arXiv:2303.14229v1 [math.CO] 24 Mar 2023

随机几何图中嵌入平衡生成树的尖锐阈值

ALBERTO ESPUNY DÍAZ、LYUBEN LICHEV、DIETER MITSCHE 和 ALEXANDRA WESOLEK

摘要。有根树若满足顶点的度仅取决于该顶点到根的距离，则称为平衡树。本文确定了随机几何图 G(n, r, d) 中一大类平衡生成树出现的尖锐阈值。特别地，我们找到了平衡二叉树的尖锐阈值。更一般地，我们证明，对于所有度一致有界且高度趋于无穷的平衡树序列，当参数超过某个尖锐阈值时，这些树都会出现；而低于同一阈值时，其中任何一棵都不会出现。我们的结果对满足顶点集分布的一个温和条件的几何图也成立，并且我们给出了一种多项式时间算法来寻找此类树。

1. 引言

随机几何图G（n, r, d）是随机图的经典模型，其定义如下。设d和n为正整数，并设r为正实数。该图的顶点是n从$[0,1]^d$中独立均匀随机抽取的点；若两个顶点之间的欧几里得距离至多为r，则以一条边将它们连接起来。自 Gilbert将随机几何图引入作为电信网络模型以来，这类图从应用和理论角度[1, 10, 23] 都受到了广泛关注 [25, 27]。此外，原始模型已被以多种方式推广；例如，Waxman [29] 引入了一种带有边的额外渗流过程的模型，后来在[7, 19, 26]中又对此进行了研究。本文将聚焦于上述经典模型。

人们对随机几何图抱有浓厚兴趣，一个主要原因是它们可用作无线网络的模型。这类网络由一组节点构成，每个节点都配备了无线收发器，以便与其最近邻（按欧几里得距离衡量）通信。通信能力（由传输范围 r 控制）取决于收发器的发射功率。目标是通过网络传播信息，这通常以多跳方式进行。在许多自组织网络（例如传感器网络）中，能耗是一个重要问题。因此，对网络建模时最重要的问题之一是如何降低功耗（例如参见 [1, 3, 28]）。为此，应尽可能缩小传输范围，同时又要确保范围足够大，使从某个节点发送的信息能够到达网络中的所有其他节点。从这一应用角度来看，生成树尤其值得关注，因为它们是极小连通集。尤其是，当要求这些树具有特定结构时，就会引出这样一个问题：要在图中确保存在此类树，需要多大的传输范围。

众所周知，随机几何图在许多图性质上都呈现出阈值 行为，这意味着模型参数存在一些特殊值，在这些值附近，图在这些性质方面的表现会发生剧烈变化。理解

(Espuny Díaz) 伊尔梅瑙工业大学数学研究所，德国伊尔梅瑙，邮编 98684。(Lichev) 让·莫内大学卡米耶·若尔当研究所，法国圣艾蒂安。(Mitsche) 智利天主教宗座大学 IMC，以及法国圣艾蒂安让·莫内大学卡米耶·若尔当研究所。(Wesolek) 加拿大不列颠哥伦比亚省本拿比西蒙弗雷泽大学数学系电子邮件地址：alberto.espuny-diaz@tu-ilmenau.de, lyuben.lichev@univ-st-etienne.fr, dieter.mitsche@mat.uc.cl, agwesole@sfu.ca。日期：2023年3月28日。开展这项研究并取得上述成果所获资助包括卡尔·蔡司基金会和德国研究联合会 PE 2299/3-1 项目（A. Espuny Díaz）、GrHyDy ANR-20-CE40-0002 项目及 Fondecyt 1220174 项目（D. Mitsche），以及瓦尼尔奖学金计划（A. Wesolek）。

这些阈值是随机图理论的主要研究方向之一。在本研究中，我们证明，对于包含种类广泛的“足够对称”的生成树这一性质，也会出现这种现象。

1.1. 随机几何图中的阈值。 形式上，图性质 （或简称性质）是一个在同构下封闭的标记图集合。如果某个性质在加边（分别为删边）后仍然成立，则称其为单调递增 （分别为单调递减）性质。特别地，在考虑 $G(n, r, d)$ 时，递增（分别为递减）性质在增大（分别为减小）半径后仍然成立。由此得到随机几何图中阈值的定义：函数 $r^* = r^*(n, d)$ 是 $G(n, r, d)$ 中某个单调递增性质 P 的阈值，如果

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathcal{G}(n,r,d) \in \mathcal{P}] = \begin{cases} 0 & \text{if } r = o(r^*), \\ 1 & \text{if } r = \omega(r^*). \end{cases}$$

此外，如果对于每个 $\varepsilon \in (0, 1)$，都有 r^*，则称其为 P 的尖锐阈值。

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathcal{G}(n,r,d) \in \mathcal{P}] = \begin{cases} 0 & \text{if } r \le (1-\varepsilon)r^*, \\ 1 & \text{if } r \ge (1+\varepsilon)r^*. \end{cases}$$

在这一背景下，McColm [20] 证明，所有单调递增性质在$\mathcal{G}(n,r,1)$中都有阈值，并且任何阈值远大于 $\log n/n$ 的此类性质都具有尖锐阈值（本文中，log 均表示自然对数）。Goel、Rai 和 Krish- namachari [13] 给出了$\mathcal{G}(n,r,d)$ 中阈值宽度的一般上界，适用于所有 $d \ge 1$；Bradonjić 和 Perkins 则刻画了具有尖锐阈值的顶点单调性质。虽然 [4, 13, 20] 中的结果证明了（尖锐）阈值的存在，却没有指出这些阈值的具体位置。确定各种重要性质的（尖锐）阈值是该领域的主要问题之一，也一直备受关注。

1.2. 随机几何图中的生成树。 图的一个生成子图 G 是一个子图，其顶点集为 $V(G)$。本文旨在确定随机几何图中不同生成树出现的（尖锐）阈值。

任何生成树能够被包含的必要条件是，图必须连通。$G(n,r,1)$ 的连通性尖锐阈值由 Godehardt 和 Jaworski [12], 确定，他们证明该阈值为 $\log n/n$。在 $G(n,r,2)$ 中，Gupta 和 Kumar [15] 以及 Penrose [24]分别独立证明，连通性的尖锐阈值为~~$\log n/\pi n$~~。随后，Penrose [25,定理 13.2] 证明，对于所有 $d \ge 2$，$G(n,r,d)$ 的连通性尖锐阈值为 $(2^{d-1}\log n/(d\theta_d n))^{1/d}$，其中 θ_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的体积。事实上，他甚至证明，随着 r 增大，通常图恰好会在最后一个孤立顶点消失时变得连通（参见 [25, 定理 13.17]）。这些结果对于理解 $G(n,r,d)$ 的最小生成树的性质至关重要。然而，它们并未提供任何关于特定生成树出现阈值的信息。

寻找固定生成树问题的一个重要特例是包含一条生成路径。一方面，Díaz、Mitsche 和 Pérez-Giménez [9] 证明，$G(n,r,2)$ 包含哈密顿圈（即生成圈）的尖锐阈值为 $\log n/\pi n$，这与连通性的尖锐阈值相同。随后，Balogh、Bollobás、Krivelevich、Müller 和 Walters [2] 以及 Müller、Pérez-Giménez 和 Wormald [22], 将这一结果推广，证明对于所有 $d \ge 2$，$G(n,r,d)$ 中哈密顿性的尖锐阈值与连通性的尖锐阈值一致。事实上，他们证明，一旦所有顶点的度至少为 2，哈密顿圈通常就会出现在 $G(n,r,d)$ 中。另一方面，当 $d = 1$ 时，从左到右扫描这些点很容易看出，只要图是连通的，它就包含一条生成路径。特别地，这些结果表明，对于所有 $d \ge 1$，$G(n,r,d)$ 中包含生成路径的尖锐阈值与连通性的尖锐阈值相同。

寻找不同类型生成树出现的（尖锐）阈值，是一个自然而然会提出的问题。对于“类路径”树，可以直接从哈密顿性的阈值

得到。事实上，根据三角不等式，如果 $G(n,r,d)$ 包含一个哈密顿圈且 $k \in \mathbb{N}$，那么 $G(n,kr,d)$ 就包含该哈密顿圈的 k 次幂。由此立即可知，任何能够嵌入哈密顿圈的 k 次幂中的生成树，都具有与哈密顿性相同的阈值。例如，最大度为常数的生成毛毛虫树就属于这种情况。

