arXiv:2303.14212v1 [math.CO] 24 Mar 2023

4 维中的 Roudneff 猜想

´RANGEL HERNANDEZ-ORTIZ、KOLJAKNAUER、Luis Pedro Montejano 和 Manfred Scheucher

Abstract. J.-P. Roudneff 在 1991年 提出猜想：实射影空间 $\mathbb{P}^d$ 中任意由 $n \geq 2d+1 \geq 5$ 个伪超平面构成的排列至多有 $\sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i}$ 个完全胞腔（即由每个超平面围成的胞）。对于 $d = 2$、3 以及由 Lawrence 定向拟阵产生的排列，该猜想成立。本文的主要结果是证明 Roudneff 猜想对 $d = 4$ 成立。此外，根据计算数据，我们猜想完全胞腔的最大数量仅由循环排列达到。

1. Introduction引言

实射影空间$\mathbb{P}^d$ 中的一个由 n 个伪超平面构成的射影排列 H（d，n），是由若干经过轻微变形的线性超平面组成的有限集合，且具有若干组合性质；定义见第 2.1 节，其中以定向拟阵的术语表述。特别地，在 H（d，n）中，没有点属于每一个伪超平面。任意排列 H（d，n）都将 $\mathbb{P}^d$ 分解为一个 d 维胞腔复形，而 H（d，n）的任意 d 胞 c 至多有 n 个面（即（$d-1$）胞）。如果一个 d 胞 c 恰有 n 个面，也就是说，c 被 H（d，n）的每个伪超平面围成，我们就称它为 H（d，n）的完全胞腔。

由 Carath´eodory [3], 发现的、具有 n 个顶点的 d 维循环多胞体，是 $\mathbb{R}^d$ 中矩曲线 x 上 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$、$t \mapsto$（$t$、$t^2$、.....、$t^d$）上的 $n \geq d+1 \geq 3$ 个不同点 x（t_1）、.....、x（t_n）的凸包。循环多胞体因其与某些极值问题的联系，在组合凸几何中发挥着重要作用。例如，参见 McMullen [10]提出的上界定理。循环排列定义为循环多胞体的对偶。与循环多胞体一样，循环排列也具有极值性质；关于以有向拟阵术语给出的定义，见第 2.1 节。例如，Shannon [14]将循环排列作为 d 维射影排列的实例引入，这类排列的面数在具有 $(d+1)$ 个面的情况下达到最小。

记 $C_d(n)$ 为具有 n 个超平面的 d维循环排列中完全胞腔的数量。Roudneff [13] 证明了 $C_d(n) \geq \sum_{i=0} \binom{n-1}{i}$ 对 $d \geq 2$ 成立，并且对所有 $n \geq 2d+1$，这一上界都是紧的。此外，他猜想在这种情况下，循环排列能使完全胞腔的数量达到最大。

猜想 1.1（[13, 猜想 2.2]）。在 $\mathbb{P}^d$ 中，任意由 $n \geq 2d+1 \geq 5$ 个伪超平面构成的排列至多有 $\sum_{i=0} \binom{n-1}{i}$ 个完全胞腔。

对于 $d = 2$，该猜想成立（也就是说，$\mathbb{P}^2$ 中任意由 n 条伪直线构成的排列至多包含一个完全胞）；Ram´ırez Alfons´ın [12] 证明了 $d = 3$ 这一情形，而作者在 [11] 中证明了该猜想适用于对应于 Lawrence 定向拟阵的排列。

日期：2023年3月28日。2010年数学主题分类。52C40、05C35、05Dxx、68Rxx。关键词和短语：Roudneff 猜想、定向拟阵、超平面排列。

在[8]中，对于任意正整数 d 和 n，当 $n \geq d+1$时，计算得出了循环排列的完全胞腔的确切数量，即:

$$C_d(n) = \binom{d}{n-d} + \binom{d-1}{n-d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i}.$$

T因此，鉴于 Roudneff 猜想， [11]中提出了以下问题 .

问题 1.2. 在 $\mathbb{P}^d$ 中， $n \geq d+1 \geq 3$ 个伪超平面的每个排列是否至多有 $C_d(n)$个完全胞腔?

