arXiv:2303.14231v1 [math.CT] 24 Mar 2023

卡尔加里大学

Dagger线性逻辑与范畴量子力学

by

Priyaa Varshinee Srinivasan

提交研究生院的论文，作为满足哲学博士学位部分要求的一部分

计算机科学研究生项目

阿尔伯塔省卡尔加里，
2021年9月

© PriyaaVarshinee Srinivasan 2021年

摘要

本论文发展了非紧乘法线性逻辑的范畴证明论，并研究了其在范畴量子力学（范畴量子力学）中的应用。

现有的范畴量子力学（CQM）框架是紧致 †-线性逻辑的范畴证明论，其动机源于在有限维希尔伯特空间范畴中对量子系统的诠释。本文介绍了一种称为混合酉范畴的新型非紧致框架，它能够容纳无限维系统，并为该框架构建模型。为此，本文以线性分配范畴以及 ∗-自主范畴为基础；后者是（非紧致）乘法线性逻辑的范畴证明论。非紧致 †-线性逻辑的证明论，是在 LDC 的基本设定上加入一个满足适当相干条件的匕首函子，从而得到一个 †-LDC。

从每个（isomix） †-LDC 中，都可以提取出一个典范的“酉核心”，它在等价意义下就是传统的 †-幺半范畴范畴量子力学框架。由此形成了混合酉范畴（MUC）框架：每个 MUC 都包含一个（紧致的）酉核心，并由一个（非紧致的）isomix †-LDC 扩展。本论文构建了若干基于有限性空间、Chu 空间、Hopf 模等的 MUC 模型。本论文还将范畴量子力学的关键代数结构（例如可观测量、测量和互补性）推广到 MUC 框架。此外，借助 MUC 框架，本论文建立了量子力学中的互补可观测量与线性逻辑中的指数模态之间的联系。

致谢

我感谢我的导师 Robin Cockett 博士对我的信任；尽管我不是数学家，加入他的研究小组时对范畴论也一无所知，他仍然信任我。对于他始终如一的支持和耐心，帮助我精进学习之道，以及与之相对的教学之道，我永远心怀感激。我也感谢他为我营造了包容、安全且舒适的环境，让我能够学习数学并开展研究。谢谢你，Robin，感谢我们一起推导的所有证明，也感谢那些一起喝茶和徒步的时光。

感谢我的朋友 Jonathan，他投入了无数时间教我范畴论，并在我攻读博士学位初期帮助我撰写证明。没有他的帮助，这段旅程将不可能实现。谢谢你，Jonathan！

感谢我的共同导师 Gilad Gour 博士在我攻读学位期间始终给予我的耐心与善意支撑。感谢 Kristine Bauer 博士在 Cockett 博士学术休假期间担任我的临时导师，并感谢我们在每周研讨会和专题研讨会期间分享的所有愉快对话。感谢 Renate Scheidler 博士在我参加 SAGES 教学认证教学实习期间给予我的卓越指导。感谢 Jalal Kawash 博士，我担任他的助教期间得到了他的悉心指导。感谢 Barry Sanders 博士在我攻读学位的前三年为我提供的经济支助。感谢 Bob Coecke 博士、Jamie Vicary 博士和 Chris Heunen 博士在 Mitacs Globallink 实习期间接待我，使我得以访问牛津大学和爱丁堡大学。衷心感谢我的考官 Peter Selinger 博士、Philipp Woelfel 博士、Carlo Maria Scandolo 博士和 Kristine Bauer 博士，感谢他们花费时间和精力阅读我的论文并提供反馈。

感谢我的朋友兼同事 Jean Simon Lemay（JS）在这篇论文中提供了许多例子，也感谢他让我的牛津研究访问之旅变得十分愉快。谢谢你，JS，访问期间把自行车借给我！感谢 Jonathan、Amolak、JS 和 Ben 为我的论文校对。感谢 Cole，与你合作撰写 CNOT 和 dagger线性逻辑论文的过程既有趣又顺利。衷心感谢过去和现在所有来自 Cockett 博士和 Gour 博士研究群的同事，感谢你们带来的所有启发性讨论和支持。能与大家共事，我深感荣幸。

由衷感谢我的朋友们，让我在卡尔加里有了家的感觉，也感谢你们带给我的

许多美好回忆——星期日下午在咖啡店相聚、夜晚在联邦公园散步、举办饺子聚会、驾车前往奥肯那根旅行、在落基山脉徒步、喝热茶、品尝自制美食、一起吃午餐、除草聚会，还有许多其他点滴。感谢所有身在海外的朋友，无论何时我需要你们，你们总会通过 Skype 或其他方式陪伴着我。

非常感谢计算机科学系前台的 Maryam、Jackie 和 Katie，在我攻读学位期间为我提供了出色的行政支持；每当我带着请求来到她们的办公桌前，她们总会报以温柔的微笑。

最后，但最重要的是，我要感谢我的家人，感谢他们给予我非凡的支持，并在我所有的努力中鼓励我，也感谢他们让我成为家族中第一个获得博士学位的人。

献给我的父母 *Shanthi* 和 *Srinivasan*，以及世间和天堂中的所有一线工作者（新冠肺炎）。

符号、缩写和术语表

符号	定义
$\cup$, $\bigcup$	集合并
$\sqcup$	集合的不交并
$\cap$, $\bigcap$	集合交
$\in$	属于
$[\![x_1, x_2, \cdots, x_n]\!]$	有限多重集
$\emptyset$	空集
$\{*\}$	单元素集合
$\{x \mid \text{关于 } x\}$	的条件，以条件定义集合
$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$	范畴，但 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 除外；它们有时分别表示复数和实数
$A, B, C, \cdots$	范畴中的对象
$A \simeq B$	对象 A 与对象 B 同构
f, g, h	范畴中的映射
F, G	范畴之间的函子
$\otimes$	张量积
$\oplus$	par 积（在线性逻辑中）

符号 定义$\prod$ 积$\coprod$ 余积$a_{\otimes}$ 张量积的结合自然同构 $a_{\oplus}$ par 积的结合自然同构$u^{l}_{\otimes}$ 张量积的左单位自然同构$\top$ 张量积的单位$\bot$ par 积的单位∂^{L} 左线性分配子∂^{R} 右线性分配子m, ∇ 幺半群的乘法u, 幺半群的单位d, Δ 余幺半群的余乘法e, 余幺半群的余单位



†, ‡ 匕首函子 $(-)^{*}$ 对偶函子 $(-)$ 共轭函子 $:=$ 左侧定义为方程右侧 $\Longrightarrow$ 蕴含$\Leftrightarrow$ 当且仅当$\exists$ 存在$\forall$ 对于所有$\mathbb{N}$ 自然数$\mathbb{Z}$ 整数

目录

摘要 **ii**

致谢 **iii**

献词 **v**

目录 **vii** **i**

图表目录 **xii**

题词 **xiii**

1 引言 11.1 从线性逻辑到量子力学.21.1.1 线性逻辑.21.1.2 线性逻辑的范畴语义.31.1.3 范畴量子力学（CQM）.41.1.4 迈向任意维数的 CQM.61.1.5 非紧乘法 †-线性逻辑.71.1.6 线性分配范畴.81.2 论文大纲.101.2.1 第一部分：dagger线性逻辑.111.2.2 第二部分：dagger线性逻辑在范畴量子力学中的应用 131.3 预备知识.141.4 记号.15

我，匕首李　靠近逻辑 16

2 Categ范畴语义学与线性逻辑　gic **17**
2.1 线性分配范畴（LDC）.172.1.1 线性分配范畴.172.1.2 图形演算.222.1.3 Mix、isomix 与紧 LDC.252.1.4 ∗-自反范畴.262.2 线性函子与变换.292.2.1 线性函子与变换.302.2.2 isomix范畴的线性函子.352.2.3 弗罗贝尼乌斯函子.36

2.3 启发性例子.452.3.1 有限性关系 FRel 与有限性矩阵 FMat(R) . . . . . 452.3.2 积 FRel 和 FMat(R) 中的积、余积与双积 . . . . . 512.3.3 张量FRel 和 FMat(R) 中的张量结构.52FRel 的核心 和 FMat(R) 中的核心.56

3 伴随线性分配范畴 58

3.1 线性分配范畴的匕首.583.1.1 伴随线性分配范畴.583.1.2 †-线性逻辑的相继式演算.633.1.3 伴随函子盒.643.1.4 †-线性分配范畴的函子.653.2 例子： †-线性分配范畴.673.2.1 每个 †-幺半范畴都是一个 †-线性分配范畴.673.2.2 有限维框架向量空间.673.2.3 抽象状态空间范畴.693.3 匕首、对偶与共轭.71

3.3.1 对偶.713.3.2 共轭.733.3.3 匕首对合与共轭.76

3.4 示例：匕首与共轭.803.4.1 视为范畴的带共轭群 . . . . . 803.4.2 有限性矩阵与有限性关系.823.4.3 Chu 空间.823.4.4 $*$-自反范畴中的 Hopf 模范畴.85

4 混合酉范畴（MUC） 90

4.1 酉范畴.904.1.1 酉结构.904.1.2 酉范畴.984.1.3 酉构造.1014.2 例子：酉构造.1044.2.1 抽象状态空间范畴.1054.2.2 带对合群的范畴.1054.2.3 $*$-自伴范畴中的 Hopf 模范畴 . . . . . 1064.3 混合酉范畴.1074.3.1 混合酉范畴.1074.3.2 典范混合酉范畴.1094.4 例子：混合酉范畴.1104.4.1 有限维框架向量空间.1104.4.2 有限性矩阵.1124.4.3 有限维希尔伯特空间到 Chu 空间的嵌入 . 112

5 总结 115

II 匕首线性逻辑在范畴量子力学中的应用 116

6 范畴　　量子力学 117

6.1 伴随幺半范畴.117 6.1.1 幺半范畴的图形演算.117 6.1.2 伴随幺半范畴.119 6.2 例子.121 6.2.1 集合与关系范畴 Rel.121 6.2.2 希尔伯特空间和有界线性映射范畴 Hilb . . . . . 122 6.2.3 交换幺半环 R 上的有限矩阵范畴 Mat(R) . . . . . 123 6.3 完全正性 .123 6.3.1 CPM构造.124 6.3.2 CP$^{\infty}$ 构造.125 6.3.3 环境结构.126 6.4 测量与互补性.129 6.4.1 量子可观测量.129 6.4.2 强互补性.133

7 完全正映射 138

7.1 混合幺范畴的弦图演算.1387.1.1 幺结构映射.1387.1.2 mixor的逆.1397.2 MUC的量子信道.1397.2.1 Kraus映射.1397.2.2 CP$^{\infty}$-MUC构造.1437.3 MUC的环境结构.151 7.3.1 环境结构.1517.3.2 刻画CP$^{\infty}$ 构造.154

8 线性幺　　半群、余幺半群和双代数 157

8.1 线性幺半群.1578.1.1 对偶.1578.1.2 线性幺半群.1638.1.3 自同态线性幺半群.1698.1.4 Frobenius 性质.1758.2 线性余幺半群.1798.3 线性双代数.184

9 测量　　余向与互补性 186

9.1 紧化.1869.2 二元幂等元.1909.2.1 线性幺半群.1909.2.2 线性余幺半群.1969.2.3 线性双代数.1989.3 互补线性双代数.1999.4 指数模态.2029.4.1 幺半范畴的指数模态.2039.4.2 †-线性分配范畴的指数模态.204

9.4.3 指数线性 †逻辑的相继式演算.2089.4.4 由自由指数模态导出的互补性.210

10 个例子 **215**

10.1 对偶与线性幺半群.21510.1.1 FRel 和 FMat(R) 中的对偶.21510.1.2 FHilb 中的线性幺半群.21810.2 指数模态.22110.2.1 Rel 中的自由指数模态.22110.2.2 FRel 和 FMat(R) 中的自由指数模态 . . . . . 22210.2.3 Chu 空间中的自由指数模态.22610.3 FRel 和 FMat(R) 中的自由无限线性幺半群.227

11 总结 **233**

12 结论与未来工作 **235**

12.1 结论.23512.2 未来工作.23712.2.1 物理系统模型.23712.2.2 Joyal 的双完备化构造.23812.2.3 线性情形中的克利福德代数.239

参考文献 **241**

图表目录

1.1 †-量子力学的紧闭范畴.41.2 乘法联结词的序列规则.81.3 否定的序列规则.91.4 (a) 二元混合公理 (b) 零元混合公理.102.1 LDC 性质示意图.262.2 线性函子族.372.3 有限性矩阵.50

3.1 † 的序列规则.633.2 序列演算证明：- ι 是同构.633.3 $\oplus$-laxor 的推导.633.4 $\perp$-laxor 的推导.64

4.1 ∂_L 是酉同构.994.2 MUC 的示意图.108

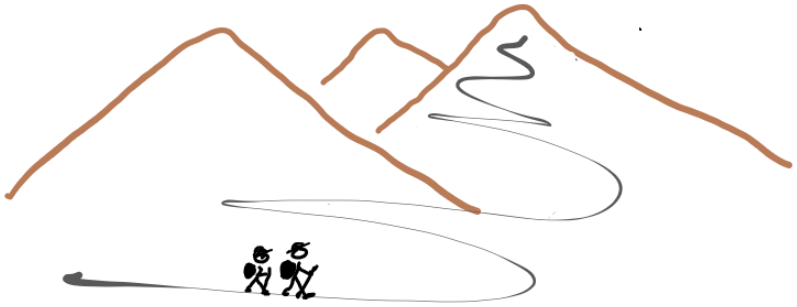
8.1 右对偶的序列规则 †-.1599.1 指数模态的序列规则.2089.2 (!,?) 线性函子的推导.2089.3 †-指数模态的序列规则.208

9 4 $A^{\dagger} \to A^{\dagger}$ 209 .
9 5 $A^{\dagger} \to A^{\dagger}$ 209

同构的推导 s : (?) !( ). 同构的推导 t: (!) ?( ).9.6 序列演算证明：$!A$ 是一个 †- 对偶，当且仅当 A 是一个 †-对偶.209

题词

Every journey begins with a single step



And is almost never a straight line

© 2021 Priyaa Varshinee

第一章

引言

范畴量子力学计划（范畴量子力学） [47, 76]由 Abramsky 和 Coecke 在其开创性论文中提出 [4] ，采用图形演算研究 †-紧闭范畴（†-有限维希尔伯特空间（FHilb）中的量子过程。从逻辑的角度看，图形演算是乘法 †-线性逻辑 [59]的一个紧致片段的证明论。因此，范畴量子力学凭借图形演算，并以严谨的范畴证明论为支撑，为量子力学提供了一种新颖的方法。

紧闭范畴的一个众所周知的局限是，它们能够建模有限维希尔伯特空间，却无法建模无限维空间 [74]。紧闭范畴的一种范畴论推广是 $*$-自反范畴，在这类范畴中可以对无限维空间进行建模。进一步推广可得到线性分配范畴（线性分配范畴），其中不要求对偶对象存在。这些线性情形具有一种证明论（针对非紧乘法线性逻辑），其形式为图形演算。因此，在这些更一般的情形中，无须舍弃范畴量子力学这一引人注目的特点。事实上，线性分配范畴和 $*$-自反范畴的图形演算涵盖了紧闭范畴的图形演算。因此，从范畴论的角度看，为了容纳无限维量子过程，一个颇具吸引力的方向是采用 $*$-自反范畴和线性分配范畴，作为范畴量子力学所用紧闭情形的扩展。这种基础性方法的优势在于，它涵盖了许多早期方法，并能以结构化的方式定位各种不同的方法。

本论文旨在为这一方向的推广奠定基础。为此，本论文的第一部分将发展非紧致的范畴证明论
†-线性逻辑，采用线性分配范畴和 $*$-自主范畴，并证明可以始终从这一新框架中提取出紧致 †-线性逻辑的常规设定，

†-isomix范畴。第一部分还介绍了这一新框架的模型。论文第二部分探讨了 †-isomix范畴在范畴量子力学（CQM）中的适用性，并研究任意维数的量子过程。

1.1 从线性逻辑到量子力学

1.1.1 线性逻辑

线性逻辑由 Girard 于 [68] 提出，是一种关于资源操作的逻辑。与将逻辑陈述视为真值的经典逻辑不同，线性逻辑将逻辑陈述视为不能复制或销毁的资源。例如，考虑以下陈述：p 和 q:

p：花掉一美元q：
买一个苹果

因此，在线性逻辑中，复合陈述“$p \Rightarrow q$”的含义是：如果花掉一美元，就可以买一个苹果。这意味着在某一时刻，一个人只能拥有一美元或一个苹果，而不能两者兼有。“线性”一词指的是该逻辑的这种资源敏感性：因此，线性逻辑中一个陈述的证明可以被视为一系列资源变换。

线性逻辑的类型（公式）可按归纳方式定义如下（“|”读作“或”）：

$$\begin{aligned} A := p \mid A^{\perp} \\ \mid A \otimes A \mid 1 \mid A \parr A \mid \perp \\ \mid A \,\&\, A \mid \top \mid A \oplus A \mid 0 \\ \mid !A \mid ?A \end{aligned}$$

在 A 的归纳定义中，p 是一个原子公式，例如“花费一美元”，而 $p^{\perp}$ 是该公式的否定，在本例中为“收到一美元”。**否定**是一个对合，因此，$(p^{\perp})^{\perp} = p$。

联结词 $\otimes$、1、$\parr$ 和 $\perp$ 称为**乘法联结词**。命题 $A \otimes B$（读作 A张量B）表示资源 A 和 B 可以同时使用。例如，考虑命题 r：一个橙子。那么，$p \Rightarrow q \otimes r$ 表示花一美元可以同时买到一个苹果和一个橙子。公式 1 是乘法真值，因此，
$A \otimes 1 = 1 \otimes A = A$。联结词 $\parr$读作par，它是

乘法析取，与张量互为对偶。这意味着，$(A^{\perp} \otimes B^{\perp})^{\perp} = A \parr B$。同样，1 和 $\top$ 互为对偶（$1^{\perp} = \top$）。

联结词 &、$\top$、$\oplus$ 和 0 称为**加法联结词**。命题 $A \,\&\, B$（读作 A *with* B）表示 A 或 B 在任一时刻可用。例如，命题 $p \Rightarrow q \& r$ 表示，花一美元可以买一个苹果或一个橙子，并且可以自由选择其中一种。在计算机科学中，& 表示非确定性。公式 0 是加法假式：$A \parr 0 = 0 \parr A = A$。加法析取 $\parr$（读作*plus*）与 & 互为对偶。同样，0 与 $\perp$ 互为对偶。

最后，**指数算子**——!（读作当然或感叹号）和 ?（读作为何不或鸣咽）——允许复制和销毁资源。对于任意资源 A，$!A$ 表示一个无限量存储，其中的资源 A 可以被提取零次或多次。此外，存储本身也可以复制，甚至销毁。为何不算子 ? 表示无限需求的概念，并且与 ! 互为对偶，也就是说，$(?A)^{\perp} = !(A^{\perp})$。

感兴趣的读者可参阅 [69, 68]，以了解有关线性逻辑的更多细节。

1.1.2 线性逻辑的范畴语义

线性逻辑是一种资源逻辑，它强调证明的结构，而非可证明性；也就是说，人们更关心一个命题如何得到证明，而不仅仅是它是否可证。相继式演算中的证明往往包含多余的细节，这是由该演算的序列性质造成的。例如，在序列演算证明中，要对一个相继式应用一组规则，即使这些规则彼此独立（也就是说，应用规则的顺序不会影响最终结果），仍必须选择应用这些规则的顺序。

为去除这类无用信息，Girard [68] 引入了证明网来表示线性逻辑的证明，具体来说，是无单位元乘法片段，也就是只有 $\otimes$ 和 $\parr$。证明网被形式化为电路。研究用于判定给定电路是否对应有效证明网的算法，为研究乘法线性逻辑（MLL）的范畴语义铺平了道路。下表概述了 MLL 不同片段的范畴证明理论：

线性逻辑片段	**范畴证明论**
MLL	线性分配范畴 [38]
带否定的乘法线性逻辑	$*$-自主范畴 [14]
紧致乘法线性逻辑 ($\otimes = \parr, 1 = \perp$)	幺半范畴 [84]
带否定的紧致乘法线性逻辑	紧闭范畴 [85]

表 1.1：乘法线性逻辑的范畴语义

上述语义是可靠且完备的，也就是说，某个片段的证明网与其对应范畴论环境中的态射之间存在一一对应关系。证明网为这些范畴论环境提供了图形演算，从而能够以弦图表示来呈现这些范畴中的态射。

基于幺半范畴图形演算的紧致乘法线性逻辑证明论[109] 用于推导出对量子力学的优雅描述 [47, 76] 。

1.1.3 范畴量子力学（范畴量子力学）

传统上，希尔伯特空间 [102] 或更一般的冯·诺伊曼代数 [56] 被用作量子力学 [101] 的数学框架。虽然这些框架支持详细的计算，但无法为问题提供直观理解，因此形成了“闭嘴，计算” [99]这一处理方式。范畴量子力学计划（范畴量子力学计划） [4, 47, 76] 源于这样一种愿望：发展出更直观的框架，以表示量子过程并对其进行推理。

线性逻辑凭借其资源敏感的特性，捕捉了量子力学的本质。特别是，线性逻辑不允许复制任意类型：在量子力学中，这被称为不可克隆定理 [102]，该定理指出，不可能复制任意量子态。受这一联系的启发，范畴量子力学以紧致乘法线性逻辑作为其目的的基础框架，并向这一片段加入了“匕首”概念，从而产生了紧致

†线性逻辑。‘匕首’抽象了‘伴随’这一概念，它对量子力学至关重要：量子系统的可测性质由可分希尔伯特空间上的自伴算子给出，也就是说，该希尔伯特空间具有可数正交归一基。

虽然幺半范畴为紧致乘法线性逻辑提供语义， †-幺半范畴则为紧致 †-线性逻辑提供范畴语义。范畴量子力学采用 †-幺半范畴，具体而言， †-紧闭范畴（参见第6章），通过抽象希尔伯特空间这一标准且传统上使用的分析框架，构建一种用于量子力学的高层次、直观的形式语言，如图1.1所示。

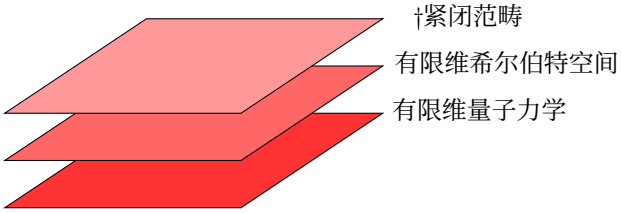
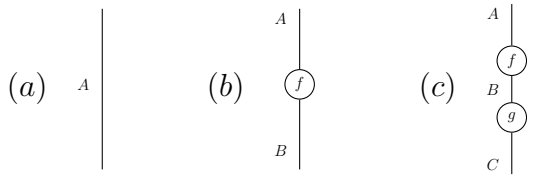
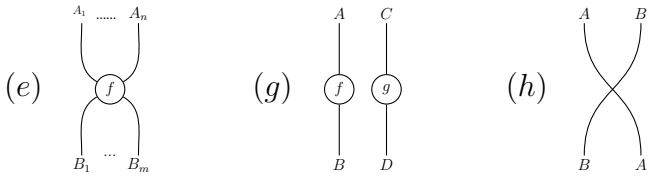


图 1.1：用于量子力学的 †紧闭范畴

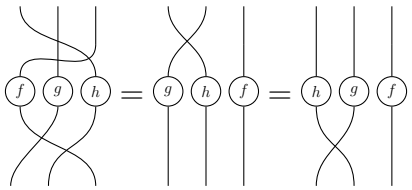
2004年，Abramsky 和 Coecke [4] 在 †-紧闭范畴（†-KCC）的框架内描述了量子力学的基本公理。这意义重大，因为这意味着可以运用基于幺半范畴弦图的证明论来推理量子过程。例如，在范畴量子力学中，物理系统用线表示，过程用圆圈表示。线的标签表示其类型。图（a）表示系统 A，图（b）表示从系统 A 到系统 B的变换。将类型相匹配的线连接起来，即可使过程按顺序复合。请注意，弦图应从上到下（沿重力方向）以及从左到右阅读。



此外，导线和方框可以并行组合，从而形成过程，如图表（e）和（f）所示。此外，导线还可以彼此交叉，如图表（g）所示。



使用弦图推理过程要简单得多，因为人脑擅长处理视觉信息。例如，很容易看出下面的图表表示相同的过程：固定导线的两端并移动圆圈，就可以证明这些图表相等。



在紧闭范畴中，还可以将导线弯成帽和杯，如下所示，从而增强这种语言的表达能力：



大约在 Coecke 和 Abramsky 运用

幺半范畴的图形演算来研究量子力学的同时，Selinger 利用幺半范畴中的结构设计了一种量子编程语言 [112]。2007年，Selinger [110]完善并扩展了 Abramsky 和 Coecke 的框架，使之能够描述混合量子态，并将量子力学的范畴框架命名为“匕首（†）紧闭范畴”。这些 †-紧闭范畴忠实地抽象了有限维希尔伯特空间的结构，从而能够在有限维希尔伯特空间与线性映射构成的范畴 FHilb 中，以图示方式严谨地推理量子过程和协议，FHilb。由所有希尔伯特空间及线性映射构成的范畴Hilb是 †-幺半的，但并非紧闭。

1.1.4 范畴量子力学中的任意维数

范畴量子力学已应用于研究量子基础、量子信息论和量子计算等领域的问题。范畴量子力学技术已用于研究量子基础中的因果性 [87, 43]和非定域性 [51, 45]。在量子信息论中，它被用于构造量子拉丁方等结构 [100]，这类结构对量子信息论中的许多协议至关重要。范畴量子力学最重要的成果或许是在量子计算领域，即 ZX演算 [44] 。这是一种细粒度的图示演算，提供了一组生成元和重写规则，用于设计和优化量子电路。

由于紧闭框架仅适用于有限维希尔伯特空间，迄今为止，范畴量子力学的实际应用仅限于量子计算和量子信息论等领域，而这些领域都源自有限维量子力学。这是因为范畴量子力学的基础框架——紧闭范畴——对希尔伯特空间施加了有限维的限制 [74]。因此，所有希尔伯特空间构成的范畴是 †-幺半群的，而不是 †-紧闭的。范畴量子力学在研究有限维过程方面取得的成功，促使研究者探索将范畴量子力学扩展到无限维过程的策略。

一种方法是找出能够刻画量子力学关键组成部分、同时不对维数施加任何限制的代数结构。例如，在 CQM 中，伴随弗罗贝尼乌斯代数（参见第 6.4.1 节）为有限维希尔伯特空间范畴中的量子可观测量提供了精确的代数刻画[49] （量子可观测量是量子系统的一种可测物理性质）。

为了将这一想法扩展到任意维数的量子可观测量，Abramsky and Heunen 在 [6], 中展示了如何利用 Ambrose 的 H^*-代数 [8] 来刻画无限维希尔伯特空间中的正交归一基，进而刻画量子可观测量。然而，从 †-Frobenius 转向 H^*-代数是有代价的——一个 H^*-代数

被建模为半弗罗贝尼乌斯代数，也就是说，是没有单位元的 Frobenius 代数。

Gogioso 和 Genovese [70] 提出了一种有趣的方法，利用非标准分析中的技术重新引入单位元 [107]。他们考虑了 *Hilb，即非标准可分希尔伯特空间与线性映射的范畴。他们声称这是一个 †-紧闭范畴，其中包括可以对 Abramsky 和 Heunen 的半弗罗贝尼乌斯代数进行建模。此外，由于允许形式上的无限和，因此可以重新引入余单位。

在 [46], Coecke 和 Heunen 的工作中，为了对无限维量子过程进行建模，他们采取了一个简单步骤：放弃范畴是紧闭范畴这一要求，并在匕首对称幺半范畴（†-对称幺半范畴）中开展研究。所有希尔伯特空间组成的范畴 Hilb 是 †-对称幺半范畴的典型例子。在范畴量子力学中，量子过程被建模为有限维希尔伯特空间范畴中的完全正映射。Coecke 和 Heunen 展示了如何为任意

†-对称幺半范畴。这种方法的缺点是，转向 †-对称幺半范畴后，会失去对偶所带来的丰富结构。

在 [77], Heunen 和 Reyes 考虑了另一种 †-对称幺半范畴，即 Hilbert$\mathbb{C}^*$-模范畴。其对象也可以等价地看作局部紧豪斯多夫空间上的希尔伯特空间丛。他们将该范畴中的特殊交换 †-Frobenius代数刻画为有限维希尔伯特空间丛（其维数一致有界）。这些对象虽然远非有限，却仍具有（一致的）局部有限性质。这个例子借助向量丛和微分几何的思想，进入了传统理论物理的领域，也提醒我们， †-Frobenius代数并非只与希尔伯特空间相关。

在 [117], Vicary 尝试使用自由指数模态，在 †-幺半范畴中对量子谐振子进行建模；量子谐振子本质上是一个无限维量子系统。他在 †-对称幺半范畴中提出了一种 †-指数的概念，其
†-双积，并用它推导出抽象 Fock 空间以及 Fock 空间的阶梯算符。他猜想，可数维内积空间与处处有定义的线性映射构成的范畴，是这种范畴论环境的一个模型。

1.1.5 非紧致乘法 †-线性逻辑

尽管人们尝试过各种策略来建模任意维数的系统，但 CQM 社群普遍认为，CQM 所用结构的维数约束仍未得到令人满意的解决。在本文中，我们采取了不同的方法，将关注点从希尔伯特空间及其他模型转移开来，转向非紧致 †-线性逻辑。

我们不再坚持认为无限维结构必须与希尔伯特空间存在具体关联，而是认为或许存在一套形式类型，能够扩展 CQM 现有的紧致逻辑。此类情形的一个例子是将有限维希尔伯特空间范畴（它是 †-紧致的）嵌入复向量空间上的 Chu 空间范畴（†-）$*$-自伴范畴 $\mathsf{Chu}_{\mathsf{Vec}(\mathbb{C})}(I)$ 中，其中 I，即$\mathsf{Vec}(\mathbb{C})$ 的张量单位，是对偶化对象（见第 3.4.3 节）。另一个例子是将有限维复矩阵嵌入复数上的有限性空间与有限性矩阵范畴（†-）$*$-自伴范畴 [64] （见第 3.4.2 节）。

我们首先从线性分配范畴（LDCs）和 $*$-自对偶范畴入手，而不是从幺半范畴入手，以首先为非紧致的 †-线性逻辑获得一种语义。这一想法并不新颖。量子力学在 $*$-自对偶范畴中的模型通常被描述为“玩具模型” [2]，Pavlovic [104]尤其讨论过这些模型，并倡导了一些非常相似的方向。事实上，Egger [61]，在发起“对合”范畴的发展时，含蓄地暗示了在 LDC 设置下，匕首函子在对象上并非平稳的（$A \neq A^{\dagger}$）。

1.1.6 线性分配范畴

线性分配范畴（LDCs） [38] 为不含紧致性的线性逻辑（MLL）的乘法片段提供范畴语义（因此它们就是证明论），该片段包含 $\otimes$、1、 $\parr$和 $\bot$。乘法联结词的序列规则如图1.2所示。在线性逻辑领域，乘法析取通常记作 $\parr$，然而本论文遵循 [38] 中的约定，并将使用 $\oplus$。按照相同的约定，我们将 $\otimes$ 的单位写作顶 $\top$ ，而不是像线性逻辑领域那样写作 1。 $\oplus$ 的单位是底， $\bot$。

$$(\top L)\ \frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \top, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad (\top R)\ \frac{}{\vdash \top}$$

$$(\otimes L)\ \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad (\otimes R)\ \frac{\Gamma_1 \vdash \Gamma_2, A, \Gamma_3 \quad \Delta_1 \vdash \Delta_2, B, \Delta_3}{\Gamma_1, \Delta_1 \vdash \Gamma_2, \Delta_2, A \otimes B, \Gamma_2, \Delta_3}$$

$$(\bot L)\ \frac{}{\bot \vdash} \qquad (\bot R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \bot, \Delta_2}$$

$$(\oplus L)\ \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Gamma_3 \quad \Delta_1, B, \Delta_2 \vdash \Delta_3}{\Gamma_1, \Delta_1, A \oplus B, \Gamma_2, \Delta_2 \vdash \Gamma_3, \Delta_3} \qquad (\oplus R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, A \oplus B, \Delta_2}$$

图 1.2：乘法联结词的序列规则

我们假设相继式演算是交换的（前提和前

件的顺序无关紧要）。交换规则允许互换相邻的前提和前件，从而满足这一点：

$$(exch.L)\ \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad (exch.R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, C, D, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, D, C, \Delta_2}$$

由于线性分配范畴是乘法线性逻辑的证明论，它们自然带有两个不同的张量积，分别称为“张量” $\otimes$和“par” $\oplus$ ，分别对应线性逻辑中的乘法合取和析取。张量与 par 通过两个称为线性分配子的自然变换相关联：

$$\partial^L : A \otimes (B \oplus C) \to (A \otimes B) \oplus C \qquad \partial^R : (A \oplus B) \otimes C \to A \oplus (B \otimes C)$$

这些分配子不是同构。以下是 ∂^L 的相继式推导：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \oplus C \vdash B, C}\, id, \oplus L, \text{ cut} \quad \dfrac{}{A, B \vdash A \otimes B}\, id, \otimes R, \text{ cut}}{A, B \oplus C \vdash A \otimes B, C}\, \text{cut}}{A \otimes (B \oplus C) \vdash (A \otimes B) \oplus C}\, (\otimes L), (\oplus R)$$

带否定的乘法片段（$A^\perp$）的范畴语义由 $*$-自对偶范畴给出。否定的序列规则允许将前提翻转到蕴涵的另一侧：

$$(Neg.L)\ \frac{\Gamma, B^\perp \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, B} \qquad (Neg.R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma, B^\perp \vdash \Delta}$$

图1.3：否定的序列规则

在线性分配范畴中，对象的否定由其范畴对偶给出。对象 A 有一个对偶$A^\perp$ （ A的否定）当且仅当存在两个映射 $\eta\colon \top \to A \oplus A^\perp$和 $A^\perp \otimes A \to \perp$，满足“蛇形”等式，参见定义 2.8。每个对象都有一个选定对偶的线性分配范畴称为 $*$-自对偶范畴， [16], 参见第 2.1.4 节。以下证明分别展示了由否定规则导出的 η 和 ϵ 映射：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{id})}{\vdash A^\perp, A}\,\text{Neg.R}}{\vdash A \oplus A^\perp}\,(\oplus R)}{\top \vdash A \oplus A^\perp}\,(\top L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{id})}{A^\perp, A \vdash}\,\text{Neg.L}}{A^\perp \otimes A \vdash}\,(\otimes L)}{A^\perp \otimes A \vdash \perp}\,(\perp R)$$

Proof for η Proof for ϵ

一个**isomix 范畴**是带有一个同构的 LDC，该同构称为混合映射m ： $\perp \to \top$，满足“mix定律” [25, 定义 6。2], 参见第 2.1.3 节。mix定律给出

一个自然变换$\mathsf{mx}: A \otimes B \to A \oplus B$，从乘法合取到乘法析取，称为**混合子**，参见第 2.1.3 节。mix定律对应于图 1.4 (a)-(b) 中所示的序列规则。

$$(a)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \qquad (b)\quad \frac{}{\top \vdash \bot}$$

图 1.4: （a）二元混合公理（b）零元混合公理

在存在切断规则的情况下，规则（a）等价于公理 $\bot \vdash \top$ [37, 引理 6.1],见下文。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}(\bot L) \qquad \dfrac{}{\bot \vdash \top} id}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\,\mathrm{cut} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\top, \Gamma' \vdash \Delta'}(\top L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\mathrm{cut}$$

存在切断规则时二元混合公理的推导

在一个 isomix 范畴中，若对象 U 的自然变换 $\mathsf{mx}(-, U)$ 和 $\mathsf{mx}(U, -)$ 是同构（即对于任意对象 A、 $A \otimes U \simeq A \oplus U$和 $U \otimes A \simeq U \oplus A$），则称其属于该范畴的**核心**。由此类对象构成的 isomix 范畴的核心形成一个全子范畴。

混合子为自然同构（$\otimes \simeq \oplus$）的 isomix 范畴称为**紧** LDC。isomix 范畴的核心始终是一个紧 LDC。紧 LDC 在线性意义下等价于幺半范畴。反过来，幺半范畴 [95]可视为退化的紧 LDC，其中混合子是恒等映射（$\otimes = \oplus$）。每个对象都有对偶的幺半范畴是紧闭范畴 [85]。从这个角度看，紧闭范畴可视为紧 $*$-自主范畴。

1.2 论文大纲

本论文旨在为非紧致的 †-线性逻辑奠定范畴论基础，并将其应用于范畴量子力学。围绕这一目标，论文分为两部分：

第一部分： 由第 2 至 5 章组成，重点阐述**非紧致** †-线性逻辑的范畴语义。

第二部分： 由第 6至 11章组成，重点**在第一部分建立的范畴论环境中**为范畴量子力学发展结构。

其余 本节概述本文的内容，并说明本文的贡献 .

