arXiv:2303.14198v1 [math.LO] 24 Mar 2023

相容 G¨odel 逻辑中的非标准模态⋆

Marta B´ılkov´a[1][0000−0002−3490−2083]、Sabine Frittella[2][0000−0003−4736−8614] 和 Daniil Kozhemiachenko[2][0000−0002−1533−8034]

[1] 捷克科学院计算机科学研究所，布拉格 bilkova@cs.cas.cz[2] 法国奥尔良大学卢瓦尔河谷 INSACentre，LIFO EA 4022 sabine.frittella@insa-cvl.fr, daniil.kozhemiachenko@insa-cvl.fr

摘要。我们为 G¨odel 逻辑引入一种带有德摩根否定 ¬和模态 ■ 与 ♦的相容性扩展。我们将该逻辑命名为 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 并为其配备克里普克语义：定义在具有两个（可能是模糊）关系的框架上： R^+ 和 R^- （解释为对给定来源的肯定和否认的信任度），以及取值于 $[0,1]$ 、并通过 ¬相连的赋值 v_1 和 v_2 （正支持和负支持）。

我们将 $\blacksquare\phi$ （分别为 $\blacklozenge\phi$）的语义解释为 ϕ 在 R^+-和 R^--可达状态中的正向与负向支持的下确界（上确界）。随后，我们证明了 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 的若干有启发性的语义性质。最后，我们为有限分支框架上的 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 设计了一个语义树系统，并确定了可满足性和有效性的复杂度。

关键词：G¨odel 逻辑 · 模态逻辑 · 非标准模态 · 约束语义树

1 引言

汇总来自不同信息源的信息时，最简单的策略有两种：要么采取怀疑和谨慎的态度，要求各信息源提供的信息彼此一致；要么采取轻信的态度，相信这些信息源。在经典逻辑的框架下，这两种策略可以用克里普克框架上定义的 2 和♢模态来建模：其中状态代表信息源，可及关系表示信息源之间的引用关系，而 $w \vDash \phi$ 则被解释为“w 断言 ϕ 为真”。然而，信息源可能自相矛盾，也可能对某个问题保持沉默（而非明确否认）。此外，信息源还可能对其确认或否认给出一定程度的支持。在所有这些情况下，经典逻辑都难以将基于此类信息的推理形式化。

⋆ Marta B´ılkov´a 的研究得到了捷克科学基金会 22-01137S 项目资助。Sabine Frittella 和 Daniil Kozhemiachenko 的研究由 ANR JCJC 2019 项目 PRELAP（ANR-19-CE48-0006）资助。本研究是 MOSAIC 项目的一部分，该项目由欧盟玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助，资助编号为 101007627。

关于不完备数据的超一致推理 在上述情形中，可以采用如下设定：信息源 w 对陈述ϕ 在 $[0,1]$上给出两个赋值： v_1 表示 w 对 ϕ的断言程度（正支持或对真的支持），而 v_2 表示否认程度（负支持或对假的支持）。在经典情况下， $v_1(\phi,w) + v_2(\phi,w) = 1$；如果信息源提供矛盾信息，则 $v_1(\phi,w) + v_2(\phi,w) > 1$；如果信息源提供的信息不足，则 $v_1(\phi,w) + v_2(\phi,w) < 1$。

现在，如果我们考虑信息源提供的非经典信息，上述两种聚合可以形式化如下。在怀疑式情形中，主体取正向支持和负向支持的下确界。对于轻信式聚合，则取正向支持和负向支持的上确界。

这两种聚合策略最初由 [8]提出并分析。在那里，它们被描述为一个双层框架[3] ，该框架禁止模态嵌套。此外，命题片段选用的是缺少蕴涵的 Belnap–Dunn逻辑[4] (BD)。本文将这一方法扩展到克里普克语义，以纳入信息源之间可能存在的指涉关系，以及信息源给出模态化陈述的能力。此外，我们采用G^{2}中的 [5] G的¨odel逻辑G 的相容性扩展作为命题片段。

在 G 的模态扩展中形式化信念。当信息汇集起来后，主体便能进一步对其进行推理。例如，如果知道两个给定陈述的确定性程度，就可以将它们相加、相减，或相互比较。然而，在许多情境下，普通人不会用数值表示自己对某一陈述的确定性，因此无法对其进行算术运算。他们能做的是比较自己对一个陈述与另一个陈述的确定性。

因此，由于 G¨odel 逻辑能够表达序和比较，却不能表达算术运算，它可以用作形式化信念的模态逻辑中的命题片段。例如，K45 和 KD45 G¨odel 逻辑可用于形式化可能性推理，因为相对于规范化可能性框架和非规范化可能性框架，它们分别是完备的 [35]。

此外，加入余蕴涵 $\prec$，或者等价地，加入 Baaz的Delta算子△ （详情参见 [2] ），便得到 bi-G¨odel（按 [20] 的术语称为“对称 G¨odel”）逻辑，该逻辑还能够表达严格序。

G 的模态扩展已得到充分研究。特别是，模态逻辑的 2 和 $\Diamond$ 片段均已知存在希尔伯特 [15] 和根岑 [27,28] 形式化系统$\mathfrak{GR}$ [4] 。此外，模糊 [16]和清晰 [36] 双模态 G¨odel 逻辑均有完备的公理化。已知这些逻辑及其某些扩展都是可判定的，且为 PSPACE 完全 [13,14,17] ，尽管它们不具备有限模型性质。

此外，已知加入 $\prec$ 或 $\triangle$ ，以及加入一种交换真与假的支持的次协调否定 $\neg$ ，都不会增加复杂度。具体而言，KbiG 和 GTL（模态逻辑和时序逻辑

[3] 关于双层模态逻辑的阐述，请参阅 [3] 和 [7] 。[4] 2 和 $\Diamond$ 在 $\mathfrak{GR}$中不可互相定义。

bi-G¨odel 逻辑，分别）（前者见 [9,6]，后者见 [1]），以及 $\mathbf{KG}^2$ (对具有 $\mathfrak{G}\mathfrak{K}$ 的清晰 $\neg$[5]的扩展）均属于 PSPACE。

本文 在本文中，我们考察 G^2 的一种扩展，其中包含模态 $\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$，分别表示谨慎式和轻信式聚合策略。我们为它们赋予克里普克语义，构造一个可靠且完备的语义树演算，并探究其语义和计算属性。我们的灵感来自两个方面：上文讨论过的 G¨odel 逻辑的模态扩展，以及 Priest [33,34], Odintsov、Wansing [31,32], 等人研究的、在双值框架上采用克里普克语义的 Belnap–Dunn逻辑模态扩展（相关领域工作参见 [18] 及其中的参考文献）。从某种意义上说，

$\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 可以被视为 BD 上模态逻辑的一种混合

T其余内容安排如下。第 2 节定义 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}$、的语言和语义。随后，在第 3 节，我们说明如何定义若干重要的框架类，尤其是有限分支框架。我们还论证了使用 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}$、$\mathsf{fb}$（$\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$ 、$\blacklozenge$ （基于有限分支框架）来表示主体信念的合理性。第 4 节介绍适用于 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}$、$\mathsf{fb}$ 的可靠且完备的语义树演算；第 5 节则利用该演算证明，$\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}$、$\mathsf{fb}$ 的有效性和可满足性是PSPACE 完备的。最后，第 6 节总结全文，并展望未来工作。

2 逻辑预备知识

本节将介绍 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 在模糊框架和清晰框架上的语义。为了让介绍更易于理解，我们先从双 G¨odel 代数开始。

定义 1. 双 G ¨odel 代数 $[0,1]_{\mathsf{G}} = \langle [0,1], \mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge_{\mathsf{G}}, \vee_{\mathsf{G}}, \to_{\mathsf{G}}, \prec \rangle$ 定义如下：对于所有 $a, b \in [0,1]$，有 $a \wedge_{\mathsf{G}} b = \min(a,b)$，$a \vee_{\mathsf{G}} b = \max(a,b)$。其余运算定义如下：

$$a \to_{\mathsf{G}} b = \begin{cases} 1, & \text{if } a \leq b \\ b & \text{else} \end{cases} \qquad a \prec_{\mathsf{G}} b = \begin{cases} 0, & \text{if } a \leq b \\ a & \text{else} \end{cases}$$