注意，在 $\mathbb{P}^2$ 中，3 条（分别为 4 条）直线的排列是唯一的，它有 $C_2(3) = 4$ （分别有$C_2(4) = 3$）个完全胞腔。由于猜想1.1 对 $d = 2$ 和 $n \geq 5$成立，问题1.2对 $d = 2$得到了肯定回答。

作为本文的主要结果，我们对问题1.2 在 $d = 4$中的情形给出了肯定回答，因此证明了 Roudneff 猜想在 4 维成立，进一步支持了这一一般猜想。此外，通过一些简单的观察，我们对问题1.2 在 $d = 3$中的情形给出了回答，并进一步加强了 Roudneff 猜想。

2. Oriented matroids

下面介绍定向拟阵理论中的一些基本概念和定义。我们假设读者了解定向拟阵理论的一些知识和标准记号；如需进一步参考，可查阅教科书[2]。底集 E 上的一个符号集或符号向量 X ，是一个集合 $\underline{X} \subseteq E$ ，并附有 $\underline{X}$ 的一个划分(X^+, X^-)，分成两个特定子集： X^+，即 X的正元素集；以及 X^-，即其负元素集。集合$\underline{X} = X^+ \cup X^-$ 是 X 的支撑。我们用 $-X$ 表示符号向量，使得$-X^+ = X^-$ 且 $-X^- = X^+$。一个定向拟阵 $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$由有限底集 E 和 E 上的一族符号集组成，称为回路，并满足以下公理:

- $\emptyset \notin \mathcal{C}$,
- 若 $X \in \mathcal{C}$ ，则 $-X \in \mathcal{C}$,
- 若 X、$Y \in \mathcal{C}$ 且$\underline{X} \subseteq \underline{Y}$，则 $X = \pm Y$,
- 若 X、$Y \in \mathcal{C}$、 $X \neq -Y$ 和 $e \in X^+ \cap Y^-$，则存在 $Z \in \mathcal{C}$，使得 $e \notin \underline{Z}$ 且$Z^+ \subseteq X^+ \cap Y^+$ 且 $Z^- \subseteq X^- \cap Y^-$。

若 $X^- = \emptyset$，我们称 $X \in \mathcal{C}$ 为正回路。我们将 $\mathcal{M}$ 的所有重定向组成的集合称为其重定向类。若 $\mathcal{M}$ 不含正回路，我们称其为无环（否则，称 $\mathcal{M}$ 为有环）。在 $\mathcal{M}$的所有回路中，将 R 中元素的符号改变，即可得到 $R \subseteq E$ 上的 $\mathcal{M}$ 的一个重定向。容易验证，新的带符号回路集合也是某个定向拟阵的回路集合，通常记作 $\mathcal{M}_R$。若 $\mathcal{M}_R$ 无环，则称该重定向为无环。回顾一下，若一个定向拟阵有 n 个元素，且秩为 r ，那么当其回路支撑的集合由 E的所有 $(r+1)$-元素子集构成时，该拟阵是均匀的。给定一个秩为 r 、有 $n = |E|$个元素的均匀定向拟阵 $\mathcal{M}$ ，我们将其对偶记作 $\mathcal{M}^*$；它是另一个秩为$n - r$ 、有 n 个元素的均匀定向拟阵。

Lawrence [9] 给出了用基定向刻画定向拟阵的方法（此处不作具体说明）。设 $r \geq 1$ 为整数， $E = \{1, \ldots, n\}$为集合。映射 $\chi : E^r \to \{-1, 0, 1\}$ （下文简记为 $\{-, 0, +\}$）是一个定义在 E 上的秩为 r 的定向拟阵的基定向，当且仅当 χ 是一个手征符，即一个不恒为零的特殊交错映射。已知， $\chi : E^r \to \{-, +\}$ 是手征符，当且仅当 χ 是定义在 E上的秩为 r 的均匀定向拟阵的基定向。此外，若对于 $\mathcal{M}$ 的任意有序基 $B = (b_1, \ldots, b_r)$ ，其中 $b_1 < \ldots < b_r$，均有 $\chi(B) = +$,

那么，均匀拟阵 $\mathcal{M}$ 已知是定义在 n 个元素上的秩为 r的交错定向拟阵。在这种情况下，每个回路的符号沿着 E的排列交替变化。

给定两个符号向量 X、$Y \in \{+,-,0\}^E$，它们的分离集是集合 $S(X,Y) = \{e \in E \mid X_e \cdot Y_e = -\}$，其中 X_e和 Y_e分别是元素 e在 $\underline{X}$和 $\underline{Y}$中的符号。我们用 $X \perp Y$表示，并称 X和 Y正交，当且仅当集合 $S(X,Y)$ 与 $S(X,-Y)$ 要么都为空，要么都非空。定向拟阵 $\mathcal{M}$ 的极大协向量通常称为顶胞。已知符号向量 $T \in \{+,-\}^E$ 是 $\mathcal{M}$ 的顶胞，当且仅当对于每个回路 $X \in \mathcal{C}$，都有 $T \perp X$（见 [2, 第 1.2 节，第 14] 页）。此外，对于每个回路 $X \in \mathcal{C}$，T是 $\mathcal{M}$ 的顶胞，当且仅当 $S(T,X)$ 和 $S(T,-X)$ 均非空。