1.2.1 第一部分：匕首线性逻辑

第一部分从第2 章开始，介绍 LDC 及其变体、线性函子和变换。本章还详细讨论 Ehrhard 的有限性空间，本文将始终以此为例。第3章和4 章改编自题为《范畴量子力学的 Dagger 线性逻辑》的文章 [34]：该文曾在英国伯明翰举行的组合结构研讨会（SYCO I）上发表，并以海报形式参加了在加拿大哈利法克斯举行的第 15 届量子物理与逻辑国际会议（QPL）。第3 章和4 章的贡献概述如下。第5 章总结了本文的第一部分。

伴随线性分配范畴

在范畴量子力学中，通常将匕首解释为一个反变函子，它在对象上保持不变（$A = A^{\dagger}$），并且在映射上是一个对合（$f^{\dagger\dagger} = f$）。然而，在具有两个张量积——张量 $\otimes$ 和 par $\oplus$ —— 的 LDC 中，匕首必须交换张量与 par，使得（$A \oplus B$）$^{\dagger} = A^{\dagger} \otimes B^{\dagger}$。若不进行这种交换，对线性分配子取匕首将产生一个不合法的映射。

这意味着，在 LDC 中，匕首不再能被视为在对象上保持不变。非平稳的匕首意味着必须处理相干性问题，确定匕首如何与 LDC 的结构相互作用。此外，可以用自然同构 $\lambda_{\otimes}: A^{\dagger} \otimes B^{\dagger} \to (A \oplus B)^{\dagger}$ 替代上述等式，并用自然同构 $\iota_A: A \to A^{\dagger\dagger}$ 替代对合。我们将在第 †-LDC, †-mix 和 †-isomix 范畴一节中处理这些自然同构，并给出定义，见第 3.1 节。相继式演算对于

†-线性逻辑将在第3.1.2节中讨论。

适用于 †-isomix范畴的酉同构

在 CQM 中，匕首函子确定了酉同构的概念，即一种同构 $f: A \to B$使得 $f^{\dagger} = f^{-1}$。这些同构尤为重要，因为它们刻画了量子系统的幺正演化。将这一思想直接应用于 †-LDCs 并不可行，因为映射 $f^{-1}: B \to A$和 $f^{\dagger}: B^{\dagger} \to A^{\dagger}$现在具有不同的类型，因此不能直接相等。不过，至少在存在同构 $\varphi_A: A \simeq A^{\dagger}$ 和 $\varphi_B: B \simeq B^{\dagger}$的情况下，可以将酉同构定义为满足以下交换图的映射 f：

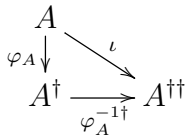
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \varphi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_B} \\ A^{\dagger} & \xleftarrow[f^{\dagger}]{} & B^{\dagger} \end{array}$$

请注意，在 a †-幺半范畴中，同构 φ_A 和 φ_B 就是恒等映射。

在一个 †-isomix 范畴中，同构 φ_A 称为**酉结构映射**，条件是 A属于核心，并且与该范畴的自然同构相协调。在这种情况下， A 称为酉对象。 †-isomix 范畴中的酉对象构成一个子紧闭 †-isomix 范畴。这样的紧闭 †-isomix 范畴中，若每个对象都是酉对象，则称为**酉范畴**。酉范畴与 †-线性等价于一个 †-幺半范畴。此外，当酉范畴具有酉对偶时，该范畴与 †-线性等价于 †-紧闭范畴。这些思想将在第 4.1 节中展开。

酉构造

在定义了 †-LDC 和 †-isomix 范畴的酉结构之后，我们的下一个目标是从任意一个范畴中提取出一个酉范畴，也就是传统的范畴量子力学（CQM）设定，
†-isomix 范畴。为此，人们收集 †-isomix 范畴中的“预幺正”对象。如果对象 A 满足：**是预幺正的**，则 A 属于核心，并且存在一个同构 $\varphi_A:\ A \longrightarrow A^\dagger$，且该同构与对合子 ι 相协调，如下方交换图所示：



通过“幺正构造”提取出的酉范畴称为**典范幺正核心**，它是 †<style id='8}-isomix 范畴。详情请参见第 4.1.3 节。

混合酉范畴

汇集迄今为止我们所构建的结构，即 †-isomix 范畴和酉范畴，我们便得到了一个“混合酉范畴”（MUC）的通用框架。MUC 通过从酉范畴到 †-isomix 范畴核心的 †-isomix-函子，将一个酉范畴嵌入到更大的 †-isomix 范畴中：

$$M : \mathbb{U} \longrightarrow \mathsf{Core}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}$$

其中 $\mathbb{U}$ 是酉范畴，而 $\mathbb{C}$ 是 †-isomix 范畴。因此，MUC 是一个通用框架，将传统的 CQM 框架纳入其核心之中。MUC 的酉范畴作用于更大的 †-isomix 范畴上，这类似于域 K 作用于一个 K-代数并作为标量。第 4.3 节和 4.4 节专门用于发展这些思想。

1.2.2 第二部分：dagger线性逻辑在范畴量子力学中的应用

本论文的第二部分致力于将 MUC 框架应用于量子力学。为此，我们将 CQM 的关键代数结构推广到 MUC 情形，并研究这一推广的蕴含。

本部分从第6 章开始，介绍 †-幺半范畴以及范畴量子力学所使用的其他关键代数结构。第7 章源自我与他人合作撰写的文章《混合酉范畴的完全正性》 [40], ，该文章曾在美国加利福尼亚州举行的 QPL 2019 以及英国格拉斯哥举行的 SYCO II 上作报告。第8 章和9 章源自我与他人合作撰写的论文《指数模态与互补性》 [39]。这项工作曾在2021年7月举行的第四届应用范畴论国际会议上发表。第10 章介绍第8章和9章中引入的结构的例子。第11章总结论文的第二部分。

第7至9 章的贡献概述如下。

MUC中的完全正映射

在 †-幺半设置中，完全正映射抽象了量子过程的概念。Coecke 和 Heunen [46] 提出了CP^∞ 构造；将其应用于任意 †-对称幺半范畴时，该构造会产生完全正映射的范畴。我们根据 Coecke 和 Heunen 的构造，为 MUC 定义完全正映射和CP^∞ 构造 [46]。我们还利用环境结构和纯化的概念，刻画 MUC 上的CP^∞ 构造。对 MUC 上CP^∞ 构造的刻画带来了一个简洁的观察：只需酉核心具有环境映射，就足以刻画 MUC 上的CP^∞ 构造。第7 章将讨论这一内容。

MUC 中的测量

Coecke和Pavlovic在 †- 幺半范畴中给出了量子测量的代数描述 [48]。在MUC中，测量分两步进行：首先，待测系统必须紧化到酉核心（即传统的范畴量子力学核心）中，然后在核心内应用Coecke和Pavlovic所描述的常规测量过程 [48] 。为了刻画紧化过程，我们引入二元幂等元和 †-二元幂等元。在 †-isomix范畴中，对一个对象进行紧化，恰好对应于该对象上某些 †-二元幂等元的分裂，见第9.1节。 †-二元幂等元推广了Selinger在 [111] †-幺半范畴中的 †-幂等元；这些幂等元 †-分裂后会产生经典类型。

isomix范畴中的互补系统

互补可观测量的概念是量子力学的核心。可观测量是量子系统的一种可测量属性。如果测量（获知）一个可观测量的值会增加另一个可观测量值的不确定性，那么这两个可观测量就是互补的。电子的位置和动量是互补可观测量的经典例子。

在范畴量子力学中，量子可观测量以代数形式表示为特殊的交换 †- Frobenius 代数 [49] 位于 †-幺半范畴中。此外，互补可观测量是定义在同一对象上的两个这样的 †-Frobenius 代数，它们以双代数式的方式相互作用，从而产生两个霍普夫代数[1] [44]。

在线性分配范畴中，带有一个 $\otimes$-幺半群和一个 $\oplus$-幺半群的线性幺半群，提供了 Frobenius 代数的一般形式。事实上，幺半范畴中的 Frobenius代数可以视为满足额外性质的线性幺半群。线性幺半群引出了“线性余幺半群”这一新概念；它可以与线性幺半群以双代数式的方式相互作用，形成“线性双代数”。利用这些结构，可以在一个（†-）isomix 范畴中，将互补系统定义为满足若干额外方程的（†-）线性双代数。第8 章专门讨论线性余幺半群和线性双代数的构造。isomix范畴中的互补系统见第9.3节。

关联互补性与指数模态

本论文最后一项贡献虽不显眼，却意义重大：我们利用 MUC 框架，确立了线性逻辑中的指数模态与量子力学中的互补性之间的联系。为此，我们定义了（!，?）-†-LDC，即带指数模态的 †-LDC，并为相应的逻辑给出序列规则，详见第 9.4.2 节和第 9.4.3 节。我们证明，在一个（†-）isomix 范畴中，每个互补系统都是由 †-线性双代数在 **自由** 指数模态上诱导而来的紧化，详见第 9.4 节。

第 12 章总结本论文并讨论未来研究方向。

1.3 预备知识

我们假定读者已对范畴论有基本了解，包括范畴、函子、自然变换、对偶、同构和伴随的定义。我们向读者推荐一些优秀的资料 [9, 17, 32, 42, 12, 95]，特别是，参考文献[42, 12] 非常适合具有物理学背景的读者，而 [32] 则面向

[1]这通常被称为 CQM 中的强 互补性。

计算机科学领域的受众。

1.4 记号

复合采用图示顺序书写：fg 表示先应用 f，再应用 g。弦图应从顶到底阅读（遵循重力方向），并从左到右阅读。

第一部分

匕首线性逻辑

第2章

线性逻辑的范畴语义

线性逻辑 [68] 由 Girard 于 1987年 提出，是一种资源敏感型逻辑，其中逻辑陈述被视为资源。因此，在线性逻辑中证明陈述涉及对这些资源进行操作，而其中大多数资源都不能被复制或销毁。由于其资源敏感性，线性逻辑被认为是量子信息论的逻辑 [11, 59]。本章使用线性分配范畴回顾线性逻辑的范畴语义。我们还给出了有限性空间中线性逻辑结构的一种解释 [64] ，并将在整篇论文的其余部分中将其作为一个贯穿始终的示例。

2.1 线性分配范畴（LDCs）

线性分配范畴由 Cockett 和 Seely 于 [38] 1997年 提出，为乘法线性逻辑（MLL）提供了范畴语义。这些范畴最初被称为弱分配范畴，后来更名为线性分配范畴（LDCs）。

2.1.1 线性分配范畴

非正式地说，线性分配范畴是具有两个由线性分配子关联起来的幺半结构的范畴。在讨论 LDC 之前，我们先回顾幺半范畴的定义：

定义 2.1. 一个 **幺半范畴** $(\mathbb{X}, \otimes, I, a_{\otimes}, u^{l}_{\otimes}, u^{r}_{\otimes})$ 是一个范畴， $\mathbb{X}$，由以下部分组成：

- 一个双函子， $\otimes$： $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$，称为张量积；
- 一个指定对象， $I \in \mathbb{X}$，称为单位对象；
- 一个自然同构，$(a_{\otimes})_{A,\ B,\ C}$： $A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\simeq} (A \otimes B) \otimes C$，称为结合子；

- 一个自然同构，$(u^l_\otimes)_A$：　$I \otimes A \xrightarrow{\simeq} A$，称为左单位子；
- 一个自然同构，　$(u^r_\otimes)_A$：　$A \otimes I \xrightarrow{\simeq} A$，称为右单位子；

使得以下相干图交换 *[84]*：

- ***Mac Lane*** 五边形图：

$$\begin{array}{ccc} & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) & \\ {\scriptstyle 1\otimes a_\otimes}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle a_\otimes} \\ A\otimes((B\otimes C)\otimes D) & & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \\ {\scriptstyle a_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_\otimes} \\ (A\otimes(B\otimes C))\otimes D & \xrightarrow[a_\otimes\otimes 1]{} & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \end{array}$$

- ***Kelly*** 单位图：

$$\begin{array}{ccc} (A\otimes I)\otimes B & & \\ {\scriptstyle a_\otimes}\downarrow & \searrow{\scriptstyle u^r_\otimes\otimes 1_B} & \\ A\otimes(I\otimes B) & \xrightarrow[1_A\otimes u^l_\otimes]{} & (A\otimes B) \end{array}$$

结合子、左单位子和右单位子均为恒等箭头的幺半范畴称为**严格幺半范畴**。

对称幺半范畴（SMC）是具有一个自然同构的幺半范畴：

$$(c_\otimes)_{A,B} : A\otimes B \xrightarrow{\simeq} B\otimes A$$

使得以下等式成立：

- (Hexagon law) $a_\otimes c_\otimes a_\otimes = (1\otimes c_\otimes)a_\otimes(c_\otimes\otimes 1)$

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes(B\otimes C) & \xrightarrow[a_\otimes]{} & (A\otimes B)\otimes C & \xrightarrow[c_\otimes]{} & C\otimes(A\otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes c_\otimes} & & & & \downarrow{\scriptstyle a_\otimes} \\ \otimes(C\otimes B) & \xrightarrow[a_\otimes]{} & (A\otimes C)\otimes B & \xrightarrow[a_\otimes(c_\otimes\otimes 1)]{} & (C\otimes A)\otimes B \end{array}$$

- (逆律) $(c_\otimes)_{A,\ B} = (c_\otimes)^{-1}_{B\ A,}$

$$\begin{array}{ccc} A\otimes B & & \\ {\scriptstyle (c_\otimes)_{A,B}}\downarrow & = & \\ B\otimes A & \xrightarrow[(c_\otimes)_{A,B}]{} & A\otimes B \end{array}$$

- (单位律) $c_{\otimes} u^{l}_{\otimes} = u^{r}_{\otimes}$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes I & \xrightarrow{c_{\otimes}} & I \otimes A \\ & {\scriptstyle u^{r}} \searrow & \downarrow {\scriptstyle u^{l}} \\ & & A \end{array}$$

在 LDC 中，存在两个张量积，它们通过称为线性分配子的自然变换相关联：

定义 2.2。 *[38]* 一个**线性分配范畴**，（$\mathbb{X}$， $\otimes$， $\top$， $\oplus$， $\bot$）是一个范畴， $\mathbb{X}$由以下部分组成：

- 一个幺半结构，（$\otimes, \top, a_{\otimes}, u^{L}_{\otimes}, u^{R}_{\otimes}$） （$\otimes$称为“张量”，其单位 $\top$ 称为“顶”）

- 一个幺半结构，（$\oplus, \bot, a_{\oplus}, u^{L}_{\oplus}, u^{R}_{\oplus}$） （$\oplus$称为“*par*”，其单位 $\bot$ 称为“底”）

- 张量和 *par* 通过以下自然变换相关联，这些自然变换分别称为左线性**分配子**和右线性分配子：

$$\partial^{l} : A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow (A \otimes B) \oplus C$$
$$\partial^{r} : (A \oplus B) \otimes C \longrightarrow A \oplus (B \otimes C)$$

满足以下相干条件：

- 结合子和单位子满足 $\otimes$ 与 $\oplus$ 的 *Maclane* 五边形图表和 *Kelly* 单位图，见定义 *2.1*。

- 单位自然变换与线性分配子的相干条件：

LDC. 1 (a) $\partial^{l}(u^{l}_{\otimes} \oplus 1_{B}) = u^{l}_{\otimes}$

$$\begin{array}{ccc} \top \otimes (A \oplus B) & & \\ {\scriptstyle \partial^{l}} \downarrow & \searrow^{u^{l}_{\otimes}} & \\ (\top \otimes A) \oplus B & \xrightarrow[u^{l}_{\otimes} \oplus 1_{B}]{} & A \oplus B \end{array}$$

(b) $u^{r}_{\otimes} = \partial^{r}; 1 \oplus u^{l}_{\otimes}$

(c) $\partial^{r} u^{l}_{\oplus} = u^{l}_{\oplus} \otimes 1_{B}$

(d) $1 \otimes u^r_\oplus = \partial^l;\ \ u^l_\oplus$

$$\begin{array}{ccc} (\bot \oplus A) \otimes B & \xrightarrow{\partial^r} & \bot \oplus (A \otimes B) \\ & {\scriptstyle u^l_\oplus \otimes 1_B} \searrow & \downarrow{\scriptstyle u^l_\oplus} \\ & & A \otimes B \end{array}$$

- 结合律自然变换和分配子的相干条件 :

LDC. 2 (a) $a_\otimes\ (1_A \otimes \partial^l)\ \delta^l = \delta^l\ (a_\otimes \oplus 1_D)$

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes (C \oplus D) & \xrightarrow{a_\otimes} & A \otimes (B \otimes (C \oplus D)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1_A \otimes \partial^l} \\ {\scriptstyle \partial^l}\downarrow & & A \otimes ((B \otimes C) \oplus D) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial^l} \\ ((A \otimes B) \otimes C) \oplus D & \xrightarrow[a_\otimes \oplus 1_D]{} & (A \otimes (B \otimes C)) \oplus D \end{array}$$

(b) $\partial^l(a_\otimes \oplus 1) = a_\otimes(1 \otimes \partial^l)\partial^l$

(c) $\partial^r a_\oplus = (a_\oplus \otimes 1_D)\partial^r(1_A \otimes \partial^r)$

(d) $(1 \otimes a_\oplus)\partial^l = \partial^l(1 \oplus \partial^l)a_\oplus$

- 左线性分配子和右线性分配子之间的相干条件:

LDC. 3 (a) $\partial^r(1_A \oplus \partial^l) = \partial^l(\partial^r \oplus 1_D)a_\otimes$

$$\begin{array}{ccccc} & & (A \oplus B) \otimes (C \oplus D) & & \\ & {\scriptstyle \partial^l}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \partial^r} & \\ ((A \oplus B) \otimes C) \oplus D) & & & & A \oplus (B \otimes (C \oplus D)) \\ {\scriptstyle \partial^r \oplus 1_D}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_A \oplus \partial^l} \\ (A \oplus (B \otimes C)) \oplus D & & \xrightarrow[a_\otimes]{} & & A \oplus ((B \otimes C) \oplus D) \end{array}$$

(b) $a_\otimes(1 \otimes \partial^r)\partial^l = (\partial^l \otimes 1)\partial^r$

一个**对称 LDC** 是指两个张量积都是对称的 LDC，其对称映射为 $c_\otimes$ 和 $c_\oplus$，并满足 $\partial^R = c_\otimes(1 \otimes c_\oplus)\partial^L(c_\otimes \oplus 1)c_\oplus$。对于对称 LDC，左线性分配子决定右线性分配子，反之亦然。

线性分配范畴（LDCs）为乘法线性逻辑（MLL）提供范畴语义。LDC 中的两个张量积，即 $\otimes$ 和 $\oplus$，分别对应线性逻辑中的乘法合取和乘法析取。

以下是一些线性分配范畴的例子:

• 每个幺半范畴也是一个线性分配范畴，其中张量与 par 重合，而分配子就是结合子自然同构。线性分配子均为同构的线性分配范畴不一定是幺半范畴。接下来的两个例子将阐明这一点。

• 有界分配格 是一个格（L，$\leq$，$\wedge$，$\top$，$\vee$，$\bot$），它具有最大元$\top$和最小元 $\bot$，并且对于所有 $a \in L$、$\bot \leq a \leq \top$，并运算（$\wedge$）和交运算（$\vee$）彼此满足分配律：

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

将分配格视为一个范畴，其中对象是格元素，映射由预序给出，这便是一个 LDC。张量由 $\wedge$ 给出，单位对象为 $\top$；par 由 $\vee$ 给出，单位对象为 $\bot$。两个张量积都是对称的。右线性分配子如下所示：

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq a \vee (b \wedge c)$$

任何布尔代数都是分配格的一个例子。

• 设 M是任意一个集合。移位幺半群 是一个交换幺半群（M，$+$，0），带有一个指定元素 s，使得 s 存在逆元，即 $s - s = 0$。可以在集合 M上定义第二乘法如下：对于所有 x，$y \in M$，$x \circ y =$（$x+y$）$-s$。第二乘法的单位元是 s。将移位幺半群视为离散范畴（幺半群的元素是对象，映射是恒等映射），便得到一个 LDC，其中 $\otimes :=+$，且 $\oplus :=\circ$。单位对象由相应乘法的单位元给出。线性分配子由下列等式给出：

$$x \circ (y + z) := (x + (y + z)) - s = ((x + y) - s) + z = (x \circ y) + z$$

注意，分配子是恒等映射，但 $\otimes$ 和 $\oplus$ 彼此不同。

• $*$-自洽范畴是具有对偶化对象的线性分配范畴。参见第2.1.4节。

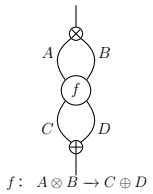
• 双代数模及其模同态构成一个 $*$-自对偶范畴的 LDC。张量积继承自基范畴 [38]。来自一个 $*$-自对偶范畴的 Hopf 模及其模同态构成一个 $*$-自对偶 [103]。我们将在第3.4.4节讨论 Hopf 模范畴。

• Girard 的相干空间 [68], Ehrhard 的有限性空间 [64], 以及 Chu 空间 [18] 都是线性分配范畴，同时也是 $*$-自对偶的。事实上，FRel（有限性空间与有限性关系构成的范畴）和 FMat($\mathbb{C}$)（有限性空间与有限性矩阵构成的范畴）是本文所引入结构的主要例子。关于这些范畴的讨论，见第 2.3 节。

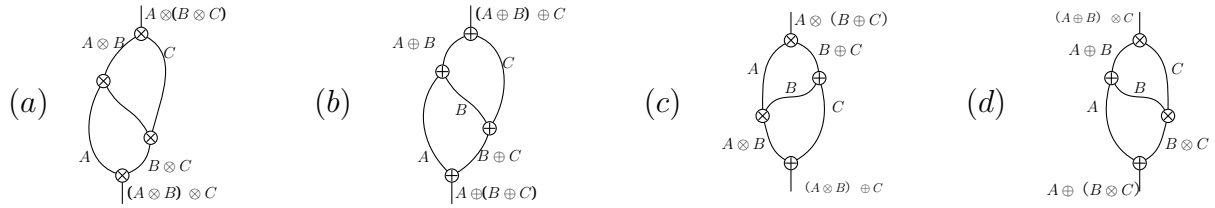
• 对幺半范畴进行双完备化（添加任意极限和余极限）可得到一个 LDC。Joyal 在[82]中描述了一种对幺半范畴进行双完备化的过程。Joyal 还在同一篇文章中证明，若基范畴是紧闭的，那么所得范畴就是 $*$-自主的。

2.1.2 图形演算

线性分配范畴配备了图形演算 [30]，其中包含幺半范畴的演算。乘法线性逻辑中的每条序列规则和每个推导都对应于线性分配范畴图形演算中的一个电路，反之亦然。本节回顾线性分配范畴图形演算的基础知识。详细介绍请参见 [30, 38]。以下是 LDC 电路的生成元：导线表示对象，圆圈表示映射。映射的输入线通过张量运算组合（使用 $\otimes$），输出线则通过“par”运算组合（使用 $\oplus$）。以下图表表示一个映射 $f\colon\ A \otimes B \to C \oplus D$。



$\otimes$结合子、 $\oplus$结合子、左线性分配子和右线性分配子分别绘制如下：

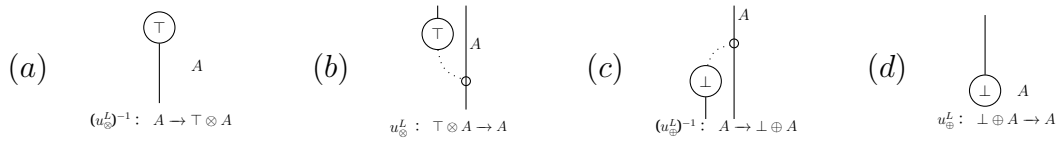


是 $\oplus$-引入（$\oplus I$）规则，是 $\otimes$-引入（$\otimes I$）规则，是 $\otimes$-消去（$\otimes E$）规则，是 $\oplus$-消去（$\oplus E$）规则。如下面所示，规则（$\otimes I$）和（$\otimes E$）分别对应于张量引入的序列规则，$\otimes L$ 和 $\otimes R$ 在

图 1.2：

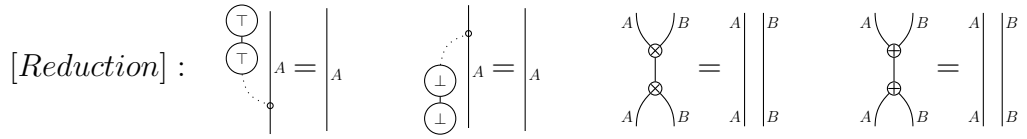
$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\otimes L) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Gamma_2, A, \Gamma_3 \quad \Delta_1 \vdash \Delta_2, B, \Delta_3}{\Gamma_1, \Delta_1 \vdash \Gamma_2, \Delta_2, A \otimes B, \Gamma_3, \Delta_3}\ (\otimes R)$$

同样，⊕I 和 ⊕E 分别对应于 ⊕L 和 ⊕R，参见图 1.2。单位子如下绘制：

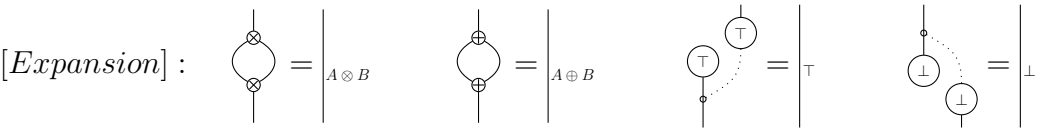


图表（a）称为左侧 ⊤-引言，（b）称为左侧 ⊤-消去，（c）是左侧 ⊥-引言，而（d）是左侧 ⊥-消去，它们分别对应于图1.2 中的序列规则（$\top R$）、（$\top L$）、（$\bot R$）、（$\bot L$）。单位 ⊤ 通过引入，余单位 ⊥ 通过使用稀疏化连线消去，图表中用点状导线表示这些连线。详见 [30, 第 2 截面。3] 其中详细介绍了稀疏化连线。

以下是一组电路等式（将其定向后即成为归约重写规则）：

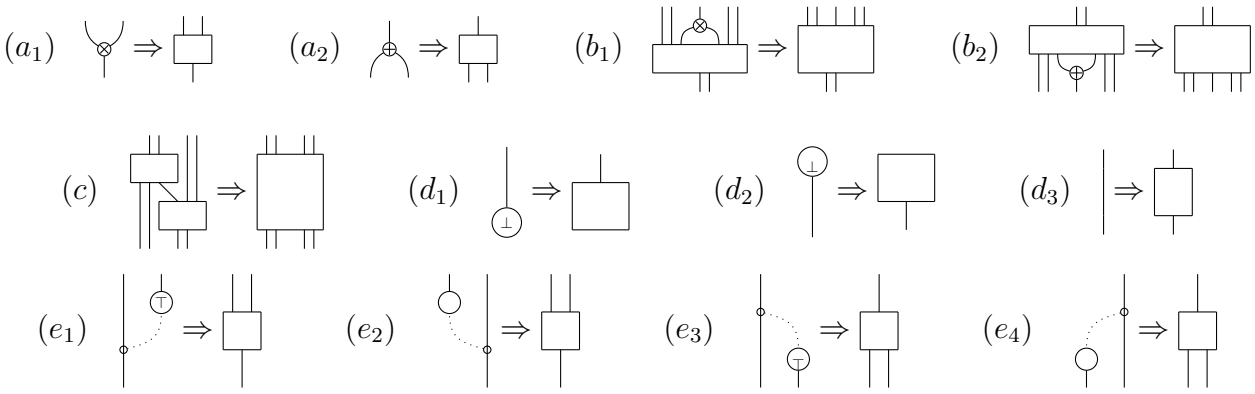


以下也属于电路等式（将其定向后即成为扩展规则）：

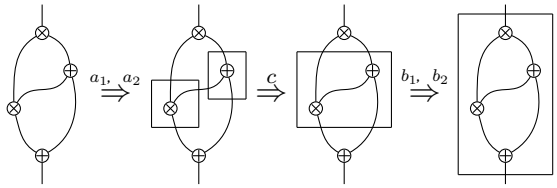


与线性逻辑一样，并非所有由这些基本组件构造的电路图都表示有效的 LDC 电路。在关于线性逻辑的开创性论文中，[68], Girard 提出了一项判据，用于判断其利用基于切换连边的证明网表示证明的正确性。对于所有切换连边的选择，有效的证明结构必须是连通且无环的。使用这一正确性判据的缺点是，所需时间会随着切换连边的数量呈指数增长。Danos和Regnier [54] 通过提供一种在线性时间内（参见 [72]）根据电路规模判断正确性的算法，大幅改善了这一情况。为验证 LDCs 的电路图是否有效，Blute 等人[30], 提供了一种加框算法，该算法基于 Danos和Regnier 更高效的算法，现介绍如下。

为了验证 LDC 电路是否有效，需要使用以下规则对电路组件进行“加框”。原始生成映射会自动加框。

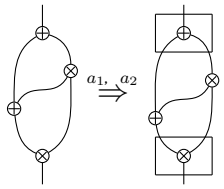


双线表示多根导线。方框内包含电路组件，包括映射。 $\otimes$-引入和 $\oplus$-消去分别用方框框出，如(a_1)和(a_2)所示。(b_1)展示了方框如何“吞掉” $\otimes$-消去：在(b_2)中，对偶规则展示了 $\oplus$-引入被吞掉的情形。(c)展示了由单根导线连接的方框如何合并。 $\bot$-消去、 $\top$-引入和恒等映射分别用方框框出，如(d_1)、(d_2)和(d_3)所示。(e_1)-(e_4)展示了如何将稀疏化连线框起来。按照这些规则，逐步用方框包围电路的各个组件；当且仅当最终得到一个方框（或一根导线）时，电路才是有效的。下面以左线性分配子为例，验证其有效性:



第一步，将 $\otimes$-引入和 $\oplus$-消去置于框中。第二步，沿着连接两个方框的单根导线将方框合并。第三步，方框吸收 $\otimes$-消去和 $\oplus$-引入。

相比之下，我们现在证明，线性分配子的逆映射是无效的，因为框化过程会陷入停滞（没有规则可用于框 $\otimes$-消去和 $\oplus$-引入）：



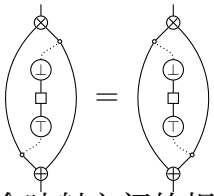
2.1.3 Mix、isomix 与紧 LDC

在这篇论文中，我们主要关注具有混合映射的线性分配范畴：

定义 2.3。 *[37]* 一个 **混合范畴** 是一个带有**混合映射** $\mathsf{m} : \bot \longrightarrow \top$ 且满足：

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes B & \xrightarrow{1\otimes u_{\oplus}^{L\,-1}} & A \otimes (\bot \oplus B) & \xrightarrow{1\otimes(\mathsf{m}\oplus 1)} & A \otimes (\top \oplus B) \\
{\scriptstyle (u_{\oplus}^{R})^{-1}\otimes 1}\downarrow & \searrow^{\mathsf{mx}_{A,B}} & & & \downarrow{\scriptstyle \partial^{L}} \\
(A \oplus \bot) \otimes B & & & & (A \otimes \top) \oplus B \\
{\scriptstyle \partial^{R}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle u_{\otimes}^{R}\oplus 1} \\
A \oplus (\bot \otimes B) & \xrightarrow[1\oplus(\mathsf{m}\otimes 1)]{} & A \oplus (\top \otimes B) & \xrightarrow[1\oplus u_{\otimes}^{L}]{} & A \oplus B
\end{array}$$

映射 $\mathsf{mx}_{A,B}$ 是一个自然变换，称为**混合子**。混合映射的相容条件在弦图中具有以下形式（其中混合映射以空框表示）：

$\mathsf{mx}_{A,B} :=$  $=$

在混合范畴中，结合子、分配子和混合映射之间的相互作用如下。证明见 [25] 中的引理 2 和命题 3。

[mix.]

$$\begin{array}{ccc}
(A \oplus B) \otimes C & \xrightarrow{\delta^{R}} & A \oplus (B \otimes C) \\
{\scriptstyle \mathsf{mx}}\downarrow & (a) & \downarrow{\scriptstyle 1\oplus\mathsf{mx}} \\
(A \oplus B) \oplus C & \xrightarrow[a_{\oplus}]{} & A \oplus (B \oplus C)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & A \oplus (B \otimes C) \\
{\scriptstyle a_{\otimes}}\downarrow & (b) & \uparrow{\scriptstyle \delta^{L}} \\
A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow[1\otimes\mathsf{mx}]{} & A \otimes (B \oplus C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
C \otimes (A \oplus B) & \xrightarrow{\delta^{L}} & (C \otimes A) \oplus B \\
{\scriptstyle \mathsf{mx}}\downarrow & (c) & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}\oplus 1} \\
C \oplus (A \oplus B) & \xrightarrow[a_{\oplus}^{-1}]{} & (C \oplus A) \oplus B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & A \oplus (B \otimes C) \\
{\scriptstyle a_{\otimes}^{-1}}\downarrow & (d) & \uparrow{\scriptstyle \delta^{R}} \\
(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow[\mathsf{mx}\otimes 1]{} & (A \oplus B) \otimes C
\end{array}$$

混合范畴有许多例子，包括相干空间 [68], 和有限性空间 [64]。

定义 2.4。 带有混合映射m: $\bot \longrightarrow \top$ 且该映射为同构的 *LDC*，称为**isomix 范畴**。

当 m 是同构时，混合子的相干性要求会自动满足（参见 [37, 引理 6.6]）。此外，混合映射 m 是同构，并不意味着混合子 mx 也是同构。以张量单位为对偶化对象的有限性空间 [64] 和 Chu 空间 [18] 提供了 isomix 范畴的例子。

定义 2.5。 ***A*紧 LDC** 是一个 *isomix* 范畴，其中每个混合子 $\mathsf{mx}_{A,\,B}$ 都是同构。

一种重要的 紧LDC产生的方式，是源自 isomix 范畴的“核心”

定义 2.6。 *[25]* 对象 U 属于 **核心** 当且仅当以下自然变换是同构：

$$U \otimes (\_) \xrightarrow{\mathsf{mx}_{U,(\_)}} U \oplus (\_) \quad and \quad (\_) \otimes U \xrightarrow{\mathsf{mx}_{(\_),U}} (\_) \oplus U$$

因此，混合范畴 Core($\mathbb{X}$) $\subseteq \mathbb{X}$的核心，是 $\mathbb{X}$ 的全子范畴，其中混合子是一个同构。由此可知，Core($\mathbb{X}$) 是一个紧 LDC。

命题 2.7。 *[25, 命题 3]* 若 $\mathbb{X}$ 是一个混合线性分配范畴，且 $A, B \in$ 核心($\mathbb{X}$) 则 $A \oplus B$且 $A \otimes B \in$ 核心($\mathbb{X}$) （以及 $A \oplus B \simeq A \otimes B$）。若 $\mathbb{X}$ 是一个同构混合线性分配范畴，则 $\top, \bot \in$ 核心($\mathbb{X}$)。