人们自然会想知道，所有最大度有界的生成树是否具有相同的阈值。顺便提及，在二项随机图 $G(n,p)$ 模型中，每条 $\binom{n}{2}$ 条可能的边都以概率 p 独立出现，Montgomery [21] 证明了确实如此：所有有界度生成树的阈值都是 $\log n/n$。然而，这在随机几何图中远非事实。事实上，存在一些有界度树 T，其直径关于顶点数呈对数级增长，而这一直径直接导致包含 T 的性质具有高得多的阈值下界 r^*：由于 $G(n,r,d)$ 的生成子图的直径不可能小于 $G(n,r,d)$ 本身的直径，因此，直径为 $O(\log n)$ 的生成树的阈值必须满足 $r^* = \Omega(1/\log n)$。这远高于上文提到的连通性阈值。Goel、Rai 和 Krishnamachari [13] 的结果表明，对于任何这类树，都存在一个尖锐阈值。我们的目标是确定该阈值的取值。

请注意，在所有直径为对数级的树中，二叉树因其在数据结构中的诸多应用而尤为有趣（例如，参见 [6]）。因此，确定在 $G(n,r,d)$ 中嵌入这些树的尖锐阈值，是我们研究中的一个重要特例。

1.3. 主要结果。 如上所述，我们关注的是确定某些树出现的尖锐阈值，这些树的阈值对应较大的径向值。对于图 G，我们用 $|G|$ 表示 G 的顶点集大小。

我们考虑的树 T 具有一个特殊顶点，称为根。我们可以将 T 的顶点看作划分为若干层 $V_0, V_1, \ldots$；其中，V_i 包含所有与根的（图）距离为 i 的顶点。T 的高度是使得 V_h 为空集的最大 $h \in \mathbb{N}$。对于任意顶点 $v \in V(T)$，若 $v \in V_j$，则称其在 V_{j+1} 中的邻居为其子节点；所有能够从 v 出发且不经过 V_{j-1} 、沿路径到达的顶点则称为其后代。给定正整数 s，若一棵树的所有顶点至多有 s 个子节点，则称其为 s 叉树。若一棵高度为 h 的 s 叉树中，$V_0, V_1, \ldots, V_{h-1}$ 中的所有顶点都有 s 个子节点，则称其为完全平衡树。为简便起见，我们将完全平衡的 s 叉树简称为平衡 s 叉树（第 4.3 节除外）。注意，高度为 h 的平衡 s 叉树必须有 $n = \sum_{i=0}^{h} s^i$ 个顶点，且直径为 $2h$。

与随机图领域的惯例一样，我们关注渐近结论。我们用树的高度 h 来表述渐近结果，由此也可得到关于顶点数的渐近结果。我们的第一个结果确定了对于任意固定整数 $s \geq 2$，以及形如 $\sum_{i=0}^{h} s^i$ 的 n，图 $G(n, r, d)$ 包含一棵生成的平衡 s 叉树副本的尖锐阈值。

定理 1。 固定正整数 $s \geq 2$ 和 d。设 h 为正整数，并令 $n := \sum_{i=0}^{h} s^i$。设 T_h 为高度为 h 的平衡 s 叉树（且有 n 个顶点）。那么，$r^* := \sqrt{d}/2h$ 是图 $\mathcal{G}(n,r,d)$ 包含 T_h 的副本的尖锐阈值。

事实上，定理 1 是一类更广泛树上的类似结果的特例。给定正整数 h 和 $(s_i)_{i=1}^{h}$，若树 T 的高度为 h，且对于每个 $i \in \{1, \ldots, h\}$，V_{i-1} 中的每个 T 顶点都恰有 s_i 个子节点，则称 T 为序列 $(s_i)_{i=1}^{h}$ 上的平衡树。特别地，这样一棵树 T 恰好包含 $\sum_{i=0}^{h} \prod_{j=1}^{i} s_j$ 个顶点（约定空乘积等于 1）。此外，若 $M \geq 2$ 是整数，且对于每个 $i \in \{1, \ldots, h\}$ 都有 $s_i \in \{2, \ldots, M\}$，则称序列 $(s_i)_{i=1}^{h}$ 上的平衡树为平衡 M 叉树。

我们的下一个结果将定理 1 推广到所有平衡的 M-树，只要 M 与 h 相比不太大。

定理 2. 固定一个正整数 d，并设 $2 \leq M = M(h) = o(h/\log h)$。令 $(T_h)_{h \geq 1}$ 为一列树，其中 T_h 是高度为 h 的平衡 M-树。那么，$r^* := \sqrt{d}/2h$ 是 $\mathcal{G}(|T_h|, r, d)$ 包含 T_h 的尖锐阈值。

定理 2 由一个更一般的技术性结果（定理 7）推出，该结果将在第 3节陈述并证明。

1.4. 证明概要。 为证明阈值的上界，我们给出一种高效算法，在任意足够小（但固定）的 $\varepsilon > 0$满足条件时，将高度为 h 的平衡 M-树 T嵌入到 $G(|T|, r, d)$ 中，其中 $r \geq (1+\varepsilon)r^*$。该嵌入分两步完成。证明的第一部分分析一种算法，该算法以分形式的方式将 T 的前约 $(1-\varepsilon)h$ 层嵌入到 $G(|T|, r, d)$ 中（其本身可视为嵌入于 $[0,1]^d$ 的随机嵌入）。嵌入的第二部分依赖于霍尔定理的一个版本（其高效的算法实现早已众所周知）。下界的证明则容易得多，它直接源自前文提及的比较：任意连通图与其任一生成子图的直径之间的比较。

2. 辅助结果

我们回顾著名切尔诺夫界的一个变体（例如，参见 [18, 推论 2.3]）。

引理 3. 设 X 为一个二项随机变量，且 $\mu := \mathbb{E}[X]$。那么，对所有 $0 < \delta < 1$，我们有

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\delta^2\mu/3}.$$

接下来，我们陈述著名霍尔定理的一个版本 [16]（另见 [8, 第 2 章。1]），并推导出证明定理7所需的一个推论。

定理 4 （霍尔 [16]）。一个二分图，其两个部分为 A 和 B，当且仅当对每个集合 $S \subseteq A$，S 在 B 中的邻居数至少为 $|S|$时，才包含大小为 $|A|$ 的匹配。

我们将二分图 $K_{1,k}$ 的一个副本称为 k-星，中心为 v，其中 v 构成仅含一个顶点的部分。如果我们只说明中心 v 位于某个集合 A中，则称该图为 k-星，中心位于 A中。

推论 5. 固定一个正整数 k 和一个二分图 G，其两部分为 A 和 B，且满足 $k|A| = |B|$。那么，当且仅当对每个集合 $S \subseteq A$，S 在 B 中的邻居数至少为 $k|S|$ 时，G 的顶点可以划分为 $|A|$ 个两两顶点不相交、中心位于 A 的 k-星。

证明。由第一个命题推出第二个命题是显然的。因此，我们着重证明反向蕴含。令 $A_1, \dots, A_k$ 为集合 A 的 k 个副本。对于每个 $u \in A$ 以及每个 $i \in \{1, \dots, k\}$，令 u_i 为 u 在 A_i 中的副本。我们定义一个辅助二分图 Γ，其两部分为 $A := \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ 和 B；其中，对于每个 $i \in \{1, \dots, k\}$、$u \in A$ 和 $v \in B$，当且仅当 $uv \in E(G)$ 时，有 $u_i v \in E(\Gamma)$。

现在，对于任意集合 $S \subseteq A$，令 $\alpha(S) \subseteq A$ 表示满足以下条件的所有顶点 $u \in A$ 组成的集合：对于某个 $j \in \{1, \dots, k\}$，有 $u_j \in S$。那么，对于每个 $S \subseteq A$，S 在 Γ 中的邻域与 $\alpha(S)$ 在 G中的邻域相同。这意味着，S在 Γ 中的邻域至少包含 $k|\alpha(S)| \geq |S|$ 个顶点。因此，根据霍尔定理可知，Γ中存在完美匹配。最后，识别集合 $A_1, \dots, A_k$ 可知，原图可以划分为以A中的顶点为中心的 $|A|$ k-星，如所需。□

注释 6。 如果满足霍尔定理的条件，就存在高效算法，可在二分图中寻找匹配。用于迭代构造此类匹配的一种经典多项式时间算法基于增广路径；例如参见 [8, 第 2 节。1]。Hopcroft–Karp 算法 [17] 通过一次处理多条增广路径，改进了经典算法。后来，Chwa 和 Kim [5], 以及 Goldberg、Plotkin 和 Vaidya [14] 提出了速度更快的并行算法。因此，在推论5的假设下，寻找一族以 $|A|$ 中的顶点为中心的互不相交的星 A 也可以在多项式时间内完成。

3. 随机几何图中的平衡树

在本节中，我们陈述并证明一个更一般的定理，由此可以推出定理 1 和 2。该结果以如下定义的随机几何图序列来表述。令r 为一个正实数，令 d 为一个正整数。给定点集$\mathcal{X} \subseteq [0,1]^d$，则