现在我们可以定义 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge,}$ 的语言和语义了。

定义 2. 我们固定一个可数的命题变元集合 Prop，并通过以下文法定义语言。

$$\mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare,\blacklozenge} \ni \phi := p \in \mathtt{Prop} \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \to \phi) \mid \blacksquare\phi \mid \blacklozenge\phi$$

常元 0 和 1、析取 $\vee$、余蕴涵 $\prec$ 以及 G ¨odel 否定$\sim$均可按预期定义：

$$\mathbf{1} := p \to p \quad \mathbf{0} := \neg\mathbf{1} \quad \sim\phi := \phi \to \mathbf{0} \quad \phi \vee \phi' := \neg(\neg\phi \wedge \neg\phi') \; \phi \prec \phi' := \neg(\neg\phi' \to \neg\phi)$$

模糊双关系框架是一个元组 $\mathfrak{F} = \langle W, R^+, R^- \rangle$，其中 $W \neq \varnothing$ 和 R^+, R^-: $W \times W \to [0,1]$。在清晰框架中，R^+, R^-: $W \times W \to \{0,1\}$。模型是一个元组 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2 \rangle$，其中 $\langle W, R^+, R^- \rangle$ 是一个框架，且 v_1, v_2: Prop $\to [0,1]$，它们按如下方式扩展到复合公式。

[5] 请注意，在存在 $\neg$ 的情况下，$\phi \prec \phi'$ 可定义为 $\neg(\neg\phi' \to \neg\phi)$。

$v_1(\neg\phi, w) = v_2(\phi, w)$ $v_2(\neg\phi, w) = v_1(\phi, w)$$v_1(\phi \wedge \phi', w) = v_1(\phi, w) \wedge_{\mathsf{G}} v_1(\phi', w)$ $v_2(\phi \wedge \phi', w) = v_2(\phi, w) \vee_{\mathsf{G}} v_2(\phi', w)$$v_1(\phi \to \phi', w) = v_1(\phi, w) \to_{\mathsf{G}} v_1(\phi', w)$ $v_2(\phi \to \phi', w) = v_2(\phi', w) \prec_{\mathsf{G}} v_2(\phi, w)$

$$v_1(\blacksquare\phi, w) = \inf_{w' \in W}\{wR^+w' \to_{\mathsf{G}} v_1(\phi, w')\} \; v_2(\blacksquare\phi, w) = \inf_{w' \in W}\{wR^-w' \to_{\mathsf{G}} v_2(\phi, w')\}$$
$$v_1(\blacklozenge\phi, w) = \sup_{w' \in W}\{wR^+w' \wedge_{\mathsf{G}} v_1(\phi, w')\} \; v_2(\blacklozenge\phi, w) = \sup_{w' \in W}\{wR^-w' \wedge_{\mathsf{G}} v_2(\phi, w')\}$$

我们还将用 $v(\phi, w) = (x, y)$ 表示 $v_1(\phi, w) = x$ and $v_2(\phi, w) = y$。此外，我们设定 $S(w) = \{w' : wSw' > 0\}$。

我们称 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \models^+ \phi$) 上是 v_1-有效的，当且仅当对于 $\mathfrak{F}$ 上的每个模型 $\mathfrak{M}$ 和每个 $w \in \mathfrak{M}$，都有 $v_1(\phi, w) = 1$。ϕ 在 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \models^- \phi$) 上是 v_2-有效的，当且仅当对于 $\mathfrak{F}$ 上的每个模型 $\mathfrak{M}$ 和每个 $w \in \mathfrak{M}$，都有 $v_2(\phi, w) = 0$。ϕ 在 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \models \phi$) 上是强有效的，当且仅当它是 v_1 且 v_2- 有效的。

ϕ 是 v_1 （分别为 v_2、强）$\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 有效的，当且仅当它在每个框架上都是 v_1 （分别为 v_2、强）有效的。我们还将用 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 表示在每个框架上都强有效的所有 $\mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 公式的集合。

请注意，在上述定义中，支配 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 联结词（除 $\neg$ 以外）的真值支持的语义条件，与 **K**biG 的语义一致（关于后者的详细语义，参见 [9] ）。

例 1。一位游客（t）想去一家餐馆，于是请两位朋友（f_1 和 f_2）描述他们对员工礼貌程度（s）和甜点质量（d）的印象。当然，朋友们的意见并不总是内部一致的，而且他们也未必总能留意到员工是否有礼貌，或是否在吃甜点。此外，t 在听取朋友的正面和负面意见时，对他们的信任程度各不相同。该情形如图 1 所示。

第一位朋友说，员工中有一半非常友善，但另一半态度冷淡、粗鲁；甜点（提拉米苏和舒芙蕾除外）都很美味。遗憾的是，第二位朋友根本没吃甜点。此外，尽管他们称赞了员工，却也说经理相当讨厌。

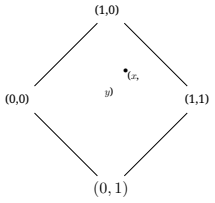
游客现在做出了决定。如果他们对 s 和d持怀疑态度，就会寻找对s 和 d的正支持与负支持的可信拒绝[6] 。因此，t 将 R^+ 和 R^- 的值作为阈值，超过该阈值时，来源提供的信息就不算是足够可信的拒绝。在我们的例子中，$v(\blacksquare s, t) = (0.5, 0.5)$，且 $v(\blacksquare d, t) = (0, 0)$。另一方面，如果 t 持轻信态度，他们就会寻找对正支持与负支持的可信确认，并将 R^+ 和 R^- 作为阈值，在阈值范围内接受来源提供的信息。因此，我们有 $v(\blacklozenge s, t) = (0.7, 0.4)$，且$v(\blacklozenge d, t) = (0.7, 0.3)$。

[6] 我们区分一种 *rejection*，并将其视为 *lack of support*，以及一种 *denial*、*disproof* *refutation* *counterexample* *negative support* 等，我们将其解释为。

$$f_1 : \begin{matrix} s = (0.5, 0.5) \\ d = (0.7, 0.3) \end{matrix} \xleftarrow{(0.8,0.9)} t \xrightarrow{(0.7,0.2)} f_2 : \begin{matrix} s = (1, 0.4) \\ d = (0, 0) \end{matrix}$$

图 1。（x, y）表示 $wR^+w' = x, wR^-w' = y$。R^+（分别为 R^-）表示游客对朋友所作肯定（否定）陈述的信任阈值。

更形式化地说，注意我们可以将 v_1 和 v_2 合并为一个赋值（记作 •），定义在右侧所示的以下双格上。现在，令 $\sqcap$ 和 $\sqcup$ 分别表示向右序下的交和并，显然，$\blacksquare$ 可以解释为可达状态上的无穷元 $\sqcap$，而 $\blacklozenge$ 则可以解释为无穷元 $\sqcup$。



由此可见，$\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$ 在以下意义上并不正规：$\blacksquare(p \wedge q) \leftrightarrow (\blacksquare p \wedge \blacksquare q)$、$\blacksquare \mathbf{1}$、$\blacklozenge(p \vee q) \leftrightarrow (\blacklozenge p \vee \blacklozenge q)$，以及 $\blacklozenge \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$ 都不是有效公式。

最后，我们将 $\mathbf{G}^{2^+}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 称为“相容的”。本文将逻辑视为有效公式的集合。显然，$\rightarrow$的爆炸原理——$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$——并非有效。此外，与 K 不同，可以相信一个矛盾而不必相信每个陈述：$\blacklozenge(p \wedge \neg p) \rightarrow \blacklozenge q$和 $\blacksquare(p \wedge \neg p) \rightarrow \blacksquare q$ 都不是有效公式。

我们通过证明 $\blacklozenge$ 和 $\blacksquare$ 不可互相定义来结束本节。

定理 1. $\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$ 不可互相定义。

证明。用 $\mathcal{L}_{\blacksquare}$ 和 $\mathcal{L}_{\blacklozenge}$ 分别表示 $\blacklozenge$-和 $\blacksquare$-自由片段：$\mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare,\blacklozenge}$。我们构造一个指点模型 $\langle \mathfrak{M}, w \rangle$ 使得不存在 $\blacklozenge$-自由公式在 w 处的取值与 $\blacksquare p$ 相同（反之亦然）。见图 2。

$$w_1 : p = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}\right) \longleftarrow w_0 : p = (1,0) \longrightarrow w_2 : p = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}\right)$$