幺半范畴是带有混合的紧 LDC，并且混合映射与恒等映射重合。因此，在幺半范畴中，张量与 par 重合。事实上，任意紧 LDC 都线性等价于一个幺半范畴。关于这种线性等价的详细描述，见“线性函子与变换”一节。

T以下示意图总结了 LDC 的不同性质：

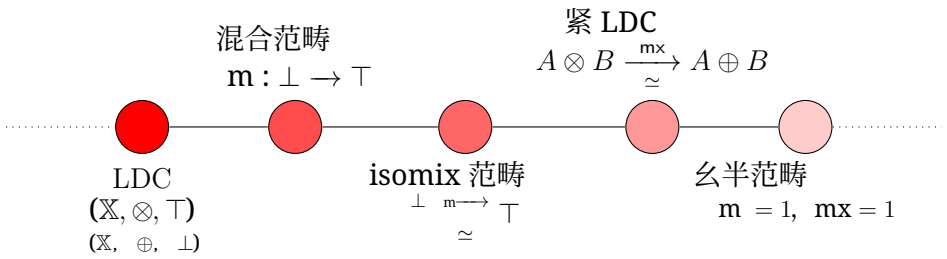


图2.1：LDC性质示意图

2.1.4 $*$-自伴范畴

LDCs 理论中的一个关键概念是线性伴随 [35]。在此，我们将把线性伴随称为“对偶”，以避免与线性函子的伴随混淆。

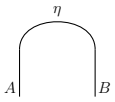
定义2.8。 设 $\mathbb{X}$ 是一个 *LDC*，且 A、$B \in \mathbb{X}$，那么 B 是 A 的**左对偶**（或左线性伴随），或者 A 是 B 的**右对偶**（右线性伴随）——记作(η, ϵ) : $B \dashv A$，如果

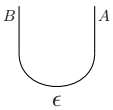
存在一个单位映射 $\eta\colon\ \top \to B \oplus A$ 和一个余单位映射 $\epsilon\colon\ A \otimes B \to \bot$，使得下列图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{(u^L_\otimes)^{-1}} & \top \otimes B & \xrightarrow{\eta\otimes 1} & (B\oplus A)\otimes B \\ \| & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_R} \\ B & \xleftarrow[u^R_\oplus]{} & B\oplus\bot & \xleftarrow[1\oplus\epsilon]{} & B\oplus(A\otimes B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{(u^R_\otimes)^{-1}} & A \otimes \top & \xrightarrow{1\otimes\eta} & A\otimes(B\oplus A) \\ \| & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_L} \\ A & \xleftarrow[u^L_\oplus]{} & \bot\oplus A & \xleftarrow[\epsilon\oplus 1]{} & (A\otimes B)\oplus A \end{array}$$

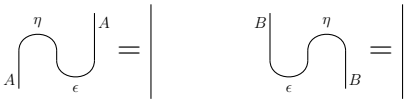
对偶的单位映射 unit 和余单位映射绘制成弦图中的帽和杯：

$$\eta := \qquad \text{and} \qquad \epsilon :=$$





这些交换图常被称为“蛇形图”，因为它们在图形演算中的形状：



由于使用了电路展开和电路约简规则，上述电路图中隐藏了线性分配子，见第 2.1.2 节。

引理 2.9. *[25]*

(i) 在 *LDC* 中，若 $(\eta, \epsilon)\colon\ B \dashv\!\shortmid A$ 且 $(\eta', \epsilon')\colon\ C \dashv\!\shortmid A$，则 B 和 C 同构；

(ii) 在对称 *LDC* 中，$(\eta, \epsilon)\colon\ B \dashv\!\shortmid A$ 当且仅当 $(\eta c_\oplus, c_\otimes \epsilon)\colon\ A \dashv\!\shortmid B$；

(iii) 在混合范畴中，如果 $B \in$ 核心$(\mathbb{X})$ 且 $B \dashv\!\shortmid A$，那么 $A \in$ 核心$(\mathbb{X})$。

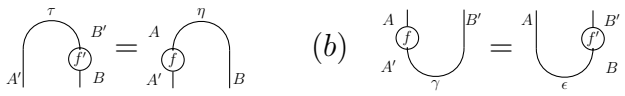
在幺半范畴中，对偶与通常意义下的对偶一致。接下来我们定义对偶同态：

定义 2.10。 对偶同态 $(f, f')\colon (\eta, \epsilon) \longrightarrow (\tau, \gamma)$ 由一对映射给出

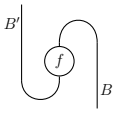
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\eta,\epsilon)} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle f'} \\ A' & \xrightarrow[(\tau,\gamma)]{} & B' \end{array}$$

使得以下等式成立：

$$(a) \qquad \qquad (b)$$



请注意，对偶态射完全由这对映射中的任一个决定（f 完全决定了 f'，反之亦然），并称为澳大利亚伴侣 [35]。：

$$f' := \quad$$


映射 f 当且仅当 f' 是同构。此外，注意到，如果 f 或 f' 是同构，则对偶同态定义中的方程（a）和（b）可以相互推出。

若对偶（η，ϵ）：$A \dashv B$ 中的 A 同时是 B 的左对偶和右对偶，则称其为**循环对偶**。在对称 LDC 中，每个对偶（η，ϵ）：$A \dashv B$ 都给出另一个对偶（$\eta c_{\oplus}$，$c_{\otimes}\epsilon$）：$B \dashv A$，后者通过使用对称映射扭曲导线得到。因此，在对称 LDC 中，每个对偶都是循环对偶。

定义 2.11。一种 *LDC*，其中每个对象分别具有选定的左对偶和右对偶（$\eta*$、$\epsilon*$）：$A^* \dashv A$ 以及（$*\eta$、$*\epsilon$）：$A \dashv {}^*A$，称为 $*$**-自对偶范畴**。

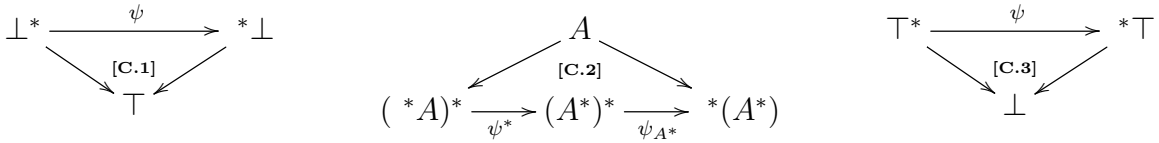
在对称情形下，借助对称性，左对偶可以给出右对偶：因此，通常只假设左对偶存在，而右对偶就是同一对象，其单位和余单位由对称性给出（如上所述）。

在 $*$-自洽范畴中，对对象取左（或右）线性对偶可扩展为线性函子，见第 3.3.1 节。

正如紧 LDC 在线性意义下等价于幺半范畴，紧 $*$- 自洽范畴在线性意义下等价于紧闭范畴。该等价由 Mx↑ 给出，它将 par 分散到两个张量结构中（或者，事实上，由 Mx↓ 给出，它展示了如何将紧闭结构分散到张量上），见第 2.2.2 节。

在对称的 $*$-自洽范畴中，对象的左对偶总是与右对偶典范同构。此外，即使在非对称的 $*$-自洽范畴中，这两个对偶通常也相干同构：

定义 2.12. *[63]* 余自反范畴 **cyclor** $*$ 中的一个 $(\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot, {}^*(\,), (\,)^*)$ 是一个自然同构 $A^* \xrightarrow{\psi} {}^*A$，满足以下相干条件：

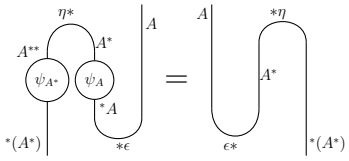


$$\begin{array}{ccc} (A\otimes B)^* & \xrightarrow{\psi} & {}^*(A\otimes B) \\ \downarrow & \text{[C.4]} & \downarrow \\ (B^*\oplus A^*) & \xrightarrow[\psi\oplus\psi]{} & {}^*B\oplus {}^*A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (A\oplus B)^* & \xrightarrow{\psi} & {}^*(A\oplus B) \\ \downarrow & \text{[C.5]} & \downarrow \\ (B^*\otimes A^*) & \xrightarrow[\psi\otimes\psi]{} & {}^*B\otimes {}^*A \end{array}$$

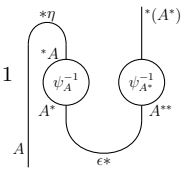
具有 *cyclor* 的 $*$余自反范畴称为**循环的**。

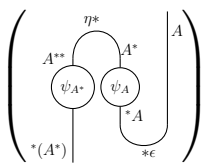
这些相干条件并非彼此独立：具有循环性等价于满足以下四对相干条件中的任意一对：（[C.1], [C.5]）、（[C.2], [C.5]）、（[C.4], [C.2]）和（[C.4], [C.3]） [63]。

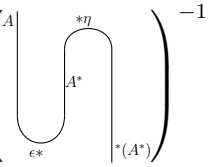
条件 [C.2] 在第3.3节中被广泛使用，其图形表示如下：

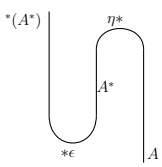


其中的映射 [C.2] 是可逆的：

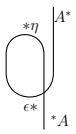
$[\mathbf{C.2}]^{-1}$ 

$=$ 

$^{-1}$ $=$ 

$^{-1}$ $=$ 

对称的 $*$-自对偶范畴总是具有一个规范循环子：



我们将利用第3.3节中的 cyclor，说明在存在对偶化的情况下，共轭与匕首之间的关系。

2.2 线性函子和变换

LDC 之间的函子称为线性函子 [36]。沿着 LDC 推广幺半范畴这一相同思路，线性函子推广了幺半群函子。此外，这些更一般的函子也涵盖了线性逻辑中的结构，例如指数模态（!，？）和加性联结词（+，&）；这些都是满足额外性质的线性函子。

2.2.1 线性函子和变换

为了介绍线性函子，我们先回顾幺半函子的定义。若函子 $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 处于幺半范畴之间，且配备了自然变换 $m_\otimes\colon F(A) \otimes F(B) \to F(A \otimes B)$ 和 $m_I\colon I \to F(I)$，使得下列图表可交换，则称其为幺半函子：

$$\begin{array}{ccccc}
(F(A)\otimes F(B))\otimes F(C) & \xrightarrow{m_\otimes\otimes 1} & F(A\otimes B)\otimes F(C) & \xrightarrow{m_\otimes} & F((A\otimes B)\otimes C) \\
\downarrow{\scriptstyle a_\otimes} & & & & \downarrow{\scriptstyle F(a_\otimes)} \\
F(A)\otimes(F(B)\otimes F(C)) & \xrightarrow[1\otimes m_\otimes]{} & F(A)\otimes F(B\otimes C) & \xrightarrow[m_\otimes]{} & F(A\otimes(B\otimes C))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
F(A)\otimes I & & \xrightarrow{u^R_\otimes} & & \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes m_I} & & & & \\
F(A)\otimes F(I) & \xrightarrow{m_\otimes} & F(A\otimes I) & \xrightarrow[F(u^L_\otimes)]{} & F(A)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
I\otimes F(A) & & \xrightarrow{u^L_\otimes} & & \\
\downarrow{\scriptstyle m_I\otimes 1} & & & & \\
F(I)\otimes F(A) & \xrightarrow{m_\otimes} & F(I\otimes A) & \xrightarrow[F(u^L_\otimes)]{} & F(A)
\end{array}$$

幺半函子的第一个图表是结合律，另外两个图表分别是右单位律和左单位律。对偶地，幺半范畴之间的函子 $(F,\ n_\otimes,\ n_I)\colon \mathbb{X} \to Y$ 是余幺半的，当且仅当 $(F,\ n_\otimes,\ n_I)\colon \mathbb{X}^{\mathsf{op}} \to \mathbb{Y}^{\mathsf{op}}$ 是幺半的。幺半函子保持幺半群，而余幺半函子保持余幺半群。

定义 2.13。 *[36, 定义 1]* 给定线性分配范畴 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$，**一个线性函子** $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 由以下内容组成：

(i) 一对函子 $F = (F_\otimes,\ F_\oplus)$；$(F_\otimes,\ m_\otimes,\ m_\top)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，相对于 $\otimes$ 是幺半的，以及 $(F_\oplus,\ n_\oplus,\ n_\bot)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，相对于 $\oplus$ 是余幺半的。我们将 $m_\otimes$ 和 $n_\oplus$ 称为**张量松弛器**，将 $m_\top$ 和 $n_\bot$ 称为**单位松弛器**。

(ii) 自然变换：

$$\begin{aligned}
\nu^R_\otimes &: F_\otimes(A\oplus B) \to F_\oplus(A)\oplus F_\otimes(B) \\
\nu^L_\otimes &: F_\otimes(A\oplus B) \to F_\otimes(A)\oplus F_\oplus(B) \\
\nu^R_\oplus &: F_\otimes(A)\otimes F_\oplus(B) \to F_\oplus(A\otimes B) \\
\nu^L_\oplus &: F_\oplus(A)\otimes F_\otimes(B) \to F_\oplus(A\otimes B)
\end{aligned}$$

使以下相干条件成立：

[LF。1] $(a)\quad F_{\otimes}\ (u^L_{\oplus})\ = \nu^R_{\otimes}\ (n_{\perp} \oplus 1)\ u^L_{\oplus}$

$$\begin{array}{ccc} F_{\otimes}(\perp \oplus A) & \xrightarrow{F_{\otimes}(u^L_{\oplus})} & F_{\otimes}(A) \\ {\scriptstyle \nu^R_{\otimes}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle u^L_{\oplus}} \\ F_{\oplus}(\perp) \oplus F_{\otimes}(A) & \xrightarrow[n_{\perp}\oplus 1]{} & \perp \oplus F_{\otimes}(A) \end{array}$$

(b) $\nu^L_{\otimes}(1 \oplus n_{\perp})u^R_{\oplus} = F_{\otimes}(u^R_{\oplus})$ *(c)* $(u^L_{\otimes})^{-1}(m_{\top} \otimes 1)\nu^R_{\oplus} = F_{\oplus}((u^L_{\otimes})^{-1})$ *(d)* $(u^R_{\otimes})^{-1}(m_{\top} \otimes 1)\nu^L_{\oplus} = F_{\oplus}((u^R_{\otimes})^{-1})$

[LF。2] $(a)\quad F_{\otimes}\ (a_{\oplus})\ \nu^R_{\otimes}\ (1 \oplus \nu^R_{\otimes})\ = \nu^R_{\otimes}\ (n_{\oplus} \oplus 1)\ a_{\oplus}$

$$\begin{array}{ccc} F_{\otimes}((A \oplus B) \oplus C) & \xrightarrow{F_{\otimes}(a_{\oplus})} & F_{\otimes}(A \oplus (B \oplus C)) \\ {\scriptstyle \nu^R_{\otimes}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu^R_{\otimes}} \\ F_{\oplus}(A \oplus B) \oplus F_{\otimes}(C) & & F_{\oplus}(A) \oplus F_{\otimes}(B \oplus C) \\ {\scriptstyle n_{\oplus}\oplus 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\oplus\nu^R_{\otimes}} \\ (F_{\oplus}(A) \oplus F_{\oplus}(B)) \oplus F_{\otimes}(C) & \xrightarrow[a_{\oplus}]{} & F_{\oplus}(A) \oplus (F_{\oplus}(B) \oplus F_{\oplus}(C)) \end{array}$$

(b) $F_{\otimes}(a_{\oplus})\nu^L_{\otimes}(1 \oplus n_{\oplus})\ = \nu^L_{\oplus}(\nu^L \oplus 1)a_{\oplus}$

(c) $(m_{\otimes} \otimes 1)\nu^R_{\oplus}F_{\oplus}(a_{\otimes})\ = a_{\otimes}(1 \otimes \nu^R_{\oplus})\nu^R_{\oplus}$

(d) $(\nu^R_{\oplus} \otimes 1)\nu^L_{\oplus}F_{\oplus}(a_{\otimes})\ = a_{\otimes}(1 \otimes m_{\otimes})\nu^L_{\oplus}$

[法学学士3] $(a)\quad F_{\otimes}\ (a_{\oplus})\ \ (1 \oplus \nu^L_{\otimes})\ \ = \nu^L_{\otimes}\ (\nu^R_{\otimes} \oplus 1)\ a_{\oplus}$

$$\begin{array}{ccc} F_{\otimes}((A \oplus B) \oplus C) & \xrightarrow{F_{\otimes}(a_{\oplus})} & F_{\otimes}(A \oplus (B \oplus C)) \\ {\scriptstyle \nu^L_{\otimes}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu^R_{\otimes}} \\ F_{\otimes}(A \oplus B) \oplus F_{\oplus}(C) & & F_{\oplus}(A) \oplus F_{\otimes}(B \oplus C) \\ {\scriptstyle \nu^R_{\otimes}\oplus 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\oplus\nu^L_{\otimes}} \\ (F_{\oplus}(A) \oplus F_{\otimes}(B)) \oplus F_{\oplus}(C) & \xrightarrow[a_{\oplus}]{} & F_{\oplus}(A) \oplus (F_{\otimes}(B) \oplus F_{\oplus}(C)) \end{array}$$

(b) $(\nu^R_{\oplus} \otimes 1)\nu^L_{\oplus}F_{\oplus}(a_{\otimes}) = a_{\otimes}(1 \otimes \nu^L_{\oplus})\nu^R_{\oplus}$

[法学学士4] $(a)\quad (1\otimes\nu^R_\otimes)\quad (\nu^R_\oplus\oplus 1)\quad = m_\otimes F_\otimes\ (\partial^L)\ \nu^R_\otimes$

$$\begin{array}{ccc} F_\otimes(A)\otimes F_\otimes(B\oplus C) & \xrightarrow{1\otimes\nu^R_\otimes} & F_\otimes(A)\otimes(F_\oplus(B)\oplus F_\otimes(C)) \\ \downarrow{\scriptstyle m_\otimes} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^L} \\ F_\otimes(A\otimes(B\oplus C)) & & (F_\otimes(A)\otimes F_\oplus(B))\oplus F_\otimes(C) \\ \downarrow{\scriptstyle F_\otimes(\partial^L)} & & \downarrow{\scriptstyle \nu^R_\oplus\oplus 1} \\ F_\otimes((A\otimes B)\oplus C) & \xrightarrow[\nu^R_\otimes]{} & F_\oplus(A\oplus B)\oplus F_\otimes(C) \end{array}$$

$(b)\ (\nu^L_\otimes\otimes 1)\partial^R(1\oplus\nu^L_\oplus) = m_\otimes F_\otimes(\partial^R)\nu^L_\otimes$

$(c)\ (1\otimes\nu^L_\otimes)\partial^L(\nu^L_\oplus\oplus 1) = \nu^L_\oplus F_\oplus(\partial^L)n_\oplus$

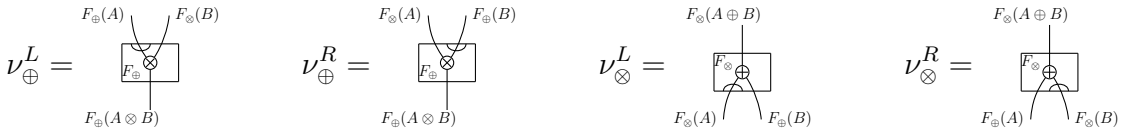
$(d)\ (\nu^R_\otimes\otimes 1)\partial^R(1\oplus\nu^R_\oplus) = \nu^R_\oplus F_\oplus(\partial^R)n_\oplus$

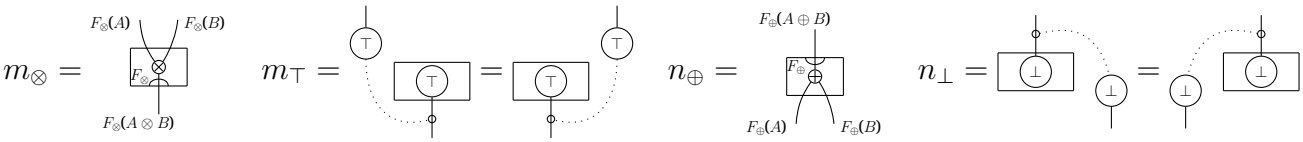
[LF。5] $(a)\quad (1\otimes\nu^L_\otimes)\ \partial^L\ (m_\otimes\oplus 1)\ = m_\otimes F_\otimes\ (\partial^L)\ \nu^L_\otimes$

$$\begin{array}{ccc} F_\otimes(A)\otimes F_\otimes(B\oplus C) & \xrightarrow{1\otimes\nu^L_\otimes} & F_\otimes(A)\otimes(F_\otimes(B)\oplus F_\oplus(C)) \\ \downarrow{\scriptstyle m_\otimes} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^L} \\ F_\otimes(A\otimes(B\oplus C)) & & (F_\otimes(A)\otimes F_\otimes(B))\oplus F_\oplus(C) \\ \downarrow{\scriptstyle F_\otimes(\partial^L)} & & \downarrow{\scriptstyle m_\otimes\oplus 1} \\ F_\otimes((A\otimes B)\oplus C) & \xrightarrow[\nu^L_\otimes]{} & F_\otimes(A\otimes B)\oplus F_\otimes(C) \end{array}$$

$(b)\quad (\nu^R_\otimes\otimes 1)\ \partial^R\ (1\oplus m_\otimes)\ = m_\otimes F_\otimes$
$(\partial^R)\ \nu^R_\otimes\ (c)\quad (1\otimes n_\oplus)\ \partial^L\ (\nu^R_\oplus\oplus 1)$
$= \nu^R_\oplus F_\oplus\ (\partial^L)\ n_\oplus\ (d)\quad (n_\oplus\otimes 1)\ \partial^R\ ($
$1\oplus\nu^L_\oplus)\ = \nu^L_\oplus F_\oplus\ (\partial^R)\ n_\oplus$

在图形演算中，函子用线性函子方框表示 [36]。线性函子框可以是幺半群的，也可以是余幺半群的。当函子框是幺半群的（$F_\otimes$）时，它有一条主输出线（类型为 $F_\otimes$），由导线离开方框处的端口表示；其他导线（类型为 $F_\oplus$）则是辅助线。当方框是余幺半群的（$F_\oplus$）时，它有一条带端口的主输入线（类型为 $F_\oplus$），其他导线（类型为 $F_\otimes$）则是辅助线。函子框遵循一种非常自然的“框吃框”演算，详见 [36]。只有当带端口的线与辅助线相交时，一个框才能吃掉另一个框。图形演算中的线性强度绘制如下：





在对称 LDC 的范畴论教义中工作时，我们期望线性函子保持对称性。因此，**对称线性函子**是一个线性函子$F = (F_\otimes,\ F_\oplus)$，并且还满足：

$$\begin{array}{ccc} F_\otimes(A)\otimes F_\otimes(B) & \xrightarrow{m_\otimes} & F_\otimes(A\otimes B) \\ {\scriptstyle c_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_\otimes(c_\otimes)} \\ F_\otimes(B)\otimes F_\otimes(A) & \xrightarrow[m_\otimes]{} & F_\otimes(B\otimes A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_\oplus(A\oplus B) & \xrightarrow{n_\otimes} & F_\oplus(A)\oplus F_\oplus(B) \\ {\scriptstyle F_\oplus(c_\oplus)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_\oplus} \\ F_\oplus(B\otimes A) & \xrightarrow[n_\oplus]{} & F_\oplus(B)\oplus F_\oplus(A) \end{array}$$

线性函子保对偶：

引理 2.14. *[35]* 线性函子保对偶：当 $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个线性函子，且$(\eta, \epsilon) :\ A \dashv B \in \mathbb{X}$时，则 $F_\otimes(A) \dashv F_\oplus(B)$ 以及 $F_\oplus(A) \dashv F_\otimes(B)$。

证明。 伴随 (η', ϵ') : $F_\otimes(A) \dashv F_\oplus(B)$ 的单位和余单位如下给出：

$$\eta' := \top \xrightarrow{m_\top} F_\otimes(\top) \xrightarrow{F_\otimes(\eta)} F_\otimes(A\oplus B) \xrightarrow{\nu^L_\otimes} F_\otimes(A)\oplus F_\oplus(B) =$$



$$\epsilon' := F_\oplus(B)\otimes F_\otimes(A) \xrightarrow{\nu^L_\oplus} F_\oplus(B\otimes A) \xrightarrow{F_\oplus(\epsilon)} F_\oplus(\bot) \xrightarrow{n_\bot} \bot =$$



另一个伴随的单位和余单位的定义类似。 □

线性函子之间的自然变换也分解为两个分量，分别通过幺半变换连接张量函子，并沿相反方向通过余幺半群变换连接 par 函子。

两个幺半函子之间的幺半变换 $\alpha :\ F \Rightarrow G$ 是一个自然变换 $\alpha :\ F \Rightarrow G$，满足以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F(A)\otimes F(B) & \xrightarrow{\alpha_A\otimes\alpha_B} & G(A)\otimes G(B) \\ {\scriptstyle m^F_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^G_\otimes} \\ F(A\otimes B) & \xrightarrow[\alpha_{A\otimes B}]{} & G(A\otimes B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & & \\ {\scriptstyle m^F_I}\downarrow & \searrow^{m^F_I} & \\ F(I) & \xrightarrow[\alpha_I]{} & G(I) \end{array}$$

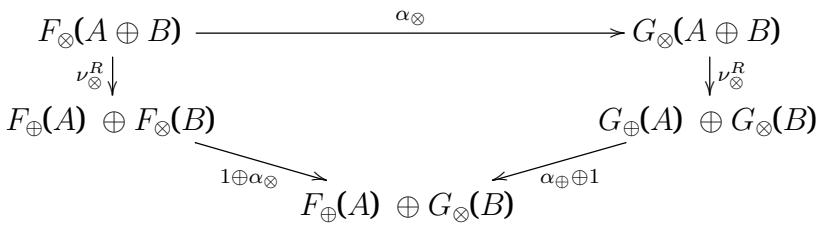
余幺半变换的相干条件正是上述相干条件的镜像。

定义 2.15。 *[36, 定义 3]* **A 线性（自然）变换**[1]，$\alpha :\ F \to G$，平行线性函子 F，G : $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 由一对自然变换组成

[1]在本文中，线性变换是线性函子之间的自然变换，不同于线性代数中的线性变换。为简洁起见，我们省略“自然”一词。

$\alpha = (\alpha_\otimes, \alpha_\oplus)$ 使得 $\alpha_\otimes : F_\otimes \to G_\otimes$ 是幺半变换，而 $\alpha_\oplus : G_\oplus \to F_\oplus$ 是满足以下相干条件的余幺半群变换：

[**LT.1**] $a_\otimes \nu^R_\otimes(a_\oplus \oplus 1) = \nu^R_\otimes(1 \oplus a_\otimes)$

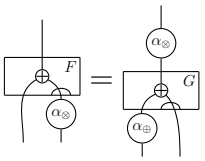


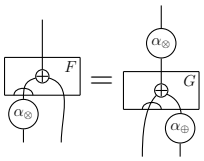
[**LT.2**] $\alpha_\otimes \nu^L_\otimes(1 \oplus \alpha_\oplus) = \nu^L_\otimes(\alpha_\otimes \oplus 1)$

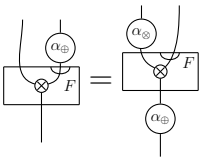
[**LT.3**] $(1 \otimes \alpha_\otimes)\nu^L_\oplus(\alpha_\oplus) = (\alpha_\oplus \otimes 1)\nu^L_\oplus$

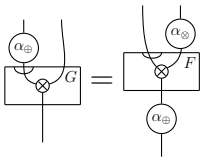
[**LT.4**] $(\alpha_\otimes \otimes 1)\nu^R_\oplus \alpha_\oplus = (1 \otimes \alpha_\oplus)\nu^R_\oplus$

条件 [**LT.1**] - [**LT.4**] 表示如下：

[**LT.1**] 

[**LT.2**] 

[**线性变换。3**] 

[**线性变换。4**] 

线性函子的伴随η, ϵ)：$F \dashv G$ 是通常意义上的伴随（即满足三角等式），存在于由线性函子和线性自然变换构成的 LDC 2-范畴中。特别地，这样的伴随产生一对伴随：($\eta_\otimes$, $\epsilon_\otimes$)：$F_\otimes \dashv G_\otimes$ 这是一个幺半群伴随；以及 ($\epsilon_\oplus$, $\eta_\oplus$)：$G_\oplus \dashv F_\oplus$ 这是一个余幺半群伴随。根据 Kelly 的结果，[86], 一个具有右伴随的函子是余幺半群的，当且仅当它的右伴随是幺半群的。由此可得以下观察：

引理 2.16。如果(η, ϵ)：$F \dashv G$ 是线性函子的伴随，那么 $F_\otimes$ 关于 $\otimes$ 是同构幺半群的（或强的），而 $F_\oplus$ 是同构余幺半群的，从而使线性函子 F 成为强函子。

证明。由于 ($\eta_\otimes$, $\epsilon_\otimes$)：$F_\otimes \dashv G_\otimes$ 是幺半群伴随，左伴随 ($F_\otimes$, $m_\otimes$, $m_\top$) 是强幺半群函子。同样，由于 ($\epsilon_\oplus$, $\eta_\oplus$)：$G_\oplus \dashv F_\oplus$ 是余幺半群伴随，右伴随 ($F_\oplus$, $n_\oplus$, $n_\bot$) 是强余幺半群函子。 □

线性等价是指其单位和余单位均为线性自然同构的线性伴随。

2.2.2 isomix范畴的线性函子

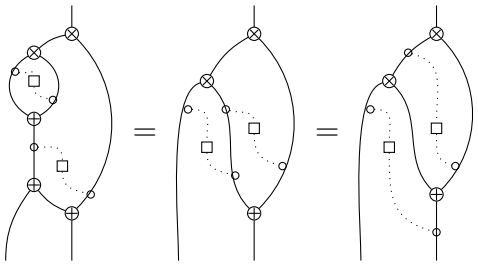
任意 isomix 范畴 $(\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)$ 总有两个线性函子 $\mathrm{Mx}^{\downarrow}:(\mathbb{X},\ \otimes,\ \otimes)\ \to(\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)$ 和 $\mathrm{Mx}^{\uparrow}:(\mathbb{X},\ \oplus,\ \oplus)\ \to(\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)$，它们由恒等函子给出，也就是说 $(\mathrm{Mx}^{\uparrow})_{\otimes}=(\mathrm{Mx}^{\uparrow})_{\oplus}=\mathrm{Id}=(\mathrm{Mx}^{\downarrow})_{\otimes}=(\mathrm{Mx}^{\downarrow})_{\oplus}$。线性强度和幺半映射由混合映射和混合子的逆给出。这些混合函子将张量（分别是 par）上的退化线性结构扩展到两种张量结构上。

引理 2.17. 对于任意 *isomix* 范畴 $\mathbb{X}$，函子 $\mathrm{Mx}^{\downarrow}:(\mathbb{X},\otimes,\otimes)\ \to(\mathbb{X},\otimes,\oplus)$ 和$\mathrm{Mx}^{\uparrow}:(\mathbb{X},\oplus,\oplus)\ \to(\mathbb{X},\otimes,\oplus)$ 都是线性函子。

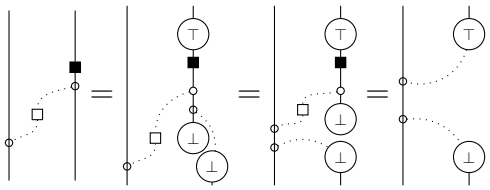
证明。 我们证明 $\mathrm{Mx}^{\downarrow}:(\mathbb{X},\otimes,\otimes)\ \to(\mathbb{X},\otimes,\oplus)$ 是一个线性函子：该函子的幺半群分量和共幺半群分量分别由 $(1,1,1)$ 和 $(1,\mathrm{mx},\mathrm{m}^{-1})$ 给出。线性强度为 $\nu^{L}_{\otimes}\ =\ \nu^{R}_{\otimes}:$ $A\otimes B\ \to\ A\oplus B:=\mathrm{mx}$ 和 $\nu^{L}_{\oplus}\ =\ \nu^{R}_{\oplus}:\ A\oplus B\to A\oplus B:=1$。

首先我们证明 $(1,\ \mathrm{mx},\ \mathrm{m}^{-1}):(\mathbb{X},\ \otimes,\ \otimes)\ \to(\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)$ 是一个幺半函子 ：

- 幺半群函子的结合律，$(\mathrm{mx}\otimes 1)\ \mathrm{mx}\ a_{\oplus}=a_{\otimes}\ (1\otimes\mathrm{mx})\ \mathrm{mx}$，成立 ：



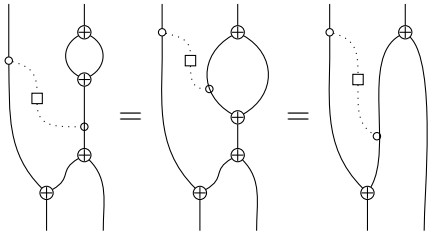
- 幺半群函子的单位律成立。下面给出 $(1\otimes\mathrm{m}^{-1})\mathrm{mx}\ =u^{L}_{\otimes}(u^{L}_{\oplus})^{-1}$ 的图示证明，其中填充的矩形表示 m^{-1}:



另一个单位律同理成立。

$\mathrm{Mx}^{\downarrow}:(\mathbb{X},\otimes,\otimes)\ \to(\mathbb{X},\otimes,\oplus)$ 满足线性函子的所有相容性要求：[**LF.1**]，[**LF.2**],以及 [**LF.3**] 成立，因为 $(\mathrm{Mx}^{\downarrow})_{\otimes}$ 和 $(\mathrm{Mx}^{\downarrow})_{\oplus}$ 分别是幺半群的和余幺半群的

分别， [**LF.4**](a) 变为 $\mathrm{mx}a_{\oplus}^{-1} = \partial^{L}(\mathrm{mx} \oplus 1)$，并且成立，因为：



[**LF.4**] (b) - (d) 与 [**LF.5**] (a) - (d) 同样成立。因此，
Mx↓ 是线性函子。证明 Mx↑ 是线性函子的方法是取
（线性）对偶 □

推论 2.18。 当 $\mathbb{X}$ 是紧 *LDC* 时，混合函子 Mx↓ 和 Mx↑ 是线性同构。因此，紧*LDC* 在线性意义下等价于幺半范畴。

我们将 Mx↓ 的逆记为 $\mathrm{Mx}^{*}_{\downarrow}$：$(\mathbb{X}, \otimes, \oplus) \to (\mathbb{X}, \oplus, \oplus)$：作为单纯的函子，这是恒等函子；在 par 结构上是严格的，而在张量结构上，其单位 laxor 为 m，张量 laxor 为 mx^{-1}。类似地，我们将 Mx↑ 的逆记为 $\mathrm{Mx}^{*}_{\uparrow}$。

线性函子 Mx↓ 和 Mx↑ 是同构混合弗罗贝尼乌斯函子的例子，我们将在下一节正式介绍它们。

2.2.3 弗罗贝尼乌斯函子

在本文中，我们将关注 LDCs 之间的线性函子，这些函子称为弗罗贝尼乌斯函子，并有多种形式，包括混合函子和 isomix 函子，如图 2.2 所示。这些函子与 [55] 中的弗罗贝尼乌斯 幺半函子直接相关，并且在 [27] 中被称为退化线性函子。此外，我们已经见过两个相当基本的例子，即Mx↑ 和 Mx↓。

弗罗贝尼乌斯函子保持对偶，并且在附加的相容条件下保持混合映射。通过要求匕首函子是弗罗贝尼乌斯对合等价，可以推出 LDC 上匕首所需的相容性要求。一旦理解了匕首，我们就可以考虑 †-混合范畴及其函子；我们将把这些函子取为混合 Frobenius 函子，并进一步要求它们保持匕首。

定义 2.19. 令 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 为线性分配范畴。**Frobenius函子** 是一个线性函子 $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，满足：