几何图 $G(\mathrm{X},\ r,\ d)$ 是顶点集为 X、边集为 $\{xy\colon\ x,\ y\in\mathrm{X},\ x\neq y,\ \mathrm{k}x-y\mathrm{k}\ \leq r\}$ 的图，其中 k·k 表示欧几里得范数。令 $(X_i)_{i\geq 1}$ 为一列定义在 $[0,1]^d$ 上的独立均匀随机变量。半径为 r 的随机几何图序列是一列 b图 G $(r,\ d)\ =(G_n)_{n\geq 1}$，其中 $G_n=G(\{X_1,\ \ldots,\ X_n\},\ r,\ d)$。特别注意，$G_n$服从 G $(n,\ r,\ d)$，但序列中的不同图并非相互独立。

给定一个概率空间 $(\Omega,\ \mathrm{F},\ \mathrm{P})$ 和对所有 $h\geq 1$ 都属于 F 的事件 $E_h\in$，若 $(E_h)_{h\geq 1}$ 渐近几乎必然成立，或简称 *a.a.s.*，则 $\mathrm{P}(E_h)\ \to 1$ 当 $h\to\infty$。对于满足 $c>0$ 的实数 $a,\ b,\ c$，我们用 $a=b\pm c$ 表示 $a\in[b-c,b+c]$。

现在可以将我们的主要结果表述如下 s:

定理 7。固定一个正整数 d 和一个实数 $\varepsilon\in(0,1)$。对于每个正整数 h，令$2\leq M=M(h)\ =o(h/\log\ h)$，置 $r^*=r^*(h):=\sqrt{d}/2h$，并定义两个事件 E_h 和 F_h 如下。b 考虑随机几何图序列 $G(r,d)\ =(G_n)_{n\geq 1}$。令 E_h 表示每棵高度为 h 的平衡 M-树 T 都是 $G_{|T|}$ 的子图这一事件。令 F_h 表示对于每棵高度为 h 的平衡 M-树 T，图 $G_{|T|}$ 都不包含 T 作为子图这一事件。那么，以下两个陈述成立。

(i) 若 $r\leq(1-\varepsilon)r^*$，则 $\mathcal{F}_h$ 几乎必然成立。

(ii) 若 $r\geq(1+\varepsilon)r^*$，则 $\mathcal{E}_h$ 几乎必然成立。

注意，定理 7 比确定单个平衡T-树的尖锐阈值更强：事实上，我们的事件 $\mathcal{E}_h$ 和 $\mathcal{F}_h$ 同时考虑了所有高度为 M 的平衡 h -树。

本节余下部分将证明定理 7。命题 (i) 的证明相当简单，大部分工作将用于证明 (ii)。为此，我们将给出一种算法：在对点的分布作出一个温和假设的条件下，该算法能在多项式时间内，在 M- 树 T 中找到任意给定的高度为 h 的 $G_{|T|}$ 的副本。稍后我们将证明，几乎必然地，随机几何图序列中出现的所有足够大的图都满足这一点分布性质。在介绍嵌入算法（见下文定理 8 ）之前，我们先引入一些记号和定义。

固定 $d\in\mathrm{N}$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$。给定 $h\in\mathrm{N}$，令 r^* 如定理 7 中所定义。下文中，我们将高度为 h 的平衡 M- 树简称为 M- 树。全文所考虑的所有立方体 $q\subseteq\mathrm{R}^d$ 均为闭的且轴平行（也就是说，它们都可以通过对 $[0,1]^d$ 进行某个位似变换得到）。对于集合 $A\subseteq\mathrm{R}^d$，我们用 ∂A 表示 A 的拓扑边界。给定由 R^d 的子集组成的集合 W，我们将 $\partial\mathrm{W}\ :=\mathrm{Ð}_{A\in W}\partial A$ 记作 $\partial\mathrm{W}\ :=\mathrm{Ð}_{A\in W}\partial A$。对于任意 $x\in\mathrm{R}^d$ 和 $r>0$，我们用 $B_x(r)$ 表示半径为 r、中心为 x 的闭球，也就是所有满足 $\mathrm{k}x-y\mathrm{k}\ \leq r$ 的 $y\in\mathrm{R}^d$ 所组成的集合。

嵌入算法将基于 $[0,1]^d$ 的某种镶嵌。令 $r:=(1+\varepsilon)r^*$。给定整数 $M\geq 2$ 和 $s\in\{2、\ldots\ldots、M\}$，令 k_s 为同时满足以下条件的最小整数:

$$\sqrt{d}s^{1-k_s}\ \leq r \tag{3.1}$$

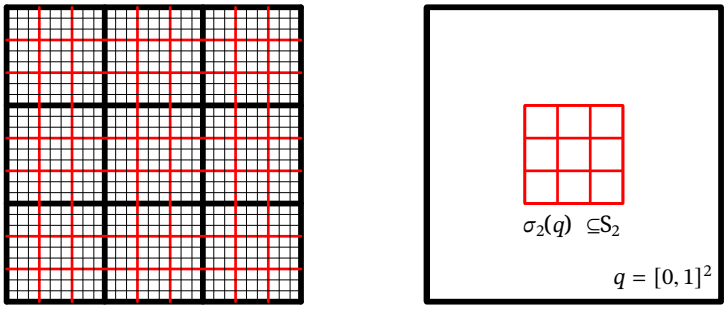
and

$$\sqrt{d}s^{-k_s}<\frac{\varepsilon r^*}{8}. \tag{3.2}$$

注意，$k_s=\Theta(\log\ h/\log\ s)\ =O(\log h)$，且序列 $(k_s)_{s=2}^M$ 是非递增的。接着，令 W$_s$ 为将 $[0,1]^d$ 镶嵌成 $s^{k_s d}$ 个全等的闭轴平行立方体所得的镶嵌。我们指出，(3.1) 保证对于每个点 $x\in\mathrm{R}^d$，任何包含 x 且边长为 s^{1-k_s} 的立方体本身都包含于 $B_x(r)$。此外，施加条件 (3.2) 是为了确保我们能用 W$_s$中的立方体很好地近似半径为 r^*的球：更精确地说，对于以某个点 x为中心、半径为 $(1+3\varepsilon/4)r^*$ 的球，与 $(1+3\varepsilon/4)r^*$ 相交的 W$_s$中的立方体均完全包含于 $B_x(r)\setminus B_x((1+\varepsilon/2)r^*)$; 见图 2。现在假设 M 和 h 满足 $m':=dk_2M\leq h$。考虑一个序列 $(s_i)_{i=1}^h$，其中对每个 $i\in\{1,\ldots,h\}$，都有 $s_i\in\{2,\ldots,M\}$，以及该序列上的平衡树 T。根据鸽巢原理，整数 $\{2,\ldots,M\}$ 中必有一个在 $(s_i)_{i=1}^{m'}$ 中至少出现 dk_2 次。令 $s(T)$ 表示这样一个整数。

我们的树嵌入算法被编入了以下定理（的证明）中:

定理 8。对于每个正整数 h，令 $2\leq M=M(h)\ =o(h/$对数 $h)$。对于每个正整数 d 和 $\varepsilon\in(0,\ 1)$，存在某个 $h_0\in\mathrm{N}$，使得以下结论对所有 $h\geq h_0$ 均成立:



(a) (b)

图 1。图 (a) 展示了将 $[0,1]^2$ 划分为 $3^{2\cdot 3}$ 子立方体的镶嵌。图 (b) 展示了将 σ_2 应用于 $q = [0,1]^2$的示例。

令 $r^* := \sqrt{d}/2h$。令 $(s_i)_{i=1}^h$ 为一个序列，其中 $s_i \in \{2, \dots, M\}$，令 T 为序列 $(s_i)_{i=1}^h$ 上的平衡树，并令 $s := s(T)$。令 $X \subseteq [0,1]^d \setminus \partial W_s$ 为一个包含 $|T|$ 个点的集合，使得每个 $q \in W_s$ 都包含 $s^{-k_s d}|T| \pm |T|^{2/3}$ 个点。那么，$G(X, (1+\varepsilon)r^*, d)$ 包含 T 的一个副本。

注 9。边界条件 $X \subseteq [0,1]^d \setminus \partial W_s$ 是一项次要的技术性限制，显然许多点过程（如泊松点过程）都满足该条件；该条件仅仅是证明中的技术性产物。