图 2. 所有变元在 p 所示例的所有状态中取值相同。$R^+ = R^-$，$v(\blacksquare p, w_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$，$v(\blacklozenge p, w_0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$。

可以通过归纳法验证，如果 $\phi \in \mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare,\blacklozenge}$，那么

$$v(\phi, w_1) \in \left\{(0;1), \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right), (0;0), (1;1), (1;0)\right\}$$

$$v(\phi, w_2) \in \left\{(0;1), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right), (0;0), (1;1), (1;0)\right\}$$

此外，在唯一状态为 u 的单点非自反框架上，对于每个 $\phi(p) \in \mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare,\blacklozenge}$，$v(\phi, u) \in \{v(p, u)\ v(\neg p, u)$，$(1, 0)$、$(1, 1)$、$(0, 0)$、$(0, 1)\}$，均成立。

因此，对于每个不含 $\blacklozenge$ 的 χ 以及每个不含 $\blacksquare$ 的 ψ，都有

$$v(\blacksquare\chi, w_0) \in \left\{(0;1), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right), (0;0), (1;1), (1;0)\right\} = X$$

$$v(\blacklozenge\psi, w_0) \in \left\{(0;1), \left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right), (0;0), (1;1), (1;0)\right\} = Y$$

由于 X 和 Y 对命题运算封闭，因此很容易通过归纳法验证：对于每个 $\chi' \in \mathcal{L}_{\blacksquare}$ 和 $\psi' \in \mathcal{L}_{\blacklozenge}$，$v(\chi', w_0) \in X$ 且 $v(\psi', w_0) \in Y$。

3 框架可定义性

本节中，我们探讨一些可在 $\mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 中定义的框架类。不过，由于 $\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$ 都是非正规逻辑，而且框架上有两个彼此独立的关系，我们将扩展传统的模态可定义性概念。

定义 3。
1. ϕ 正向定义框架类 $\mathbb{F}$，当且仅当对于每个 $\mathfrak{F}$，都有 $\mathfrak{F} \models^{+} \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$。2. ϕ 反向定义框架类 $\mathbb{F}$，当且仅当对于每个 $\mathfrak{F}$、每个 $w \in \mathfrak{F}$，都有 $\mathfrak{F} \models^{-} \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$。3. ϕ （强）定义框架类 $\mathbb{F}$，当且仅当对于每个 $\mathfrak{F}$，都有 $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$ 当且仅当 $\mathfrak{F} \models \phi$。

借助上述定义，我们可以证明，每个可在 KbiG 中定义的框架类都可在 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge,}$ 中正向定义。

定义 4. 设 $\mathfrak{F} = \langle W, S\rangle$ 是一个（模糊或清晰）框架。
1. $\mathfrak{F}$ 的 R^{+} 对应框架是任意一个双关系框架 $\mathfrak{F}^{+} = \langle W, S, R^{-}\rangle$。2. $\mathfrak{F}$ 的 R^{-} 对应框架是任意一个双关系框架 $\mathfrak{F}^{+} = \langle W, R^{+}, S\rangle$。

约定 1 设 ϕ 定义在 $\{\wedge, \vee, \to, \prec, \Box, \Diamond\}$ 上。
1. 我们用 $\phi^{+\bullet}$ 表示将 ϕ 中所有的 2 和 $\Diamond$ 替换为 $\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$ 后得到的公式。
2. 我们用 $\phi^{-\bullet}$ 表示将 ϕ 中所有的 2 和 $\Diamond$ 替换为 $\neg\blacksquare\neg$ 和 $\neg\blacklozenge\neg$ 后得到的公式。

定理 2. 设 $\mathfrak{F} = \langle W, S\rangle$，并设 $\mathfrak{F}^{+}$ 和 $\mathfrak{F}^{-}$ 分别是其 R^{+} 和 R^{-} 对应框架。那么，对于任意定义在 $\{\wedge, \vee, \to, \prec, \Box, \Diamond\}$ 上的 ϕ，都有

$$\mathfrak{F} \models_{\mathbf{KbiG}} \phi \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{F}^{+} \models^{+} \phi^{+\bullet} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{F}^{-} \models^{+} \phi^{-\bullet}$$

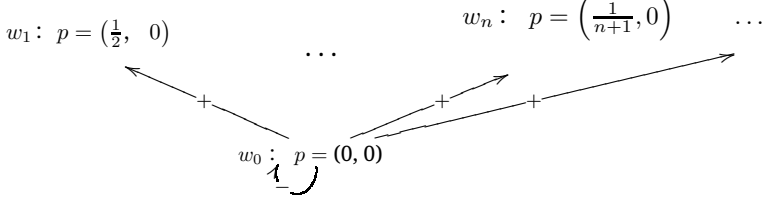
证明。 由于 **KbiG** 联结词的语义与 v_1 定义 2的条件完全相同，我们只需证明 $\mathfrak{F} \models \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{F}^{-} \models^{+} \phi^{-\bullet}$。只需通过归纳法证明以下陈述。

设 v 是 $\mathfrak{F}$ 上的 KbiG 赋值，对每个 $w \in \mathfrak{F}$，$\mathrm{v}(p, w) = v_1(p, w)$，且 v_2 任意。则对每个 ϕ，$\mathrm{v}(\phi, w) = v_1(\phi^{-\bullet}, w)$。

根据约定 $\phi = p$，情形 1；命题联结词的情形显然。考虑 $\phi = \Box\chi$。我们有 $\phi^{-\bullet} = \neg\blacksquare\neg(\chi^{-\bullet})$，因此

$$\begin{aligned} v_1(\neg\blacksquare\neg(\chi^{-\bullet}), w) &= v_2(\blacksquare\neg(\chi^{-\bullet}), w) \\ &= \inf_{w'\in W}\{wSw' \to_{\mathsf{G}} v_2(\neg(\chi^{-\bullet}))\} \\ &= \inf_{w'\in W}\{wSw' \to_{\mathsf{G}} v_1(\chi^{-\bullet})\} \\ &= \inf_{w'\in W}\{wSw' \to_{\mathsf{G}} \mathbf{v}(\chi)\} \qquad \text{(by IH)} \\ &= \mathbf{v}(\Box\chi, w) \end{aligned}$$

上述定理使我们能够在 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 中对所有可在 KbiG 中定义的框架类进行正向定义。特别地，所有 K-可定义框架都可以正向定义。此外，由此可知 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$（与 $\mathfrak{GR}$ 和 KbiG 一样）不具有有限模型性质：$\sim\Box(p\vee\sim p)$ 在任何有限框架上都为假，因此 $\sim\blacksquare(p\vee\sim p)$ 也为假。另一方面，存在满足该公式的无限模型，如下所示（R^+ 和 R^- 是清晰的）。



此外，定理2 为我们提供了一定的灵活性。例如，可以验证 $\neg\blacksquare\neg(p\vee q) \to (\neg\blacksquare\neg p \vee \neg\blacklozenge\neg q)$ 正向定义了具有清晰 R^- 但不一定具有清晰 R^+ 的框架。这刻画了这样一种情形：主体完全相信（或否认）信息源给出的否认，而当信息源作出断言时，主体的信任度可能介于 0 和 1 之间。让我们回到例1。

例 2。 假设游客 完全信任 朋友的负面（但非正面）意见。因此，我们得到的不是图 1，而是下面这个模型。

$$f_1 : \begin{matrix} s = (0.5, 0.5) \\ d = (0.7, 0.3) \end{matrix} \xleftarrow{(0.8,1)} t \xrightarrow{(0.7,1)} f_2 : \begin{matrix} s = (1, 0.4) \\ d = (0, 0) \end{matrix}$$

谨慎式聚合和轻信式聚合的新取值如下：$v(\blacksquare s, t) = (0.5, 0.4)$，$v(\blacksquare d, t) = (0, 0)$，$v(\blacklozenge s, t) = (0.7, 0.5)$, and $v(\blacklozenge d, t) = (0.7, 0.3)$。

此外，无论信息源确认还是否认陈述，主体对其的信任程度都相同。这可以用单关系框架建模，其中 $R^+ = R^-$。我们将证明它们是强可定义的。

定理 3. $\mathfrak{F}$ 是单关系的，当且仅当 $\mathfrak{F} \models \blacksquare\neg p \leftrightarrow \neg\blacksquare p$ 和 $\mathfrak{F} \models \blacklozenge\neg p \leftrightarrow \neg\blacklozenge p$。