[**FLF.1**] $F_{\otimes} = F_{\oplus}$

[**FLF.2**] $m_{\otimes} = \nu_{\oplus}^{R} = \nu_{\oplus}^{L}$

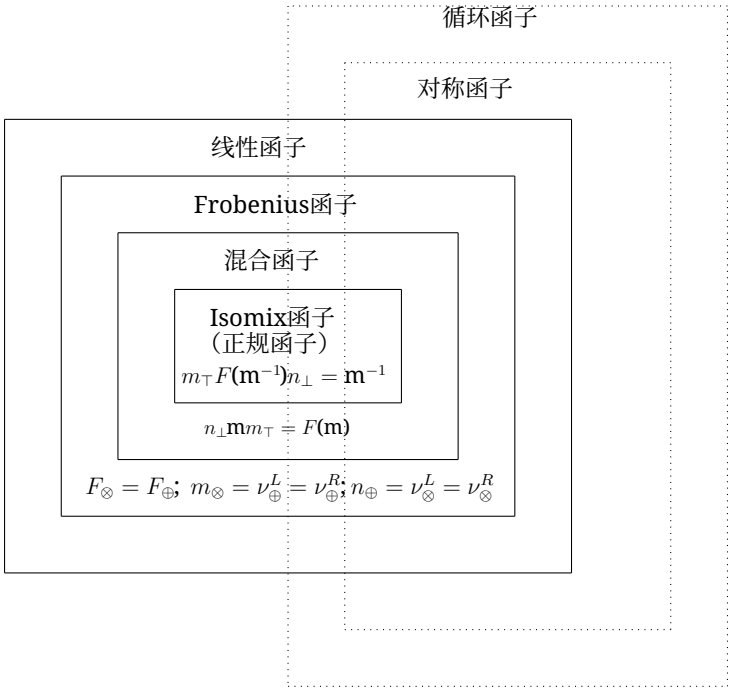
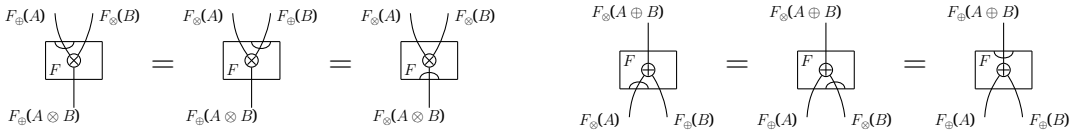


图 2.2：线性函子族

[**FLF.3**] $n_\oplus = \nu^L_\otimes = \nu^R_\otimes$

$\otimes$ 和 $\oplus$ 的左右线性强度分别与 $m_\otimes$ 和 $n_\oplus$ 重合，这意味着在图示演算中，端口可以自由移动：



$$\nu^L_\oplus = \nu^R_\oplus = m_\otimes \qquad\qquad \nu^L_\otimes = \nu^R_\otimes = n_\oplus$$

这意味着电路中可以省略端口。

如果 Frobenius函子作为线性函子保持张量和 par 的对称性，则称其为**对称的**。

引理2.20。 设 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$ 是线性分配范畴。以下各项等价：

(a) $F\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ 是一个 *Frobenius* 线性函子。

(b) F 是 $\otimes$-幺半群的且 $\oplus$-余幺半群的，使得

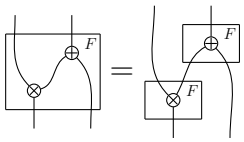
$$\begin{array}{ccc} F(A)\otimes F(B\oplus C) & \xrightarrow{1\otimes n_\oplus} & F(A)\otimes (F(B)\oplus F(C)) \\ \downarrow{\scriptstyle m_\otimes} & [\mathbf{F}.1] & \downarrow{\scriptstyle \delta^L} \\ F(A\otimes (B\oplus C)) & & (F(A)\otimes F(B))\oplus F(C) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\delta^L)} & & \downarrow{\scriptstyle m_\otimes\oplus 1} \\ F((A\oplus B)\oplus C) & \xrightarrow[n_\oplus]{} & F(A\oplus B)\oplus F(C) \end{array}$$

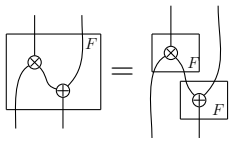
$$\begin{array}{ccc} F(A\oplus B)\otimes F(C) & \xrightarrow{n_\oplus\otimes 1} & (F(A)\oplus F(B))\otimes F(C) \\ \downarrow{\scriptstyle m_\otimes} & [\mathbf{F}.2] & \downarrow{\scriptstyle \delta^R} \\ F((A\oplus B)\otimes C) & & F(A)\oplus (F(B)\otimes F(C)) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\delta^R)} & & \downarrow{\scriptstyle 1\oplus m_\otimes} \\ F(A\oplus (B\otimes C)) & \xrightarrow[n_\oplus]{} & F(A)\oplus F(B\otimes C) \end{array}$$

证明。对于 (a)⇒(b)，固定 $F := F_\otimes = F_\oplus$，则 F 是 $\otimes$-幺半群的，也是 $\oplus$-余幺半群的。条件[**F.1**] 和 [**F.2**] 由 [**LF.5**]-(a) 和 [**LF.5**]-(b)给出。反过来，定义$F_\otimes = F_\oplus := F$。接下来很容易验证，$(F_\otimes, F_\oplus)$ 满足 Frobenius 线性函子的所有公理。

□

条件 [**F。1**] 并且 [**F。2**] 在引理2.20 用图表表示如下：

[**F.1**] 

[**F.2**] 

Frobenius函子复合：复合定义为线性函子的通常复合 [38]。

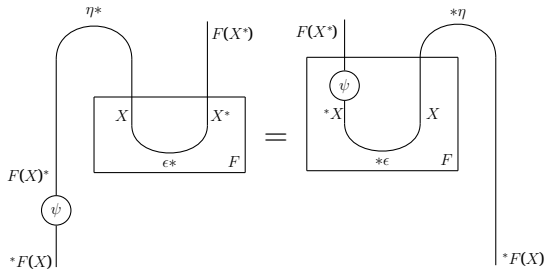
由引理 2.14 可立即得出，Frobenius函子保持线性对偶。事实上，如果 $F\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是一个Frobenius函子，且 $A\dashv B$ 是一个线性对偶，由于对偶 $F_\otimes(A)\dashv F_\oplus(B)$ 和 $F_\oplus(A)\dashv F_\otimes(B)$ 现在重合，我们只得到一个对偶 $F(A)\dashv F(B)$。当Frobenius函子处于循环的 $*$-自伴范畴之间时，我们期望该函子具有**保持cyclor** 的性质，具体如下：

$$[\mathbf{CFF}]\qquad \begin{array}{ccc} F(X^*) & \xrightarrow{F(\psi)} & F({}^*X) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ F(X)^* & \xrightarrow[\psi]{} & {}^*F(X) \end{array}$$

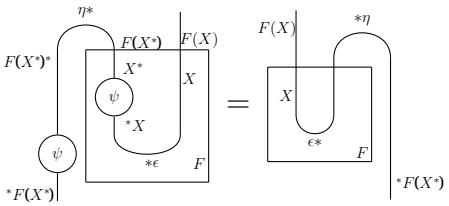
其中，左侧和右侧的竖直态射分别是以下映射：

$(u^R_{\otimes})^{-1}(\eta * \otimes 1)\delta^R(1 \oplus (m^F_{\otimes}F(\epsilon *)n^F_{\perp})u^R_{\oplus}$和 $(u^R)^{-1}(1 \otimes *\eta)\delta^L(m^F_{\otimes} \oplus 1)((F(*\epsilon)n^F_{\perp}) \oplus 1)u^L_{\oplus}$

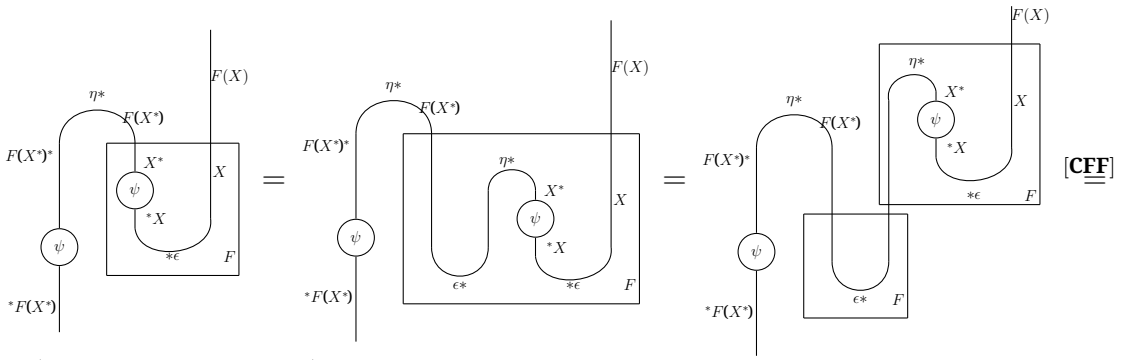
旋转子保持条件可以用图示表示如下：

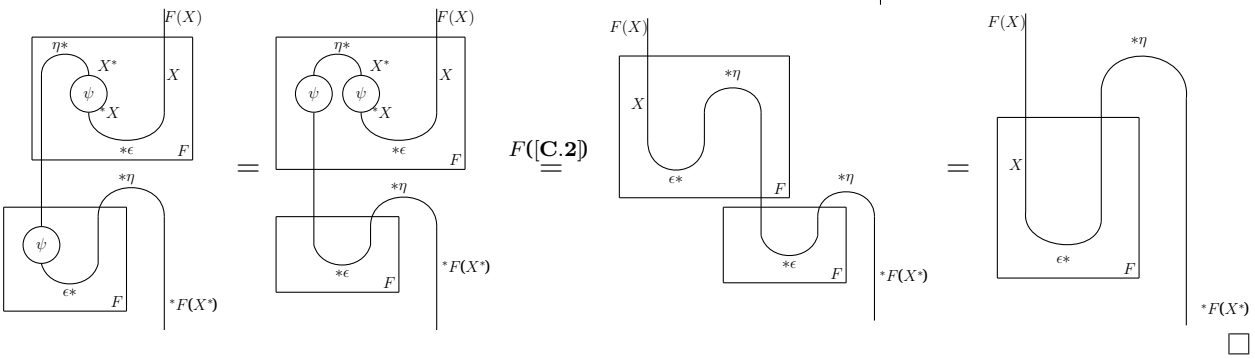


引理 2.21。 设 F 是旋轮保持的弗罗贝尼乌斯线性函子，则



证明。



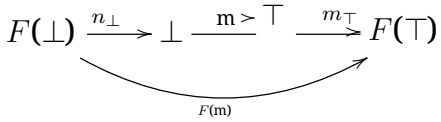


□

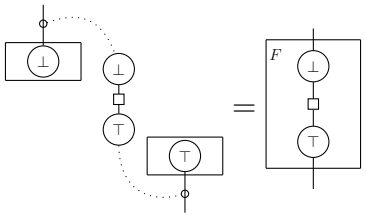
定义 2.2. 假设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是混合范畴。 $F\colon\ \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个**混合函子**，如果它

是一个满足以下条件的 *Frobenius*函子

[**mix-FF**]



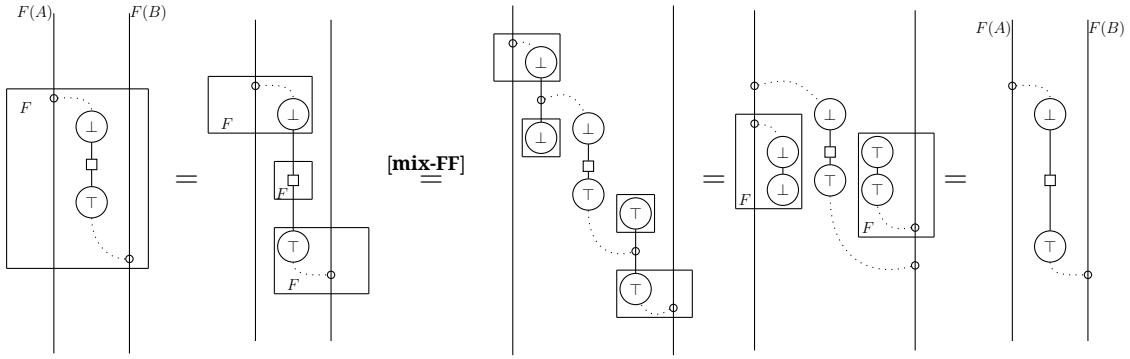
方程 [**mix-FF**] 可用图表表示如下：



引理 2.23. 混合函子保持混合映射：

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes F(B) & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & F(A) \oplus F(B) \\ {\scriptstyle m_\otimes}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle n_\oplus} \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow[F(\mathsf{mx})]{} & F(A \oplus B) \end{array}$$

证明。



□

Frobenius函子 $(\alpha_\otimes, \alpha_\oplus)$：$F \to G$ 之间的线性自然同构通常具有带有 $\alpha_\otimes = \alpha_\oplus^{-1}$ 的特殊形式：这使得相容性要求得以简化。下面的结果描述了这种情况出现的一些基本情形：

引理 2.24. 设 $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是 *Frobenius* 线性函子，且 $\alpha := (\alpha_\otimes, \alpha_\oplus)\colon F \Rightarrow G$是一个线性自然变换。那么，下列条件等价：

(i) [**自然性1**](a) 或 [**自然性1**](b) 成立，并且 $\alpha_\otimes$ 或 $\alpha_\oplus$ 是一个同构。

[nat.1]
$$\begin{array}{ccc} \top & \xrightarrow{m_\top} & G(\top) \\ & \searrow^{m_\top} \quad (a) & \downarrow{\scriptstyle \alpha_\oplus} \\ & & F(\top) \end{array} \qquad or \qquad \begin{array}{ccc} F(\bot) & \xrightarrow{\alpha_\otimes} & G(\bot) \\ & \searrow_{n_\perp} \quad (b) & \downarrow{\scriptstyle n_\perp} \\ & & \bot \end{array}$$

(ii) [**自然性1**](a) 或 [**自然性1**](b) 之一成立，并且下列交换图之一成立。

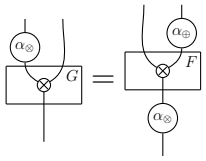
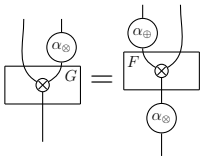
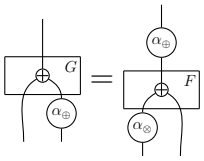
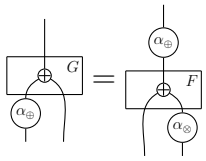
[nat.2]
$$\begin{array}{ccc} G(A)\otimes F(B) & \xrightarrow{1\otimes\alpha_\otimes} & G(A)\otimes G(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_\oplus\otimes 1} & & \\ F(A)\otimes F(B) & (a) & \downarrow{\scriptstyle m^G_\otimes} \\ \downarrow{\scriptstyle m^F_\otimes} & & \\ F(A\otimes B) & \xrightarrow[\alpha_\otimes]{} & G(A\otimes B) \end{array} \qquad or \qquad \begin{array}{ccc} F(A)\otimes G(B) & \xrightarrow{\alpha_\otimes\otimes 1} & G(A)\otimes G(B) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\alpha_\oplus} & & \\ F(A)\otimes F(B) & (b) & \downarrow{\scriptstyle m^G_\otimes} \\ \downarrow{\scriptstyle m^F_\otimes} & & \\ F(A\otimes B) & \xrightarrow[\alpha_\otimes]{} & G(A\otimes B) \end{array}$$

$$or \qquad \begin{array}{ccc} G(A\oplus B) & \xrightarrow{n^G_\oplus} & G(A)\oplus G(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_\oplus} & & \\ F(A\oplus B) & (c) & \downarrow{\scriptstyle 1\oplus\alpha_\oplus} \\ \downarrow{\scriptstyle n^F_\oplus} & & \\ F(A)\oplus F(B) & \xrightarrow[\alpha_\otimes\oplus 1]{} & G(A)\oplus F(B) \end{array} \qquad or \qquad \begin{array}{ccc} G(A\oplus B) & \xrightarrow{n^G_\oplus} & G(A)\oplus G(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_\oplus} & & \\ F(A\oplus B) & (d) & \downarrow{\scriptstyle \alpha_\oplus\oplus 1} \\ \downarrow{\scriptstyle n_\oplus} & & \\ F(A)\oplus F(B) & \xrightarrow[1\otimes\alpha_\otimes]{} & F(A)\oplus G(B) \end{array}$$

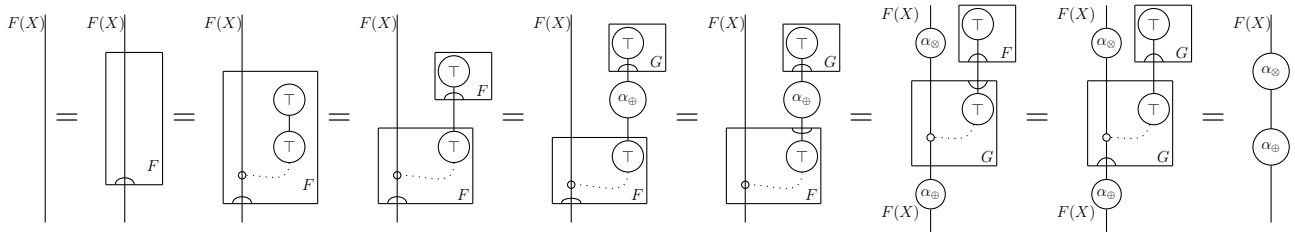
(iii) $\alpha_\otimes^{-1} = \alpha_\oplus$

(iv) $\alpha' := (\alpha_\oplus, \alpha_\otimes) : G \Rightarrow F$ 是一个线性变换。

在图形演算中，条件 [**自然性2**] 如下：

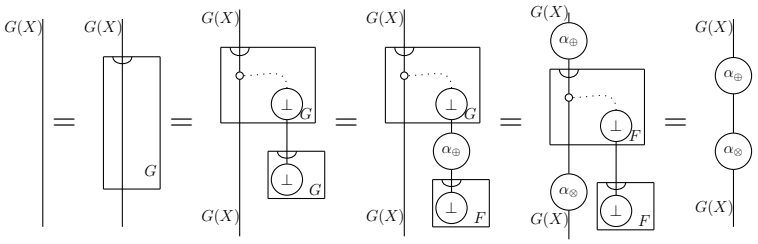
(a)  (b)  (c)  (d) 

证明。 $(i) \Rightarrow (iii)$：假设 [**自然性1**](a) 成立， $\alpha_\otimes\alpha_\oplus = 1$，证明如下：



如果 $\alpha_\otimes$ 或 $\alpha_\oplus$ 是同构，则这意味着 $\alpha_\oplus\alpha_\otimes = 1$。

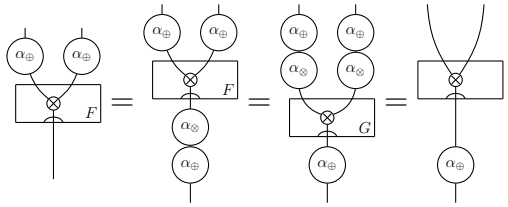
$(ii) \Rightarrow (iii)$: [**自然性1**](**a**) 或 (**b**) 的假设如上所述推出了 $\alpha_\otimes \alpha_\oplus = 1$。例如，使用[**自然性2**](**c**) 可得到 $\alpha_\oplus \alpha_\otimes = 1$:



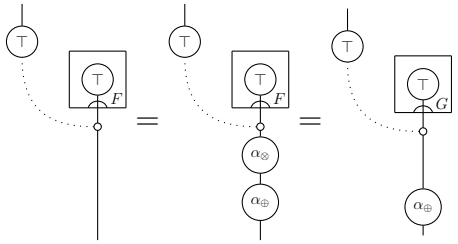
由于 $\alpha_\otimes \alpha_\oplus = 1$ 和 $\alpha_\otimes \alpha_\oplus = 1$，我们有 $\alpha_\otimes = \alpha_\oplus^{-1}$。规则的其他组合也以类似方式使用。

$(iii) \Rightarrow (iv)$: 如果 $\alpha_\otimes = \alpha_\oplus^{-1}$，则

$(\alpha_\oplus \otimes \alpha_\oplus) m_\otimes^F = m_\otimes^G \alpha_\otimes : G(A) \otimes G(B) \to F(A \otimes B)$



$m_\top^F = m_\top^G \alpha_\oplus$： $\top \to F(\top)$



因此， $\alpha_\otimes$ 是余幺半群的。同样，可以证明 $\alpha_\oplus$ 是幺半群的。线性变换的公理[**LT.4**] (**a**)-(**d**) 对于 $(\alpha_\oplus, \alpha_\otimes)$ 得到满足，因为 $\alpha_\oplus = \alpha_\otimes^{-1}$。

$(iv) \Rightarrow (i)$ 和 (ii): 公理 [**自然性1**] 和 [**自然性2**] 由 $(\alpha_\oplus, \alpha_\otimes)$ 是线性变换这一事实给出。

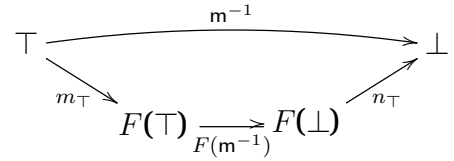
□

isomix范畴之间的Frobenius函子在伴随线性分配范畴的发展中尤为重要，并且它们通常满足一项额外性质:

定义 2.25. *isomix*范畴之间的 *Frobenius*函子是一个**isomix 函子**，当且仅当它是一个

混合函子，并且还满足以下图表：

[**isomix-FF**]



回顾一下，线性函子在 $m_\top$ 和 $n_\bot$ 均为同构时称为**正规**。我们观察到：

引理 2.26。对于混合 *Frobenius* 函子，在 *isomix* 范畴之间的 $F:\ \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，以下条件等价：

(i) $n_\bot\colon F(\bot) \to \bot$ 或 $m_\top\colon \top \to F(\top)$ 是同构；

(ii) F 是一个正规函子；

(iii) F 是一个 *isomix* 函子。

证明。

$(i) \Rightarrow (ii)$：注意，由于 F 是一个混合函子，$F(\mathsf{m}) = n_\bot \mathsf{m}\ m_\top$。由于混合映射 m 是一个同构，因此 $F(\mathsf{m})$ 也是同构，这意味着，如果 $n_\bot$ 是一个同构，那么 $m_\top$ 必定是一个同构，反之亦然。因此，F 将是一个正规函子。

$(ii) \Rightarrow (iii)$：如果 F 是正规的，那么 $n_\bot$ 和 $m_\top$ 是同构，因此

$$\dfrac{\dfrac{F(\mathsf{m}) = n_\bot \mathsf{m}\ m_\top}{F(\mathsf{m}^{-1}) = m_\top^{-1}\mathsf{m}^{-1}n_\bot^{-1}}}{m_\top F(\mathsf{m}^{-1})n_\bot = \mathsf{m}^{-1}}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$：对 F 的混合保持性使得 $n_\bot$ 成为一个截面（而 $m_\top$ 成为一个收缩），而同混合保持性使得 $m_\bot$ 成为一个收缩（而 $m_\top$ 成为一个截面）。这意味着 $n_\bot$ 是一个同构（$m_\top$ 是一个同构）。

□

推论 2.27。$\alpha := (\alpha_\otimes,\ \alpha_\oplus)$ 当且仅当 $\alpha_\otimes = \alpha_\oplus^{-1}$ 时，是同混合弗罗贝尼乌斯线性函子之间的线性自然同构。

证明。注意，如果我们能够证明 [**自然性1**](a) 或 (b)，那么我们就能证明 $\alpha_\otimes\alpha_\oplus = 1$；又由于 $\alpha_\otimes$ 是一个同构，因此可推出 $\alpha_\oplus\alpha_\otimes = 1$。因此，只需证明 [**自然性1**](a)成立：

$$m_\top\alpha_\oplus G(\mathsf{m}^{-1})n_\bot = m_\top F(\mathsf{m}^{-1})\alpha_\oplus n_\bot = m_\top F(\mathsf{m}^{-1})n_\bot = \mathsf{m}^{-1} = m_\top G(\mathsf{m}^{-1})n_\bot$$

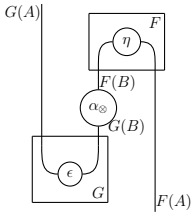
然而，由于 $G(\mathfrak{m}^{-1})n_\perp$ 是一个同构，因此可推出 $m_\top \alpha_\oplus = m_\top$。 □

引理 2.24和推论 2.27 是以下内容的推广： [55, 命题 7]。 [55, 命题7]陈述如下：

设 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$为幺半范畴，且 (η, ϵ)： $A \dashv B \in \mathbb{X}$。若 F, G： $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$是 Frobenius 幺半函子，且存在自然变换 α： $F \Rightarrow G$ ，该变换同时是幺半的和余幺半的，则 α_A 可逆。

在引理 2.24中，当 $A \dashv\vdash B \in \mathbb{X}$时， $\alpha_\oplus$ 定义如下：

$$\alpha_\oplus : G(A) \to F(A) =$$



对于这些带有 $\alpha_\otimes = \alpha_\oplus^{-1}$的特殊线性同构，我们可以简化相容性要求：

引理 2.28。 设 F 和 G 为 *Frobenius*函子，且 α ： $F \to G$ 是自然同构，则：

(i) 若 α ： $F \to G$ 是 $\otimes$-幺半的且 $\oplus$-余幺半的，则 (α, α^{-1}) 是线性变换；

(ii) 若 F 和 G 是强 *Frobenius* 函子，且 α 是 $\otimes$-幺半群的和 $\oplus$-幺半群的，那么(α, α^{-1}) 是一个线性变换。

证明。

(i) 若 α 是 $\otimes$-幺半群的且是 $\oplus$-余幺半群的，那么 α^{-1} 也是如此，这支持了它可以是线性变换的一个分量这一可能性。考虑 [**线性变换。1**] ， 我们证明 (α, α^{-1}) 满足此要求：

$$\begin{array}{ccc} F(A \oplus B) & \xrightarrow{\alpha_\otimes} & G(A \oplus B) \\ {\scriptstyle n_\oplus = \nu_\otimes^R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n_\oplus = \nu_\otimes^R} \\ F(A) \oplus F(B) & \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha} & G(A) \oplus G(B) \\ & {\scriptstyle 1 \oplus \alpha} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \alpha^{-1} \oplus 1} & \\ & F(A) \oplus G(B) & \end{array}$$

其余要求也可类似地得出。

(ii) 当函子的松弛器是同构时，幺半群性蕴含余幺半群性。

□

2.3 动机性例子

在第 2.1 节中，我们列举了几个线性分配范畴的例子。本节将介绍有限性关系范畴 FRel 以及交换幺半环 R 上的有限性矩阵范畴 FMat(R)，并讨论它们的性质。这些 isomix 范畴与范畴量子力学密切相关，因为这些范畴的核心被用作研究有限维量子过程的标准范畴模型： FMat(R 的核心等价于交换幺半环 R 上的有限维矩阵范畴，而 FRel 的核心是有限集与关系范畴。

本论文始终以范畴 FRel 和 FMat(R) 作为贯穿全文的例子。因此，本节旨在回顾 [64] 的研究成果，该研究首次引入了这些范畴。

2.3.1 有限性关系FRel 与有限性矩阵 FMat(R)

Ehrhard [64] 引入了有限性空间，作为 Girard 线性逻辑 [68] 的范畴模型。有限性空间 $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ 可视为一个集合 X，称为 X 的 **底集**，并配备两个子集族： $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的**有限性** 集合，而 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的**余有限** 集合。有限性集合与余有限集合必须互为有限性补（如下文所述），因此彼此确定。这意味着有限性空间通常只用有限性集合来表示。有限性空间之间的态射是底集之间的关系，这些关系保持有限性集合并反映余有限集合。以有限性关系为态射的有限性空间范畴是一个 isomix $*$-自伴范畴。本节旨在较为自足地介绍 FRel（有限关系范畴）以及 FMat(R)（取值于交换幺半环 R 的有限性矩阵范畴），并证明这两个范畴是对称的 †-$*$-isomix 范畴。

令 X 为任意一个集合， A， $B \subseteq X$ 那么当 A 为有限时， A 是 [64] [64, 到 B 的有限性正交 1] 截面，记作 $A \perp_f B$。给定一个由 X 的子集组成的集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{A}^{\perp} = \{B \subseteq X \mid \forall A \in \mathcal{A}, B \perp_f A\}$$

因此， $\mathcal{A}^{\perp}$ 是 X 的所有子集的集合，这些子集与 $\mathcal{A}$ 中的所有集合的交集都是有限的。注意：

引理 2.29。对于 $\mathcal{A}$， $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$（$X$）：

(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp} \subseteq \mathcal{A}^{\perp}$;

(ii) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp}$;

(*iii*) $\mathcal{A}^{\perp\perp\perp} = \mathcal{A}^{\perp}$;

(iv) $\mathcal{A}^{\perp}$ 是下集，且对有限并封闭；

(v) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\perp\perp}$，则 $\mathcal{P}_f(X) \subseteq \mathcal{A}$（即 $\mathcal{A}$ 包含所有有限子集）；
(vi) 若 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i^{\perp\perp}$对于 $i \in I$，则 $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = (\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i^{\perp})^{\perp}$（因此 $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = (\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i)^{\perp\perp}$）。

前两个观察确立了 $\mathcal{P}(X)$的子集上的一个伽罗瓦连接，由此可直接得到下一个观察。后两个观察则是有限性正交关系形式的简单推论。

定义 2.30。一个**有限性空间** 是一个三元组$(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$，其中 X 是一个集合，称为空间的**底集**，且 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$满足两个子集互为有限性补，即 $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{B}$ 且 $\mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{A}$。$\mathcal{A}$ 的元素是该有限性空间的**有限性的** 集合，而 $\mathcal{B}$ 的元素称为**余有限性的**集合。

由于余有限集完全由有限集决定，因此通常可将有限性空间写作 $(X, F(X)\ F(X)^{\perp})$，以表明该结构完全由底集和有限集决定。有限集和余有限集具有向下封闭性，即 $F(X) = {\downarrow}F(X)$，并且对任意交和有限并封闭。由于有限集与有限集和余有限集的交始终都是有限集，因此每个有限性空间的有限集和余有限集都必须包含所有有限子集。特别是，这意味着底集为有限集的有限性集，其每个子集都是有限集和余有限集。此外，每个集合 X 总是具有两种 “ 平凡 ” 有限性结构（有限集的情况下二者重合）：$(X, \mathcal{P}_f(X)\ \mathcal{P}(X))$ 和 $(X, \mathcal{P}(X)\ \mathcal{P}_f(X))$，其中 $\mathcal{P}_f(X)$ 是 X 的有限子集所构成的集合。另一方面，正如我们现在将看到的，无限集总是具有无穷多个非平凡有限性结构：

引理 2.31。

(i) 具有有限底集的有限性空间 $(X, F(X)\ F(X)^{\perp})$，其有限集与余有限集完全由 $F(X) = F(X)^{\perp} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_f(X)$ 确定；*(ii)* 每个无限集都承载着无穷多个非平凡有限性结构；*(iii)* 由 X 承载的有限性结构集合构成一个完备的（非分配）格，其中 $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq (X, \mathcal{A}', \mathcal{B}')$ 当且仅当 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$（等价地，$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$）。该格

结构定义如下：

$$\top := (X, \mathcal{P}(X), \mathcal{P}_f(X)) \qquad \bot := (X, \mathcal{P}_f(X), \mathcal{P}(X))$$

$$\bigwedge_i A_i := \left(X, \bigcap_i \mathcal{A}_i, \left(\bigcup_i \mathcal{A}_i \right)^{\bot\bot} \right) \qquad \bigvee_{i\in I} A_i := \left(X, \left(\bigcup_i \mathcal{A}_i \right)^{\bot\bot}, \bigcap_i \mathcal{B}_i \right)$$

证明。

(i) 这是显然的。

(ii) 当然，无限集可以有许多不同的有限性结构：考虑有限性空间 $(X, \{A\}^{\bot\bot}, \{A\}^{\bot})$，它由要求某个无限子集 $A \subseteq X$ 是有限性的生成，其中其补集 $\neg A$ 也是无限的。请注意，在这种情况下：

$$\{A\}^{\bot} = \{Y \mid Y \cap A \text{ is finite}\} = \{Y \mid Y \subseteq \neg A \cup F \text{ where } F \text{ is finite}\}$$

$$\{A\}^{\bot\bot} = \{X \mid X \subset A \cup F \text{ where } F \text{ is finite}\}$$

因此，只需证明这些集合中有无穷多个两两之差不是有限集：为此注意，选定一个无限集后，可以用同样的方式递归地将其再次分割。

(iii) 只需证明集合 $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{A}_i$ 和 $\bigvee_{i\in I} \mathcal{B}_i$ 互为补集。注意，每个集合 $B_i \in \mathcal{B}_i$ 都属于 $\bigvee_{i\in I} \mathcal{B}_i$，因此补集中的任意集合都必须属于每个 $\mathcal{B}_i$ 的补集，故也必须属于 $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{A}_i$。反过来，$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{A}_i$ 中的集合必然与每个有限并 $\bigcup_{i\in F} B_i$ 正交，因为它与每个 B_i 的交集都是有限的。因此，$(\bigvee_{i\in I} \mathcal{B}_i)^{\bot} = \bigwedge_{i\in I} \mathcal{A}_i$。

□

为了完成对范畴 FRel 的描述，我们来描述这些空间之间的态射：

定义 2.32. 两个有限性空间之间的**有限性关系** $R : (X, F(X)\ F(X)^{\bot}) \to (Y, F(Y)\ F(Y)^{\bot})$ 是一个满足以下条件的关系 $X \xrightarrow{R} Y$：

(i) 对所有 $A \in F(X) \quad A \triangleright R := \{y \mid \exists x \in A$ 满足 $xRy\} \in F(Y)$

(ii) 对所有满足 $xRy\} \in F(X)^{\bot}$ 的 $B \in F(Y)^{\bot}$，$R \triangleleft B := \{x \mid \exists y \in B$

这里我们使用一种可转换为寓言记号的记号，参见 [67],；在那里，许多这类证明可以在更一般的情形下完成，因此也可以形式化地应用于关系的一般范畴。当然，我们所考虑的是集合和关系。在这种记号下， $F(X)$ 中的有限集是恒等关系 $A \subseteq 1_X$ 的子关系，而余有限集 $B \in F(X)^{\perp}$ 是 $B \subseteq 1_Y$ 的子关系。正交关系 $A \perp_f A'$ 因而要求 $A \cap A' = AA'$ 是有限的。有限性关系是一个映射 $R\colon X \to Y$，满足对每个 $A \in F(X)$ 都有 $A \triangleright R := \mathsf{cod}(AR) \in F(Y)$，且对每个 $B \in F(Y)^{\perp}$ 都有 $R \triangleleft B := \mathsf{dom}(RB) \in F(X)^{\perp}$（回想一下，$\mathsf{dom}(R) = 1_X \cap RR^{\circ}$，而 $\mathsf{cod}(R) = 1_Y \cap R^{\circ}R$，其中 R° 是 R 的逆关系）。

有限关系由其定义域和陪域均为有限集这一条件确定：因此， $R : X \to Y$ 是有限的，当且仅当 $\mathsf{cod}(R) \subseteq_f 1_Y$ 且 $\mathsf{dom}(R) \subseteq_f 1_X$。由此， R 是有限性关系，当且仅当对于每个 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)^{\perp}$， ARB 都是有限关系。

请注意，一旦我们要求对每个 $A \in F(X)$ 都有 $A \triangleright R \in F(Y)$，那么每个 $B \in F(Y)^{\perp}$ 与 $A \triangleright R$ 的交集都是有限的，因此只有有限多个 $b \in (A \triangleright R) \cap B$，从而

$$\begin{aligned} ARB = AR((A \triangleright R) \cap B) &= AR \bigcup_{b \in A \triangleright R \cap B} \{b\} \\ &= \bigcup_{b \in A \triangleright R \cap B} AR\{b\} = \bigcup_{b \in A \triangleright R \cap B} (A \cap R \triangleleft \{b\})R\{b\} \end{aligned}$$

这意味着，只要 $R \triangleleft \{b\} \in F(X)^{\perp}$，每个 $A \cap R \triangleleft \{b\}$ 都是有限的；因此，由于对 $b \in A \triangleright R \cap B$ 的并是有限并，这就保证了 ARB 是有限关系，从而 R 是有限性关系。

本讨论给出了有限性关系条件的以下重要简化（见 Ehrhard [64]）：

引理 2.33. 以下各项等价：

(i) $R : X \to Y$ 是有限性关系；*(ii)* 对所有 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)^{\perp}$， ARB 都是有限关系；*(iii)* 对所有 $A \in F(X)$ 以及每个 $y \in Y$， $R\colon X \to Y$ 都有 $A \triangleright R \in F(Y)$ $R \triangleleft \{y\} \in F(X)^{\perp}$；*(iv)* 对所有 $B \in F(Y)^{\perp}$ 以及每个 $x \in X$， $R\colon X \to Y$ 都有 $R \triangleleft B \in F(X)^{\perp}$ $\{x\} \triangleright R \in F(Y)$。

证明。上述讨论证明了 *(i)* 等价于 *(ii)*。*(ii)* 蕴含 *(iii)* 现在显而易见（由逆关系的对称性，也可得出 *(ii)* 蕴含 *(iv)*）。最后，我们已在上文证明 *(iii)* 蕴含 *(ii)*（由逆关系的对称性，也可得出 *(iv)* 蕴含 *(ii)*）。 □

有限性关系范畴 FRel 的对象是有限性空间，映射是有限性关系，复合方式与关系范畴中的相同：

引理 2.34. 带有限性关系的有限性空间构成一个范畴 FRel，其复合为通常的关系复合，恒等映射为对角关系。

证明. 设 $X \xrightarrow{R} Y$ 和 $Y \xrightarrow{S} Z$ 是有限性关系。那么，对于 $A \in F(X)$，我们知道 $A \triangleright R \in F(Y)$，由此得到 $A \triangleright (RS) = (A \triangleright R) \triangleright S \in F(Z)$。类似地，对于 $B \in F(Z)^{\perp}$，有 $S \triangleleft B \in F(Y)^{\perp}$，因此 $(RS) \triangleleft B = (R \triangleleft (S \triangleleft B)) \in F(X)^{\perp}$。

显然，恒等关系总是有限性关系。 □

我们记录一个显而易见却十分重要的事实：存在一个忠实函子 $|\downarrow|$: FRel $\to$ Rel，它将有限性空间映射到其底集，将有限性关系映射到底层关系。我们将看到，该函子恰好保留了 FRel 作为等混合 *-自对偶范畴的结构，因此我们可以利用 Rel 已知的相干性性质，得到 FRel 相应的相干性性质。

有了有限性关系，就可以为任意交换幺半环 R 构造有限性矩阵范畴 FMat(R)。虽然 R 可以是任意交换幺半环，但我们最感兴趣的是 R 为复数的情形，因此关注范畴 FMat($\mathbb{C}$)。

范畴 FMat(R)（其中 R 是任意交换幺半环）定义如下：

对象： 有限性空间；

映射： 有限性矩阵 M：$X \to Y$ 其中 $M = [M_{i,j}]_{i \in X,\ j \in Y}$ 其中每个 $M_{i,\ j} \in R$ 且支撑 $|M|$ 是有限性关系，也就是说 $|M| = \{(i,\ j) \mid M_{i,\ j} \neq 0\}$ 是有限性关系；

复合： 矩阵乘法——注意，所有非零和都是有限的（见 Lemma 2.35 below），$\sum_j r_{i,j} s_{j,k} = \sum_{j \in \{i\} | r | \cap | s | \{k\}} r_{i,j} s_{j,k}$.