定理 8的证明。首先，我们注意到，通过调整 h_0的取值，陈述中的参数 s 定义良好。事实上，由于 $k_2 = O(\log h)$ 以及 $M = o(h/\log h)$，可知 $m' = o(h)$，特别是 $s_{m'}$ 对所有充分大的 h都有定义。具体而言，我们假设 h_0 充分大，使得对所有 $h \geq h_0$，都有

$$m' \leq \varepsilon h/20. \tag{3.3}$$

此外，令 $k := k_s$，我们还选取足够大的 h_0，使得以下结论对所有 $h \geq h_0$ 均成立：

$$k \leq \varepsilon h/12, \tag{3.4}$$

$$2^{-\varepsilon h/5} \leq s^{-kd}/2, \tag{3.5}$$

$$|T|^{2/3} < s^{-2kd}|T|/2. \tag{3.6}$$

令 $r := (1+\varepsilon)r^*$，并考虑定理 8 陈述之前所描述的镶嵌 W_s。对于每个 $\ell \in \{0, \dots, k\}$，令 S_ℓ 为 $[0,1]^d$ 的镶嵌，它由 $s^{\ell d}$ 个全等的闭轴平行立方体组成，这些立方体是将 W_s 中的立方体按每组 $s^{(k-\ell)d}$ 个组合而成的。特别地，$S_0 = \{[0,1]^d\}$ 且 $S_k = W_s$。对于一个立方体 $q \subseteq [0,1]^d$，我们用 $c(q)$ 表示其中心。此外，对于每个 i、$j \in \{0, \dots, k\}$，满足 $i < j$，以及任意立方体 $q \in S_i$，令 $\sigma_j(q)$ 表示 S_j 中构成一个边长为 s^{1-j}、中心为 $c(q)$ 的轴平行立方体的 s^d 个子立方体的集合，这些子立方体属于 q。特别地，$\sigma_{i+1}(q)$ 是 q 的一个镶嵌，由 S_{i+1} 中的 s^d 个子立方体组成；对于每个 $j \in \{i+2, \dots, k\}$，集合 $\sigma_j(q)$ 是由 $\sigma_{j-1}(q)$ 以 $c(q)$ 为中心、比率为 $1/s$ 进行位似变换得到的。例如，图 1(a) 展示了当 $s = 3$ 且 $d = 2$ 时的 S_1、S_2 和 S_3；图 1(b) 则描绘了当 $q = [0,1]^2$ 时的立方体集合 $\sigma_2(q)$。注意，我们有时会滥用记号，将 $\sigma_j(q)$ 与其几何实现等同起来；特别是，我们将 $\text{Đ}_{p \in \sigma_j(q)}$ p 与 $\sigma_j(q)$ 本身等同起来。

令 $G := G(X, r, d)$。下面我们对所提出的、用于在 G 中寻找 T 的一个副本的算法作一般性描述。令 v_0 为 T 的根，并考虑将 T 的顶点划分为若干层$V_0, V_1, \dots, V_h$。我们从根开始，逐层将 T 嵌入 G。我们的算法主要分为三个部分，称为子程序。第一个子程序持续 $m'+1$ 步。它将 T 的各层 $V_0, \dots, V_{m'-1}$ 嵌入任意一个立方体 $q_0 \in \sigma_k([0,1]^d)$，随后 $V_{m'}$ 中的所有顶点会均匀分布在 $\sigma_k([0,1]^d)$ 中的 s^d 个立方体内。第二个子程序用于尽可能均匀地将接下来的大约 $(1-\varepsilon)h$ 层中的顶点分布在 $[0,1]^d$ 中；更确切地说，对于某个 $m \leq (1-\varepsilon/4)h$（见下文的命题1），我们能够确保每个立方体 $q \in S_k$ 中都恰好包含相同数量的 $V_{m'+m}$ 顶点。达到这一状态后，在第三个子程序中，我们利用推论 5 将剩余的层嵌入 G。具体而言，我们为 G 中尚未被 T 覆盖的每个顶点关联一个顶点 $v \in V_{m'+m}$，使得 v 和

与 v 关联的顶点构成一个团，且该团的大小对于每个 $v \in V_{m'+m}$ 都相同。注意，这足以保证嵌入可以扩展。

全文中，我们将 T 的某一层的嵌入称为算法的一步（为简单起见，假设 V_0 在第 0 步嵌入）。对于每个 $i \in \{0,\ldots, m'+m\}$，在第 i 步结束时，我们将 G 中嵌入了第 V_i 层某个顶点的顶点称为活跃顶点。此外，我们将 G 中未嵌入 T 中任何顶点的顶点称为未访问顶点。为简化记法，一旦 T 中的一个顶点嵌入到 G 中，我们通常交替使用同一记号指代这两个顶点。这里注意到，由于 $m \le (1-\varepsilon/4)h$，前两个子程序中嵌入的顶点总数为

$$\sum_{i=0}^{m'+m}\prod_{j=1}^{i} s_j \le 2^{-(h-m-m')}|T| \le 2^{-\varepsilon h/5}|T| \le \frac{|T|}{2s^{kd}}. \tag{3.7}$$

（这里，第一个不等式由以下事实得出：$s_i \ge 2$ 对所有 $i \in \{1,\ldots,h\}$；第二个不等式结合下文命题 m 给出的上界和（1）3.3）得出，第三个不等式则由（3.5）得出。）因此，根据（3.6）以及陈述中的点分布条件，在前两个子程序期间，我们始终有足够多的顶点可用于每个 $q \in \mathcal{S}_k$，这保证了我们接下来所做的选择确实都能够实现。

在第一个子程序中，我们将 T 的各层嵌入 S_k 中的立方体时，所采用的方法非常简单。我们任意选定一个立方体 $q_0 \in \sigma_k([0,1]^d)$。然后，对于每个 $i \in \{0,\ldots, m'-1\}$，我们将 V_i 的所有顶点任意嵌入 q_0。最后，将 $V_{m'}$ 的顶点（任意地）划分为 s^d 个大小相同的集合，并将每个集合完整地嵌入到不同的立方体 $q \in \sigma_k([0,1]^d)$ 中。注意，这是可行的，因为根据 s 的定义，s^d 整除 $\hat{\mathbb{I}}_{i=1}^{m'} s_i$；并且根据 (3.1)，$\sigma_k([0,1]^d)$ 的直径至多为 r。

现在我们来描述第二个子程序中将 T 的各层嵌入 S_k 中的立方体所使用的算法。第二个子程序的 m 个步骤分为 $k-1$ 个不同的块。对于每个 $\ell \in \{1, \ldots\ldots, k-1\}$，我们按如下方式迭代进行：假设在第 ℓ 个块开始时，算法已达到这样一种配置：每个立方体 $q \in \mathsf{S}_{\ell-1}$ 都包含数量相同的活跃顶点，并且这些顶点在 $\sigma_k(q)$ 的所有子立方体中均匀分布（注意，在 $\ell = 1$ 的情况下可以验证这一点）。然后，对于每个 $q \in \mathsf{S}_{\ell-1}$，我们将当前活跃顶点的后代进行分配，使其按与 $\sigma_k(q)$ 的距离非递减的顺序嵌入，具体如下文所述。

迭代： 定义 φ_ℓ：$\sigma_k(q) \to \sigma_\ell(q)$ 为通过以 $c(q)$ 为中心、比率为 $s^{k-\ell}$ 的位似变换得到的双射。注意，φ_ℓ 取决于立方体 q，而在我们的论证中该立方体是固定的。对于每个立方体 $p \in \sigma_k(q)$，我们关联一个由 S_k 中立方体组成的序列（这些立方体不一定互不相同）$(p_1,\ldots, p_t)$，其中 t 经过适当选取且不依赖于 p，并满足

(P1) $p_1 = p$；(P2) $p_t \in \sigma_k(\varphi_\ell(p))$，且 (P3) 对所有 $i \in \{1,\ldots, t-1\}$，
均有 $\mathrm{k}c(p_{i+1}) - c(p_i)\,\mathrm{k} \le (1+7\varepsilon/8)\, r^*$。

注意，(P3) 结合三角不等式以及（3.2）可得，对于任意 $i \in \{1,\ldots, t-1\}$ 以及任意选取的点 $x \in p_i$ 和 $y \in p_{i+1}$，都有

$$\|x-y\| \le \|x-c(p_i)\| + \|c(p_i)-c(p_{i+1})\| + \|c(p_{i+1})-y\| \le \frac{\varepsilon}{16}r^* + \left(1+\frac{7\varepsilon}{8}\right)r^* + \frac{\varepsilon}{16}r^* = r. \tag{3.8}$$

因此，如果某个位置上有一个位于 p_i 中的活跃顶点 v，就可以将它的所有子节点嵌入 p_{i+1} 中。下面证明上述立方体序列确实可以构造出来。我们将展示从立方体 $p \in \sigma_k(q)$ 开始时的构造方法：它的中心到 $c(q)$ 的距离，在 $\sigma_k(q)$ 中的所有立方体中最大（注意，在这种情况下，p 必须包含较大立方体 $\sigma_k(q)$ 的一个角）。注意，这样选取 p 也使 $c(p)$ 与 $c(\varphi_\ell(p))$ 之间的距离最大。对于其他所有 $p' \in \sigma_k(q)$，构造方法相同，只是相邻立方体之间的距离更小（有时甚至重合）。