证明. 设 $\mathfrak{F}$ 是单关系的，且 $R^+ = R^- = R$。现在注意到

$$\begin{aligned} v_i(\blacksquare\neg p, w) &= \inf_{w'\in W}\{wRw' \to_{\mathsf{G}} v_i(\neg p, w')\} && (i \in \{1,2\}) \\ &= \inf_{w'\in W}\{wRw' \to_{\mathsf{G}} v_j(p, w')\} && (i \neq j) \\ &= v_j(\blacksquare p, w) \\ &= v_i(\neg\blacksquare p, w) \end{aligned}$$

反过来，令 $R^+ \neq R^-$，特别是令 $wR^+w' = x$ 和 $wR^-w' = y$。不失一般性，假设 $x > y$。我们将 p 的赋值设为：$v(p, w') = (x, y)$；对于每个 $w'' \neq w'$，都有 $v(p, w'') = (1, 1)$。显然，$v(\neg\blacksquare p, w) = (1, 1)$。另一方面，$v(\neg p, w') = (y, x)$，因此 $v_1(\blacksquare\neg p) \neq 1$。

$\blacklozenge$ 的情形可以用对偶方式处理。

在本文余下部分，我们将研究有限分支（包括模糊和清晰）框架上的 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}$，$\mathrm{fb}$ — $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}$。这有几个原因。首先，在将信念形式化以及对从信息源获取的数据进行推理时，假设每个信息源仅指向有限个其他信息源，并且主体能够访问的来源数量有限，是合理的。许多经典认知逻辑和信念逻辑中都隐含着这一假设，因为这些逻辑相对于有限分支模型通常是完备的[19], ，尽管它们无法定义有限分支模型。其次，在有限分支模型中，模态公式的取值都能被见证：如果 $v_i(\blacksquare\phi, w) = x < 1$，那么对于某个 w'，$v_i(\phi, w') = x$；如果 $v_i(\blacklozenge\phi, w) = x$，那么对于某个 w'，$wRw' = x$ 或 $v_i(\phi, w') = x$。直观地说，这意味着 w 对 ϕ 的确信程度完全基于其从信息源获取的信息，以及其对这些信息源的信任度。最后，将框架限制为有限分支框架，使得我们能够构造一种简单的约束表列演算，用于确定复杂度赋值。

4 表列演算

本节中，我们为 $\mathrm{G}\mathcal{T}\left(\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare}, \blacklozenge_{\mathrm{fb}}\right)$ 构造一个可靠且完备的约束表列系统$^{2\pm}_{\blacksquare, \blacklozenge_{\mathrm{fb}}}$。

最早的约束表列由 [21,22,23]提出，作为卢卡西维茨逻辑 L 的判定过程。 [24]提出了针对有理帕维尔卡逻辑的类似方法。我们在 [5], 中为 L^2 和 G^2 构造了约束表列——它们是 L 和 G 的相容性扩展；并在 [9]中为双 G¨odel 逻辑和 G^2的模态扩展构造了约束表列。

约束语义树是解析的，因为其规则具有子公式性质。此外，它们为从完全开放分支中提取反模型提供了一种简便方法。再者，尽管 G^2 的命题联结词允许构造解析证明系统，例如扩展 $\mathrm{I_4C_4}$[7] [38], 的展示演算，但模态联结词相对于 $\neg$ 彼此并非对偶，G¨odel 否定 $\sim$ 也是如此。因此，不太可能为 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$,$\blacklozenge$ 或 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge,\mathrm{fb}}$ 构造出优雅的（超）序列演算或展示演算。

[7] 这一逻辑曾多次被引入：先是在[38], ，随后在 [25], ，并在[30]中得到进一步研究。事实上，它是 Moisil 模态逻辑 [29] 的命题片段。我们感谢 Heinrich Wansing 指出这一点。

以下定义改编自 [9]。

定义 5。我们固定一个状态标签集 W，并令 $\lesssim\in\{<,\leqslant\}$ 和 $\gtrsim\in\{>,\geqslant\}$。进一步令 $w\in\mathsf{W}$、$\mathfrak{x}\in\{1,2\}$、$\phi\in\mathcal{L}^{-}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 和 $c\in\{0,1\}$。一个结构要么是 $w{:}\ \mathfrak{x}{:}\ \phi$、$c$、$w\mathsf{R}^{+}w'$，要么是 $w\mathsf{R}^{+}w'$。我们用 Str 表示结构集。形如 $w{:}\ \mathfrak{x}{:}\ p$、$w\mathsf{R}^{+}w'$ 和 $w\mathsf{R}^{-}w'$ 的结构称为原子结构（记作 AStr）。

我们将约束表格定义为一棵向下分支树，其分支是包含约束 $\mathfrak{x}\lesssim\mathfrak{x}'\,(\mathfrak{x},\mathfrak{x}'\in\text{字符串})$的集合。每个分支都可以通过应用下方的一条规则[8]来扩展（横线表示分支，$i,j\in\{1,2\},i\neq j$）。

$$\neg_i\lesssim\frac{w:i:\neg\phi\lesssim\mathfrak{x}}{w:j:\phi\lesssim\mathfrak{x}}\quad\neg_i\gtrsim\frac{w:i:\neg\phi\gtrsim\mathfrak{x}}{w:j:\phi\gtrsim\mathfrak{x}}\quad\rightarrow_1\leqslant\frac{w:1:\phi\rightarrow\phi'\leqslant\mathfrak{x}}{\begin{array}{c|c}\mathfrak{x}<1 & \\ \mathfrak{x}\geqslant1 & \begin{array}{c}w:1:\phi'\leqslant\mathfrak{x}\\ w:1:\phi>w:1:\phi'\end{array}\end{array}}\quad\rightarrow_2\geqslant\frac{w:2:\phi\rightarrow\phi'\geqslant\mathfrak{x}}{\begin{array}{c|c}\mathfrak{x}>0 & \\ \mathfrak{x}\leqslant0 & \begin{array}{c}w:2:\phi'\geqslant\mathfrak{x}\\ w:2:\phi'>w:2:\phi\end{array}\end{array}}$$

$$\wedge_1\gtrsim\frac{w:1:\phi\wedge\phi'\gtrsim\mathfrak{x}}{\begin{array}{c}w:1:\phi\gtrsim\mathfrak{x}\\ w:1:\phi'\gtrsim\mathfrak{x}\end{array}}\quad\wedge_2\lesssim\frac{w:2:\phi\wedge\phi'\lesssim\mathfrak{x}}{\begin{array}{c}w:2:\phi\lesssim\mathfrak{x}\\ w:2:\phi'\lesssim\mathfrak{x}\end{array}}\quad\rightarrow_1<\frac{w:1:\phi\rightarrow\phi'<\mathfrak{x}}{\begin{array}{c}w:1:\phi'<\mathfrak{x}\\ w:1:\phi>w:1:\phi'\end{array}}\quad\rightarrow_2>\frac{w:2:\phi\rightarrow\phi'>\mathfrak{x}}{\begin{array}{c}w:2:\phi'>\mathfrak{x}\\ w:2:\phi'>w:2:\phi\end{array}}$$

$$\wedge_1\lesssim\frac{w:1:\phi\wedge\phi'\lesssim\mathfrak{x}}{w:1:\phi\lesssim\mathfrak{x}\mid w:1:\phi'\lesssim\mathfrak{x}}\qquad\wedge_2\gtrsim\frac{w:2:\phi\wedge\phi'\gtrsim\mathfrak{x}}{w:2:\phi\gtrsim\mathfrak{x}\mid w:2:\phi'\gtrsim\mathfrak{x}}$$

$$\rightarrow_1\gtrsim\frac{w:1:\phi\rightarrow\phi'\gtrsim\mathfrak{x}}{w:1:\phi\leqslant w:1:\phi'\mid w:1:\phi'\gtrsim\mathfrak{x}}\quad\rightarrow_2\lesssim\frac{w:2:\phi\rightarrow\phi'\lesssim\mathfrak{x}}{w:2:\phi'\leqslant w:2:\phi\mid w:2:\phi'\lesssim\mathfrak{x}}$$