2.1. 拓扑表示定理。伪超平面排列的组合性质可以用定向拟阵的语言来研究。Folkman–Lawrence 拓扑表示定理 [7] 指出，定义在 n 个元素上、秩为 r（不含环或平行元素）的定向拟阵的重定向类，与 S^{r-1} 中 n个伪球面排列的同构类一一对应（见 [2,定理 1.4.1]）。伪球面与伪超平面之间存在如下自然对应。回顾一下，$\mathbb{P}^{r-1}$ 是通过将 S^d 中的所有对跖点对识别而得到的拓扑空间。双重覆盖映射$\pi : S^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$，由 $\pi(x) = \{x,-x\}$给出，它建立了 S^{r-1} 的中心对称子集与 $\mathbb{P}^{r-1}$的一般子集之间的对应。因此，S^{r-1} 中的中心对称伪球面对应于 $\mathbb{P}^{r-1}$中的伪超平面。由此，拓扑表示定理也可以用 $\mathbb{P}^{r-1}$中的伪超平面来表述：定义在 n 个元素上、秩为 r（不含环或平行元素）的定向拟阵的重定向类，与 $\mathbb{P}^{r-1}$ 中 n个伪超平面排列的同构类一一对应（见 [2, 第 5 节，习题 5.8]）。

若排列 $H(d,n)$ 中每个 d 个伪超平面的交集都是唯一且彼此不同的点，则称其为简单排列。简单排列对应于均匀定向拟阵。任意排列 $H(d,n)$ 的 d-胞通常称为顶胞，因为它们与其对应重定向类中每个秩为 $r = d+1$、含有 n 个元素的定向拟阵 $\mathcal{M}$ 的顶胞一一对应。已知，$\mathcal{M}$的一个顶胞（即其对应排列中的一个 d-胞）对应于 $\mathcal{M}$ 的一种无环重定向，其内部元素恰好是那些不与该顶胞相邻的伪超平面。此外，若对 T 中任一单个元素进行重定向后，所得符号向量仍是 $\mathcal{M}$的一个顶胞，则 $\mathcal{M}$ 的一个顶胞 T 称为完全胞。$\mathbb{P}^d$ 中由 n 个超平面构成的循环排列等价于秩为 $r = d+1$ 、含有 n 个元素的交错定向拟阵，因此恰有 $2C_{r-1}(n)$ 个完全胞。综上，问题 1.2（因而也包括 Roudneff 猜想）可以表述如下：

> 每个具有 $n \geq r+1$ 个元素的秩为 r 的定向拟阵 $\mathcal{M}$ 至多有 $2C_{r-1}(n)$ 个完全胞。

为便于后续使用，我们总结如下：给定一个秩为 r 的定向拟阵 $\mathcal{M} = (E,\mathcal{C})$，以下三个条件成立。

(a) $\mathcal{M}$ 的一个极区域是一个符号向量 $T \in \{+,-\}^E$，满足对所有回路 $X \in \mathcal{C}$ 都有 $T \perp X$。(b) 若对 T 中任意一个元素进行重新定向后，所得符号向量仍是 $\mathcal{M}$ 的一个极区域，则 $\mathcal{M}$ 的一个极区域 T 是一个完全胞。(c) 如果 $\mathcal{M}$ 中的 $\mathbb{P}^{r-1}$ 个伪超平面的相应排列是简单的，那么 $\mathcal{M}$ 是均匀的。

3. Previous results

我们将使用 Roudneff 提出的以下结果。

命题 3.1 ([13])。 要证明猜想*1.1* 对于维数 d，只需验证它对所有由 $n = 2d + 1$ 个伪超平面构成的简单排列在 $\mathbb{P}^d$中成立。

从上述命题的证明可以看出，即使对于任意一个 H含有 $n \leq 2d$ 个伪超平面的 $\mathbb{P}^d$排列，我们也可以将 H 中的每个超平面稍作扰动，从而得到一个 H' 完全胞数量至少与 H 相同的简单排列（参见 [13]的命题 2.3）。这也表明，对于问题1.2，我们可以只考虑简单排列。