如上所述，固定 $p \in \sigma_k(q)$。我们构造立方体序列 $(p_1,\ldots, p_t)$，使其位于 $\mathcal{S}_k$ 中，并满足所需性质 (P1)–(P3)。我们首先令 $p_1 := p$。对于每个 $i \ge 1$，当 $\|c(p_i)-c(\varphi_\ell(p))\| >$

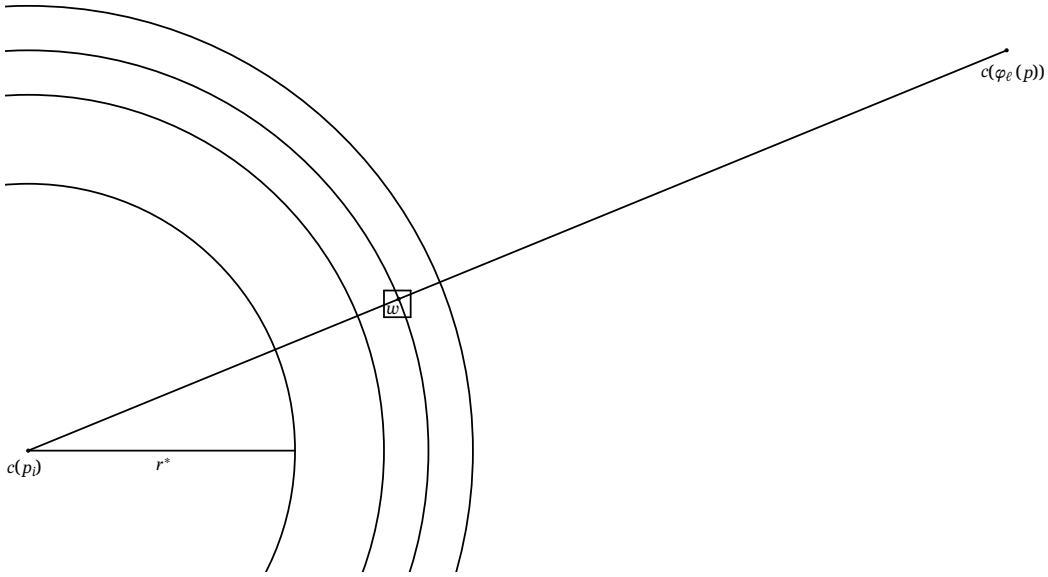


图 2. 从 p_i 到 p_{i+1} 的二维单步转移。图中的四个圆都以 $c(p_i)$ 为中心，半径分别为 r^*、$(1+\varepsilon/2)r^*$、$(1+3\varepsilon/4)r^*$ 和 r。请注意， p_{i+1} 是包含 w 的正方形；为使图示清晰，未显示该正方形的中心及其边界 p_i 。

$(1+7\varepsilon/8)r^*$，我们选择一个立方体 $p_{i+1} \in \mathrm{S}_k$ ，使得

$$\|c(p_{i+1}) - c(\varphi_\ell(p))\| \le \|c(p_i) - c(\varphi_\ell(p))\| - \left(1+\frac{5\varepsilon}{8}\right) r^* \tag{3.9}$$

and

$$\|c(p_{i+1}) - c(p_i)\| \le \left(1+\frac{7\varepsilon}{8}\right) r^*. \tag{3.10}$$

最后，当我们到达满足 $\mathrm{k}c(p_i) - c(\varphi_\ell(p))\,\mathrm{k} \le (1+7\varepsilon/8)r^*$ 的点时，我们令 $t := i+1$，并选择 p_t 作为 $\sigma_k(\varphi_\ell(p))$ 中与 $c(p_i)$ 距离最近的立方体；若有多个，则任意打破平局。请注意，对于 $i = t-1$ 和此处对 p_t 的选择，(3.8) 均成立。剩下要证明的是，确实可以按照 (3.9) 和 (3.10) 的规定进行选择。

假设我们已经定义了 p_i，使其满足 $\mathrm{k}c(p_i) - c(\varphi_\ell(p))\,\mathrm{k} > (1+7\varepsilon/8)r^*$。接着，选取 $p_{i+1} \in \mathrm{S}_k$ ，使其为一个立方体，包含线段 $c(p_i)c(\varphi_\ell(p))$ 上的点 w ，且该点到 $c(p_i)$ 的距离恰好为 $(1+3\varepsilon/4)r^*$（如果存在多个这样的立方体，则任意选取一个）；见图 2。于是，由三角不等式和 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}
\|c(p_{i+1}) - c(\varphi_\ell(p))\| &\le \|w - c(\varphi_\ell(p))\| + \|c(p_{i+1}) - w\| \\
&= \|c(p_i) - c(\varphi_\ell(p))\| - \|c(p_i) - w\| + \|c(p_{i+1}) - w\| \\
&\le \|c(p_i) - c(\varphi_\ell(p))\| - \left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right) r^* + \frac{\varepsilon}{16} r^* \\
&\le \|c(p_i) - c(\varphi_\ell(p))\| - \left(1+\frac{5\varepsilon}{8}\right) r^*
\end{aligned}$$

and

$$\|c(p_i) - c(p_{i+1})\| \le \|c(p_i) - w\| + \|w - c(p_{i+1})\| \le \left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right) r^* + \frac{\varepsilon}{16} r^* \le \left(1+\frac{7\varepsilon}{8}\right) r^*,$$

因此，(3.9) 和 (3.10) 得证。

现在，一旦序列 $(p_1、\ldots\ldots、 p_t)$ 构造完成，我们就可以描述算法每一步中树的顶点分布。回顾一下，在第 ℓ 个块开始时， p_1

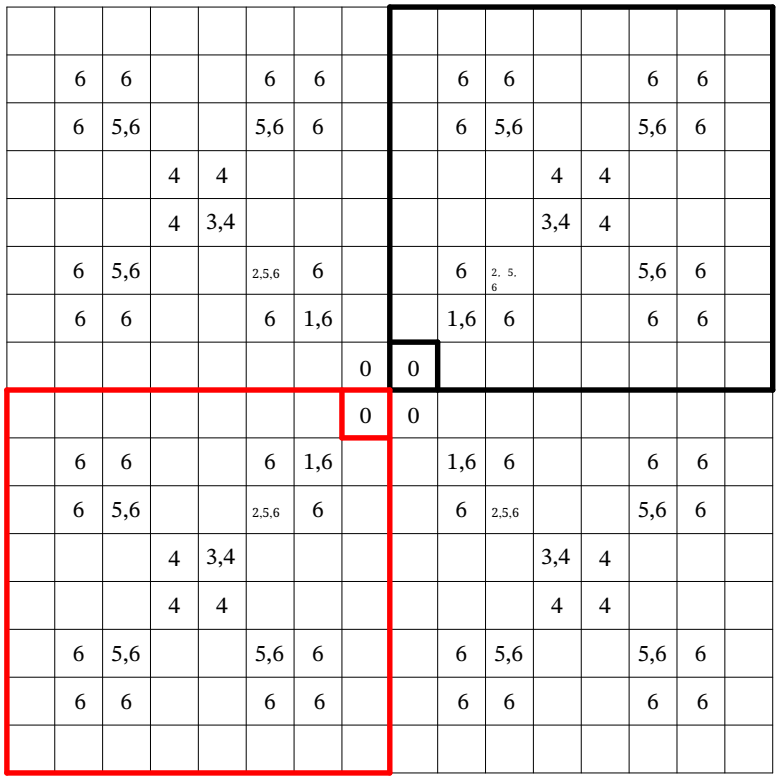


图3. 我们用来在二维中分布 T for $(s,\ k)\ =(2,\ 4)$ 的原理示意图。图中展示了范围 $\{m',\ \ldots,\ m'+6\}$ 内的各个步骤（注意，出于空间原因，步骤 $m'+i$ 之后包含活跃顶点的正方形只显示索引 i ）。请注意，对于 $\ell\ =\ 1$，带有加粗黑色边界的大正方形是带有加粗黑色边界的小正方形 p 经 φ_1 映射得到的像，红色正方形也同样如此。此外， $c([0,1]^2)$、 $c(p)$ 和 $c(\varphi_1(p))$ 共线，并且 $\mathrm{k}c(p)\ -c(\varphi_1(p))\ \mathrm{k}\ \leq \mathrm{k}c([0,1]^2)\ -c(\varphi_1(p))\ \mathrm{k}=\sqrt{2}(1-s^{-1})/2$。