恒等映射： 单位矩阵。

请注意，虽然有限性矩阵可能是无限维的，但要计算两个有限性矩阵的复合，只需能够将有限个元素相乘，因此只需对有限个元素求和。这是因为每个矩阵的支撑始终是有限性关系，因此，计算复合时只需计算非零元素的积，而这些元素位于一个有限集与一个余有限集的交集中，所以是有限的。具体而言，这一观察如下：

引理 2.35. 若 $X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} Z$ 是有限性关系，则

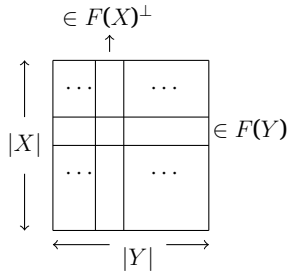


图 2.3：有限性矩阵

(i) 对所有 $x \in X$, $\{x\} \triangleright R \in F(Y)$,
以及 *(ii)* 对所有 $y \in Y$, $S \triangleleft \{z\} \in F(Y)^{\perp}$

(iii) 对所有的 $x \in X$ 和 $z \in Z$, $\{x\} \triangleright R \perp_f S \triangleleft \{z\}$，也就是说 $\{x\} \triangleright R \cap S \triangleleft \{z\}$ 是有限的。

在有限性矩阵 $X \xrightarrow{M} Y$中，矩阵的每一行的支撑都是一个 Y有限集，而每一列的支撑都是一个 X 余有限集，如图 2.3所示。

引理 2.36。 任意交换幺半环上的带有限性矩阵的有限性空间， R，构成一个范畴，$\mathsf{FMat}(R)$。

证明。 我们必须证明有限性矩阵在复合运算下封闭。我们已经知道，尽管有限性矩阵可以是无限维的，但由于它们的支撑是有限性关系，因此可以只用元素的有限和来相乘。不过，我们仍须证明两个有限性矩阵的积仍是有限性矩阵。

假设 $X \xrightarrow{P} Y$和 $Y \xrightarrow{Q} Z$, $[PQ]_{x,z} = \sum_{y \in Y} [P]_{x,y}[Q]_{x,y}$只有在$\exists\, y \in Y$时才可能非零，使得$[P]_{x,y}$和$[Q]_{y,z}$均非零；然而，即使存在 $y \in Y$，使得$[P]_{x,y}$和$[Q]_{y,z}$均非零，$[PQ]_{x,z}$仍可能为零。这意味着支撑 $|PQ| \subseteq |P||Q|$。由于有限性关系的任何子集都是有限性的， PQ是一个有限性矩阵。 □

证明表明，取矩阵的支撑通常会得到一个松弛 2-函子$|\ |$：$\mathsf{FMat}(R) \to \mathsf{FRel}$，如$\downarrow |MN| \leq |M||N|$所示。一般而言，如果 f： $R \to S$是半环态射，那么我们得到一个函子 $\mathsf{FMat}(f)$：$\mathsf{FMat}(R) \to \mathsf{FMat}(S)$：如果 S 是有序半环，且 f 具有适当的松弛性，那么 $\mathsf{FMat}(f)$ 就是一个松弛函子。回顾一下，二元格$\mathbb{2}$ 以并为加法、以交为乘法时，有 $\mathsf{FMat}(\mathbb{2}) = \mathsf{FRel}$。

2.3.2 FRel 和 FMat$R$ 中的积、余积与双积

现在我们开始探究 FRel 和 FMat(R) 的性质。首先注意到，FRel 上有一个显然的对合，即交换有限集与余有限集：

$$(\_)^* : \mathsf{FRel}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{FRel};\quad \begin{array}{ccc} (X,\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longmapsto & X^* = (X,\mathcal{B},\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle R}\downarrow & \longmapsto & \uparrow{\scriptstyle R^\circ} \\ (X',\mathcal{A}',\mathcal{B}') & \longmapsto & X'^* = (X',\mathcal{B}',\mathcal{A}') \end{array}$$

对于 FMat(R)，这个对合由矩阵转置给出：

$$(\_)^* : \mathsf{FMat}(R)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Mat}(R);\ \begin{array}{ccc} (X,\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longmapsto & X^* = (X,\mathcal{B},\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle (r_{i,j})_{i\in X, j\in X'}}\downarrow & \longmapsto & \uparrow{\scriptstyle (r_{j,i})_{j\in X', i\in X}} \\ (X',\mathcal{A}',\mathcal{B}') & \longmapsto & X'^* = (X',\mathcal{B}',\mathcal{A}') \end{array}$$

这个对合显然具有如下性质：$(X^*)^* = X$。这种对称性意味着，我们可以采用“单侧”的方法来建立结构，并利用对合自动生成对偶结构。稍后我们将看到，这个对合实际上是两个范畴的 $*$-自主结构中的对偶。

首先注意到：

引理 2.37. FRel 和 FMat(R) 对任意交换幺半环 R 都有任意积和余积。

证明. 设 $(X_i, F(X_i)\ F(X_i)^\perp)$ 是一族有限性空间。我们将证明余积的情形，因为积的论证与之对偶。有限性空间的余积 $\coprod_{i\in I} X_i$ 的底集是不交并，并带有单射 $\sigma_i : X_i \to \sqcup_{i\in I} X_i$。其有限集为 $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i\in I'} A_i\sigma_i \mid A_i \in F(X_i)\ \&\ I' \subseteq_f I\}$，而余有限集为 $\mathcal{B} = \{\bigcup_{i\in I} B_i\sigma_i \mid B_i \in F(X_i)^\perp\}$。首先注意，单射 $\sigma_i : X_i \to \sqcup_{i\in I} X_i$ 显然是有限性关系。作为关系，一族关系的比较映射 $R_i : X_i \to Y$ 是唯一的，且由 $\bigcup_{i\in I} \sigma_i^\circ R_i : \sqcup_{i\in I} X_i \to Y$ 给出：我们必须验证，假设每个 R_i 都是有限性关系时，这也是有限性关系。注意，若 $B \in F(Y)^\perp$，则

$$B\left(\bigcup_{i\in I} \sigma_i^\circ R_i\right)^\circ = \bigcup_{i\in I} BR_i^\circ\sigma_i$$

其中 $BR_i^\circ \in F(X_i)^\perp$，因此它属于 $\mathcal{B}$。反过来，给定 $\bigcup_{i\in I'} A_i\sigma_i \in \mathcal{A}$，将此映射向前

可得：

$$\left(\bigcup_{i\in I'} A_i\sigma_i\right)\left(\bigcup_{i\in I} \sigma_i^\circ R_i\right) = \bigcup_{i\in I'} A_i R_i$$

它是有限个 Y 的有限性集的并，因此是一个有限性集。

最后，我们必须检查，按照我们的定义，$\coprod_{i\in I} X_i$ 是一个有限性集，也就是说，$\mathcal{A}^\perp = \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^\perp = \mathcal{A}$。为此，假设 $H \subseteq \bigsqcup_{i\in I} X_i$ 与 $\mathcal{B}$ 正交，那么限制到每个 X_i 后，对于每个 $A_i \in F$，$H\sigma_i^\circ \cap A_i$ 都是有限的 $(X_i)^\perp$，因此只有有限个 i 使得它非空。但这意味着 $H \in \mathcal{A}$。反过来，假设 $K \subseteq \bigsqcup_{i\in I} X_i$ 与 $\mathcal{A}$ 正交，那么限制到 X_i 后，意味着每个 $K\sigma_i^\circ \in F(X_i)^\perp$，这意味着 $K = \bigcup_{i\in I} B_i\sigma$，因此属于 $\mathcal{B}$。

对于 FMat(R)，余积具有相同的底层有限性空间：接下来很容易验证，所有所需映射的支撑都恰当。 □

注意，在 FRel 和 FMat(R) 中，有限积与有限余积相同。因此，这两个范畴都有双积，因而是加性富集的（也就是说，它们富集于交换幺半群）。

推论 2.38。 *FRel* 和 $\mathsf{FMat}(R)$ 都有（有限）双积。

在 FRel 中，加性富集由底层关系的并给出。在 FMat(R) 中，加性富集由矩阵的逐点加法给出。

2.3.3 FRel 和 $\mathsf{FMat}(R)$中的张量结构

FRel 具有对称张量积，可以用它在 FMat(R) 上构造相应的张量积。我们先聚焦于 FRel，并定义 $X \otimes Y := (X \times Y,\ F(X \otimes Y)\ F(X \otimes Y)^\perp)$，其中

$$F(X \otimes Y) := {\downarrow}\{A \times B \mid A \in F(X), B \in F(Y)\}$$

其中 ${\downarrow}\mathcal{A} := \{A' \mid A' \subseteq A, A \in \mathcal{A}\}$ 是集合 $\mathcal{A}$的子集的向下闭包。为证明这一定义良好，我们必须证明 $F(X \otimes Y) = F(X \otimes Y)^{\perp\perp}$（这实质上就是 [64,引理 2]）：

引理 2.39。 对于任意有限性空间 X和 Y，$X \otimes Y =$（X、F（$X \otimes Y$） F（$X \otimes Y$）$^\perp$）如上所定义，都是定义良好的有限性空间。

证明。 我们必须证明，任何与任意有限相交的 $Q \subseteq X \times Y$，只要该 $P \subseteq X \times Y$又与所有 $R \in F(X \otimes Y)$ 有限相交，就必然已经属于 $F(X \otimes Y)$。反设按照定义，Q 不属于 $F(X \otimes Y)$；这意味着不存在

$A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)$ 使得 $Q \subseteq A \times B$。这反过来意味着，$\mathrm{dom}(Q) \notin F(X)$，或者 $\mathrm{cod}(Q) \notin F(Y)$。不妨假设前者成立：这意味着存在一个 $C \in F(X)^{\perp}$，其 $C \cap \mathrm{dom}(Q)$ 是无限的。我们可以将 $C \cap \mathrm{dom}(Q)$ “加厚”为 C'：$X \to Y$ 对每个 $c \in C \cap \mathrm{dom}(Q)$ 选取一个 $y_c \in Y$，使得 $(c, y_c) \in Q$。那么 $C' \cap Q$ 显然是无限的；然而，$C' \in F(X \otimes Y)$ 与任何满足 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)$ 的 $A \times B$ 相交时都是有限的，因为 $C \cap A$ 是有限的。但这意味着 Q 不可能属于 $F(X \otimes Y)^{\perp\perp}$。 □

根据引理 2.33 上述讨论，当 $Q \in F(X \cap Y)^{\perp}$ 当且仅当对所有 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)$，都是有限的时，可以刻画为一个有限性关系Q：$X^* \to Y$或 Q°：$Y^* \to X$。由此立即得到：

引理 2.40。设 X 和 Y 是有限性空间，则 $P \subseteq X \times Y$ 当且仅当以下条件等价：

(i) $P \in F(X \otimes Y)^{\perp}$;

(ii) 对所有 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)$，$P \cap A \times B$ 都是有限的；

(iii) 对所有 $A \in F(X)$，$(Y)^{\perp}$；并且对所有 $B \in F(Y)$，$(X)^{\perp}$；*(iv)* 对所有 $A \in F(X)$，$(Y)^{\perp}$；并且对每个 $y \in Y$，$P \triangleleft \{y\} \in F(X)^{\perp}$;

(v) 对于每个 $x \in X$、$\{x\} \triangleright P \in F(Y)^{\perp}$，以及所有 $B \in F(Y)$，$P \triangleleft B \in F(X)^{\perp}$。

张量单位元由仅具有可能的有限性结构的单元素集合给出：$\top := (\{\star\}, \mathcal{P}(\{\star\}) \mathcal{P}(\{\star\}))$。

给定有限性关系 $X \xrightarrow{R} X'$ 和 $Y \xrightarrow{S} Y'$，则：

$$R \otimes S := \{((x, y), (x', y')) \mid xRx', ySy'\}$$

正如 Rel 中那样，显然是一个有限性关系。这个张量积的结合子和单位子与 Rel 中的相同。因此，结合子是以下关系：

$$a_{\otimes} := (((x, y), z), (x, (y, z))) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z$$

并且这显然给出了 $F(X \otimes Y) \otimes Z = \downarrow\{(a, b)\ c \mid a \in A \in F(X)\ b \in B \in F(Y)\ c \in C \in F(Z)\}$ 与 $F(X \otimes (Y \otimes Z)) = \downarrow\{(a, (b, c)) \mid a \in A \in F(X)\ b \in B \in F(Y)\ c \in C \in F(Z)\}$ 之间的双射。

张量积也是对称的，其对称关系与 Rel 中的一致。

如果 M 和 N 是有限性矩阵，$M \otimes N$ 由外积给出，而结合子和单位子的有限性矩阵则由特征矩阵给出

（其中各项为 0 或 1），对应 FRel 中的相干性关系。幺半环的交换性使张量积具有对称性。

引理 2.41. FRel 和 FMat(R) 具有一个对称张量积 $\otimes$，并且通过德摩根对偶还具有另一个对称张量积，称为 **par**，$\oplus$ 其中 $X \oplus Y := (X^* \otimes Y^*)^*$。

不过，张量积和 par 一般并不重合；但是，请注意，由于

$$\begin{aligned} F(X \oplus Y) := F((X^* \otimes Y^*)^*) &= F(X^* \otimes Y^*)^\perp = \{A' \times B' \mid A' \in F(X)^\perp, B' \in F(Y)^\perp\}^\perp \\ &= \{G \mid \forall A' \in F(X)^\perp, B' \in F(Y)^\perp . G \cap A' \times B' \text{ is finite}\} \end{aligned}$$

对于 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)$，因此我们有 $A \times B \in F(X \oplus Y)$，因为 $A \times B \cap A' \times B'$ 是有限的。这意味着映射 mx：$A \otimes Y \to A \oplus Y$，称为混合映射，它在底集上是恒等映射，是一个有限性关系。正如我们将看到的，它通常不是同构。par 的单位为 $\bot := \top^* = (\{\star\}, \mathcal{P}(\{\star\}) \mathcal{P}(\{\star\})) = \top$。因此，两个张量积的单位元重合。这表明了 isomix 范畴的结构。接下来，我们证明在 FRel 和 FMat(R) 中都存在一个线性分配子。在此之前，我们先观察：

引理 2.42。对于任意有限性空间 X、Y 和 Z，以下结论成立：

(i) $F(X \otimes Y) \subseteq F(X \oplus Y)$;

(ii) $F(X^* \otimes Y^*) \subseteq F(X \otimes Y)^\perp$;

(iii) $F((X^* \otimes Y^*) \otimes Z) \subseteq F((X \otimes Y)^* \otimes Z)$.

证明。

(i) 如上所述。

(ii) $F(X \otimes Y)^\perp = F((X \otimes Y)^*) = F((X^{**} \otimes Y^{**})^*) = F(X^* \oplus Y^*) \supseteq F(X^* \otimes Y^*)$.

(iii) $F((X^* \otimes Y^*) \otimes Z) = F((X^* \otimes Y^*)^{**} \otimes Z) = F((X \oplus Y)^* \otimes Z) \subseteq F((X \otimes Y)^* \otimes Z)$。

□

命题 2.43。FRel 和 FMat(R) 是对称 *LDC*。

证明。FRel 的线性分配子，$\partial^L : X \otimes (Y \oplus Z) \to (X \otimes Y) \oplus Z$ 底集上的 Rel 中的结合子。为证明这是一个有限性关系（尽管它不是同构），只需证明如果 $A \in F(X \otimes (Y \oplus Z))$，那么 $\mathrm{cod}(Aa_\times) \in F((X \otimes Y) \oplus Z)$，因为 $a_\times$ 当然具有 $F(X \otimes (Y \oplus Z))^\perp$ 中单元素集合的原像，因为它们是单元素集合。

请注意

$$\begin{aligned}
F(X \otimes (Y \oplus Z)) &= F(X \otimes (Y^* \otimes Z^*)^*) \\
&= F((X)^{**} \otimes (Y^* \otimes Z^*)^*) && (\text{as } X^{**} = X) \\
&\subseteq F(X^* \otimes (Y^* \otimes Z^*))^\perp && (\text{Lemma } 2.42(ii)) \\
&\simeq F((X^* \otimes Y^*) \otimes Z^*)^\perp && (\text{Associativity of tensor}) \\
&\subseteq F((X \otimes Y)^* \otimes Z^*)^\perp && (\text{Lemma } 2.42(iii)) \\
&= F((X \otimes Y) \oplus Z) \\
&(\text{as } (X, F(X), F(X)^\perp)^* = (X^*, F(X^*), F(X^*)^\perp) := (X, F(X)^\perp, F(X)))
\end{aligned}$$

对于 FMat(R)，左分配子是 ∂^L 的特征矩阵。 □

命题 2.44. FRel 和 FMat(R) 关于对合 $(\ )^*$构成对称的 *isomix* $*$-自伴范畴。

证明. 根据引理 2.43，FRel 是一个 LDC。它是一个 isomix 范畴，因为 $\mathsf{m} : \top \to \bot = 1_{\{\star\}}$ 是一个同构。

为此，我们必须证明存在一个“帽” $\top \to A \oplus A^*$和一个“杯” $A^* \otimes A \to \bot$：在底集上，它们是 Rel 中相应的映射，由对角子集以两种方式视为关系而给出。只需证明这些映射（它们互为对偶）是有限性关系。由于所需的对偶恒等式对底层关系成立，因此它们在 FRel 中也成立。

考虑 $\eta : \top \to A \otimes A^*$ 其中 $\eta := \{(\star, (a, a)) \mid a \in A\}$ 作为 $\top$ 的有限集，恰好是 $\{\}$ 和 $\{\star\}$，而 η° 显然具有余有限集的原像，且其仍为余有限集，因此只需证明 $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ 在 $A \otimes A^*$ 中是有限性的。然而，当且仅当 Δ_A 是从 $A \to A$ 出发的有限性关系时，这一点才成立（由适当取对偶的引理 2.40 得出）.....而它显然是有限性关系，因为它就是恒等关系！

利用这些关系的特征矩阵，以及所有相干映射都由相应的特征矩阵给出的事实，这一论证可转译到 FMat(R) 中。

□

由于 FRel 是 *-自伴的，因此它是自富化的。内蕴同态通常定义为 $X \multimap Y = X^* \otimes Y = (X \otimes Y^*)^*$。因此，$X \multimap Y = (X \times Y,\ F(X \otimes Y^\perp)^\perp,\ F(X \otimes Y^\perp))$。同样的论证也适用于 FMat($R$)。

引理 2.45。 设 X 和 Y 是有限性空间，则 $A \in F(X \multimap Y)$ 当且仅当 $A : X \to Y$ 是有限性关系。

2.3.4 FRel 与FMat(R)的核心

回顾一下，对于任意 isomix 范畴 $\mathbb{X}$， $\mathbb{X}$ 的 **核心** Core($\mathbb{X}$) $\subseteq \mathbb{X}$ 是由满足以下条件的对象 U 构成的全子范畴：对于任意对象 $X \in \mathbb{X}$，mx：$U \otimes X \to U \oplus X$（以及 mx：$X \otimes U \to X \oplus U$）是一个同构。核心始终对张量、par 和单位元封闭。因此，isomix 范畴的核心是一个 isomix 范畴，其中 mx：$U \otimes V \to U \otimes V$ 是一个自然同构。

在 FRel 中，混合映射由底集上的恒等映射给出；在 FMat(R) 中，它由该恒等映射的特征函数给出。本小节旨在完整描述 FRel 和 FMat(R) 的核心：

命题2.46. $U \in$Core(FRel) 当且仅当 U 是有限的。类似地， $U \in$ Core(FMat(R))当且仅当 U 是有限的。

证明。 假设 U是一个有限集，那么 $U = U^*$当 $F(U) = F(U)^\perp = \mathcal{P}(U)$。我们将证明，对所有 Y， $F(U \otimes Y) = F(U \otimes Y)$。我们先对 FRel 证明这一点：

U **有限** $\Rightarrow U \in$ **Core(FRel)：** 只需证明，如果 $R \in F(U \oplus Y)$，那么 $R \in F(U \otimes Y)$。然而， $R \in F(U \oplus Y) = F(U^* \oplus Y)$ 当且仅当 R： $U \to Y$是一个有限性关系。由于 R 是一个有限性关系，因为 $U \in F(U)$，cod(R) $\in F(Y)$，但随后 $R \subseteq U \times$ cod(R)，这表明 $R \in F(U \otimes Y)$。

$U \in$Core(FRel) $\Rightarrow U$ **是有限的：** 我们证明其逆命题：如果 U 是无限集，则存在一个有限性空间 Y，使得 $F(X \otimes Y) \subseteq F(X \oplus Y)$。选择 $Y =(Y, \mathcal{P}(Y)\ \mathcal{P}_f(Y))$，使得存在一个单射函数 α： $U \to Y$：这迫使 Y为无限集。由于 $|U|$是无限的，因此存在一个无限的 $Q \subseteq U$，使得 $Q \in F(U)^\perp$或$Q \in F(U)$。不失一般性，我们可以假设 $Q \in F(U)^\perp$。

定义 $R := \{(x, \alpha(x)) \mid x \in Q\}$，则 $R \in F(U \otimes Y)$，因为以下两个条件成立：

(i) 对所有 $A \in F(U)^\perp$， $A \triangleright R \in F(Y)$ 作为 $F(Y) \in \mathcal{P}(Y)$。(ii) 对所有 $y \in Y$， $R \triangleleft \{y\} \in F(X)^\perp$，由于 α 是单射，要么 $R \triangleleft \{y\} = \varnothing$，要么 $R \triangleright \{y\} = \{x\}$，其中 $\alpha(x) = y$。由于 $R \triangleright \{y\}$ 是有限的， $R \triangleright \{y\} \in F(X)^\perp$。

接下来，为完成证明，我们说明 $R \notin F(X \otimes Y)$。 $R \in F(X \otimes Y)$ 当且仅当 $R \subseteq A \times B$，其中 $A \in F(U)$ 且 $B \in F(Y)$。然而，dom(R) $= Q \in F(U)^\perp$。由于 Q 是无限的， Q 也不可能是 $F(U)$ 的成员。因此， $Q \notin F(X \otimes Y)$。

通过转置到有限性关系的特征函数，可以将同样的证明应用于 FMat(R)。

□

推论 2.47。

(i) 核心(FRel) 是有限集与关系范畴。*(ii)* 核心$(\mathsf{FMat}(R))$ 等价于幺半环 R 上的有限维矩阵范畴。

第3章

伴随线性分配范畴

本章将定义伴随线性分配范畴、刀线性函子及变换，并提供例子。我们还将探讨线性分配范畴的对偶、匕首与共轭函子之间的关系。

3.1 LDC 的匕首

通常，在范畴量子力学中，匕首被定义为一个逆变自函子，它在对象上保持不变（$A^\dagger = A$），并且是一个对合（$f^{\dagger\dagger} = f$）。然而，在 LDC 中，匕首必须至少翻转张量积，以保持分配映射的方向性。回想一下，$\partial^\dagger\colon (A\otimes B)\oplus C \to A\otimes(B\oplus C)$ 不是 LDC 中的有效映射。因此，对于 LDC，我们不能期望匕首在对象上保持不变；不过，它仍然可以是一个对合。本节讨论 LDC 及其变体（即混合范畴和 isomix 范畴）中 †-函子的相干条件。

3.1.1 伴随线性分配范畴

在继续定义 LDC 的匕首函子之前，必须先阐述相反线性分配范畴以及逆变线性函子的概念。

如果（$\mathbb{X}$，$\otimes$，$\top$，$\oplus$，$\bot$）是一个线性分配范畴，则其**相反线性分配范畴**为（$\mathbb{X}$，$\otimes$，$\top$，$\oplus$，$\bot$）$^{\mathsf{op}} := $（$\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$，$\oplus$，$\bot$，$\otimes$，$\top$），其中 $\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$ 是通常的相反范畴，其幺半群结构按如下方式翻转：

$$\otimes^{\mathsf{op}} := \oplus \qquad \top^{\mathsf{op}} := \bot \qquad \oplus^{\mathsf{op}} := \otimes \qquad \bot^{\mathsf{op}} := \top$$

$(\_)^{\mathsf{op}}$ 是线性分配范畴及线性函子的自函子。它也是一个对合：$(\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)^{\mathsf{op}} {}_{\text{逆向}} = (\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)$。

设 $(F_\otimes, F_\oplus) : (\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)^{\mathrm{op}} \to (\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)$ 是一个线性函子。相反线性函子 $(F_\otimes, F_\oplus)^{\mathrm{op}} : (\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot) \to (\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)^{\mathrm{op}}$ 由一对相反函子 $(F^{\text{逆向}}{}_\oplus, F^{\mathrm{op}}_\otimes)$ 给出。注意，F 逆向是混合 Frobenius 线性函子，当且仅当 F 是。

定义 3.1。 *A* **dagger 线性分配范畴** *(†-LDC)* 是一个 *LDC*，$\mathbb{X}$，带有一个反变 *Frobenius* 线性函子 $(\ )^\dagger : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$，$\_$ 它是一个线性对合等价 $(\ )^\dagger \dashv (\ )^{\dagger^{\mathrm{op}}} : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$。

$\_$ $\_$

我们将在命题 3.2 中展开这一定义。不过，首先注意到，称 dagger 是一个对合等价，意味着该等价的单位和余单位相同（尽管其中一个位于相反范畴中）。因此，伴随展开为以下形式 $(\imath, \imath) : (\ )^\dagger \dashv (\ )^{\dagger^{\mathrm{op}}} : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$。然而，单位和余单位都是线性自然变换，因此 $\imath$ 展开为 $\imath = (\imath_\otimes, \imath_\oplus)$。由于 dagger 函子是一个左伴随，它是强的，因此是正规的。此外，作为一个等价的单位，$\imath$是一个线性自然同构，这意味着 $\imath = (\imath_\otimes, \imath_\oplus)$ 满足引理 2.24 的要求，从而推出 $\imath_\otimes^{-1} = \imath_\oplus$。简化记号，我们将设 $\iota := \imath_\oplus$，因此单位线性变换为 $\imath := (\iota^{-1}, \iota)$。于是，我们可以将 $\imath$ 的要求简化为映射 $\iota : A \to (A^\dagger)^\dagger$，我们将其称为对合子。

一个**对称** **†-LDC** 是一个 †-LDC，它是一个对称 LDC，且其中的匕首是一个对称线性函子。一个**循环的** **†-∗-自治范畴**是一个具有选定的左对偶和右对偶的 †-LDC，并且具有一个由匕首保持的 cyclor。一个 †-**混合** 范畴是一个 †-LDC，其中 $(\ )^\dagger : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$ 是一个混合函子。由于匕首函子是强的（因而是正规的），如果该范畴是一个 isomix 范畴，那么作为 †-**混合** 已足以蕴含匕首是一个 isomix 函子。因此，一个 †-**isomix** 范畴是一个恰好也是 isomix 范畴的 †-混合范畴。

在本节的其余部分，我们将展开 †-isomix 范畴的定义，并明确给出相容性要求。

命题 3.2。 一个 *dagger* 线性分配范畴是一个带有函子 $(\ )^\dagger : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$ 以及自然同构的 *LDC*

$$\textbf{laxors: } A^\dagger \otimes B^\dagger \xrightarrow{\lambda_\otimes} (A \oplus B)^\dagger \qquad A^\dagger \oplus B^\dagger \xrightarrow{\lambda_\oplus} (A \otimes B)^\dagger$$
$$\top \xrightarrow{\lambda_\top} \bot^\dagger \qquad\qquad \bot \xrightarrow{\lambda_\bot} \top^\dagger$$
$$\textbf{involutor: } A \xrightarrow{\iota} (A^\dagger)^\dagger$$

使得以下相干条件成立：

[†-**ldc**。**1**] $\lambda_\otimes$、 $\lambda_\oplus$ 与结合子的相容性：

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger \otimes (B^\dagger \otimes C^\dagger) & \xrightarrow{a_\otimes^{-1}} & (A^\dagger \otimes B^\dagger) \otimes C^\dagger \\ {\scriptstyle 1\otimes\lambda_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes\otimes 1} \\ A^\dagger \otimes (B \oplus C)^\dagger & & (A \oplus B)^\dagger \otimes C^\dagger \\ {\scriptstyle \lambda_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes} \\ (A \oplus (B \oplus C))^\dagger & \xrightarrow[a_\oplus^\dagger]{} & ((A \oplus B) \oplus C)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A^\dagger \oplus (B^\dagger \oplus C^\dagger) & \xrightarrow{a_\oplus^{-1}} & (A^\dagger \oplus B^\dagger) \oplus C^\dagger \\ {\scriptstyle 1\oplus\lambda_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus\oplus 1} \\ A^\dagger \oplus (B \otimes C)^\dagger & & (A \otimes B)^\dagger \oplus C^\dagger \\ {\scriptstyle \lambda_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus} \\ (A \otimes (B \otimes C))^\dagger & \xrightarrow[a_\otimes^\dagger]{} & ((A \otimes B) \otimes C)^\dagger \end{array}$$

[†-**ldc.2**] $\lambda_\top$、 $\lambda_\bot$ 与单位子的相容性：

$$\begin{array}{ccc} \top \otimes A^\dagger & \xrightarrow{\lambda_\top\otimes 1} & \bot^\dagger \otimes A^\dagger \\ {\scriptstyle u_\otimes^R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes} \\ A^\dagger & \xrightarrow[(u_\oplus^R)^\dagger]{} & (\bot \oplus A)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bot \oplus A^\dagger & \xrightarrow{\lambda_\bot\oplus 1} & \top^\dagger \oplus A^\dagger \\ {\scriptstyle u_\oplus^R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus} \\ A^\dagger & \xrightarrow[(u_\otimes^R)^\dagger]{} & (\top \otimes A)^\dagger \end{array}$$

并且还必须满足关于 $u_\otimes^L$ 和 $u_\oplus^L$ 的两个对称图表。

[†-**ldc.3**] $\lambda_\otimes$、 $\lambda_\oplus$ 与线性分配子的相容性：

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger \otimes (B^\dagger \oplus C^\dagger) & \xrightarrow{\partial^L} & (A^\dagger \otimes B^\dagger) \oplus C^\dagger \\ {\scriptstyle 1\otimes\lambda_\oplus}\downarrow & & {\scriptstyle \lambda_\otimes\oplus 1}\downarrow \\ A^\dagger \otimes (B \otimes C)^\dagger & & (A \oplus B)^\dagger \oplus C^\dagger \\ {\scriptstyle \lambda_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus} \\ (A \oplus (B \otimes C))^\dagger & \xrightarrow[(\partial^R)^\dagger]{} & ((A \oplus B) \otimes C)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (A^\dagger \oplus B^\dagger) \otimes C^\dagger & \xrightarrow{\partial^R} & A^\dagger \oplus (B^\dagger \otimes C^\dagger) \\ {\scriptstyle \lambda_\oplus\otimes 1}\downarrow & & {\scriptstyle 1\oplus\lambda_\otimes}\downarrow \\ (A \otimes B)^\dagger \otimes C^\dagger & & A^\dagger \oplus (B \oplus C)^\dagger \\ {\scriptstyle \lambda_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus} \\ ((A \otimes B) \oplus C)^\dagger & \xrightarrow[(\partial^L)^\dagger]{} & (A \otimes (B \oplus C))^\dagger \end{array}$$

[†-**ldc.4**] ι： $A \to A^{\dagger\dagger}$ 与 $\lambda_\otimes$、 $\lambda_\oplus$的相容性：

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{\iota} & ((A \oplus B)^\dagger)^\dagger \\ {\scriptstyle \iota\oplus\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes^\dagger} \\ (A^\dagger)^\dagger \oplus (B^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[\lambda_\oplus]{} & (A^\dagger \otimes B^\dagger)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{\iota} & ((A \otimes B)^\dagger)^\dagger \\ {\scriptstyle \iota\otimes\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus^\dagger} \\ (A^\dagger)^\dagger \otimes (B^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[\lambda_\otimes]{} & (A^\dagger \oplus B^\dagger)^\dagger \end{array}$$

[†-**ldc.5**] ι： $A \to A^{\dagger\dagger}$ 与 $\lambda_\top$、 $\lambda_\bot$的相容性：

$$\begin{array}{ccc} \bot & \xrightarrow{\iota} & (\bot^\dagger)^\dagger \\ & {\scriptstyle \lambda_\bot}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\top^\dagger} \\ & & \top^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \top & \xrightarrow{\iota} & (\top^\dagger)^\dagger \\ & {\scriptstyle \lambda_\top}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\bot^\dagger} \\ & & \bot^\dagger \end{array}$$

[†-**ldc.6**] $\iota_{A^\dagger} = (\iota_A^{-1})^\dagger$： $A^\dagger \to A^{\dagger\dagger\dagger}$

dagger结构由前一个命题结合强幺半 laxor 得到：为了构造线性函子，laxor $\lambda_{\oplus}$ 需要通过取其逆来反转。于是，我们有 $\nu^{l}_{\otimes} = \nu^{r}_{\otimes} := \lambda^{-1}_{\oplus}$以及 $\nu^{l}_{\oplus} = \nu^{r}_{\oplus} := \lambda_{\otimes}$。完成此调整后， † 成为线性函子所需的全部相干条件均已具备。注意， [†-ldc.6] 等价地表达了伴随（ι， ι）的三角恒等式 $:: \dagger^{\mathrm{op}} \dashv \dagger :\ \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$。对合子的相干条件断言，它对于张量和 par 都是幺半变换：根据引理 2.28 (ii)，这足以证明它是线性变换。

一个**对称的** †-LDC 是一个 †-LDC，它是一个对称 LDC，并且满足以下额外图表的交换性：

[†-**ldc**。**7**] 与对称映射的相容性： $\lambda_{\otimes}$， $\lambda_{\oplus}$

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger \otimes B^\dagger & \xrightarrow{\lambda_\otimes} & (A \oplus B)^\dagger \\ {\scriptstyle c_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c^\dagger_\oplus} \\ B^\dagger \otimes A^\dagger & \xrightarrow[\lambda_\otimes]{} & (B \oplus A)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A^\dagger \oplus B^\dagger & \xrightarrow{\lambda_\oplus} & (A \otimes B)^\dagger \\ {\scriptstyle c_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c^\dagger_\otimes} \\ B^\dagger \oplus A^\dagger & \xrightarrow[\lambda_\oplus]{} & (B \otimes A)^\dagger \end{array}$$

一个 **†-混合范畴** 是一个 †-LDC，它具有混合映射，并满足以下额外的相干性：

[†-**mix**]
$$\begin{array}{ccc} \bot & \xrightarrow{\mathsf{m}} & \top \\ {\scriptstyle \lambda_\bot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\top} \\ \top^\dagger & \xrightarrow[\mathsf{m}^\dagger]{} & \bot^\dagger \end{array}$$

如果 m 是一个同构，那么 $\mathbb{X}$ 是一个 **†-isomix 范畴**，并且由于 $(\,)^\dagger$ 是正规化的，$(\_)^\dagger$ 是一个 isomix Frobenius 函子。

引理3.3。 假设 $\mathbb{X}$ 是一个 †-混合范畴，那么以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger \otimes B^\dagger & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & A^\dagger \oplus B^\dagger \\ {\scriptstyle \lambda_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus} \\ (A \oplus B)^\dagger & \xrightarrow[\mathsf{mx}^\dagger]{} & (A \otimes B)^\dagger \end{array}$$

证明。 证明可直接由引理 2.23得出。 □

就其在量子理论中的应用而言，本论文主要关注 †- isomix范畴。正如我们将在第4.1节中看到的，酉对象和酉同构的概念仅在 †-isomix 范畴中得到支撑。

值得注意的是，混合范畴的核心在取匕首和对偶下是封闭的。

Lemma 3.4. 设 $\mathbb{X}$ 是一个 †-混合范畴，并且 $A \in$核心$(\mathbb{X})$，则 $A^\dagger \in$ 核心$(\mathbb{X})$.