注记 3.2。 若要肯定地回答问题*1.2* （维数为 d ），只需验证 $\mathbb{P}^d$中的伪超平面简单排列即可。

因此，根据条件（c）和注记3.2，只需证明均匀定向拟阵满足问题1.2 即可。以下观察将在本文中发挥作用。

注记 3.3. 在 $n \leq r + 2$ 个元素上的秩为 r 的均匀定向拟阵只有一个重定向类。

证明。秩为 r 、定义在 n 个元素上的均匀定向拟阵 $\mathcal{M}$ 的重定向类数，等于其对偶拟阵 $\mathcal{M}^*$ 的重定向类数。现在，若 $\mathcal{M}$ 的秩为 r 且有 $n \leq r + 2$ 个元素，则 $\mathcal{M}^*$ 的秩至多为 2。因此， $\mathcal{M}^*$ ，从而 $\mathcal{M}$ 只有一个重定向类。□

因此，在至多 $r + 2$ 个元素上的每个无环均匀定向拟阵，都属于交错定向拟阵的重定向类，因此它们的完全胞数量都相同。由注记 3.2 和 3.3，我们可以对问题 1.2 作出肯定回答，适用于 $n \leq r + 2$。特别地，对于 $r = 4$ （维数 $d = 3$），猜想 1.1在 $n \geq 7$ 时成立，因此我们得到以下结果。

推论 3.4. 在 $\mathbb{P}^3$ 中的每个 $n \geq 4$ 伪超平面排列至多有 $C_3(n)$ 个完全胞腔。

4. Main result

给定定义在 $n = |E|$ 个元素上的均匀秩为 r 的定向拟阵 $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$，我们说明如何通过 $\mathcal{M}$ 的带符号基，求出其对应的、在 $\mathbb{P}^d$ 中由 n 伪超平面构成的排列的所有完全胞腔。我们先确定 $\mathcal{M}$ 所有基的符号，然后求出其所有带符号回路。之后，我们得到 $\mathcal{M}$ 的所有顶胞，最后按如下方式求出 $\mathcal{M}$ 的所有完全胞腔：

基 $\rightarrow$ 回路：根据手征符，我们可以得到

$$\chi(B) = -X_{b_i} \cdot X_{b_{i+1}} \cdot \chi(B'),$$

其中，$\underline{X} = \{b_1, ..., b_{r+1}\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个有序回路的支撑，而 $B = \underline{X} - b_i$ 和 $B' = \underline{X} - b_{i+1}$ 是 $\mathcal{M}$ 的两个基（见第 3.5] 节的 [2, ）。因此，给定 $\chi(B)$，对 $\mathcal{M}$ 的任意基 B，我们都能得到带符号回路 X；又因为 $\mathcal{M}$ 是均匀的，我们可以据此求出 $\mathcal{M}$ 的所有带符号回路。

回路 $\rightarrow$ 顶胞： 对于任意符号向量 $T \in \{+, -\}^n$，我们验证条件（a），以确认 T是 $\mathcal{M}$的一个极区域；也就是说，我们检查 $X \in \mathcal{C}$ 的每个回路 $\mathcal{M}$ 是否满足 $S(T, X)$ 和 $S(T, -X)$均非空（参见 [2, 第 1.2 节，第 14]页）。

极区域 $\rightarrow$ 完全胞： 对于任意极区域 T，我们验证条件（b），以确认 T 是 $\mathcal{M}$的一个完全胞。也就是说，我们对 T中的任一单个元素进行重新定向，检查所得符号向量是否为 $\mathcal{M}$ 的极区域，并对 n 的每个 T 条目进行验证。

Finschi 和 Fukuda [5, 6] 枚举了具有 8 个和 9 个元素的均匀秩 5 定向拟阵所有重定向类的带符号基。关于 8 个元素的数据

可在网站上获取 [4], ，而关于 9 个元素的数据以及用于枚举的源代码，可向 Lukas Finschi 索取。我们按照上文所述的步骤，使用计算机程序（可从[1]获取）计算每个无环重定向类的完全胞腔数量。经过约 26 个 CPU 日的计算时间（即并行计算数日），我们得到如下结果。

定理 4.1. 由 8 个元素构成的均匀秩 5 定向拟阵的 135 个重定向类中，每一类至多有 $2C_4$(8)个完全胞腔。此外，交错定向拟阵的重定向类是唯一恰有 $2C_4$(8)个完全胞腔的类。

定理 4.2. 由 9 个元素构成的均匀秩 5 定向拟阵的 9276595 个重定向类中，每一类至多有 $2C_4$(9) 个完全胞腔。此外，交错定向拟阵的重定向类是唯一恰有 $2C_4$(9) 个完全胞腔的类。