$$\blacksquare_i\gtrsim\frac{w:i:\blacksquare\phi\gtrsim\mathfrak{x}}{w':i:\phi\gtrsim\mathfrak{x}\mid w\mathsf{S}w'\leqslant w':i:\phi}\quad\blacksquare_i\leqslant\frac{w:i:\blacksquare\phi\leqslant\mathfrak{x}}{\begin{array}{c|c}\mathfrak{x}<1 & \\ \mathfrak{x}\geqslant1 & \begin{array}{c}w\mathsf{S}w''>w'':i:\phi\\ w''{:}\,i:\phi\leqslant\mathfrak{x}\end{array}\end{array}}\quad\blacksquare_i<\frac{w:i:\blacksquare\phi<\mathfrak{x}}{\begin{array}{c}w\mathsf{S}w''>w'':i:\phi\\ w''{:}\,i:\phi<\mathfrak{x}\end{array}}$$

$$\blacklozenge_i\gtrsim\frac{w:i:\blacklozenge\phi\gtrsim\mathfrak{x}}{\begin{array}{c}w\mathsf{S}w''\gtrsim\mathfrak{x}\\ w'':i:\phi\gtrsim\mathfrak{x}\end{array}}\quad\blacklozenge_i\lesssim\frac{w:i:\blacklozenge\phi\lesssim\mathfrak{x}}{w':i:\phi\lesssim\mathfrak{x}\mid w\mathsf{S}w'\lesssim\mathfrak{x}}\quad\left[\begin{array}{c}w''\ \textit{is fresh on the branch}\\ \textit{if } i=1,\ \textit{then } \mathsf{S}=\mathsf{R}^{+}\\ \textit{if } i=2,\ \textit{then } \mathsf{S}=\mathsf{R}^{-}\\ \textit{in } \blacksquare_i\gtrsim,\blacklozenge_i\lesssim\ w\mathsf{S}w'\ \textit{occurs on the branch}\end{array}\right]$$

A tableau's branch $\mathcal{B}$ is closed *iff one of the following conditions applies:*

- *the transitive closure of $\mathcal{B}$ under $\lesssim$ contains $\mathfrak{x}<\mathfrak{x}$;*
- $0\geqslant1\in\mathcal{B}$, *or* $\mathfrak{x}>1\in\mathcal{B}$, *or* $\mathfrak{x}<0\in\mathcal{B}$.

当且仅当语义树的所有分支都闭合时，该语义树才是闭合的。我们称 ϕ 存在表列证明，当且仅当从 $w{:}\mathfrak{1}:\phi<1$ 和 $w{:}\mathfrak{2}:\phi>0$ 出发的语义树都是闭合的。

开放分支 $\mathcal{B}$ 完备，当且仅当满足以下条件。

* 如果一条规则的所有前提都出现在 $\mathcal{B}$ 上，那么它唯一的结论[9]就出现在 $\mathcal{B}$ 上。

约定 2 下表总结了条目的解释。

条目	解释
$w{:}\,\mathfrak{1}:\phi\leqslant w'{:}\,\mathfrak{2}:\phi'$	$v_1(\phi,w)\ \leq v_2(\phi',w')$
$w{:}\,\mathfrak{2}:\ \phi\leqslant c$	$v_2(\phi,w)\ \leq c$ 与 $\ c\in\{0,1\}$
$w\mathsf{R}^{-}w'\leqslant w'{:}\,\mathfrak{2}:\phi$	$wR^{-}w'\leq v_2(\phi,w')$

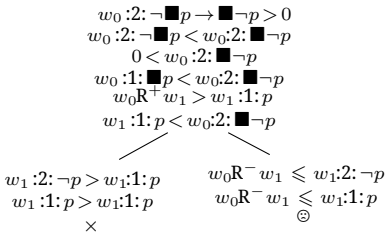
定义6（分支实现）。当 $\mathfrak{M}=\langle W、\ R^{+}、\ R^{-}、\ v_1、\ v_2\rangle$ 模型在 $\mathcal{B}\}$ 上出现且 $W=\{w:w$ 时，它实现语义树的一个分支 $\mathcal{B}$，当且仅当存在一个函数

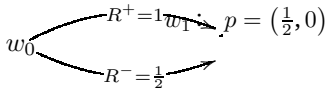
[8]如果 $\mathfrak{x}<1,\mathfrak{x}<\mathfrak{x}'\in\mathcal{B}$或 $0<\mathfrak{x}',\mathfrak{x}<\mathfrak{x}'\in\mathcal{B}$，则这些规则仅适用于 $\mathfrak{x}<\mathfrak{x}'$。[9]请注意，分支规则有 *two*个结论。

rl : 字符串 $\to [0,1]$ ，使得对于每个 $\mathfrak{x}$、$\mathfrak{y}$、$\mathfrak{y}'$、$\mathfrak{z}$、$\mathfrak{z}' \in$ 字符串，若 $\mathfrak{x} = w : \mathrm{x} : \phi$、$\mathfrak{y} = w_i \mathrm{R}^+ w_j$，且 $\mathfrak{y}' = w_i' \mathrm{R}^- w_j'$，则以下条件成立（$\mathrm{x} \in \{1,2\}$、$c \in \{0,1\}$）。

– 若 $\mathfrak{z} \lesssim \mathfrak{z}' \in \mathcal{B}$，则 $\mathsf{rl}(\mathfrak{z}) \,.\, \mathsf{rl}(\mathfrak{z}')$。– $\mathsf{rl}(\mathfrak{x}) = v_{\mathrm{x}}(\phi, w)$，$\mathsf{rl}(c) = c$，$\mathsf{rl}(\mathfrak{y}) = w_i R^+ w_j$，$\mathsf{rl}(\mathfrak{y}') = w_i' R^- w_j'$

为了便于理解这些规则，我们举例说明一个失败的语义树证明，并从中提取一个反模型。证明过程如下：首先应用所有可能的命题规则，然后应用引入新状态的模态规则，再应用那些使用分支上已有状态的模态规则。重复这一过程，直到所有结构都分解为原子结构。





现在，我们可以从标记为 ☹ s.t.$v_2(\neg\blacksquare p \to \blacksquare\neg p, w_0) > 0$ 的完全开放分支中提取一个模型。我们将其中出现的 w 作为载体，并为变元和关系赋值，使它们与 .. 对应。

定理 4（$\mathcal{T}\left(\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge}, \mathfrak{fb}\right)$ 完备性）。 ϕ 在 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$，$\blacklozenge$ 中强有效，当且仅当存在一个关于 ϕ 的语义树证明。

证明。 证明是对 [9, 定理 3]，的简单改写，因此我们仅给出其概要。省略的步骤可参见第 A.1 节。

为证明可靠性，我们需要说明，如果规则的前提得到实现，那么其至少一个结论也得到实现。这可以通过逐一检查各条规则来完成。注意，由于我们处理的是有限分支框架，定义 2 中的下确界和上确界变为最大值和最小值。由于闭分支无法实现，结论即得。

为证明完备性，我们证明每个完全开放分支 $\mathcal{B}$ 都是可实现的。我们说明如何从该分支构造一个实现模型。首先，我们设定 $W = \{w : \ w$ 出现在 $\mathcal{B}\}$中。用 $\mathsf{AStr}(\mathcal{B})$ 表示出现在 $\mathcal{B}$ 上的原子结构集合，并令 $\mathcal{B}^+$ 为 $\mathcal{B}$ 在 .. 下的传递闭包。现在，我们为它们赋值。对于 $i \in \{1,2\}$，如果 $w : \ i : \ p \geqslant 1 \in \mathcal{B}$，则设 $v_i(p,w) = 1$。如果$w : \ i : \ p \leqslant 0 \in \mathcal{B}$，则设 $v_i(p,w) = 0$。如果 $w\mathsf{S}w' < \mathfrak{x} \notin \mathcal{B}^+$，则设 $w\mathsf{S}w' = 1$。如果$w : i : p$或 $w\mathsf{S}w'$没有出现在 $\mathcal{B}$上，则设 $v_i(p,w) = 0$且 $w\mathsf{S}w' = 0$。

对于每个字符串 $\in \in \mathsf{AStr}$，我们现在设定

$$[\mathsf{str}] = \left\{ \mathsf{str}' \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathsf{str} \leqslant \mathsf{str}' \in \mathcal{B}^+ \text{ and } \mathsf{str} < \mathsf{str} \notin \mathcal{B}^+ \\ \text{or} \\ \mathsf{str} \geqslant \mathsf{str}' \in \mathcal{B}^+ \text{ and } \mathsf{str} > \mathsf{str}' \notin \mathcal{B}^+ \end{array} \right\}$$