证明。 自然变换 $A^\dagger \otimes X \xrightarrow{\mathsf{mx}} A^\dagger \oplus X$ 是一个同构，具体如下：

$$\begin{array}{ccccc} A^\dagger \otimes X & \xrightarrow{1\otimes\iota} & A^\dagger \otimes X^{\dagger\dagger} & \xrightarrow{\lambda_\otimes} & (A \oplus X^\dagger)^\dagger \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}^\dagger} \\ A^\dagger \oplus X & \xrightarrow[1\oplus\iota]{} & A^\dagger \oplus X^{\dagger\dagger} & \xrightarrow[\lambda_\oplus]{} & (A \otimes X^\dagger)^\dagger \end{array}$$

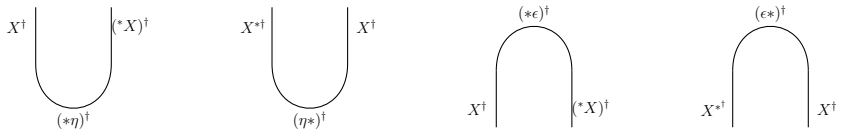
(nat. mx) lem. 3.3

□

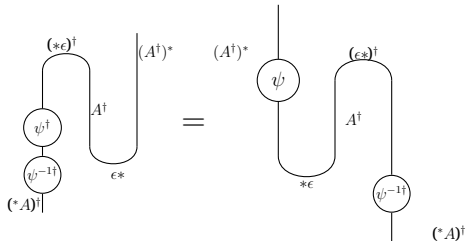
引理 3.5。 设 $\mathbb{X}$ 为 †-*LDC*。若 $A \dashv\!\vdash B$，则 $B^\dagger \dashv\!\vdash A^\dagger$。

证明。 该陈述由引理 2.14得出：Frobenius函子保持线性伴随。具体而言，若 $(\eta,\ \epsilon) : A \dashv\!\vdash B$，则 $(\lambda_\top \epsilon^\dagger \lambda_\oplus^{-1},\ \lambda_\otimes \eta^\dagger \lambda_\bot^{-1}) : B^\dagger \dashv\!\vdash A^\dagger$。 □

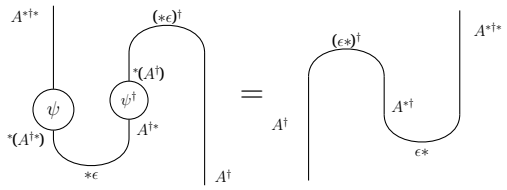
设 $\mathbb{X}$ 是一个 †-$*$-自对偶范畴，且 $(\eta*,\ \epsilon*) : A^* \dashv\!\vdash A$，则 $((\epsilon*)^\dagger,\ (\eta*)^\dagger) : A^\dagger \dashv\!\vdash (A^*)^\dagger$，其中 $((\epsilon*)^\dagger,\ (\eta*)^\dagger) := (\lambda_\top \epsilon *^\dagger \lambda_\oplus^{-1},\ \lambda_\otimes \eta *^\dagger \lambda_\bot^{-1})$。我们将 $(\epsilon*)^\dagger$ 和 $(*\epsilon)^\dagger$ 画作dagger 杯，将 $(\eta*)^\dagger$ 和 $(*\eta)^\dagger$ 画作dagger 帽，其图示如下：



若匕首在下述意义下保留 cyclor，则 †-$*$-自治范畴是**循环的** †-$*$-自治范畴。



引理 3.6。 在循环的 †-$*$-自治范畴中，



证明。 由引理 2.21 的直接应用可得。 □

†-线性逻辑的相继式演算

†-线性分配范畴为带匕首的乘法线性逻辑（†-MLL）的证明论提供范畴语义。除 MLL 的序列规则外， †-MLL 还包含附加规则（†）和（ι），如图 3.1所示。

$$(\dagger)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Delta^\dagger \vdash \Gamma^\dagger} \qquad (\iota\mathrm{L})\ \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, A^{\dagger\dagger}, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad (\iota\mathrm{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, A^{\dagger\dagger}, \Delta_2}$$

$$\text{where, if } \Gamma = A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \text{ then } \Gamma^\dagger = A_1^\dagger, A_2^\dagger, A_3^\dagger, \cdots, A_n^\dagger$$

图 3.1： † 的序列规则

规则 (†) 对应于 †-函子的反变性，而规则 (ιL) 和 (ιR) 对应于对合自然同构 $\iota : A \to A^{\dagger\dagger}$。$(\iota L)^{(-1)}$ 和 $(\iota R)^{(-1)}$ 的推导见图3.2。

$$\frac{A \vdash A}{A \vdash A^{\dagger\dagger}}\,\iota R \qquad \frac{A \vdash A}{A^{\dagger\dagger} \vdash A}\,\iota L$$

图 3.2：序列演算证明：- ι 是一个同构

可以使用序列规则推导出单位松弛器和张量松弛器 (†)、(ιL) 和 (ιR)。例如，图 3.3 展示了 $\oplus$-松弛器的推导，而图3.4 展示了 $\perp$-松弛器的推导。图 $*$) 中标记为 (的步骤3.3 涉及切。这引出了一个问题：该系统是否满足切消去？按照当前的表述，该系统似乎不满足切消去。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{id} \quad \dfrac{}{B \vdash B}\,\mathrm{id}}{A, B \vdash A \otimes B}\,\otimes\mathrm{R}}{(A \otimes B)^\dagger \vdash A^\dagger, B^\dagger}}{(A \otimes B)^\dagger \vdash A^\dagger \oplus B^\dagger}\,\oplus\mathrm{R}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A^\dagger \vdash A^\dagger}\,\mathrm{id} \quad \dfrac{}{B^\dagger \vdash B^\dagger}\,\mathrm{id}}{A^\dagger \oplus B^\dagger \vdash A^\dagger, B^\dagger}\,\oplus\mathrm{L}}{A^{\dagger\dagger}, B^{\dagger\dagger} \vdash (A^\dagger \oplus B^\dagger)^\dagger}\,\dagger}{A, B \vdash (A^\dagger \oplus B^\dagger)^\dagger}\,(*)\ 2 \times \iota L^{(-1)}}{A \otimes B \vdash (A^\dagger \oplus B^\dagger)^\dagger}\,\otimes\mathrm{L}}{(A^\dagger \oplus B^\dagger)^{\dagger\dagger} \vdash (A \otimes B)^\dagger}\,\iota\mathrm{L}}{(A^\dagger \oplus B^\dagger) \vdash (A \otimes B)^\dagger}\,(*)\ \iota L^{(-1)}$$

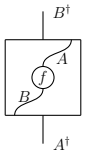
图 3.3： $\oplus$-laxor 的推导

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \top}\,\mathrm{id}}{\top^\dagger \vdash}\,\dagger}{\top^\dagger \vdash \bot}\,\bot\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \bot}\,\mathrm{id}}{\bot \vdash \bot^{\dagger\dagger}}\,\iota\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash}\,\bot\mathrm{L}}{\vdash \bot^\dagger}\,\dagger}{\top \vdash \bot^\dagger}\,\top\mathrm{L}}{\bot^{\dagger\dagger} \vdash \top^\dagger}\,\dagger}{\bot \vdash \top^\dagger}\,\mathrm{Cut}$$

图 3.4: $\bot$-laxor 的推导

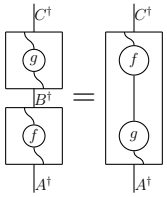
3.1.3 匕首函子框

假设 $\mathbb{X}$ 是一个 †-LDC，且 $f : A \to B \in \mathbb{X}$。那么，映射 $f^\dagger : B^\dagger \to A^\dagger$ 的图示如下：

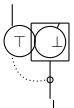


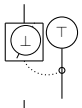
这个矩形是 †-函子的函子框。注意，我们如何使用垂直镜像来表示 †-函子的反变性。根据 $(\,)^\dagger$ 的函子性，我们有：$=$ 。

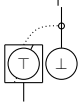
这些反变函子框以反变方式复合。给定映射 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$：

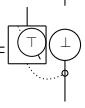


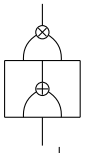
以下是 †-LDC 的基本自然同构的表示：

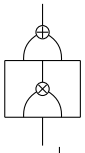
$\lambda_\top : \top \to \bot^\dagger =$ 

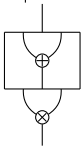
$\lambda_\top^{-1} : \bot^\dagger \to \top =$ 

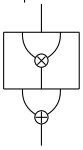
$\lambda_\bot : \bot \to \top^\dagger =$ 

$\lambda_\bot^{-1} : \top^\dagger \to \bot =$ 

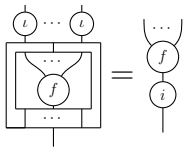
$\lambda_\otimes : A^\dagger \otimes B^\dagger \to (A \oplus B)^\dagger =$ 

$\lambda_\oplus : A^\dagger \otimes B^\dagger \to (A \oplus B)^\dagger =$ 

$\lambda_\otimes^{-1} : (A \oplus B)^\dagger \to A^\dagger \otimes B^\dagger =$ 

$\lambda_\oplus^{-1} : (A \otimes B)^\dagger \to A^\dagger \oplus B^\dagger =$ 

†-盒与对合子 $A \xrightarrow{\iota} A^{\dagger\dagger}$ 的交互如下：



值得注意的是，在一个 †框内不一定要有合法的证明网。这使正确性判据变得复杂。不过，所需的正确性判据将在 [96]中讨论。

3.1.4 †-线性分配范畴的函子

显然， †-LDC 之间的函子和变换必须以某种方式“保持”匕首。更准确地说，我们有：

定义 3.7。 $F:\ \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是 **†-线性函子**，其定义域和值域为 †-*LDC*；其中 F 是一个配备了线性自然同构 $\rho^F = (\rho^F_\otimes :\ F_\otimes(A^\dagger) \to F_\oplus(A)^\dagger, \rho^F_\oplus :\ F_\otimes(A)^\dagger \to F_\oplus(A^\dagger))$ 的线性函子，该同构称为**保持子**，并且满足以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F_\otimes(X) & \xrightarrow{\iota} & F_\otimes(X)^{\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle F_\otimes(\iota)}\downarrow & [\dagger\textbf{-LF.1}] & \uparrow{\scriptstyle (\rho^F_\oplus)^\dagger} \\ F_\otimes(X^{\dagger\dagger}) & \xrightarrow[\rho^F_\otimes]{} & F_\oplus(X^\dagger)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_\oplus(X) & \xrightarrow{\iota} & F_\oplus(X)^{\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle F_\oplus(\iota)}\downarrow & [\dagger\textbf{-LF.2}] & \downarrow{\scriptstyle (\rho^F_\otimes)^\dagger} \\ F_\oplus(X^{\dagger\dagger}) & \xleftarrow[\rho^F_\oplus]{} & F_\otimes(X^\dagger)^\dagger \end{array}$$

如果 F 是一个 †-isomix 范畴之间的正规混合函子，那么根据引理 2.26，F 是一个 isomix 函子，因此根据推论 2.27，保持子变为逆，$\rho^F_\otimes = (\rho^F_\oplus)^{-1}$。这意味着方形 [†-**LF**。**1**] 和 [†-**LF**。**2**] 重合，从而为张量保持子给出单一条件：

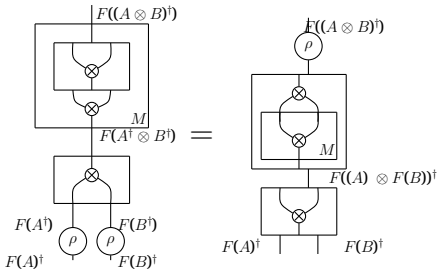
$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\iota} & F(X)^{\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle F(\iota)}\downarrow & [\dagger\textbf{-isomix}] & \downarrow{\scriptstyle (\rho^F_\otimes)^\dagger} \\ F(X^{\dagger\dagger}) & \xrightarrow[\rho^F_\otimes]{} & F(X^\dagger)^\dagger \end{array}$$

当 F 是一个 isomix 函子时，根据引理 2.24，$\rho := \rho_\otimes$ 在 $\otimes$ 上是幺半群的，在 $\oplus$ 上是余幺半群的：

[**P.1**]
$$\begin{array}{ccc} F(A^\dagger)\otimes F(B^\dagger) & \xrightarrow{\rho\otimes\rho} & F(A)^\dagger\otimes F(B)^\dagger \\ {\scriptstyle m_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes} \\ F(A^\dagger\otimes B^\dagger) & (a) & (F(A)\otimes F(B))^\dagger \\ {\scriptstyle F(\lambda_\otimes)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n^\dagger_\oplus} \\ F((A\oplus B)^\dagger) & \xrightarrow[\rho]{} & (F(A\oplus B))^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \top & & \\ {\scriptstyle m_\top}\downarrow & \searrow^{\lambda_\top} & \\ F(\top) & (b) & \bot^\dagger \\ {\scriptstyle F(\lambda_\top)}\downarrow & & \searrow^{n^\dagger_\bot} \\ F(\bot^\dagger) & \xrightarrow[\rho]{} & (F(\bot))^\dagger \end{array}$$

[**P.2**]
$$\begin{array}{ccc} F((A\otimes B)^\dagger) & \xrightarrow{\rho} & F(A\otimes B)^\dagger \\ {\scriptstyle F(\lambda^{-1}_\oplus)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^\dagger_\otimes} \\ F(A^\dagger\oplus B^\dagger) & (a) & (F(A)\otimes F(B))^\dagger \\ {\scriptstyle n^F_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^{-1}_\oplus} \\ F(A^\dagger)\oplus F(B^\dagger) & \xrightarrow[\rho\oplus\rho]{} & F(A)^\dagger\oplus F(B)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} F(\top^\dagger) & & \xrightarrow{F(\lambda^{-1}_\bot)} & & \\ {\scriptstyle \rho}\downarrow & & & & \\ F(\top)^\dagger & \xrightarrow[m^\dagger_\top]{} & \top^\dagger & \xrightarrow[\lambda^{-1}_\bot]{} & \bot \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & (b) & F(\bot) \\ & & \searrow^{n_\bot} \\ & & \end{array}$$

[P.2]-(a) 的图示如下：



对于线性自然变换 $(\beta_\otimes, \beta_\oplus)$: $F \to G$ （在线性函子 $\dagger$ 之间），我们要求 $\beta_\otimes$ 和 $\beta_\oplus$ 满足以下关系：

$$\begin{array}{ccc} F_\otimes(A^\dagger) & \xrightarrow{\beta_\otimes} & G_\otimes(A^\dagger) \\ {\scriptstyle \rho^F_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^G_\otimes} \\ (F_\oplus(X))^\dagger & \xrightarrow[\beta^\dagger_\oplus]{} & (G_\oplus(X))^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (G_\otimes(X))^\dagger & \xrightarrow{\beta^\dagger_\otimes} & (F_\otimes(X))^\dagger \\ {\scriptstyle \rho^G_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^F_\oplus} \\ G_\oplus(A^\dagger) & \xrightarrow[\beta_\oplus]{} & F_\oplus(A^\dagger) \end{array}$$

请注意，这意味着按照以下意义， $\beta_\otimes$ 完全由 $\beta_\oplus$ 决定：

$$\begin{array}{ccc} F_\otimes(A) & \xrightarrow{\beta_\otimes} & G_\otimes(A) \\ {\scriptstyle F_\otimes(\iota)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_\otimes(\iota)} \\ F_\otimes(A^{\dagger\dagger}) & \xrightarrow{\beta_\otimes} & G_\otimes(A^{\dagger\dagger}) \\ {\scriptstyle \rho^F_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^G_\otimes} \\ F_\oplus(A^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[\beta^\dagger_\oplus]{} & G_\oplus(A^\dagger)^\dagger \end{array}$$

由于垂直映射是同构，因此可以利用此图表用 $\beta_{\oplus}$ 表示 $\beta_{\otimes}$ 。类似地， $\beta_{\oplus}$ 可以用 $\beta_{\otimes}$ 表示。因此，可以仅用其中一个变换来表示这些相干条件。

3.2 例子： †-LDC

本节将讨论几个 †-isomix 范畴的基本例子。前两个是紧 LDC。这些例子都具有非平凡的匕首函子。关于 †-isomix 范畴的更多例子，可在下一章讨论匕首函子和共轭函子时找到。

3.2.1 每个 †-幺半范畴都是一个 †-LDC

一个 †-幺半范畴 [110] 定义为一个对称幺半范畴， $\mathbb{X}$，带有一个逆变函子 $\dagger : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$ 它在对象上是恒等的（$A = A^{\dagger}$），满足：

(i) 对所有 f, $f^{\dagger\dagger} = f$(ii) 对所有 f 和 g, $(f \otimes g)^{\dagger} = f^{\dagger} \otimes g^{\dagger}$(iii) $a^{\dagger}_{\otimes} = a^{-1}_{\otimes}$(iv) $(u^{l}_{\otimes})^{\dagger} = (u^{l}_{\otimes})^{-1}$(v) $(u^{r}_{\otimes})^{\dagger} = (u^{r}_{\otimes})^{-1}$

注意，每个 †-幺半范畴都是一个紧致的 †-LDC，其中松弛器和对合子都是恒等变换。

3.2.2 有限维框架向量空间

本节介绍“框架”有限维向量空间范畴，其中框架在此处仅指选定一个基。因此，该范畴中的对象是带有选定基的向量空间，而忽略基时，映射就是向量空间之间的同态。

有限维框架向量空间范畴 $\mathbf{FFVec}_K$ 是一个幺半范畴，定义如下：

对象： 对象是形如 $(V, \mathcal{V})$ 的有序对，其中 V 是有限维 K-向量空间，且$\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ 是一个基。

映射： 从 $(V,\ \mathcal{V})\xrightarrow{f}(W,\ \mathcal{W})$ 的映射是 FdVec_K 中的线性映射 $V\xrightarrow{f}W$。

张量积： $(V,\mathcal{V})\otimes(W,\mathcal{W})=(V\otimes W,\{v\otimes w|v\in\mathcal{V},w\in\mathcal{W}\})$，其中 $V\otimes W$ 是通常的张量积。单位是 $(K,\{e\})$，其中 e 是域 K 的单位元。

要定义“匕首”，我们必须先选取一个共轭 $\overline{(\ )}:\ K\to K$（更多详情见第 3.3.2 节），即一个满足 $k=\overline{(k)}$ 的域同态。共轭的典型例子是复数的共轭；不过，共轭可以任意选取——例如，也可以是恒等映射。然后，这个共轭可以扩展为一个（协变）函子：

$$\overline{(\_)}:\mathsf{FFVec}_K\to\mathsf{FFVec}_K;\quad \begin{array}{c}(V,\mathcal{V})\\ \downarrow f\\ (W,\mathcal{W})\end{array}\quad\mapsto\quad\begin{array}{c}\overline{(V,\mathcal{V})}\\ \downarrow \overline{f}\\ \overline{(W,\mathcal{W})}\end{array}$$

其中 $\overline{(V,\mathcal{V})}$ 是具有相同基但作用为共轭作用 $c\cdot v=\overline{c}\cdot v$ 的向量空间。共轭同态 $\overline{f}$ 则是同一个底层映射，它是共轭空间之间的同态。

$\widetilde{\mathsf{FFVec}}_K$ 也是一个紧闭范畴，其 $(V,\ \mathcal{B})^*=(V^*,\ \{b_i|b_i\in\mathcal{B}\})$ 满足

$$V^*=V\multimap K\quad\text{ and }\quad\widetilde{b_i}:V\to K;\left(\sum_j\beta_j\cdot b_j\right)\mapsto\beta_i$$

这使得 $\overline{(\ )}^*:\underline{\mathsf{FFVec}}_K^{\mathrm{op}}\to\mathsf{FFVec}_K$ 成为一个反变函子，其作用由前复合确定。最后，我们将“匕首”定义为复合 $(\dagger=\overline{(\ )}^*)$。

这是一个幺半群范畴，其中张量与 par 被视为相同（因此线性分配就是结合子），并且它是 isomix。我们必须证明它是一个 †-LDC。为此，我们在基上定义所需的自然变换：

$$\lambda_\otimes=\lambda_\oplus:(V,\mathcal{V})^\dagger\otimes(W,\mathcal{W})^\dagger\to((V,\mathcal{V})\otimes(W,\mathcal{W}))^\dagger;\widetilde{v_i}\otimes\widetilde{w_j}\mapsto\widetilde{v_i\otimes w_j}$$

$$\lambda_\top=\lambda_\bot:(K,\{e\})\to(K,\{e\})^\dagger;k\mapsto\overline{k}$$

$$\iota:(V,\mathcal{V})\to((V,\mathcal{V})^\dagger)^\dagger;v\mapsto\lambda f.f(v)$$

请注意，最后一个变换是以与基无关的方式给出的。重要的是，它$\widetilde{\ }$也可以用与基相关的方式给出，即 $\iota(v_i)=\widetilde{v_i}$，因为这两个

映射在应用于 $(V, \mathcal{V})^\dagger$ 的基时行为相同，也就是说，元素 $\widetilde{v_j}$:

$$\iota(v_i)(\widetilde{v_j}) = (\lambda f.f(v_i))\widetilde{v_j} = \widetilde{v_j}v_i = \partial_{i,j} = \widetilde{\widetilde{v_i}}(\widetilde{v_j})$$

另请注意，$\widetilde{v_i \otimes w_j} = (\widetilde{v_i} \otimes \widetilde{w_j})u_\otimes$，其中 $u_\otimes : K \otimes K \to K$ 是域的乘法。根据这些定义，只需检查基元素上的必要相干条件，就可以轻松验证这构成一个 †-LDC。为展示这一技巧，考虑相干条件 [†-**ldc**。4]:

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{\quad\iota\quad} & ((A \oplus B)^\dagger)^\dagger \\ {\scriptstyle \iota\oplus\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^\dagger_\otimes} \\ (A^\dagger)^\dagger \oplus (B^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[\lambda_\oplus]{} & (A^\dagger \otimes B^\dagger)^\dagger \end{array}$$

我们必须证明（将张量与 par 视为相同）$\lambda^\dagger_\otimes(\iota(a_i \otimes b_j)) = \lambda_\otimes(\iota \otimes \iota(a_i \otimes b_j))$。由于结果是一个高阶项，只需证明它们在基元素上的取值相同即可。这意味着我们需要证明：$\lambda^\dagger_\otimes(\iota(a_i \otimes b_j))(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q}) = \lambda_\otimes(\iota \otimes \iota(a_i \otimes b_j))(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q})$

$$\begin{aligned}
(\lambda_\otimes(\iota \otimes \iota(a_i \otimes b_j)))(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q}) &= (\lambda_\otimes(\widetilde{\widetilde{a_i}} \otimes \widetilde{\widetilde{b_j}}))(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q}) \\
&= \widetilde{(\widetilde{a_i} \otimes \widetilde{b_j})}(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q}) \\
&= (\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q})(\widetilde{\widetilde{a_i}} \otimes \widetilde{\widetilde{b_j}})u_\otimes \quad \text{(diagrammatic order)} \\
&= \partial_{p,i}\partial_{q,j} \\
(\lambda^\dagger_\otimes(\iota(a_i \otimes b_j)))(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q}) &= (\lambda^\dagger_\otimes(\widetilde{\widetilde{a_i \otimes b_j}}))(\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q}) \\
&= (\widetilde{a_p} \otimes \widetilde{b_q})\lambda_\otimes \widetilde{\widetilde{a_i \otimes b_j}} \quad \text{(diagrammatic order)} \\
&= \widetilde{a_p \otimes b_q}\widetilde{\widetilde{a_i \otimes b_j}} \\
&= \partial_{p,i}\partial_{q,j}
\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{FFVec}_K$ 是一个紧的 †-isomix 范畴，其中 † 函子会平移对象，即$A \neq A^\dagger$。

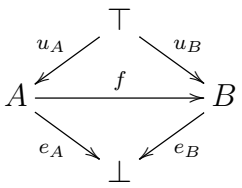
3.2.3 抽象状态空间范畴

以下关于 †-isomix 范畴的例子来源于凸运算模型范畴 [13]。下面介绍如何从一个现有的 †-isomix 范畴构造一个新的范畴，即抽象状态空间范畴。

D定义 3.8。 设 $\mathbb{X}$ 为一个 †-*isomix* 范畴。如下定义 $\mathsf{Asp}(\mathbb{X})$:

对象： $(A,\ e_A :\ A \to \bot,\ u_A :\ \top \to A)$

态射： $f :\ A \to B \in \mathbb{X}$ 使得下图交换：



恒等箭头和复合直接继承自 $\mathbb{X}$。Asp($\mathbb{X}$) 是一个 *LDC*：

$\otimes$ 在对象上：$(A, e_A, u_A) \otimes (B, e_B, u_B) := (A \otimes B, e', u')$，其中，$e' := mx(e_A \oplus e_B)u_\oplus$ 和 $u' := u_\otimes^{-1}(u_A \otimes u_B)$。$\otimes$ 的单位由 $(\top, m^{-1} :\ \top \to \bot, 1_\top)$ 给出。

$\oplus$ 在对象上：$(A, e_A, u_A) \oplus (B, e_B, u_B) := (A \oplus B, e', u')$，其中，$e' := (e_A \oplus e_B)u_\oplus$ 和 $u' := u_\otimes^{-1}(u_A \otimes u_B)mx$。$\oplus$ 的单位是 $(\bot, 1_\bot, m^{-1} :\ \top \to \bot)$

Asp($\mathbb{X}$) 也是具有以下性质的 †-isomix 范畴：

$$(A, e, u)^\dagger := (A^\dagger, u^\dagger \lambda_\bot^{-1}, \lambda_\top e^\dagger)$$

所有基本的自然同构都继承自 $\mathbb{X}$。因此，Asp($\mathbb{X}$) 是一个 †-isomix 范畴。

3.3 匕首、对偶与共轭

本节旨在回顾对偶化函子、共轭函子与匕首函子之间的相容性。在 dagger 紧闭范畴中，匕首函子 $(\ )^\dagger$ 与对偶化函子 $(\ )^*$ 彼此可交换，且它们的复合给出共轭函子 $(\ )_*$。同样，$(\ )_*$ 与 $\_(\ )^*$ 复合后给出匕首函子。我们的目标是将这些相容性推广到 $\dagger$-LDCs，并在合理的抽象层次上实现这一目标。为此，我们需要引入一种概念，我们在此称之为“共轭”；Egger 曾在 [61]中研究过这一概念，并称之为“对合”（这与我们的用法相冲突）。

3.3.1 对偶

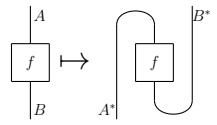
线性分配范畴的反向范畴（reverse of an LDC） $\mathbb{X}$，记作 $\mathbb{X}^{\mathsf{rev}} := (\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)^{\mathsf{rev}} = (\mathbb{X}, \otimes^{\mathsf{rev}}, \top, \oplus^{\mathsf{rev}}, \bot)$，其中，

$$A \otimes^{\mathsf{rev}} B := B \otimes A \qquad A \oplus^{\mathsf{rev}} B := B \oplus A$$

结合子和分配子也进行相应调整。类似于 LDC 的逆向范畴，我们有 $(\mathbb{X}^{\mathsf{rev}})^{\mathsf{rev}} = \mathbb{X}$。

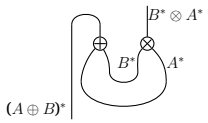
在 $*$-自主范畴中，对对象取左（或右）线性对偶可如下扩展为 Frobenius 线性函子：

$$(\_)^* : (\mathbb{X}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{rev}} \to \mathbb{X}; \quad A \mapsto A^*; \quad$$

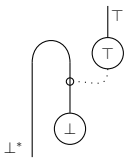


该 $(\ )^*$ 函子同时是反变的、反幺半的和反余幺半的：

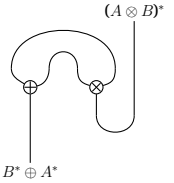
$$m_\otimes : A^* \otimes B^* \to (B \oplus A)^* :=$$



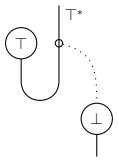
$$m_\top : \top \to \bot^* :=$$



$$n_\oplus : (A \otimes B)^* \to B^* \oplus A^* :=$$



$$n_\bot : \top^* \to \bot :=$$

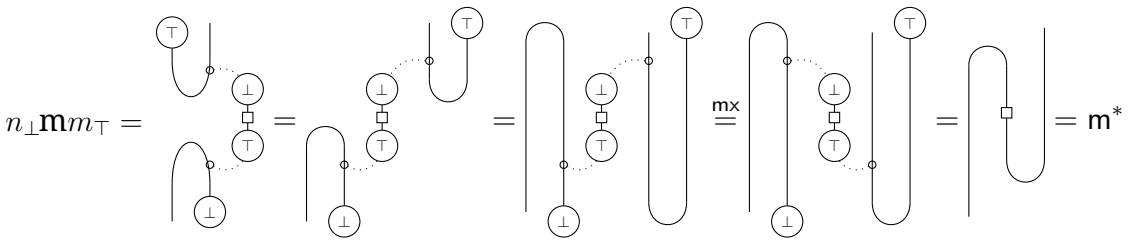


这些映射是反幺半和反余幺半群 laxor，因此是满足显然相干条件的同构。因此，$(\ )^*$ 是强 Frobenius 线性函子。

在本节余下部分，我们将把 $(\mathbb{X}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{rev}}$ 记作 $\mathbb{X}^{\mathsf{oprev}}$。

引理 3.9. 如果 $\mathbb{X}$ 是一个 *isomix* 范畴，那么 $(\ )^* : \mathbb{X}^{\mathsf{oprev}} \to \mathbb{X}$ 是一个 *isomix* 函子。

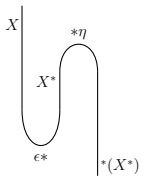
证明。 由于 $(\ )^*$ 是强 Frobenius 函子，根据引理 2.26，只需证明 $(\ )^*$ 保持混合结构，即 $(\_)^*$ 是混合函子，也就是说，我们需要证明 $n_\perp \mathsf{m}\ m_\top : \top^* \to \perp^* = \mathsf{m}^*$。证明如下：



□

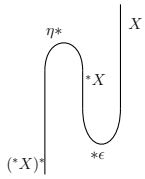
引理 3.10。 $(\eta, \epsilon) :: (\ )^* \dashv {}^*(\ )^{\mathsf{oprev}}_{\_} : \mathbb{X}^{\mathsf{oprev}} \to \mathbb{X}$

$$\eta_\otimes : X \to {}^*(X^*) :=$$



$$\in \mathbb{X} \qquad \eta_\oplus := \eta_\otimes^{-1}$$

$$\epsilon_\oplus : X \to ({}^*X)^* :=$$



$$\in \mathbb{X} \qquad \epsilon_\otimes := \epsilon_\oplus^{-1}$$

是 *Frobenius* 线性函子的线性等价。

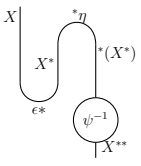
证明。 图形演算中的证明是直接的。 □

对于循环 $*$-自主范畴，我们可以将这个等价调整为一个对偶化的对合等价（即使单位和余单位相等）：

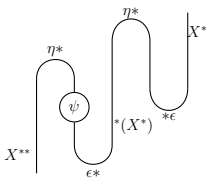
引理 3.11。 $(\eta',\ \epsilon') :: (\ )^* \_\dashv ((\ )^*)^{\mathsf{oprev}}_{\_} : \mathbb{X}^{\mathsf{oprev}} \to \mathbb{X}$ 其中 $\eta'_\otimes = {\eta'_\oplus}^{-1} := \eta_\otimes \psi^{-1},\ \ \epsilon'_\otimes = \epsilon'_\oplus := \epsilon\psi^*$ 且 $\eta' = \epsilon'$。

