. Wansing, H.：构造否定、蕴涵与共蕴涵。《应用非经典逻辑杂志》18(2–3)，341–364（2008）。https://doi.org/10.3166/jancl.18.341-364