现在我们可以证明主要结果：

定理 4.3. 在 $\mathbb{P}^4$ 中， $n \geq 5$ 个伪超平面的每一种排列至多有 $C_4(n)$ 个完全胞腔。

证明。 根据命题 3.2，只需对简单排列证明该定理，也就是说，对均匀定向拟阵证明（见条件（c））。因此，根据注 3.3 和定理 4.1，该结果对 $n = 5$，6，7 和 8 成立。最后，根据命题 3.1 ，只需对 $n = 9$验证即可。因此，由定理 4.2可得该结果成立。 □

最后，我们利用计算机程序验证了，对于 $d = 2$ 和 $n \leq 10$，当 $d = 3$ 和 $n \leq 7$，以及当 $d = 4$ 和 $n \leq 9$时，循环排列是完全胞腔数量达到最大值的唯一例子。基于计算证据，我们以对 Roudneff 猜想及问题 1.2 的以下加强形式作为本文的结尾：

猜想 4.4. 在 $\mathbb{P}^d$ 中， $n \geq d + 1 \geq 3$ 个伪超平面的任意排列至多有 $C_d(n)$ 个完全胞腔。此外，在 $\mathbb{P}^d$ 中所有 n 个伪超平面的排列中，循环排列是唯一一个（在同构意义下）具有 $C_d(n)$ 个完全胞腔的排列。

最后但同样重要的是，正如命题 3.1 的证明所示，只需验证猜想 4.4 对 $\mathbb{P}^d$ 中伪超平面的简单排列成立。然而，我们不知道在不失一般性的前提下，是否也可以将讨论范围限制在 $n \leq 2d + 1$ 。

致谢。L. P. M. 得到了 SGR 拨款 2021 00115 的资助。M. S. 得到了 DFG 拨款 SCHE 2214/1-1 的资助。K. K. 通过 RYC-2017-22701 和 ALCOIN: PID2019-104844GB-I00 拨款，获得西班牙经济、工业与竞争力部的资助。

References

[1] 补充源代码和数据。 https://github.com/manfredscheucher/supplemental-roudneff4。[2] A. Bj¨orner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White 和 G. M. Ziegler。 《定向拟阵》，第 2 版，第 46 卷，收录于 数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，第 2 版，1999 年。.[3] C. Carath´eodory。关于幂级数系数取值范围的研究，这些幂级数不取某些给定值。 《数学年刊》，64:95–115，1907 年。[4] L. Finschi。网页：定向拟阵主页。 https://finschi.com/math/om/?p=catom&filter=nondeg

[5] L. Finschi。定向拟阵的重构与生成：一种图论方法。博士论文，ETH Z¨urich，瑞士，2001年。
[6] L. Finschi 和 K. Fukuda。定向拟阵的生成——一种图论方法。《离散与计算几何》，27(1):117–136，2002年。

[7]J. Folkman 和 J. Lawrence。《有向拟阵》。组合理论杂志 B 辑，25(2):199–236，1978年。[8] D. Forge 和 J. L. Ram´ırez Alfons´ín。循环排列的 k-面胞计数。欧洲组合学杂志，22(3):307–312，2001年。[9] J. Lawrence。定向拟阵与多重有序集。线性代数及其应用，48:1–12，1982年。[10] P. McMullen。凸多胞体面的最大数目。Mathematika，17(2):179–184，1970年。[11] L. P. Montejano 和 J. L. Ram´ırez Alfons´ín。Lawrence 定向拟阵的 Roudneff 猜想。电子组合学杂志，22(2):论文 #P2.3，共 4 页，2015年。[12] J. L. Ram´ırez Alfons´ín。空间中的循环排列与 Roudneff 猜想。信息处理快报，71(5):179–182，1999年。[13]J.-P. Roudneff。超平面排列中具有许多面的胞。离散数学，98(3):185–191，1991年。[14] R. W. Shannon。超平面排列中的单纯胞腔。Geometriae Dedicata，8(2):179–187，1980年。

Universitat Rovira i Virgili, Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Av. Països Catalans 26, 43007 Tarragona, Spain.电子邮箱：rangel.hernandez@urv.cat

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, SpainLIS, Aix-Marseille Université, CNRS, and Université de Toulon, Marseille, France电子邮箱：kolja.knauer@ub.edu

Serra Húnter Fellow, Universitat Rovira i Virgili, Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Av. Països Catalans 26, 43007 Tarragona, Spain.电子邮箱：luispedro.montejano@urv.cat

Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Germany电子邮箱地址：lastname@math.tu-berlin.de