包含一些活跃顶点。接下来的 $t-1$ 步中，我们只需将 p_i 中所有当前活跃顶点的子节点任意嵌入 p_{i+1} 中（这得益于 (3.7) 和 (3.8)，因此是可行的）。最后，在算法的又一步中，我们将 p_t 中所有当前活跃顶点的子节点，均匀分配到 σ_k 的 s^d 个子立方体中（$\varphi_\ell(p)$）；注意，这是可行的，因为 s^{kd} 整除 $\hat{\mathrm{I}}_{i=1}^{m'} s_i$（根据 s 的定义，且由于 $k\leq k_2$），而后者又整除每个层 V_i（ $i\geq m'$）中的顶点数。图3 示意展示了这一过程的前几步。最后，如果 $\ell=k-1$，我们就终止该子程序；否则，将 ℓ 的值加 1，并继续执行第二个子程序的下一个块。

按照算法的描述，我们必须证明它能在适当数量的步骤内达到所需的配置。我们首先证明所描述过程的步数上界，而不考虑它实际上是否能够执行。

命题1。 第二个子程序运行的步数至多为$(1-\varepsilon/4)h$步。

证明。 对于每个 $\ell\in\{1,\ldots,k-1\}$，我们有

$$\|c(p)-c(\varphi_\ell(p))\|\leq\|c(q)-c(\varphi_\ell(p))\|\leq\frac{\sqrt{d}(s^{1-\ell}-s^{-\ell})}{2},\tag{3.11}$$

其中，第一个不等式成立是因为 $c(p)$ 属于线段 $c(q)c(\varphi_\ell(p))$（回忆一下， $\varphi_\ell(p)$ 是由 p 经以 $c(q)$ 为中心、比率为 $s^{k-\ell}>1$ 的位似变换得到的），第二个不等式则是因为在 $\sigma_\ell(q)$ 中，距离 $c(q)$ 最远的立方体是那些包含 q 的一个角的立方体。

因此，由（3.9），第二个子程序执行的步骤总数至多为

$$\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(\frac{\sqrt{d}(s^{1-\ell}-s^{-\ell})/2}{(1+5\varepsilon/8)r^*}+1\right)\le k+\frac{\sqrt{d}/2}{(1+5\varepsilon/8)r^*}\le k+\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)h\le\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)h,$$

其中，在第二个不等式中我们用到了 $\varepsilon<1$，而在最后一个不等式中，我们应用了（3.4）。 ◀

现在，回想一下， $m'+m$ 表示第二个子程序执行的最后一步的索引。正如在详细说明算法之前所提到的，（3.6）、（3.7）以及陈述中的点分布条件保证了该过程必定成功。也就是说，我们将 $V_0,\dots,V_{m'+m}$ 的各层嵌入到 T中， G 此外，每个 $q\in\mathcal{S}_k$ 都包含 $V_{m'+m}$的相同顶点数。

接下来，我们确保其余各层也可以嵌入到 G 中。对于每个立方体 $q\in\mathrm{S}_k$，将 q 与以 $c(q)$ 为中心、比率为 3 的位似变换所得的 q 的像相交，得到 q 的扩张副本，记作 $\hat{}q$（也就是说，$\hat{}q$ 是 S_k 中所有至少有一个角与 q 相邻的立方体的并集）。我们证明，可以嵌入树的所有剩余层，使其满足以下性质：对于在第二个子程序结束时处于活动状态的每个顶点 $v\in V(G)$，如果 v 位于立方体 $q\in\mathrm{S}_k$ 中，那么 v 的所有后代都位于 $\hat{}q$ 中。注意，根据 $\hat{}q$ 的定义和（3.2），对于每个 $q\in\mathrm{S}_k$，我们有

$$\operatorname{diam}(\hat{q})\le 3\sqrt{d}s^{-k}\le\varepsilon r^*\le r,$$

因此，S_k 中每个立方体的扩展副本内的顶点在 G中构成一个团。因此，只需证明所有未访问顶点都可以划分为 $|V_{m'+m}|$ 个大小相同的集合，使得所得的每个集合都包含在单个$\hat{}q$ 中，并且可以分配给 $V_{m'+m}$中的一个顶点。

我们通过考虑一个辅助二分图 Γ 来实现上述目标，其顶点划分为 $(\mathrm{S}_k,\widehat{V})$，$\mathrm{b}\,\mathrm{b}$，其中 V 是步骤 $m'+m$结束时的未访问顶点集合。每当 $v\in\hat{}q$时，我们就在 $q\in\mathrm{S}_k$ 与 $v\in V$ 之间连一条边。注意， $|\mathrm{b}V|=\prod_{i=m'+m+1}^{h}\prod_{j=1}^{i}s_j$，因此特别地， $|\mathrm{S}_k|=s^{kd}$整除 $|\mathrm{b}V|$。对于正整数 a，回顾第 2 节中以 v为中心或以集合 V中的元素为中心的 a-星的定义。

断言 2. 令 $a:=|\hat{}V|/|\mathcal{S}_k|$。那么， Γ的顶点可以划分为 s^{kd}个顶点不相交的 a-星，且其中心位于 $\mathcal{S}_k$中。

证明。 令 $n:=|T|$ 并注意，对于每个非空立方体集合 $S\subseteq\mathcal{S}_k$，若 $S\neq\mathcal{S}_k$，则集合$\mathcal{A}_S:=\bigcup_{q\in S}\hat{}q$ 至少包含一个属于 $\mathcal{S}_k\setminus S$的立方体。因此，根据陈述中的点分布性质、(3.6) 和 (3.7)，可得

$$|\mathcal{A}_S\cap\widehat{V}|\ge(|S|+1)(s^{-kd}n-n^{2/3})-|V(G)\setminus\widehat{V}|\ge|S|s^{-kd}n+s^{-kd}n-s^{kd}n^{2/3}-s^{-kd}n/2\ge a|S|.$$

因此，推论5 意味着 Γ 包含所需的不相交 a-星族。 ◀

由断言2可直接推出，可以将 $\hat{}V$ 中的顶点划分为 s^{kd} 个互不相交的集合，每个集合在 G 中张成一个团，并且包含于不同的扩大的立方体中。现在，可以将这些集合中的每一个任意划分为 $|V_{m'+m}|/s^{kd}$ 个大小相等的子集，并将每个较小的集合分配给一个不同的顶点 v，该顶点位于 $V_{m'+m}$中。于是，对于每个 $v\in V_{m'+m}$，都可以将 v 的后代贪心地嵌入与之对应的完全图中，从而完成将 T 嵌入 G 的过程。 □

注 10. 通过重新梳理定理的证明 8，并考虑注 6，可以很容易地验证，我们的方法能在多项式时间内找到相应几何图中一个 M-树的副本。

至此，我们可以完成定理 7的证明。

定理 7 的证明。假设 $r\le(1-\varepsilon)r^*$。首先，固定一棵高度为 $h=O(\log|T|)$ 的树 T（这对每棵 M-树都成立）。设 $G=\mathrm{G}(|T|,r,d)$。为证明 $\mathrm{P}[T\subseteq G]=o(1)$，我们首先断言，几乎必然存在两个顶点 $u,v\in V(G)$，它们之间的欧几里得距离为 $(1-o(1))\sqrt{d}$。注意，

由于图序列 $(G_n)_{n\ge 1}$ 关于包含关系递增，只需对包含一棵高度为 h 的 M-树的最小图证明上述结论，即 $G_{2^{h+1}-1}$。

为此，考虑边长为 $1/h$、分别包含角 $\{0\}^d$ 和 $\{1\}^d$的立方体 $c_0, c_1 \subseteq [0,1]^d$。于是，我们有 $\operatorname{dist}(c_0,c_1) = (1-o(1))\sqrt{d}$；此外，$|c_0 \cap V(G_{2^{h+1}-1})|$和 $|c_1 \cap V(G_{2^{h+1}-1})|$均服从参数为 $2^{h+1}-1$和 $1/h^d$ 的二项分布。因此， c_0 或 c_1 不包含任何顶点的概率至多为

$$2(1-1/h^d)^{2^{h+1}-1} \le 2\mathrm{e}^{-2^h/h^d}.$$

现在，假设事件 c_0 和 c_1 各自至少包含一个顶点，并设 G存在一棵以 T为生成树的树。由于 T的直径为 $2h$， u 和 v 在 G中的距离至多为 $2h$。因此，根据三角不等式，它们之间的欧几里得距离至多为 $2hr$，所以必有 $2hr \ge \operatorname{dist}(c_0,c_1) = (1-o(1))\sqrt{d}$，这与我们对 r的选择矛盾。因此，以至少 $1-2\mathrm{e}^{-2^h/h^d}$的概率，不存在高度为 h、满足 $T \subseteq \mathrm{G}(|T|,r,d)$ 的 M-树 T。至此，(i) 的证明完成。