用 $\#^{\mathsf{str}}$ 表示 [字符串] 的数量。由于唯一可能的环是 $\mathcal{B}^+$ is str 6 $\mathsf{str}' \leqslant \ldots \leqslant$ str，且其中所有元素都属于 [字符串],，显然 $\#^{\mathsf{str}} \leq$

$2 \cdot |\mathrm{AStr}(\mathcal{B})| \cdot |W|$。若存在 $\mathsf{str}_i \in [\mathsf{str}$ 和 $\mathsf{str}_j \in [\mathsf{str}$，使得 $\mathsf{str}_i \prec \mathsf{str}_j \in \mathcal{B}^+$，则令 $[\mathsf{str}] \prec [\mathsf{str}']$。现在我们将这些结构的赋值定义如下：

$$\mathsf{str} = \frac{|\{[\mathsf{str}'] \mid [\mathsf{str}'] \prec [\mathsf{str}]\}|}{\#^{\mathsf{str}}}$$

显然，现在只含原子结构和常量的约束都已满足。为了证明所有其他约束也都满足，我们证明：如果规则的至少一个结论得到满足，那么其前提也得到满足。同样，证明只需稍微修改 [9, 定理 3] 的证明，并考察各条规则的情形即可（详情见第A.1节）。

5 复杂度

在本节中，我们使用语义树给出使模型（满足模型）的大小上界，并证明 $\mathbf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$，$\blacklozenge_{\mathsf{fb}}$ 的可满足性和有效性[10] 是 PSPACE 完全的。

以下陈述可直接由定理4推出。

推论 1. 设 $\phi \in \mathcal{L}^{\neg}_{\blacksquare}$，$\blacklozenge$ 不是 $\mathbf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}\blacklozenge$，$\mathsf{fb}$ 有效的，且 k 是其中模态的数量。那么存在一个模型 $\mathfrak{M}$，其大小为 $\leq k^{k+1}$、深度为 $\leq k$，并且$w \in \mathfrak{M}$ 满足：$v_1(\phi, w) \neq 1$ 或 $v_2(\phi, w) \neq 0$。

证明。 在第 A.2 节中。

现在我们可以证明 PSPACE 完备性结果。 PSPACE成员性的证明改编自 [9] 中的方法，并受到PSPACE 成员性证明的启发，$\mathbf{K}$ 来自 [10]。对于困难性部分，我们将 $\mathbf{K}$ 中的有效性问题归约到 v_1 和 v_2 中的有效性问题。我们简要概述证明（省略的步骤见第 A.3 节）。

定理 5. $\mathbf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}\blacklozenge_{,\mathsf{fb}}$ 的有效性和可满足性是 PSPACE 完全。

证明。对于成员性，根据定理 4 的证明可知，ϕ 在 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 上可满足（可证伪），当且仅当所有变元、$w\mathrm{R}^+w'$s 和$w\mathrm{R}^-w'$s 在 $\mathrm{V} = \left\{0, \frac{1}{\#^{\mathsf{str}}}, \ldots, \frac{\#^{\mathsf{str}}-1}{\#^{\mathsf{str}}}, 1\right\}$ 中取值，且在这些取值下 ϕ 可满足（可证伪）。

由于 $\#^{\mathsf{str}}$ 有上界，我们现在可以用标记公式和形如 $w : i : \phi = \mathrm{v}$ 或 $w\mathrm{S}w' = \mathrm{v}$（$\mathrm{v} \in \mathrm{V}$）的关系结构替代约束，从而避免比较不同状态下公式的取值。如果分支中包含 $w : i : \psi = \mathrm{v}$ 和 $w : i : \psi = \mathrm{v}'$，其中 $\mathrm{v} \neq \mathrm{v}'$，则关闭该分支。

现在，我们将定义5 中的规则替换为适用于带标签结构的新规则。下面给出这些规则作为示例：[11] 它们替换了 $\blacklozenge_i \lesssim$。

[10] 可满足性与可证伪性（非有效性）可相互归约：ϕ 可满足，当且仅当 $\sim\sim(\phi \prec \mathbf{0})$ 可证伪；ϕ 可证伪，当且仅当 $\sim\sim(\mathbf{1} \prec \phi)$ 可满足。[11] 对于 w处 $\blacklozenge\phi$ 的取值 $\mathrm{v} > 0$，我们添加一个见证 v 的新状态，并为分支上的一个状态猜测一个小于 v 的取值。其他模态规则也可以类似地改写。

$$\frac{w:i:\blacklozenge\phi=\frac{r}{\#^{\mathsf{str}}}}{\begin{array}{c|c|c|c}wSw'=1 & wSw'=\frac{r}{\#^{\mathsf{str}}} & \cdots & wSw'=\frac{r}{\#^{\mathsf{str}}}\\ w:i:\phi=\frac{r}{\#^{\mathsf{str}}} & w:i:\phi=1 & & w:i:\phi=\frac{r}{\#^{\mathsf{str}}}\end{array}} \qquad \frac{w:i:\blacklozenge\phi=\frac{r}{\#^{\mathsf{str}}};(wSw' \text{ occurs on the branch})}{w':i:\phi=\frac{r-1}{\#^{\mathsf{str}}} \mid wSw'=\frac{r-1}{\#^{\mathsf{str}}} \mid \ldots \mid w':i:\phi=0}$$

请注意，一旦所有规则都以这种方式重写，我们就不需要比较不同状态下公式的值。

接下来我们按如下步骤进行：首先应用命题规则，然后应用一条需要引入新状态的模态规则（例如，$w_0 : i : \blacklozenge\phi = {}^{r}\!/_{\#^{\mathsf{str}}}$），接着应用使用该状态的规则，并在需要时猜测语义树分支。重复这一过程，我们便逐个分支地构建模型。模型的深度受 ϕ 的长度限制；我们逐个处理模态公式，因此需要将 ϕ 和 wSw'的子公式及其取值 $O(|\phi|)$次存储起来，所以只需 $O(|\phi|^2)$空间。构建完分支后，我们可以删除语义树的条目，并针对 w_0 处引入新状态的下一个公式重复这一过程。

对于困难性，我们将 $\mathbf{K}$ 有效性从 $\{\mathbf{0}, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond\}$ 公式归约到 v_1-有效性和 v_2-有效性，条件是 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge,\mathsf{fb}}$。对于归约到 v_1-有效性，我们采用 [14, 定理 21] 中的思路。具体而言，给定 ϕ，我们用 $\phi^{\triangledown}$ 表示这样一个公式：其每个子公式都用 $\sim\sim$ 前束化，并且其中的 $\Box$ 和 $\Diamond$ 分别替换为 $\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$。由于 G¨odel 模态逻辑的语义与正支持（v_1 赋值，定义 2）的语义一致，结论得证。

为了归约到 v_2-有效性，我们取 ϕ 并归纳定义 ϕ^{∂}:

$$\begin{aligned} p^{\partial} &= \mathbf{1} \prec (\mathbf{1} \prec p) \\ (\chi \circ \psi)^{\partial} &= \chi^{\partial} \bullet \psi^{\partial} && (\circ, \bullet \in \{\wedge, \vee\}, \circ \neq \bullet) \\ (\chi \to \psi)^{\partial} &= \psi^{\partial} \prec \chi^{\partial} \\ (\Box\chi)^{\partial} &= \blacksquare(\chi^{\partial}) \\ (\Diamond\chi)^{\partial} &= \blacklozenge(\chi^{\partial}) \end{aligned}$$

可以通过归纳验证，对于任意清晰的有限分支 $\mathfrak{F}$ 以及其上的任意经典赋值 v，只要 $v_2 = \mathrm{v}$，就有 $\mathfrak{F}, \mathrm{v}\ w \vDash \phi$ 当且仅当 $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\partial}, w) = 0$ and$\mathfrak{F}, \mathrm{v}\ w \nvDash \phi$ 当且仅当 $v_2(\mathbf{1} \prec \phi^{\partial}, w) = 1$。

反过来，设 $\mathfrak{M} = \langle W, R^+, R^-, v_1, v_2\rangle$ 是一个 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge\mathsf{fb}}$ 模型。令 $\mathfrak{M}^! = \langle W, R^!, v^!\rangle$ 满足：$wR^!w'$ 当且仅当 $wR^-w' = 1$，且 $w \in v^!(p)$ 当且仅当 $v_2(p, w) = 1$。同样，容易验证，对于任意 $\mathfrak{M}$，$v_2(\phi^{\partial}, w) = 1$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^!, w \vDash \phi$。