证明。 单位和余单位绘制如下：

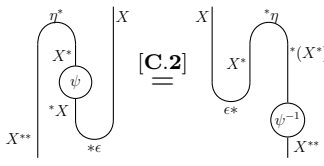
$$\eta'_\otimes =$$



$$\in \mathbb{X} \qquad \epsilon'_\otimes =$$



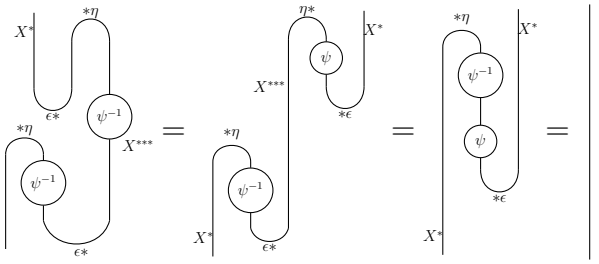
$$= \overset{[\mathbf{C.2}]}{=}$$



$$\in \mathbb{X}$$

cyclor 是一个线性变换；由于它关于张量和 par 都是幺半群的，并且伴随仅在同构意义下确定，因此它是一个同构。还需验证三角恒等式成立：

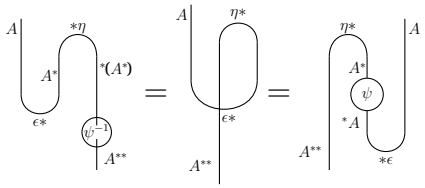
$$\eta_{\otimes'_{X^*}}(\epsilon'_{\otimes})^* =$$



$$= 1$$

另一个三角恒等式同理成立。 □

η' 与 ϵ' 的相等性由 [C.2] 立即可得，对于带有映射 $\eta' = \epsilon'$ 且该映射为**对偶化子**的 cyclor 而言。在对称情形下，此等价的对偶化子可绘制为：



3.3.2 共轭

回顾 Egger 的以下结构 [61]：

定义 3.12。 幺半范畴$(X, \otimes, I)$ 上的**共轭** 由一个函子$(\ ) : \mathbb{X}^{\mathsf{rev}} \longrightarrow \mathbb{X}$ 以及以下自然同构组成：

$$\overline{A} \otimes \overline{B} \xrightarrow{\chi} \overline{B \otimes A} \qquad\qquad \overline{\overline{A}} \xrightarrow{\varepsilon} A$$

分别称为 （反转张量的）**共轭 laxor** 和**共轭子** 使得 t

$$\overline{\overline{A}} \xrightarrow{\overline{\varepsilon_A} = \varepsilon_{\overline{A}}} \overline{A}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
(\overline{A} \otimes \overline{B}) \otimes \overline{C} & \xrightarrow{a_\otimes} & \overline{A} \otimes (\overline{B} \otimes \overline{C}) \\
{\scriptstyle \chi\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\chi} \\
\overline{(B \otimes A)} \otimes \overline{C} & [\mathbf{CF.1}]_\otimes & \overline{A} \otimes \overline{(C \otimes B)} \\
{\scriptstyle \chi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi} \\
\overline{C \otimes (B \otimes A)} & \xrightarrow[a_\otimes^{-1}]{} & \overline{(C \otimes B) \otimes A}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\overline{\overline{A}} \otimes \overline{\overline{B}} & \xrightarrow{\chi} & \overline{\overline{B} \otimes \overline{A}} \\
{\scriptstyle \varepsilon\otimes\varepsilon}\downarrow & [\mathbf{CF.2}]_\otimes & \downarrow{\scriptstyle \overline{\chi}} \\
A \otimes B & \xleftarrow[\varepsilon]{} & \overline{\overline{A \otimes B}}
\end{array}$$

当幺半范畴具有共轭函子时，它就是**共轭的**。

一个共轭的对称幺半范畴在满足以下附加相干条件时，称为**对称共轭**：

$$\begin{array}{ccc} \overline{A}\otimes\overline{B} & \xrightarrow{\chi} & \overline{B\otimes A} \\ {\scriptstyle c_\otimes}\downarrow & [\mathbf{CF.3}]_\otimes & \downarrow{\scriptstyle \overline{c_\otimes}} \\ \overline{B}\otimes\overline{A} & \xrightarrow[\chi]{} & \overline{A\otimes B} \end{array}$$

未对单位 I 指定任何相干条件，因为预期的相干条件是自动成立的：

引理 3.13。 *[61, 引理 2。3]* 对于每个共轭幺半范畴，都存在唯一的同构 $I \xrightarrow{\overline{\imath}} \overline{I}$ 使得

$$\begin{array}{ccc} I\otimes\overline{A} & \xrightarrow{\overline{\imath}\otimes 1} & \overline{I}\otimes\overline{A} \\ {\scriptstyle u_\otimes}\downarrow & [\mathbf{CF.4}]_\top & \downarrow{\scriptstyle \chi} \\ \overline{A} & \xrightarrow[\overline{u_\otimes^{-1}}]{} & \overline{A\otimes I} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{A}\otimes I & \xrightarrow{1\otimes\overline{\imath}} & \overline{A}\otimes\overline{I} \\ {\scriptstyle u_\otimes}\downarrow & [\mathbf{CF.5}]_\top & \downarrow{\scriptstyle \chi} \\ \overline{A} & \xrightarrow[\overline{u_\otimes^{-1}}]{} & \overline{I\otimes A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\overline{\imath}} & \overline{I} \\ \| & [\mathbf{CF.6}]_\top & \downarrow{\scriptstyle \overline{\overline{\imath}}} \\ I & \xrightarrow[\varepsilon^{-1}]{} & \overline{\overline{I}} \end{array}$$

定义 3.14。 *[61]* 一个**共轭 LDC** 是一个线性分配范畴$(\mathbb{X}, \otimes, \top, \oplus, \bot)$，并带有一个共轭函子$(\ )$：$\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ 以及自然同构：$\overline{}$

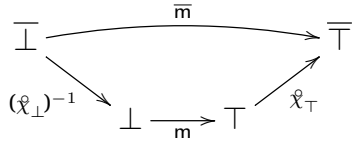
$$\overline{A}\otimes\overline{B}\xrightarrow{\chi_\otimes}\overline{B\otimes A} \qquad \overline{A\oplus B}\xrightarrow{\chi_\oplus}\overline{B}\oplus\overline{A} \qquad \overline{\overline{A}}\xrightarrow{\varepsilon}A$$

使得 $(\mathbb{X},\ \otimes,\ \top,\ \chi_\otimes,\ \varepsilon)$ 和 $(\mathbb{X},\ \oplus,\ \bot,\ \chi_\oplus^{-1},\ \varepsilon)$ 关于共轭函子均为共轭（对称）幺半范畴，并且以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \overline{B\oplus C}\otimes\overline{A} & \xrightarrow{\chi_\oplus\otimes 1} & (\overline{C}\oplus\overline{B})\otimes\overline{A} \\ {\scriptstyle \chi_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ \overline{(A\otimes(B\oplus C))} & [\mathbf{CF.7}] & \overline{C}\oplus(\overline{B}\otimes\overline{A}) \\ {\scriptstyle \overline{\partial}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\oplus\chi_\otimes} \\ \overline{((A\otimes B)\oplus C)} & \xrightarrow[\chi_\oplus]{} & \overline{C}\oplus\overline{A\otimes B} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{A}\otimes\overline{C\oplus B} & \xrightarrow{\chi_\otimes} & \overline{(C\oplus B)\otimes A} \\ {\scriptstyle 1\otimes\chi_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial}} \\ \overline{A}\otimes(\overline{B}\oplus\overline{C}) & [\mathbf{CF.8}] & \overline{C\oplus(B\otimes A)} \\ {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_\oplus} \\ (\overline{A}\otimes\overline{B})\oplus\overline{C} & \xrightarrow[\chi_\otimes\oplus 1]{} & \overline{(B\otimes A)}\oplus\overline{C} \end{array}$$

注意，根据引理 3.13，存在典范同构 $\top\xrightarrow{\overline{\imath}_\top}\top$ 和 $\bot\xrightarrow{\overline{\imath}_\bot}\bot$，因此共轭是一个正规函子。然而，当 $\mathbb{X}$ 是一个混合范畴时，共轭不一定是混合函子。要使共轭成为混合函子，必须满足以下额外条件

必须满足：

[**CF**.9] 

命题 3.15。 共轭 *LDC* 恰好是一个带有 *Frobenius* 伴随$(\epsilon^{-1}, \epsilon) : (\,) \dashv (\,)^{\mathsf{rev}} : \mathbb{X}^{\mathsf{rev}} \to \mathbb{X}$ 的 *LDC*，$\overline{\mathbb{X}}$ 其中 $\epsilon := (\varepsilon, \varepsilon^{-1})$。此外，如果 $\mathbb{X}$ 是一个 *isomix* 范畴，且共轭是一个混合函子，那么共轭就是一个 *isomix* 等价。

证明。 显然，$\overline{(\,)}$ 是一个强 Frobenius 函子，因此混合性蕴含 isomix。此外，ε显然关于张量和 par 是幺半群的。三角等式给出 $\varepsilon^{-1}\varepsilon = 1 : A \to A$ 因此$\overline{\varepsilon = \varepsilon}$。 □

显然，共轭应当将左对偶变为右对偶：

引理 3.16。 如果 $B \dashv A$ 是一个线性对偶，那么 $\overline{A} \dashv \overline{B}$ 是一个线性对偶。

证明。 假设 $(\eta, \varepsilon) : B \dashv A$。那么，$(\wp_\top \eta \overline{\chi}_\oplus, \chi_\otimes \varepsilon \overline{\wp}_\bot) : A \dashv B$。 □

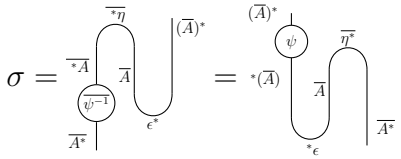
当一个 $*$-自主范畴是循环的时，我们期望共轭应以协调一致的方式与 cyclor 相互作用：

定义 3.17. *[63]* 一个 **共轭循环 $*$-自主范畴** 是一个共轭的 $*$-自主范畴，并配有一个 *cyclor* $A^* \xrightarrow{\psi} {}^*A$，使得

$$\begin{array}{ccc} (\overline{A})^* & \xrightarrow{\psi} & {}^*(\overline{A}) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \overline{({}^*A)} & \xrightarrow[\overline{\psi^{-1}}]{} & \overline{(A^*)} \end{array}$$

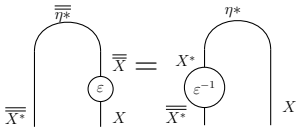
由此得到一个映射 $\sigma : \overline{(A)^*} \to \overline{(A^*)}$。

上述条件可绘制如下：

$\sigma =$ 

当 $*$-自伴范畴是对称的时，共轭自动保持规范循环子。

引理 3.18。 在共轭的 $*$-自伴范畴中，



$$\mathring{\chi}_\top \, \overline{\mathring{\chi}_\top} \, \overline{\overline{\eta*}} \, \overline{\chi_\oplus}^{-1} \chi_\oplus^{-1}(1 \oplus \varepsilon) = \eta * (\varepsilon^{-1} \oplus 1) : \top \to \overline{\overline{X^*}} \oplus X$$

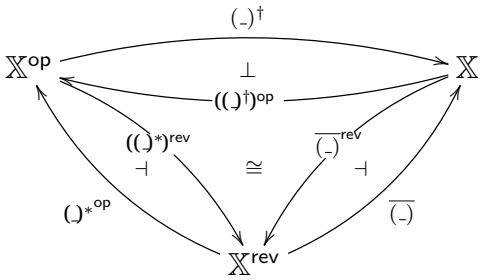
证明。

$$\begin{aligned}
\mathring{\chi}_\top \, \overline{\mathring{\chi}_\top} \, \overline{\overline{\eta*}} \, \overline{\chi}^{-1} \chi^{-1}(1 \oplus \varepsilon) &= \mathring{\chi}_\top \, \overline{\mathring{\chi}_\top} \, \overline{\overline{\eta*}} \, \overline{\chi}^{-1} \chi^{-1}(\varepsilon\varepsilon^{-1} \oplus \varepsilon) \\
&= \mathring{\chi}_\top \, \overline{\mathring{\chi}_\top} \, \overline{\overline{\eta*}} \, \overline{\chi}^{-1} \chi^{-1}(\varepsilon \oplus \varepsilon)(\varepsilon^{-1} \oplus 1) \\
&\overset{[\mathbf{CF.2}]_\oplus}{=} \mathring{\chi} \, \overline{\mathring{\chi}_\top} \, \overline{\overline{\eta*}} \varepsilon(\varepsilon^{-1} \oplus 1) \\
&\overset{\mathbf{nat.}}{=} \mathring{\chi}_\top \, \overline{\mathring{\chi}_\top} \, \varepsilon\eta * (\varepsilon^{-1} \oplus 1) \\
&\overset{[\mathbf{CF.6}]_\top}{=} \eta * (\varepsilon^{-1} \oplus 1)
\end{aligned}$$

□

3.3.3 匕首对合与共轭

在存在对偶化函子的情况下，循环 $*$-自主范畴中匕首与共轭的相容性由以下图表说明：



具体而言，我们有：

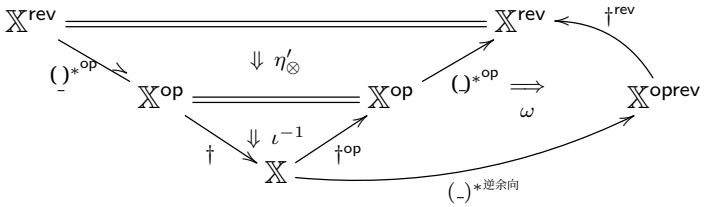
命题 3.19。 每个循环的 $\dagger$-$*$-自对偶范畴都是共轭的 $*$-自对偶范畴。

证明。 设 $\mathbb{X}$ 是一个循环的、 $\dagger$-$*$-自对偶范畴。于是，复合伴随给出等价 $(\,)^{\dagger *} \dashv (\,)^{*\dagger}$。然而，要构造共轭，我们需要同一对函子之间的等价：为得到这样的等价，我们使用自然等价 $\omega : (\,)^{\dagger *} \to (\,)^{*\dagger}$ ，它来自 Frobenius 线性函子的旋转子保持条件。一个共轭的 _

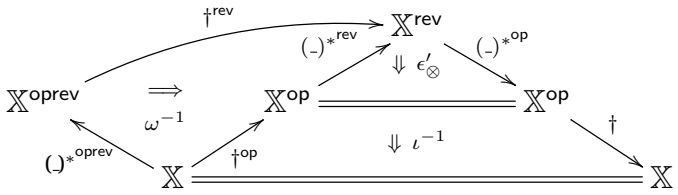
_

等价还要求该等价的单位和余单位互为逆。该等价的单位和余单位分别由 *(a)* 和 *(b)* 给出；

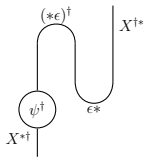
(a)

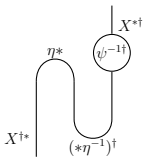


(b)



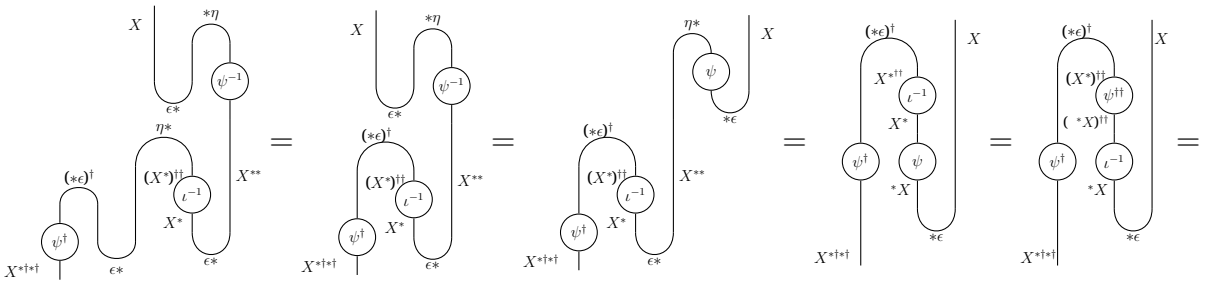
其中，同构 $\omega : (\,)^{\dagger *} \to (\,)^{*\dagger}$ 来自旋转子保持条件，[**CFF**], 适用于 Frobenius 线性函子：

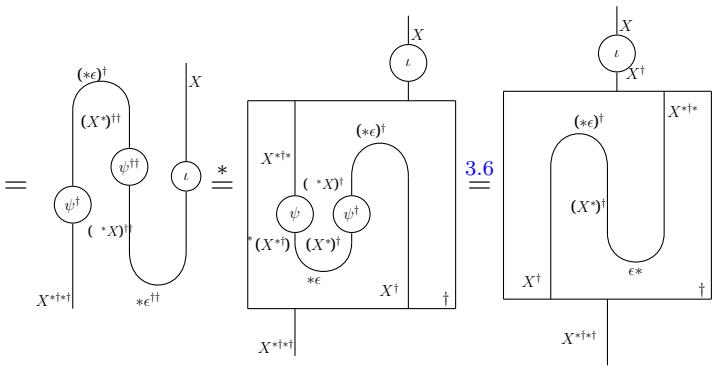
$\omega :=$ 

$\omega^{-1} :=$ 

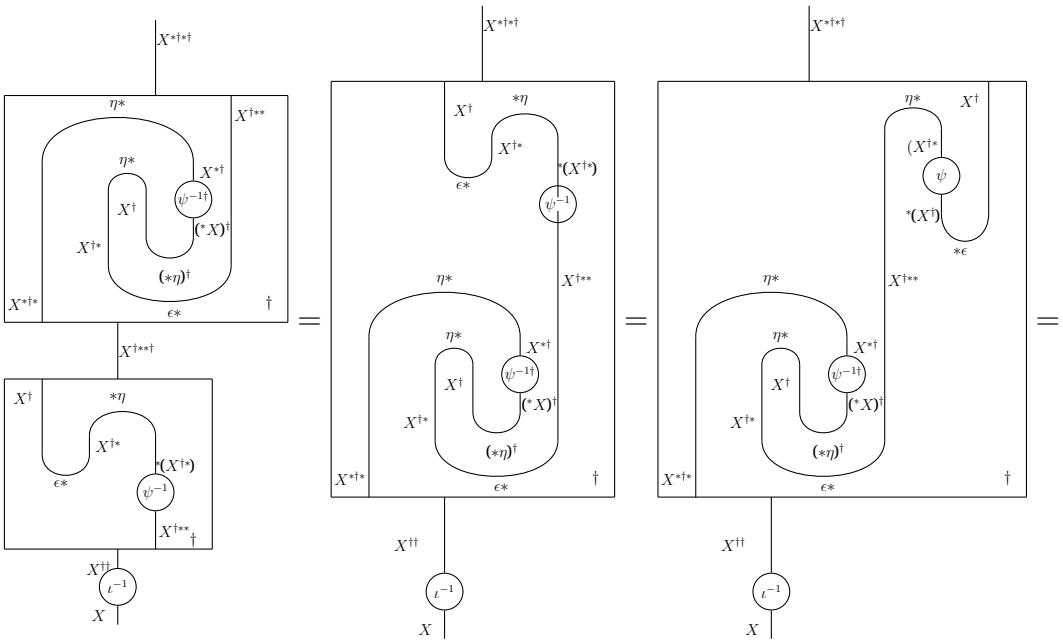
还需要证明余单位映射与单位映射互为逆映射于 $\mathbb{X}$ ：

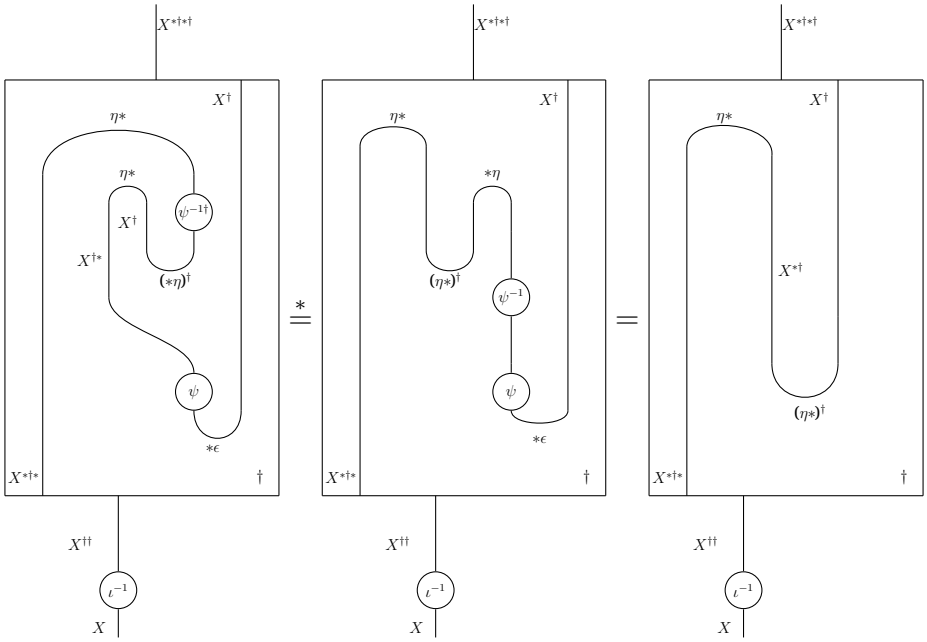
(a)





(b)





(∗)成立是因为 † 保持 cyclor。因此，(a)和(b)互为逆。 □

接下来，我们证明共轭函子与对偶化函子一起给出一个 †:

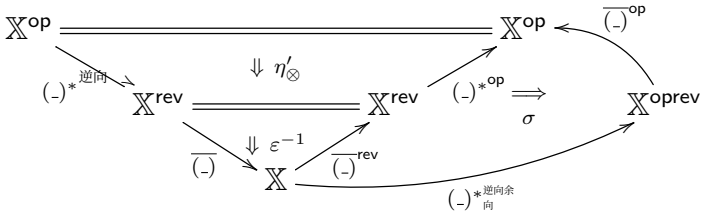
命题 3.20。 每个循环的、共轭的 $*$-自伴范畴也是一个 †-$*$-自伴范畴。

证明。 设 $\mathbb{X}$ 为一个循环的、共轭的 $*$-自主范畴，则 $(\,)^* \dashv (\,)^*$ 是一个等价。为了构造一个匕首，我们需要在同一函子上的一个等价：我们通过使用

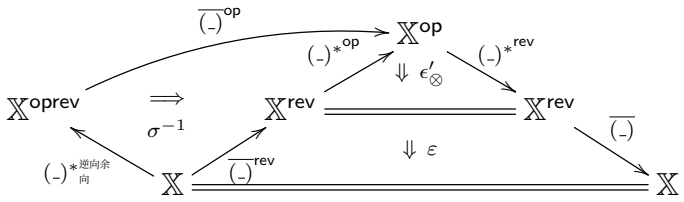
自然等价 $\sigma :(\ )^{*} \to (\ )^{*}$，该等价来自定义 3.17。此外，一个对合等价要求该（反变）等价的单位和余单位为同一个映射（我们称之为对合子，ι）。我们证明情况确实如此：

该等价的单位和余单位分别由（a）和（b）给出；

(a)

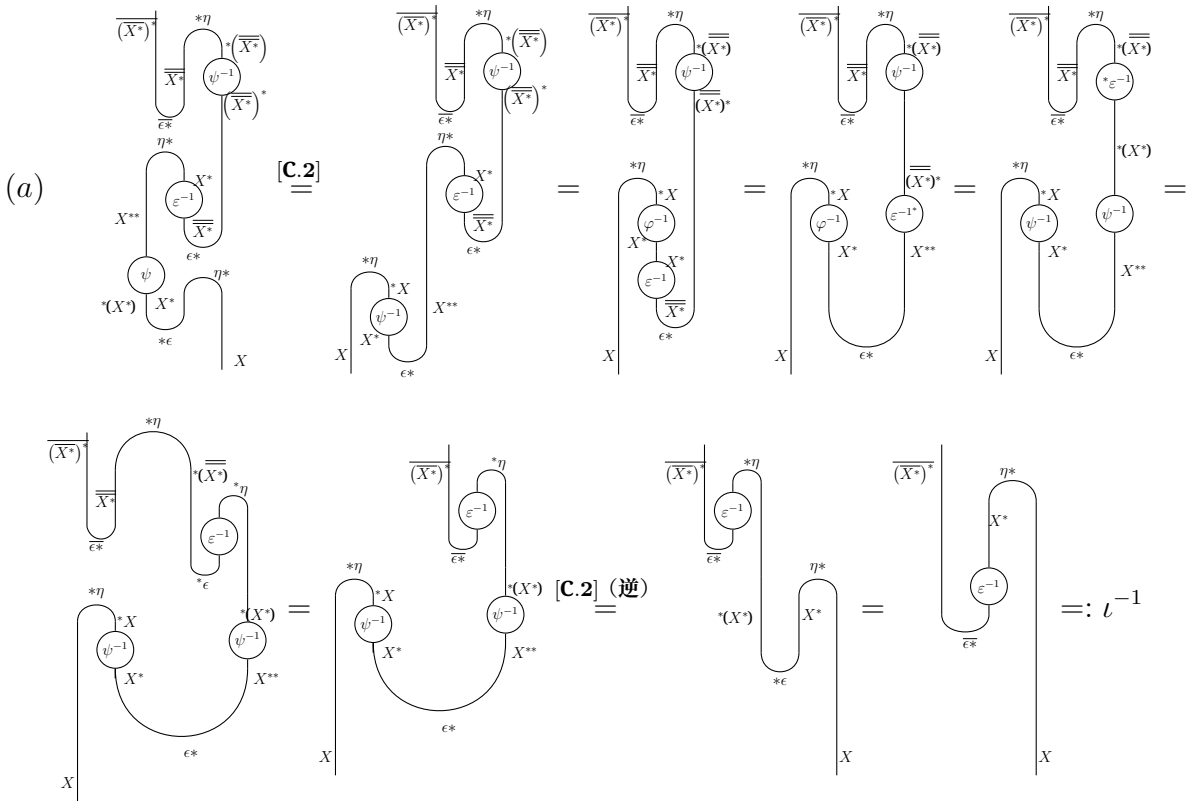


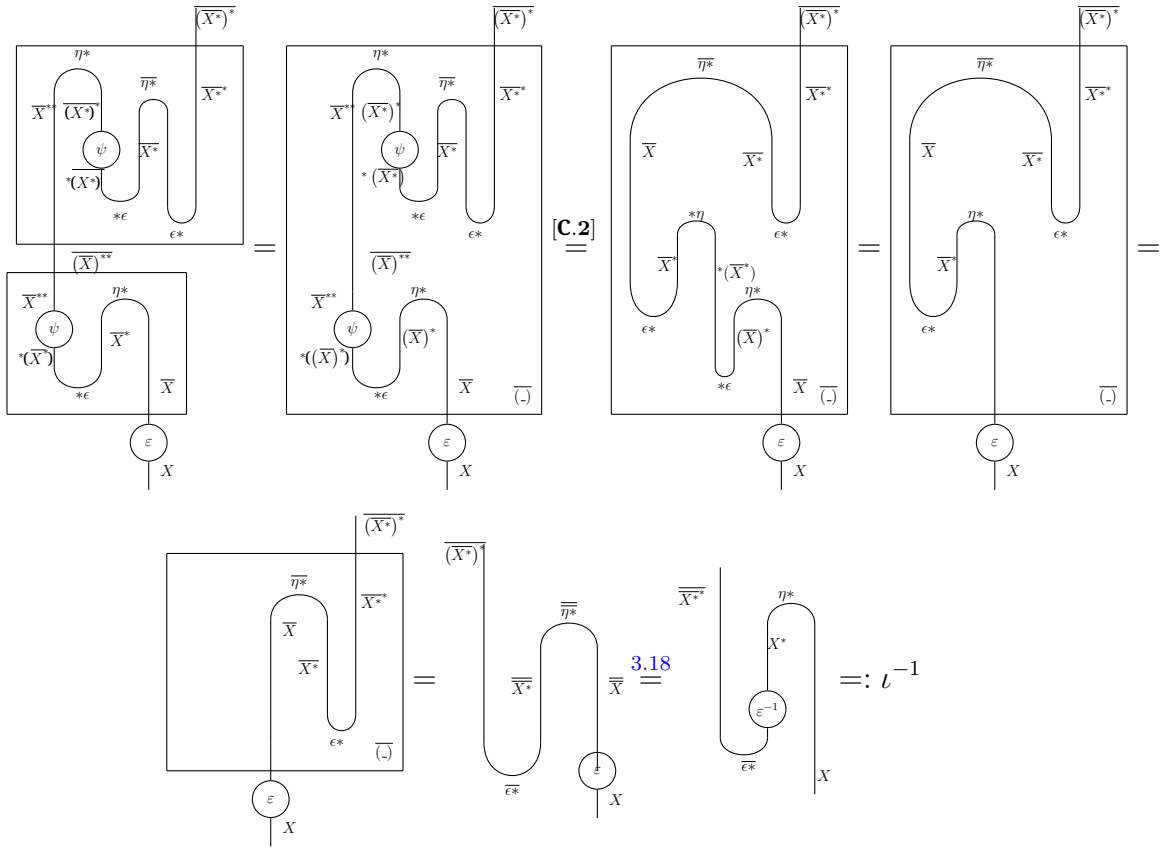
(b)



其中 $\sigma : \overline{A}^{*} \to \overline{A^{*}}$ 见定义 3.17。下文将证明单位和余单位在 $\mathbb{X}$中相同。

(a)



(b) 

□

注意，要使对偶化函子与共轭函子的复合产生匕首，反之亦然，$*$-自伴范畴必须是循环的，并且其 cyclor 在共轭作用下保持不变（参见定义3.17）以及匕首下保持不变（参见引理之前的内容3.6）。

合并命题 3.19 和 3.20，我们得到：

定理 3.21. 每个循环 $*$-自对偶范畴都是共轭的 $*$-自对偶范畴，当且仅当它是 †-$*$-自对偶范畴。

3.4 例子：匕首与共轭

现在来看一些 †-isomix范畴的例子，其中匕首由对偶化与共轭函子给出。

3.4.1 将带共轭的群视为范畴

定义 3.22。 一个**带共轭群** 是一个群(G, e)，以及一个函数$(\overline{}): G \to G$，满足对于所有 $g \in G$、$\overline{\overline{g}} = g$，以及所有 g、$h \in G$、$\overline{g.h} = \overline{h}\,\overline{g}$ 和 $\overline{e} = e$。

设 $(G、\ e)$ 是一个带共轭群。离散范畴 $\mathbb{D}(G、\ e)$ 的对象是该群的元素，它是一个幺半范畴，其张量积由$g \otimes h := g.h$给出，幺半单位为 e。此外， $\mathbb{D}(G、\ e)$ 是一个紧闭范畴，其中 $g^* := g^{-1}$，并且它具有平凡的共轭旋转（见定义 3.17）。因此， $\mathbb{D}(G、\ e)$ 是一个带有 $g^\dagger := g^*$ 的紧 †-isomix-$*$-自主范畴，这说明共轭如何产生匕首。

以下是一些带共轭的群及其所确定的离散范畴的例子：

• 假设固定的群为（$\mathbb{C}, +, 0$），其中对象是复数，张量积为加法。复数的对偶和共轭定义如下：（$a + ib$）$^* = -a - ib$ 和 $a + ib := \overline{a - ib}$。因此，

$$(a + ib)^\dagger := \overline{(a + ib)^*} = \overline{(-a - ib)} = -a + ib$$

• 考虑乘法群（$\mathbb{C}^*, ., 1$），其中对象是非零复数，张量积由乘法给出。对偶化函子和共轭函子定义如下：

$$(a + ib)^* = c + id, \text{ where } ac - bd = 1 \text{ and } ad + bc = 0$$

$$\overline{a + ib} := a - ib$$

（$a + ib$）† 由 $\overline{(a + ib)^*}$给出。

• 假设固定的群为 $\mathbb{D}$（P（x） $+, 0$），其中 P（x）是多项式环。$\mathbb{D}$（P（x） $+, 0$）是一个带共轭的紧闭范畴： P（x）$^* = -P$（x），且 P（x） $= P$（$-x$）。于是， $\overline{P}$（x）$^\dagger = -P$（$-x$）。

• 考虑复数域上的 2 阶一般线性群 $(\mathbb{M}_2, ., I_2)$。那么，离散范畴 $\mathbb{D}(\mathbb{M}_2, ., I_2)$ 的对偶化函子由矩阵逆给出，共轭由共轭转置给出： $\overline{\begin{pmatrix} a+ib & m+in \\ c+id & p+iq \end{pmatrix}} := \begin{pmatrix} a-ib & c-id \\ m-in & p-iq \end{pmatrix}$。

于是， $\mathbb{D}(\mathbb{M}_2, ., I_2)$ 是一个 †-isomix $*$-自主范畴，具有：

$$\begin{pmatrix} a+ib & m+in \\ c+id & p+iq \end{pmatrix}^\dagger := \overline{\begin{pmatrix} a+ib & m+in \\ c+id & p+iq \end{pmatrix}^*} = \begin{pmatrix} a-ib & c-id \\ m-in & p-iq \end{pmatrix}^{-1}$$

3.4.2 有限性矩阵与有限性关系

现在我们来描述 FRel 和 FMat(R) 的共轭 $(\,)$，以及由此得到的匕首函子 $(\,)^\dagger$。请回忆，匕首函子是通过复合共轭对偶化函子得到的：$X^\dagger = X^*$。

引理 3.23。FRel、FMat(R)，其中 R 是共轭幺半环，构成共轭的 *isomix* $*$-自对偶范畴。

共轭幺半环是带有共轭运算 $(\,)$：$R \to R$ 的幺半环，满足 $r = r$，且共轭运算保持加法、$0 = 0$ 和 $r + s = r + s$，并保持乘法 $1 = 1$ 和 $r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_2$。

证明。对于 FRel，共轭函子在对象和态射上均为恒等映射，因此匕首即为对偶，$X^\dagger = X^*$。FRel 是一个共轭的 $*$-自对偶范畴，其所需的自然同构定义如下：

- $\overline{X} \otimes \overline{Y} \xrightarrow{\chi_\otimes} \overline{Y \otimes X}$ 和 $\chi_\oplus$ 是对称映射。
- $\overline{\overline{A}} \xrightarrow{\varepsilon} A$ 是恒等映射。

对于 FMat(R)，其共轭函子由幺半环上的共轭决定。该函子在对象上仍为恒等映射，并使用对称映射来提供 $\chi_\otimes$ 和$\chi_\oplus$。对于有限性矩阵，M，M通过对 M的所有元素取共轭来给出。$\chi_\otimes$，$\chi_\oplus$，ε是其对应有限性关系的特征函数。

二者都是共轭 isomix 范畴，因为 $\top = \bot$。 □

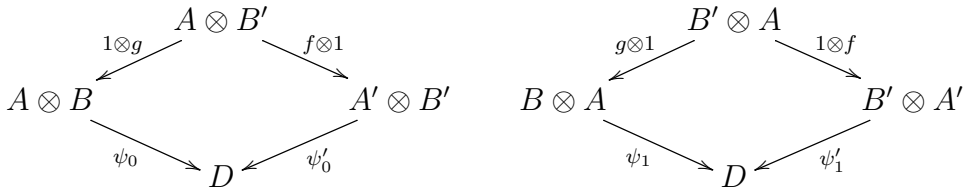
3.4.3 Chu 空间

关于用 Chu 空间表示量子系统的应用，已有研究见 [2], [3]。本节将展示，在一个具有拉回的闭共轭幺半范畴上进行 Chu 构造，会产生一个 †-isomix LDC，Chu$_\mathbb{X}(I)$。为了得到 $*$-自主范畴以及 †上的Chu$_\mathbb{X}(I$-结构，我们将首先说明如何在Chu 范畴上构造共轭结构。为此，我们将从一个共轭闭幺半范畴 $\mathbb{X}$出发，构建该范畴的结构；这个范畴不一定是对称的。请注意，共轭意味着它既是左闭的，也是右闭的，因此我们可以考虑非交换的Chu 构造：在这方面，我们将采用 J¨urgen Koslowski 的构造 [88]，使用基于同一对偶化对象的简化“Chu 胞”，从而得到一个循环的 $*$-自主范畴，而非线性双范畴。此外，我们将选择一个共轭的对偶化对象，以获得一个共轭循环的 $*$-自主范畴。

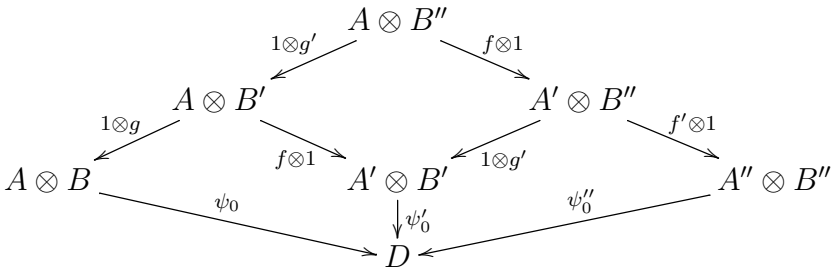
共轭对象是范畴 $\mathbb{X}$ 中的一个对象 D，带有一个同构 $d : D \to \overline{D}$，满足$d\overline{d} = \varepsilon : D \to \overline{\overline{D}}$。于是，我们可以如下定义 $\mathbf{Chu}_{\mathbb{X}}(D)$：

对象： $(A,\ B,\ \psi_0,\ \psi_1)$，其中 $\psi_0 :\ A \otimes B \to D$，且 $\psi_1 :\ B \otimes A \to D$，位于 $\mathbb{X}$ 中（这些是简化的 Chu 胞腔）。

态射： $(f,\ g) : (A,\ B,\ \psi_0,\ \psi_1) \to (A',\ B',\ \psi'_0,\ \psi'_1)$，其中 $f :\ A \to A'$，$g : B' \to B$，且以下图表交换：

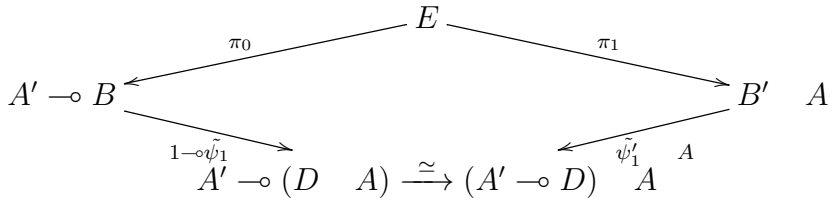


复合： $(f,\ g)(f',\ g') :=(ff',\ g'g)$。复合定义良好，具体如下：



反向 Chu 映射同理：ψ_1、ψ'_1 和 ψ''_1。**恒等映射** 为 $(1_A,\ 1_B)$：$(A,\ B,\ \psi_0,\ \psi_1) \to (A,\ B,\ \psi_0,\ \psi_1)$，正如预期。

张量积 $\otimes$**：** $(A,\ B,\ \psi_0,\ \psi_1) \otimes (A',\ B',\ \psi'_0,\ \psi'_1) :=(A \otimes A',\ E,\ \gamma_0,\ \gamma_1)$，其中 E 是下图中的拉回：



with

$$\frac{B \xrightarrow{\tilde{\psi_1}} D \quad A}{B \otimes A \xrightarrow{\psi_1} B} \qquad \frac{B' \xrightarrow{\tilde{\psi'_1}} A' \multimap D}{A' \otimes B' \to D}$$

and,

$$\gamma_0 := (A\otimes A')\otimes E \xrightarrow{1\otimes\pi_0} (A\otimes A')\otimes(A' \multimap B) \xrightarrow{a_\otimes} A\otimes(A'\otimes A' \multimap B) \xrightarrow{1\otimes eval_\multimap} A\otimes B \xrightarrow{\psi_0'} D$$

$$\gamma_1 := E\otimes(A\otimes A') \xrightarrow{\pi_1\otimes 1} (B' \quad A)\otimes(A\otimes A') \xrightarrow{a_\otimes^{-1}} (B' \quad A\otimes A)\otimes A' \xrightarrow{eval \quad \otimes 1} B'\otimes A' \xrightarrow{\psi_1'} D$$

The tensor unit is $(I, D, u_\otimes^l, u_\otimes^r)$.