接下来，假设 $r \ge (1+\varepsilon)r^*$。利用 $T \subseteq G$ 是一个递增性质，只需证明 $r = (1+\varepsilon)r^*$成立即可。事实上，只需验证：对于随机几何图序列中所有充分大的图，定理 8 的陈述条件几乎必然成立。下一个断言表明，定理 8 中的点分布性质几乎必然成立。

断言3。 几乎必然地，对于每个 $s \in \{2,\dots,M\}$、每个立方体 $q \in \mathcal{W}_s$ 以及每个 $n \ge 2^h, q$，都包含 $s^{-k_s d}n \pm n^{2/3}$ 个图 $\mathrm{G}(n,r,d)$ 的顶点。

证明。 固定 s和 n 如上所述，并考虑一个固定的立方体 $q \in \mathcal{W}_s$。令 X 表示 $\mathcal{G}(n,r,d)$ 中位于 q内的顶点数。那么， X是一个参数为 n和 $p = s^{-k_s d}$的二项随机变量。因此， $\mathbb{E}[X] = s^{-k_s d}n$ 根据引理 3，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \ne s^{-k_s d}n \pm n^{2/3}] &= \mathbb{P}\left[|X-\mathbb{E}[X]| > \frac{n^{2/3}}{s^{-k_s d}n}s^{-k_s d}n\right] \\ &\le 2\exp\left(-\left(\frac{n^{2/3}}{s^{-k_s d}n}\right)^2 \frac{s^{-k_s d}n}{3}\right) \le 2\exp\left(-\frac{n^{1/3}}{3}\right).\end{aligned}$$

对 $M-1 = o(h)$ 个可能的 s 值、W_s 中的 $s^{k_s d} = O(r^{-2})$ 个 $= O(h^{2d})$ 立方体以及所有 $n \ge 2^h$ 取并集界，可知该引理中的事件以至少.....的概率成立

$$1 - O\left(\sum_{n=2^h}^{\infty} 2h^{2d+1}\exp\left(-\frac{n^{1/3}}{3}\right)\right) = 1-o(1),$$

如所需。 ◀

由于随机几何图序列中任何图的顶点都以概率 1 不会落在任何立方体 $q \in \mathcal{W}_s$的边界上，定理 7 的证明至此完成。 □

4. 推广与总结

4.1. 其他度量空间。 首先需要指出，我们的所有结果都可以推广到满足 $1 \le p \le \infty$ 的其他ℓ_p 范数。事实上，只需将定义中的欧几里得距离替换为 ℓ_p 范数下的距离，即可将随机几何图的概念适用于每一种范数。然后，重新梳理主定理的证明可知，尖锐阈值变为 $d^{1/p}/2h$。

4.2. 阈值宽度。 如引言中所述，Goel、Rai 和 Krishnamachari [13] 给出了 $\mathrm{G}(n,r,d)$ 中任意单调递增性质的阈值宽度上界。下面陈述他们的结果。对于任意正整数 n、实数 $x \in [0,1]$ 和递增性质 P，令

$$r_{\mathcal{P}}(n,x) := \inf\{r \ge 0 : \mathbb{P}[\mathcal{G}(n,r,d) \in \mathcal{P}] \ge x\}.$$

对于每个 $\varepsilon \in (0,1/2)$，将性质 P 的 ε-阈值宽度 定义为 $\delta_{\mathcal{P}}(n,\varepsilon) := r_{\mathcal{P}}(n,1-\varepsilon) - r_{\mathcal{P}}(n,\varepsilon)$。Goel、Rai 和 Krishnamachari [13] 证明，对于任意单调递增性质 P，当 $d=1$时，我们有 $\delta_{\mathcal{P}}(n,\varepsilon) = O(\log \varepsilon^{-1}/n)$（事实上，这个界也是紧的）；当 $d=2$时，我们有 $\delta_{\mathcal{P}}(n,\varepsilon) =$

$O(\log^{3/4} n/\sqrt{n})$，而当 $d \geq 3$ 时，我们有 $\delta_{\mathcal{P}}(n,\varepsilon) = O(\log^{1/d} n/n^{1/d})$。（一些文献，例如 Goel、Rai 和 Krishnamachari 的论文 [13],，将事实 $\delta_{\mathcal{P}}(n,\varepsilon) = o(1)$ 称作性质 $\mathcal{P}$ 具有尖锐阈值。不过，我们注意到，这与我们全文所讨论的尖锐阈值概念不同。）

根据我们的方法，可以推导出包含完全平衡 s 叉树这一性质的阈值宽度，但它与 Goel、Rai 和 Krishnamachari [13] 给出的上界相去甚远。事实上，重新检查我们的证明，只能得出该宽度为 $O(\log\log h/(h\log h))$。由于 Goel、Rai 和 Krishnamachari 给出的界更紧，我们自然会想知道阈值窗口的精确宽度。以下问题探讨了这一问题：

问题 11. 确定使 $\mathcal{G}(n,r,d)$ 包含一棵生成的平衡 s 叉树这一性质的阈值宽度。

4.3. **所有阶的平衡 s 叉树。** 在引言中，我们将一棵（完全）平衡s叉树定义为具有 $V_0,\dots,V_h$ 层的树，其中层 $V_0,\dots,V_{h-1}$ 中的所有顶点都恰有s 个子节点。此定义的一个缺点是，这类树仅对某些阶有定义：事实上，任何此类树都必须有 $\sum_{i=0}^{h} s^i$ 个顶点。我们可以考虑如下更一般的定义，使其适用于所有可能的阶。给定任意正整数 n 和 s，令 $h = h(n)$ 为满足下式的唯一正整数

$$\sum_{i=0}^{h-1} s^i < n \leq \sum_{i=0}^{h} s^i. \tag{4.1}$$

A 预平衡 s元树 在 n 个顶点上是一棵具有以下各层的树：V_0，……，V_h 使得各层 V_0，……，V_{h-2} 中的所有顶点都恰有 s 个子节点，而第 V_{h-1} 层的每个顶点至多有 s 个子节点。注意，当上界不满足等式（4.1）时，可能存在多个不同构的预平衡 s元树。

人们可能会认为，我们的结果可以推广到这种更一般的预平衡树定义。然而，这并非显而易见。直观地说，原因在于预平衡 s元树可能相当“不平衡”，具体而言：对于任意 s元树，我们将一个顶点的权重 定义为它拥有的后代数量。于是，在完全平衡 s元树中，同一层的所有顶点权重都相同。然而，在预平衡 s元树中，同一层顶点的权重可能相差 s倍。（事实上，考虑这样一棵预平衡 s元树：取 s棵高度分别为 $h-1$ 和 $h-2$的完全平衡 s元树，其中 $s-1$ 棵高度为 $h-1$，另有一棵高度为 $h-2$，并将它们各自的根作为一个新根的子节点。）

我们的证明可以直接推广到高度为 h 的预平衡 s 叉树，其中，对于某个整数 $m'' = m''(h) = h - o(h)$，$V_{m''}$ 中所有顶点的权重都相同。另一方面，考虑一棵预平衡 s 叉树，其中同一层的顶点权重可以相差任意大，但对某个整数 $\mathrm{b}m = \mathrm{b}m(h) = o(h)$ 满足以下性质：对于每个顶点 $v \in V_{\widehat{m}}$，若考虑由 v 及其所有后代诱导的树，则该子树同一层中的所有顶点权重都相同（这种情形包含了上文提到的、添加一个公共根后的完全平衡树这一例子）。在这种情况下，我们可以将第 V_0、……、$V_{\widehat{m}}$ 层中的所有顶点贪心嵌入到 $\sigma_k([0,1]^d)$ 中的一个正方形内，然后同时对以第 $V_{\widehat{m}}$ 层顶点为根的 $|V_{\widehat{m}}|$ 棵树分别应用该算法。不过，如果不满足上述条件（例如，前 εh 层的所有顶点权重都相同，但之后的权重差异变得很大），则尚不清楚如何推广我们的证明。

尽管如此，我们仍然认为这些阈值应该相同，甚至所有高度为 h、具有 n 个顶点的预平衡 s 叉树都应该几乎同时出现。因此，我们提出以下普适性猜想：

猜想 12. 固定正整数 $s \geq 2$ 和 $d \geq 1$。对于一个正整数 n，令 h 为满足下式的唯一整数 (4.1)。那么，$r^* := \sqrt{d}/2h$ 是这样一个事件的尖锐阈值：$\mathcal{G}(n,r,d)$ 包含每一棵具有 s 叉、高度为 h 且有 n 个顶点的预平衡树。