由此可知，ϕ 是 K-有效，当且仅当 $\mathbf{1} \prec \phi^{\partial}$ 是 v_2-有效。

6 结论与未来工作

我们提出了 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$，$\blacklozenge$ 的模态扩展 G^2，其中包含非正规模态，并为其提供了基于具有两个赋值的双关系框架的克里普克语义。我们确立了它与 [9,6] 中提出的双 G¨odel 模态逻辑 KbiG 之间的联系，并针对有限分支框架上的 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$，$\blacklozenge$，得出了可判定性和复杂度结果。

接下来的研究方向如下。首先，我们计划探究完整 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare}$，$\blacklozenge$ 逻辑的可判定性。我们猜想它也是 PSPACE 完全的。然而，

证明 PSPACE 完备性的标准方法，如文献 ¨中所述的 G [13,14] odel 模态逻辑，并在 [6] 中用于证明 KbiG 的 PSPACE 完备性的方法，可能无法直接应用于此处，因为很难将 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 有效性归约为 KbiG 有效性；根据定理 3 可立即得出，$\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 不具备否定范式。

其次，设计 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 的完备希尔伯特式公理化，并研究其关于强有效性的对应理论，是一项值得探讨的工作。这可能并非易事，因为 $\blacksquare(p \to q) \to (\blacksquare p \to \blacksquare q)$ 和 $\blacklozenge(p \vee q) \to \blacklozenge p \vee \blacklozenge q$ 并非 $\mathrm{G}^{2\pm}_{\blacksquare,\blacklozenge}$ 有效，尽管很容易验证以下规则是可靠的。

$$\frac{\phi \to \chi}{\blacksquare\phi \to \blacksquare\chi} \qquad \frac{\phi \to \chi}{\blacklozenge\phi \to \blacklozenge\chi}$$

未来研究的另一个方向是研究 $\blacksquare$ 和 $\blacklozenge$ 的全局版本，以及基于它们的描述逻辑。描述 G¨odel 逻辑广为人知且已得到深入研究 [11,12]，它们能够表示无法在经典本体中表示的不确定数据。此外，它们是唯一可判定的模糊描述逻辑族，这使其有别于例如卢卡西维奇描述逻辑（及其全局版本），后者甚至无法公理化 [37]。另一方面，已有基于 BD 的描述逻辑（例如参见 [26]），因此将这两种方法结合起来是有意义的。

参考文献

1. Aguilera, J., Di´eguez, M., Fern´andez-Duque, D., McLean, B.: 时间与哥¨德尔：PSPACE 中的模糊时间推理。载于：逻辑、语言、信息与计算，计算机科学讲义，第 13368 卷，第 18–35 页。Springer International Publishing，尚（2022） 2. Baaz, M.: 带有 0-1 投影和相对化的无限值哥¨德尔逻辑。载于：哥¨德尔'96：数学、计算机科学与物理学的逻辑基础——库尔特·哥¨德尔的遗产，捷克共和国布尔诺，1996 年 8 月，论文集，第 23–33 页。符号逻辑协会（1996） 3. Baldi, P., Cintula, P., Noguera, C.: 不确定性的经典与模糊双层模态逻辑：翻译与证明论。《国际计算智能系统杂志》**13**，988–1001（2020）。https://doi.org/10001 42991200703./ijcis.d... Belnap, N.: 计算机应当如何思考。载于：Omori, H., Wansing, H.（编）《贝尔纳普–邓恩逻辑新论》，Synthese 文库（认识论、逻辑学、方法论与科学哲学研究），第 418 卷。Springer，尚（2019） 5. B´ílkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 二维模糊逻辑的约束表列。载于：Das, A., Negri, S.（编）《基于解析语义表及相关方法的自动推理》。计算机科学讲义，第 12842 卷，第 20–37 页。Springer International Publishing（2021） 6. B´ílkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 清晰双哥¨德尔模态逻辑及其相容性扩展。https://arxiv.org/abs/2203.01060 (2022)7. B´ílkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D., Majer, O.: 双层框架中的定性推理。《国际近似推理杂志》**154**，84–108（2023）

8. B´ílkov´a, M., Frittella, S., Majer, O., Nazari, S.: 基于不一致信息的信念。载于：Martins, M.A., Sedl´ar, I.（编）《动态逻辑：新趋势与应用》，第 68–86 页。Springer International Publishing，尚（2020） 9. B´ílkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 相容哥¨德尔模态逻辑。载于：《自动推理》，计算机科学讲义，第 13385 卷，第 429–448 页。Springer International Publishing，尚（2022） 10. Blackburn, P., Rijke, M.d., Venema, Y.: 模态逻辑。剑桥理论计算机科学论丛 53，剑桥大学出版社，第 4 次印刷修订版（2010） 11. Bobillo, F., Delgado, M., G´omez-Romero, J., Straccia, U.: 哥¨德尔语义下的模糊描述逻辑。《国际近似推理杂志》50(3)，494–514（2009 年 3 月） 12. Bobillo, F., Delgado, M., G´omez-Romero, J., Straccia, U.: 在模糊描述逻辑中结合哥¨德尔与扎德模糊逻辑。《国际不确定性、模糊性与知识库系统杂志》20(04)，475–508（2012 年 8 月） 13. Caicedo, X., Metcalfe, G., Rodr´íguez, R., Rogger, J.: 哥¨德尔模态逻辑的有限模型性质。载于：逻辑、语言、信息与计算国际研讨会，第 226–237 页。Springer（2013） 14. Caicedo, X., Metcalfe, G., Rodr´íguez, R., Rogger, J.: 基于序的模态逻辑的可判定性。《计算机与系统科学杂志》88，53–74（2017 年 9 月） 15. Caicedo, X., Rodriguez, R.: 标准哥¨德尔模态逻辑。《逻辑学研究》94(2)，189–214（2010） 16. Caicedo, X., Rodr´íguez, R.: 值域为 $[0,1]$ 的克里普克框架上的双模态哥¨德尔逻辑。《逻辑与计算杂志》25(1)，37–55（2015） 17. Di´eguez, M., Fern´andez-Duque, D.: S4 哥¨德尔模态逻辑的可判定性。载于：《应对复杂问题的计算智能与数学》，计算智能研究，第 4 卷，第 1–7 页。Springer International Publishing，尚（2023） 18. Drobyshevich, S.: 基于 FDE 的模态逻辑的一般框架。《逻辑学研究》108(6)，1281–1306（2020 年 12 月） 19. Fagin, R., Halpern, J., Moses, Y., Vardi, M.:《关于知识的推理》。麻省理工学院出版社，美国马萨诸塞州剑桥（2003） 20. Grigolia, R., Kiseliova, T., Odisharia, V.: 自由与投射双模态对称哥¨德尔代数。《逻辑学研究》104(1)，115–143（2016） 21. H¨ahnle, R.: 从演绎到整数规划的一种新翻译。载于：人工智能与符号数学计算国际会议，第 262–275 页。Springer（1992） 22. H¨ahnle, R.: 多值逻辑与混合整数规划。《数学与人工智能年刊》12(3-4)，231–263（1994） 23. H¨ahnle, R.: 多值逻辑的语义树。载于：D'Agostino, M., Gabbay, D., H¨ahnle, R., Posegga, J.（编）《语义树方法手册》，第 529–580 页。Springer-Science+Business Media, B.V.（1999） 24. Lascio, L.d., Gisolfi, A.: 有理帕维尔卡逻辑的分级语义树。《国际智能系统杂志》20(12)，1273–1285（2005） 25. Leitgeb, H.: Hype：一种超内涵逻辑系统（及其在语义悖论中的应用）。《哲学逻辑杂志》48(2)，305–405（2019） 26. Ma, Y., Hitzler, P., Lin, Z.: 使用 OWL 进行相容推理的算法。载于：《语义网：研究与应用》。ESWC 2007，计算机科学讲义，第 4519 卷，第 399–413 页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡（2007）。https://doi.org/10.1007/978-3-540-72667-8 29