我们注意到，本节中的讨论也可以扩展到序列 $(s_i)_{i\geq 1}$ 上的平衡树，其定义的扩展方式与 s 叉树的扩展方式类似。

4.4. **有界度树**。 如引言中所述，一类特别值得关注的树是有界度树。这一类包含了本文所讨论的一些树。例如，设 T_h^s 为序列 上的高度为 h $(s_i)_{i=1}^h$ 的平衡树，其中$s_1 = s$且 $s_i = s-1$ 对所有 $i \in \{2,\dots,h\}$。以下结论可由定理 2直接推出。

推论 13。 设 d 和 $s \geq 3$ 为固定整数。设 h 为一个整数， n 为 T_h^s 的顶点数。 T_h^s 作为子图出现在 $\mathcal{G}(n,r,d)$ 中的尖锐阈值为

$$\frac{\sqrt{d}}{2h} \sim \frac{\sqrt{d}\log(s-1)}{2\log n}.$$

我们猜想，对于每个固定的 s，在所有度不超过 s 的树中，树 T_h^s 最难嵌入，也就是说它的阈值最高。因此，我们提出以下普适性猜想：

猜想 14。 固定正整数 d 和 $s \geq 3$。对于任意 $\varepsilon > 0$，若

$$r \geq (1+\varepsilon)\frac{\sqrt{d}\log(s-1)}{2\log n},$$

则几乎必然地，$\mathcal{G}(n,r,d)$ 包含最大度不超过 s 的所有 生成树。

不过，正如引言中所讨论的，我们知道存在一些有界度树，其阈值远低于本文讨论的阈值。了解树的哪些性质可以用来确定其阈值，将会很有意思。我们注意到，尽管直径在本文中一直是一个很好的估计量，但一般而言它并不是正确的参数。事实上，考虑一棵有 $2n$ 个顶点的树，构造如下：取一棵有 n 个顶点的平衡二叉树，并在其根上接上一条有 n 个顶点的路径。所得树的直径与顶点数呈线性关系，但不难看出，其出现阈值为 $\Omega(1/\log n)$。作为研究确定每一类有界度树阈值这一一般问题的第一步，我们提出以下问题：

问题 15. 给定任意一棵树 T，令直径(T) 表示 T 的直径。给出一般性的充分条件，以保证对于一列$(T_i)_{i\geq 1}$ 树，它们在$\mathcal{G}(n,r,d)$ 中出现的尖锐阈值为 $\sqrt{d}/$直径(T_i)。

参考文献

[1] I. F. Akyildiz、W. Su、Y. Sankarasubramaniam 和 E. Cayirci，《无线传感器网络：综述》。Comput. Netw. 38.4（2002），393—422，doi：10.1016/S1389-1286(01)00302-4。[2] J. Balogh、Bollobás、M. Krivelevich、T. Müller 和 M. Walters，《随机几何图中的哈密顿圈》。Ann. Appl. Probab. 21（2011），1053–1072，doi：10.1214/10-AAP718。[3] A. Bharathidasan 和 V. A. S. Ponduru，《传感器网络：概述》。技术报告，加州大学戴维斯分校计算机科学系（2002）。[4] M. Bradonjić 和 W. Perkins，《随机几何图中的尖锐阈值》。近似、随机化与组合优化：算法与技术。第17届组合优化近似算法国际研讨会（APPROX 2014）暨第18届随机化与计算国际研讨会（RANDOM 2014）论文集，加泰罗尼亚理工大学，西班牙巴塞罗那，2014年9月4–6日，500–514，Wadern：Schloss Dagstuhl – Leibniz Zentrum für Informatik，ISBN 978-3-939897-74-3（2014），doi：10.4230/LIPIcs.APPROX-RANDOM.2014.500。[5] K.-Y. Chwa 和 T. Kim，一种用于二分图最大匹配的 O（$n\log\ n\log\log n$）并行算法。Inf. Process. Lett. 24.1（1987），15–17，doi：10.1016/0020-0190(87)90193-1。[6] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein，《算法导论》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，第4版（2022），ISBN 978-0-262-04630-5。[7] C. P. Dettmann 和 O. Georgiou，《具有一般连接函数的随机几何图》。Phys. Rev. E 93.3（2016），论文编号032 313，doi：10.1103/PhysRevE.93.032313。[8] R. Diestel，《图论》。施普林格出版公司，第5版（2017），ISBN 3662536218。[9] J. Díaz、D. Mitsche 和 X. Pérez，《随机几何图哈密顿性的尖锐阈值》。SIAM J. Discrete Math. 21（2007），57–65，doi：10.1137/060665300。[10]D. Funke、S. Lamm、U. Meyer、M. Penschuck、P. Sanders、C. Schulz、D. Strash 和 M. von Looz，《无通信的大规模分布式图生成》。并行与分布式计算杂志 131（2019），200–217，doi：10.1016/j.jpdc.2019.03.011。[11] E. N. Gilbert，《随机平面网络》。J. Soc. Ind. Appl. Math. 9（1961），533–543，doi：10.1137/0109045。

[12] E. Godehardt 和 J. Jaworski，《随机区间图的连通性》。Random Struct. Algorithms 9.1-2（1996），137–161，doi：10.1002/(SICI)1098-2418(199608/09)9:1/2<137::AID-RSA9>3.0.CO;2-Y。[13] A. Goel、S. Rai 和 B. Krishnamachari，《随机几何图的单调性质具有尖锐阈值》。Ann. Appl. Probab. 15.4（2005），2535–2552，doi：10.1214/105051605000000575。[14] A. V. Goldberg、S. A. Plotkin 和 P. M. Vaidya，《用于匹配及相关问题的亚线性时间并行算法》。J. Algorithms 14.2（1993），180–213，doi：10.1006/jagm.1993.1009。[15] P. Gupta 和 P. R. Kumar，《无线网络渐近连通性的临界功率》。W. M. McEneaney、G. G. Yin 和 Q. Zhang（编），《随机分析、控制、优化与应用：纪念 Wendell H. Fleming 七十寿辰论文集》，547–566，Birkhäuser，波士顿，ISBN 0-8176-4078-9（1999），doi：10.1007/978-1-4612-1784-8_33。[16] P. Hall，《关于子集的代表元》。J. Lond. Math. Soc. 10（1935），26–30，doi：10.1112/jlms/s1-10.37.26。[17] J. E. Hopcroft 和 R. M. Karp，一种用于二分图最大匹配的 $n^5/2$ 算法。SIAM J. Comput. 2.4（1973），225–231，doi：10.1137/0202019。[18] S. Janson、T. Łuczak 和 A. Ruciński，《随机图》。Wiley-Interscience 离散数学与优化丛书，Wiley-Interscience，纽约（2000），doi：10.1002/9781118032718。[19] L. Lichev、B. Lodewijks、D. Mitsche 和 B. Schapira，《随机几何图上的伯努利渗流》。arXiv 电子预印本（2022）。arXiv：2205.10923。[20] G. L. McColm，《线段上随机图的阈值函数》。Comb. Probab. Comput. 13.3（2004），373–387，doi：10.1017/S0963548304006121。[21] R. Montgomery，《随机图中的生成树》。Adv. Math. 356（2019），92，doi：10.1016/j.aim.2019.106793。编号106793。[22] T. Müller、X. Pérez-Giménez 和 N. Wormald，《随机几何图中的不相交哈密顿圈》。J. Graph Theory 68（2011），299–322，doi：10.1002/jgt.20560。[23] M. Nekovee，《无线自组网中的蠕虫疫情》。New J. Phys. 9.6（2007），论文编号189，doi：10.1088/1367-2630/9/6/189。[24] M. Penrose，《随机最小生成树的最长边》。Ann. Appl. Probab. 7.2（1997），340–361，doi：10.1214/aoap/1034625335。[25] ———，《随机几何图》，牛津概率研究丛书，第5卷。牛津：牛津大学出版社（2003）。[26]———，《软随机几何图的连通性》。Ann. Appl. Probab. 26.2（2016），986–1028，doi：10.1214/15-AAP1110。[27] ———，《随机几何图讲义》。《随机图、几何与渐近结构》，67–101，剑桥：剑桥大学出版社（2016），doi：10.1017/CBO9781316479988.004。[28] S. N. Simić 和 S. Sastry，《利用随机传感器网络进行分布式环境监测》。F. Zhao 和 L. Guibas（编），《传感器网络中的信息处理》，计算机科学讲义，第2634卷，Springer，柏林、海德堡（2003），582–592，doi：10.1007/3-540-36978-3_39。[29] B. M. Waxman，《多点连接的路由》。IEEE J. Sel. Areas Commun. 6.9（1988），1617–1622，doi：10.1109/49.12889。