27. Metcalfe, G., Olivetti, N.：G¨odel 模态逻辑的证明系统。载于：Giese, M., Waaler, A.（编），解析表及相关方法自动推理国际会议，TABLEAUX-2009。人工智能讲义，第 5607 卷，第 265–279 页。Springer（2009）28. Metcalfe, G., Olivetti, N.：迈向 G¨odel 模态逻辑的证明理论。《计算机科学逻辑方法》**7** (2011) 29. Moisil, G.：《模态逻辑》。《数学与物理研究》**2**，3–98（1942）30. Odintsov, S., Wansing, H.：Routley 星算子与超内涵性。《哲学逻辑杂志》**50**，33–56（2021）31. Odintsov, S., Wansing, H.：具有 Belnap 式真值的模态逻辑。《应用非经典逻辑杂志》**20**(3)，279–301（2010）。https://doi.org/10301 32316620279./jancl..-. Odintsov, S., Wansing, H.：厘清基于 FDE 的相容悖论模态逻辑。《逻辑学研究》**105**(6)，1221–1254（2017）。https://doi.org/109 331007112250179753./s---. Priest, G.：《非经典逻辑导论：从 If 到 Is》。剑桥大学出版社，第 2 版（2008）34. Priest, G.：多值模态逻辑：一种简单方法。《符号逻辑评论》**1**(2)，190–203（2008）35. Rodriguez, R., Tuyt, O., Esteva, F., Godo, L.：K45 类 G¨odel 模态逻辑及其公理扩展的简化克里普克语义。《逻辑学研究》**110**(4)，1081–1114（2022 年 8 月）36. Rodriguez, R., Vidal, A.：Crisp G¨odel 模态逻辑的公理化。《逻辑学研究》**109**，367–395（2021）37. Vidal, A.：关于传递多值模态逻辑。《模糊集与系统》**407**，97–114（2021 年 3 月）38. Wansing, H.：构造性否定、蕴涵与余蕴涵。《应用非经典逻辑杂志》**18**(2–3)，341–364（2008）。https://doi.org/10.3166/jancl.18.341-364

A 证明

A.1 定理4的证明

我们补充说明中的细节。首先，证明可靠性结果。由于命题规则与 $\mathcal{T}\left(\mathbf{KG}^2_{\mathsf{fb}}\right)$ [9] 中的完全相同，我们只考虑最有趣的模态规则。我们处理 $\blacksquare_1\gtrsim$ 和 $\blacklozenge_2\gtrsim$ （参见定义5），并证明在每种情况下，如果 $\mathfrak{M}=\langle W,\ R^+,\ R^-,\ v_1,\ v_2\rangle$ 实现了该规则的前提，那么它也实现了该规则的某个结论。

我们从 $\blacksquare_1\gtrsim$ 开始，不妨假设 $\mathfrak{X}=w'':2:\psi$，并令 $\mathfrak{M}$ 实现 $w:1:\blacksquare\phi\geqslant w'':2:\psi$。现在，由于 R^+ 和 R^- 是有限分支的，我们有 $\min_{w'\in W}\{w\mathrm{R}^+w'\to_{\mathsf{G}} v_1(\phi,w')\}\geq v_2(\psi,w)$，因此，对于每个满足 $wR^+w'>0$[12] 的 $w'\in W$，要么 $v_1(\phi,w')\geq v_2(\psi,w'')$，要么 $w\mathrm{R}^+w'\geq v_2(\psi,w'')$。因此，该规则的至少一个结论成立。

对于 $\blacklozenge_2\gtrsim$，我们以类似方式进行。令 $\mathfrak{M}$ 实现 $w:1:\blacklozenge\phi\geqslant w'':2:\psi$。同样，根据有限分支，我们有 $\min_{w'\in W}\{wR^+w'\wedge_{\mathsf{G}} v_1(\phi,w')\}$。因此，存在一个新的 $w'\in W$，满足 $wR^+w', v_1(\phi,w')\geq v_2(\psi,w')$。由此，该规则的结论成立，正如所需。

为证明完备性，我们采用逆否命题进行推理。我们对公式进行归纳，证明每个完全开放分支都可实现。原子约束的情形由实现模型的构造得证（回顾定理4的证明）。我们证明其他约束也都满足。为此，我们证明：如果规则的至少一个结论得到满足，那么其前提也得到满足。命题情形显而易见，可按 [5, 定理 2]中的相同方法处理。我们只考虑 $\blacklozenge_2\gtrsim$ 和 $\blacksquare_1\gtrsim$ 的情形，并且不失一般性地假设 $\mathfrak{X}=w'':2:\psi$。

对于 $\blacksquare_1\gtrsim$，假设对于每个满足 $w\mathrm{R}^+w'$ 位于分支上的 w'，$w':1:\phi\geqslant w'':2:\psi$ 或 $w\mathrm{R}^+w'\leqslant w':1:\phi$ 都可实现。因此，根据归纳假设，对于每个 $w'\in R^+(w)$，都有 $v_1(\phi,w')\geq v_2(\psi,w'')$ 或 $wR^+w'\leq v_1(\phi,w')$。由此，$v_1(\blacksquare\phi,w)\geq v_2(\psi,w'')$，且 $w:1:\blacksquare\phi\geqslant w'':2:\psi$ 得到实现。

对于 $\blacklozenge_2\gtrsim$，令 $w\mathrm{R}^-w''\geqslant w'':2:\psi$ and $w':1:\phi\geqslant w'':2:\psi$ 在某个 $w''\in R(w)$ 下成立。根据归纳假设，我们有 $w\mathrm{R}^-w'', v_2(\phi,w')\geq v_2(\psi,w'')$，因此，$v_2(\blacklozenge\phi,w)\geq v_2(\psi,w'')$，从而 $w:2:\blacklozenge\phi\geqslant w'':2:\psi$。

其他规则也可以类似地考虑。

A.2 推论1的证明

根据定理4，如果 ϕ 不是 $\mathsf{G}^{2\pm}_{\blacksquare\blacklozenge,\,\mathsf{fb}}$ 有效，我们可以利用语义树构造一个反例模型。从定义5 中的规则也显然可知，所构造模型的深度至多为 ϕ中嵌套模态的最大层数。模型的宽度至多为同一嵌套层级上的模态最大数量。

[12] 请回顾，若 $u\mathrm{S}u'\notin\mathcal{B}$，则我们令 $u\mathrm{S}u'=0$。

A.3 定理5的证明

我们给出了利用改写规则的判定算法。该算法与 [9] 中的算法基本相同。还要注意，原始演算也可以用作判定过程，尽管它并非最优。

我们来说明如何使用多项式空间为 ϕ 构造一个满足模型。我们从 $w_0{:}\,1:\phi{=}1$ 开始（ $w_0{:}\,1:\phi{=}0$ 的算法相同），并开始应用命题规则（首先是不需要分支的规则）。如果我们实施一条分支规则，就选取其中一个分支，只沿着该分支继续：直到该分支闭合，此时我们再选取另一个分支；或者直到没有更多规则可用（此时模型构造完成）；又或者直到必须应用一条模态规则才能继续。在这个阶段，我们只需存储 ϕ 的子公式，以及表示它们在 w_0 处取值的标签。

现在我们猜测一个模态公式（例如 $w_0{:}2:\blacklozenge\chi = \frac{1}{\#^{\mathsf{str}}}$），其分解需要引入一个新状态（$w_1$），然后应用这条规则。接着，我们应用所有实现时要求分支上出现 $w_0\mathrm{R}^{-}w_1$ 的模态规则（同样，如果这些规则需要分支，我们只猜测其中一个分支），并从命题规则开始重新进行。如果遇到矛盾，该分支就闭合。同样，唯一需要新增存储的内容是 ϕ 的子公式（此时模态更少）、它们在 w_1 处的取值，以及关系项 $w_0\mathrm{R}^{-}w_1$ 及其取值。由于模型的深度为 $O(|\phi|)$，且我们逐个处理模态公式，因此需要存储 ϕ 的子公式及其取值，共计 $O(|\phi|)$ 次，所以我们只需要 $O(|\phi|^2)$ 空间。

最后，如果没有可应用的规则且不存在矛盾，我们就将 $w_0{:}\,2:\blacklozenge\chi = \frac{1}{\#^{\mathsf{str}}}$ 标记为“安全”。现在，我们删除语义树中位于它下方的所有条目，并选取另一个尚未标记且需要引入新状态的模态公式。逐一处理这些模态公式，就能让我们逐分支构造模型。不过，由于模型中每个分支的长度都被 $O(|\phi|)$ 所限制，而且一旦确认模型的某个分支不含矛盾，我们就会将其删除，因此我们只需要多项式空间。