众所周知，$\mathsf{Chu}_{\mathbb{X}}(D)$ 是一个（非交换） $*$-自对偶范畴。此外，它是循环的，因为

$$^*(A, B, \psi_0, \psi_1) = (A, B, \psi_0, \psi_1)^* = (B, A, \psi_1, \psi_0).$$

此外，$\mathsf{Chu}_{\mathbb{X}}(D)$ 是共轭的，且

$$\overline{(A, B, \psi_0, \psi_1)} := (\overline{A}, \overline{B}, \chi\overline{\psi_1}d, \chi\overline{\psi_0}d)$$

并且$\overline{(f,\ g)} = \overline{(f,\ g)}$。最后，共轭循环 $*$-自反范畴意味着存在一个匕首！

在 $\mathbb{X}$ 是对称幺半闭范畴的情形下，我们可以重新得到通常的 Chu 构造 [18], ，记作 $\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(D)$。考虑 Chu- 对象的全子范畴，其中包含形如 $(A,\ B,\ \psi,\ c_\otimes\psi)$ 的特殊 Chu 胞，第二个胞使用对称映射获得；这给出了一个包含 $\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(D) \to \mathsf{Chu}_{\mathbb{X}}(D)$。

我们注意到，当该子范畴在共轭下封闭时， $\mathbb{X}$ 是对称共轭的：

引理 3.24。 若 $\mathbb{X}$ 是共轭对称幺半闭范畴，且 $d:\ D \to D$ 是一个对合对象，则$\overline{\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(D)}$ 是一个共轭对称 $*$-自反范畴。

证明。 只需注意到 $(A,\ B,\ \psi,\ c_\otimes\psi)$ 的 Chu 胞具有正确的形式。利用对合与对称性的相干性，该对象的第一个 Chu 胞具有 $\chi c_\otimes\psi d = c_\otimes\chi\psi d$ ，这恰好是将对称映射应用于该对象第二个 Chu 胞所得的结果，正如所需。

□

要得到一个 isomix 范畴，可以选择 $\mathsf{D} = \mathsf{I}$。$\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(I)$ 是一个 isomix 范畴，因为张量和 par 的单位相同（即 $\top = \bot = (I,\ I,\ u_\otimes^l = u_\otimes^r)$ ）。张量单位始终是一个共轭对象，因为 $(\chi)^{-1} : I \to I$；因此，这立即构成一个共轭对称的*-自洽范畴。将共轭与对偶化函子复合，便得到一个匕首。

3.4.4 $*$-自对偶范畴中的 Hopf 模范畴

在这个例子中[1], 我们从任意一个对称的 $*$-自洽范畴 $\mathbb{X}$出发，并构造一个 Hopf 代数上的模范畴，而它本身又是一个 $\dagger$-$*$-自洽范畴。

首先，已有证明表明 [103], ：在任意对称$\otimes$-自对偶范畴中，关于一个 $*$-Hopf 代数的 Hopf 模范畴也是一个 $*$-自对偶范畴。接着我们注意到，当 Hopf 代数是余交换的时，所得的 $*$-自对偶范畴带有一个共轭函子。按照定理3.20中的方法，将共轭函子与对偶化函子复合，即可构造匕首函子。在介绍 Hopf 代数上的模范畴$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$之前，我们先给出一些基本定义。

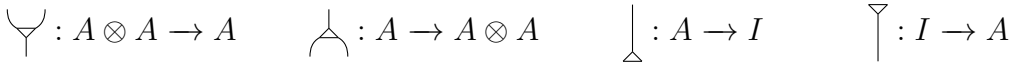
定义3.25。对称幺半范畴中的一个**双代数**是一个四元组

$$(\nabla : B \otimes B \to B, e : I \to B, \Delta : B \to B \otimes B, u : B \to I)$$

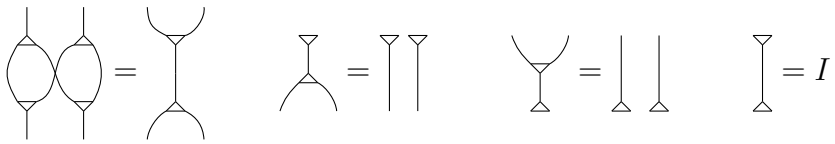
使得(A, ∇, e) 是一个幺半群，且(A, Δ, u) 是一个余幺半群，并且 ∇ 和 e 关于余乘法和余单位是余代数同态。

注意到，与其要求 ∇ 和 e 是余代数同态，不如等价地要求 Δ 和 u 相对于乘法和单位是代数同态。

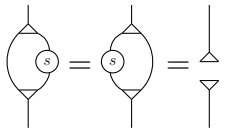
双代数的各组成部分图示如下：



这给出了余代数同态定律的简洁图示，即：



定义3.26。 双代数的一个**对极** $(B, \nabla, , \Delta,)$ 是一个自同态 $s : B \to B$ ，使得



*Hopf*代数是一种带有对极的双代数。对合*Hopf*代数是一种对极为自身逆的*Hopf*代数。

[1]感谢 J-S. P. Lemay 提请我们注意这个例子。

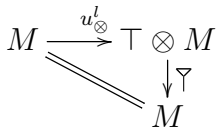
群代数在域上的一个标准例子是：对于所有群元素 g, $\nabla: g \mapsto g \otimes g$, $\varepsilon: g \mapsto 1$, $\Delta: g \otimes h \mapsto gh$ 以及 $s: g \mapsto g^{-1}$。

引理 3.27。 设 $\mathbb{X}$是一个对称幺半范畴，则：

(i) *[21, 定理 3。5]* 若 H 是范畴 $\mathbb{X}$中的交换或余交换 *Hopf* 代数，则$s^2 = 1$ 其中 s 是对极：因此它是一个对合 *Hopf* 代数。

(ii) *[90, 引理 2。11]* 若 H 是一个交换霍普夫代数，则 s 是一个幺半群同态。若 H 是一个余交换 *Hopf* 代数，则 s 是一个余幺半群同态。

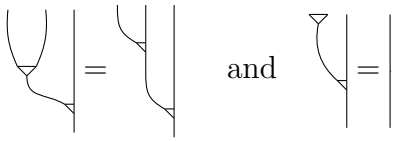
定义 3.28。 双代数的一个**左模** $(B, \nabla, u, \Delta, e)$ 是一个元组$(M, a_M^l: B \otimes M \to M)$，满足 a_M^l 是一个 B-作用，即下图交换：



我们用图示将 a_m^l 表示如下：



给出模公理的图示：



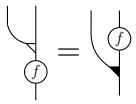
定义 3.29。 设 $\mathbb{X}$ 是一个 $*$-自对偶范畴，且 H 是 $\mathbb{X}$中的一个 *Hopf* $\otimes$-代数。 $\mathbb{X}$中的左 H-模范畴 $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 具有：

对象： 左 H-模 $(A, a_A^l: H \otimes A \to A)$：

态射： 模同态 $(A, a_A^L: H \otimes A \to A) \xrightarrow{f} (B, a_B^L: H \otimes B \to B)$ 是满足下图交换的映射：

$$\begin{array}{ccc} H \otimes A & \xrightarrow{a_A^L} & A \\ {\scriptstyle 1\otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H \otimes B & \xrightarrow[a_B^L]{} & B \end{array}$$

图示如下：

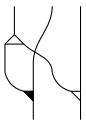


注意，任何左作用确实都是模同态。

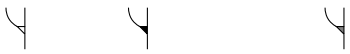
定理 3.30. *[103]* 设 $\mathbb{X}$ 是对称的 $*$-自对偶范畴，且 H 是 $\otimes$-*Hopf* 代数，属于 $\mathbb{X}$ 且对极可逆（$s^2 = 1$）。那么，$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 是一个 $*$-自对偶范畴。若 *Hopf* 代数 H是余交换的，则 $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 是一个对称的 $*$-自对偶范畴。

*Pro*证明略。(示意) $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 的幺半群积 $\otimes$ 定义如下：

$$(A, \triangleright) \otimes (B, \triangleright) := (A \otimes B, \triangleright) \text{ where, } \triangleright :=$$



H $\top \otimes$ 的单位由（$\top$，$H \otimes \top \xrightarrow{u^R_\otimes} H \xrightarrow{e} \top$）给出，左作用表示为 $\top$par 积定义为：（A，）$\oplus$（B，）：=（$A \oplus B$，），其中，



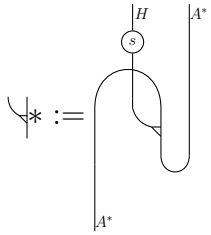
$$\triangleright := H \otimes (A \oplus B) \xrightarrow{\Delta \otimes 1} (H \otimes H) \otimes (A \oplus B) \xrightarrow{a_\otimes} H \otimes (H \otimes (A \oplus B))$$
$$\xrightarrow{c_\otimes} (H \otimes (A \oplus B)) \otimes H \xrightarrow{\partial^L \otimes 1} ((H \otimes A) \oplus B) \otimes H \xrightarrow{\partial^R} (H \otimes A) \oplus (B \otimes H)$$
$$\xrightarrow{1 \oplus c_\otimes} (H \otimes A) \oplus (H \otimes B) \xrightarrow{\triangleright \oplus \triangleright} A \oplus B$$

并且 $\oplus$ 的单位是

$$\perp := (\perp, H \otimes \perp \xrightarrow{u \otimes \perp} \top \otimes \perp \xrightarrow{u_\otimes} \perp)$$

所有基本的自然同构都直接继承自 $\mathbb{X}$，并且它们是模同态。因此，$\mathbf{HMod}_{\mathbb{X}}$ 是一个 LDC。

对偶化函子 $(\,)^*$ 定义如下：$(A, \triangleright : H \otimes A \to A)^* := (A^*, \triangleright^* : H \otimes A^* \to A^*)$，其中



从等式角度来看，

$$\text{⟨image⟩}^* := H \otimes A^* \xrightarrow{s \otimes 1} H \otimes A^* \xrightarrow{u_{\otimes}^{-1} \otimes 1} (H \otimes \top) \otimes A^* \xrightarrow{1 \otimes \eta \otimes 1} (H \otimes (A^* \oplus A)) \otimes A^*$$
$$\xrightarrow{c_{\otimes} \otimes 1} ((A^* \oplus A) \otimes H) \otimes A^* \xrightarrow{\partial \otimes 1} (A^* \oplus (A \otimes H)) \otimes A^* \xrightarrow{1 \otimes c_{\otimes} \otimes 1} (A^* \oplus (H \otimes A)) \otimes A^*$$
$$\xrightarrow{(1 \oplus \text{⟨image⟩}) \otimes 1} (A^* \oplus A) \otimes A^* \xrightarrow{\partial} A^* \oplus (A \otimes A^*) \xrightarrow{1 \oplus \epsilon} A \oplus \bot \xrightarrow{u_{\oplus}^R} A^*$$

杯与帽直接继承自 $\mathbb{X}$，因此蛇形图成立。$*$ 的定义中的对极：$H \otimes A^* \to A^*$ 使杯与帽成为模态态射。

假设 $(A, \text{⟨image⟩}) \xrightarrow{f} (B, \text{⟨image⟩})$ 是一个模态射，则 $f^* := B^* \xrightarrow{f^*} A^* \in \mathbb{X}$ 也是一个模态射。因此，$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 是一个具有对偶化函子的幺半范畴，因而是一个 $*$-自洽范畴。

若 H 是余交换的，则 $(A, \text{⟨image⟩}) \otimes (B, \text{⟨image⟩}) \xrightarrow{c_{\otimes}} (B, \text{⟨image⟩}) \otimes (A, \text{⟨image⟩})$ 是一个模同态。

在这种情况下，$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 是一个对称的 $*$-自洽范畴。 □

F此外，我们可以证明 Hopf模范畴是共轭的 .

引理 3.31。设 $\mathbb{X}$ 是一个对称的 $*$-自洽范畴。$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$，即余交换霍普夫代数 H 上的模范畴，是一个共轭的对称 $*$-自洽范畴。

证明。我们已经知道，$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 是一个对称的 $*$-自对偶范畴。我们定义共轭函子 $\overline{(\,)}$：$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}} \to \mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 如下：

- $\overline{(A, \text{⟨image⟩})} := (A, \overline{\text{⟨image⟩}})$，其中，$\overline{\text{⟨image⟩}} = \text{⟨image⟩}$
- 设 $f : (A, \text{⟨image⟩}) \to (B, \text{⟨image⟩})$，则 $\overline{f} := f$

基本的自然同构如下所示：

$$\overline{(B, \text{⟨image⟩})} \otimes \overline{(A, \text{⟨image⟩})} \xrightarrow{\chi} \overline{(A, \text{⟨image⟩}) \otimes (B, \text{⟨image⟩})} := B \otimes A \xrightarrow{(c_{\otimes})_{B,A}} A \otimes B$$

$$(A, \overline{\overline{\text{⟨image⟩}}}) \xrightarrow{\varepsilon} (A, \text{⟨image⟩}) := 1$$

这些自然同构满足共轭的对称 $*$-自对偶范畴的所有相干条件。

□

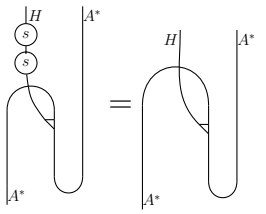
引理 3.32。设 $\mathbb{X}$ 是一个对称的（同构）*Mix* $*$-自伴范畴，则 $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$，即余交换霍普夫代数 H 上的 *Hopf* 模范畴，是一个（同构）*Mix* 共轭对称的 $*$-自伴范畴。

证明。 混合映射 m： $\perp \to \top$ 直接继承自 $\mathbb{X}$。 □

推论 3.33. 假设 $\mathbb{X}$ 是对称的（同构）*Mix* $*$-自对偶范畴，那么$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$，余交换 *Hopf* 代数 H 上的模范畴，是对称的 $\dagger$ （同构）*Mix* $*$-自对偶范畴。

证明. 由引理 3.32，$\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 是一个（同构）Mix 共轭对称的 $*$-自对偶范畴。然后，根据定理 3.20，可以通过依次复合共轭函子和对偶化函子，构造如下的匕首函子：$(\ )^{\dagger} := (\ )^{*} : \mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$。因此

$$(A, \text{⅃})^{\dagger} := (A^{*}, \overline{\text{⅃}^{*}}) \text{ where,}$$

$(A, \overline{\text{⅃}}^{*}) :=$ 

□

因此，选择任意余交换 $\otimes$-霍普夫代数上的 Hopf 模，即可从对称 isomix $*$-自主范畴生成一个 $\dagger$-isomix 范畴。

第4章

混合酉范畴（MUC）

酉同构的概念在范畴量子力学中十分重要，因为这类同构刻画了量子系统的幺正演化。在 †- 幺半范畴中，若映射的逆与其匕首相同，则称该同构为酉同构。由于匕首函子并非平稳函子 ($A \neq A^{\dagger}$)，这一思想无法直接用于定义 †-线性分配范畴中的酉同构。由此引出以下问题：什么是 †-线性分配范畴中的酉同构？本章旨在解答这一问题，并介绍混合酉范畴（MUC）。

4.1 酉范畴

4.1.1 酉结构

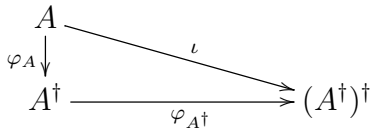
从范畴论的角度看，在一个 †-幺半范畴中，酉映射是满足 $f^{-1} = f^{\dagger}$ 的同构 $f : A \to B$。这种酉同构的定义无法直接用于 †-LDC 的框架，因为 $f^{-1}\colon\ B \to A$ 和 $f^{\dagger}\colon\ B^{\dagger} \to A^{\dagger}$ 的类型不同。然而，只要至少满足 $A \simeq A^{\dagger}$ 和 $B \simeq B^{\dagger}$，且这些同构与 †-线性结构相容，就可以定义这种酉同构。我们称这类同构为**酉结构** 映射，并将配备此类同构的对象称为**酉对象**：

定义 4.1。 若一个 †-*isomix* 范畴 $\mathbb{X}$ 中存在一个本质小的对象类 $\mathcal{U}$，称为 $\mathbb{X}$ 的**酉对象**，并且

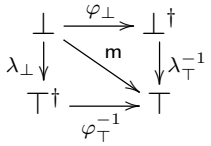
[**酉。1**] 对所有 $A \in \mathcal{U}$, $A \in$ 核心$(\mathbb{X})$，并且 A 配备了一个同构，$\varphi_A : A \to A^{\dagger}$，称为 A 的**酉结构映射**

[**U。2**] $\mathcal{U}$ 在 $(\ )^{\dagger}$ 下封闭，因此对于所有 $A \in \mathcal{U}$、$\varphi_{A^{\dagger}} = ((\varphi_A)^{-1})^{\dagger}$

[**U.3**] 对于所有 $A \in \mathcal{U}$，下图都可交换：



[**U。4**] $\bot$、$\top \in \mathcal{U}$ 满足：



[**U.5**] 若 A、$B \in \mathcal{U}$，则 $A \otimes B$和 $A \oplus B \in \mathcal{U}$满足：

$$(a) \qquad A \otimes B \xrightarrow[\simeq]{\varphi_A \otimes \varphi_B} A^\dagger \otimes B^\dagger \xrightarrow[\simeq]{\lambda_\oplus} (A \oplus B)^\dagger \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{A\oplus B}^{-1}} A \oplus B$$

$$\mathsf{mx}$$

$$(b) \qquad A \otimes B \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{A\otimes B}} (A \otimes B)^\dagger \xrightarrow[\simeq]{\lambda_\otimes^{-1}} A^\dagger \oplus B^\dagger \xrightarrow[\simeq]{\varphi_A^{-1} \oplus \varphi_B^{-1}} A \oplus B$$

$$\mathsf{mx}$$

引理 4.2. </style}当 和 是某个 -isomix 范畴中的酉对象时，则有 $(\varphi_A)^{\dagger\dagger} : A^{\dagger\dagger} \longrightarrow A^{\dagger\dagger\dagger}$。

证明。

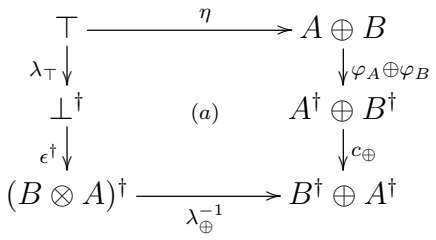
$$\varphi_{(A^\dagger)^\dagger} = ((\varphi_{A^\dagger})^{-1})^\dagger = ((((\varphi_A)^{-1})^\dagger)^{-1})^\dagger = ((((\varphi_A)^{-1})^{-1})^\dagger)^\dagger = ((\varphi_A)^\dagger)^\dagger$$

□

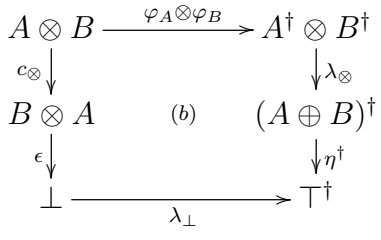
我们通常希望酉对象具有线性伴随（或对偶），但需要范畴量子力学中 †-对偶（$\eta^\dagger = c_\otimes \epsilon$ 和 $\epsilon^\dagger = \eta c_\otimes$）的类似物：

定义 4.3。 酉线性对偶(η, ϵ)：$A \dashv\!\vdash_u B$ 在酉对象 A 和B 之间，是一种满足以下附加条件的线性对偶：

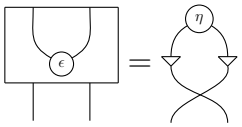
[**Udual**.]



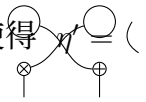
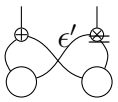
(or)



注意，[**Udual.**]$(a) \Leftrightarrow (b)$。在紧致的 †-LDC 中，$\top \dashv_u \bot$。[**Udual**] **(a)** 的图示如下：



引理 4.4. 假设 $(\eta_1, \epsilon_1) : V_1 \dashv_u U_1$ 且 $(\eta_2, \epsilon_2) : V_2 \dashv_u U_2$。那么，$(V_1 \otimes V_2) \dashv_u (U_1 \oplus U_2)$。

η_1 η_2证明。 定义 $(\eta', \epsilon') : (V_1 \otimes V_2) \dashv_u (U_1 \oplus U_2)$，使得 $\eta' =$  $\epsilon' =$  。很容易验证，这ϵ_1 ϵ_2是一个酉线性伴随。 □

现在我们可以定义同构是酉的含义：

定义 4.5. 设 A 和 B 是酉对象。若同构 $A \xrightarrow{f} B$ 满足下图交换，则称其为酉同构：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_A} & A^\dagger \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f^\dagger} \\ B & \xrightarrow[\varphi_B]{} & B^\dagger \end{array}$$

注意，对所有酉同构而言，φ 都是“扭曲”的自然映射，因此酉同构在复合下封闭，且包含恒等映射。在酉结构映射均为恒等态射的范畴中，可以恢复通常的酉同构概念。

我们的下一个目标是证明，酉对象之间的所有相干同构都是酉映射。先来做个热身：

引理 4.6. 在具有酉结构的 †-*isomix* 范畴中：

(i) 若 f 是酉同构，则 $f^\dagger$也是；***(ii)*** 若 f 和 g 是酉对象，则 $f \otimes g$ 和 $f \oplus g$也是；***(iii)*** 酉同构在复合下封闭。

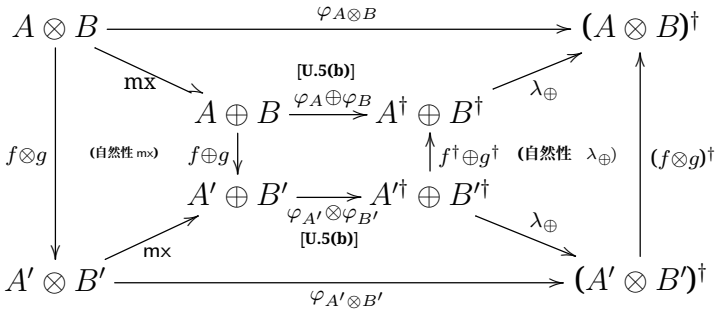
证明。

(i) 回想一下，$\varphi_{A^\dagger} = (\varphi_A^{-1})^\dagger$，那么 $f^\dagger$ 是酉的，因为

$$\begin{array}{ccc} B^\dagger & \xrightarrow{f^\dagger} & A^\dagger \\ {\scriptstyle (\varphi_B^{-1})^\dagger = \varphi_{B^\dagger}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi_A^{-1})^\dagger = \varphi_{A^\dagger}} \\ B^{\dagger\dagger} & \xleftarrow[f^{\dagger\dagger}]{} & A^{\dagger\dagger} \end{array}$$

只是将匕首函子作用于 f 的酉图表。

(ii) 假设 f 和 g 是酉态射，那么：



内部方形可交换，因为 f 和 g 是酉映射。同样，利用[**U.5(b)**], 可以证明，如果 f 和 g 是酉的，那么 $f \oplus g$ 也是酉的。

(iii) 证明是显然的。

□

下面的引理将用于证明， †-isomix 范畴中的自然同构对于酉对象是酉的。

引理 4.7。 下面的图表可交换：

$$\begin{array}{ccccc}
(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & (A \otimes B) \oplus C & \xrightarrow{\mathsf{mx}\oplus 1} & (A \oplus B) \oplus C \\
{\scriptstyle a_\otimes}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle a_\oplus} \\
A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow[\mathsf{mx}]{} & A \oplus (B \otimes C) & \xrightarrow[1\oplus\mathsf{mx}]{} & A \oplus (B \oplus C)
\end{array}$$

证明。 给定的图表由于混合子的自然性，以及支配混合子、结合子和分配子的规则而交换，参见截面2.1.3。

$$\begin{array}{ccccc}
(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & (A \otimes B) \oplus C & \xrightarrow{\mathsf{mx}\oplus 1} & (A \oplus B) \oplus C \\
{\scriptstyle a_\otimes}\downarrow & \mathbf{mix}\ (b) & \uparrow{\scriptstyle \partial^L} & \mathbf{mix}\ (a) & \downarrow{\scriptstyle a_\oplus} \\
A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow[1\otimes\mathsf{mx}]{} & A \otimes (B \oplus C) & \xrightarrow[\mathsf{mx}]{} & A \oplus (B \oplus C) \\
 & \searrow^{\mathsf{mx}} & {\scriptstyle nat.\mathsf{mx}} & \nearrow_{1\oplus\mathsf{mx}} & \\
 & & A \oplus (B \otimes C) & &
\end{array}$$

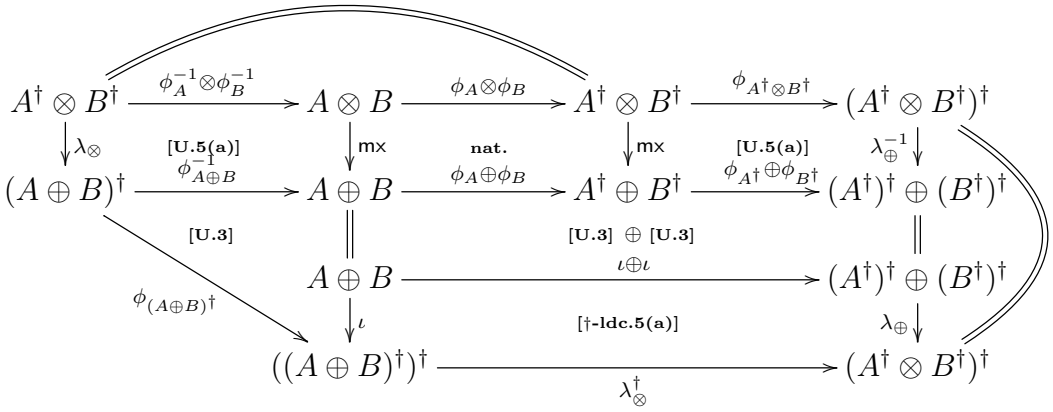
□

引理 4.8。 设 $\mathbb{X}$ 是一个具有酉结构的 †-*isomix* 范畴，且 A、 B 和 C 是酉对象。那么，下列映射都是酉同构：

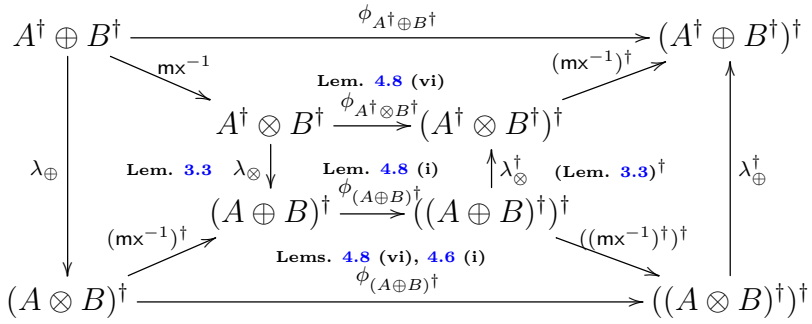
(i) $\lambda_{\otimes}:\ A^{\dagger}\otimes B^{\dagger}\to(A\oplus B)^{\dagger}$ *(viii)* $\iota:\ A\to(A^{\dagger})^{\dagger}$*(ii)* $\lambda_{\oplus}:\ A^{\dagger}\oplus B^{\dagger}\to($ $A\otimes B)^{\dagger}$ *(ix)* $a_{\otimes}:\ (A\otimes B)\otimes C\to A\otimes(B\otimes C)$ *(iii)* $\lambda_{\top}:\ \top\to\bot^{\dagger}$ *(x)* $a_{\oplus}:\ ($ $A\oplus B)\oplus C\to A\oplus(B\oplus C)$ *(iv)* $\lambda_{\bot}:\ \bot\to\top^{\dagger}$ *(xi)* $c_{\otimes}:\ A\otimes B\to B\otimes A$*(v)* $\varphi_{A}:$ $A\to A^{\dagger}$ *(xii)* $c_{\oplus}:\ A\oplus B\to B\oplus A$*(vi)* $m:\ \top\to\bot$ *(xiii)* $\partial_{L}:\ A\otimes(B\oplus C)\to$ $(A\otimes B)\oplus C$*(vii)* $\mathsf{mx}_{A,B}:\ A\otimes B\to A\oplus B$ *(xiv)* $\partial_{R}:\ (A\oplus B)\otimes C\to A\oplus(B\otimes C)$

证明。

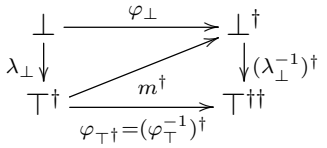
(i) $\lambda_{\otimes}:\ A^{\dagger}\otimes B^{\dagger}\to(A\oplus B)^{\dagger}$ 是一个幺正映射，因为：



(ii) $\lambda_{\oplus}$ 是酉的，因为：

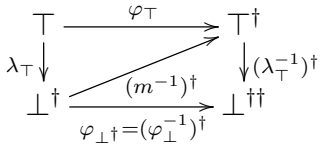


(iii) $\lambda_\perp :\ \perp \to \top^\dagger$ 是酉的，因为：



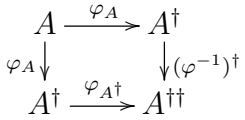
左三角形借助 [**U**。4] 和 [†-**Mix**]交换。右三角形借助[**U**。4] 以及 †的函子性交换。

(iv) $\lambda_\top : \top \to \perp^\dagger$ 是酉的，因为：

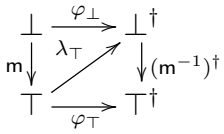


左三角形借助 [**U**。4] 和 [†-**Mix**]交换。右三角形借助[**U**。4] 以及 †的函子性交换。

(v) φ_A 是酉的，因为下列方形借助 [**U**。3] 和 [**U**。4]交换。

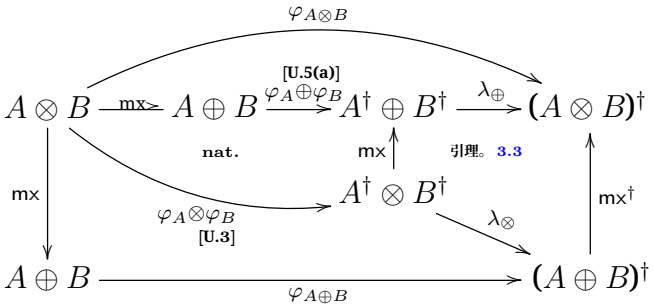


(vi) $m :\ \perp \to \top$ 是酉的，因为：

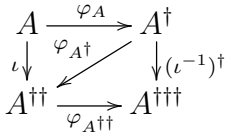


左侧和右侧的三角形分别通过 [**U**。4] 和 [†-**Mix**] 交换。因此，外部方形交换。

(vii) $\mathsf{mx}_{A,\ B}$： $A \otimes B \to A \oplus B$ 是酉的，因为：



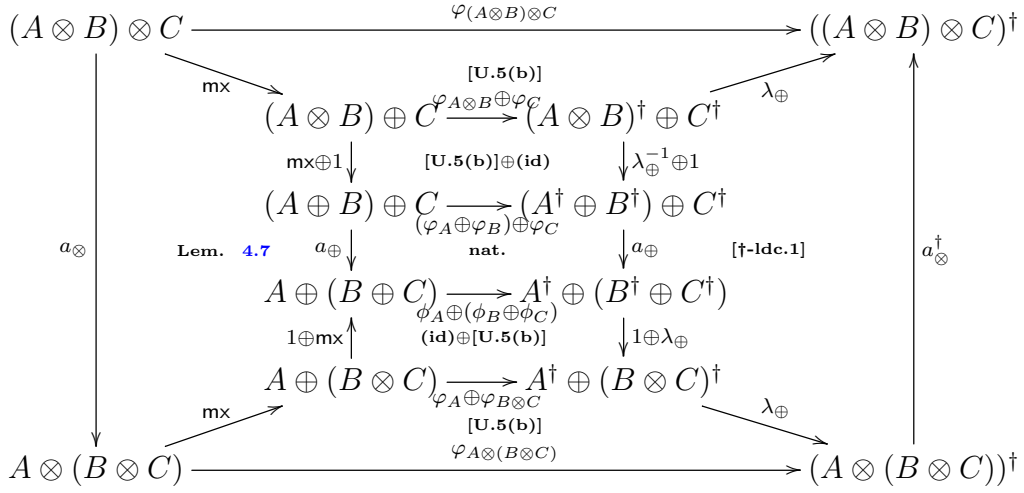
（viii） ι： $A \to A^{\dagger\dagger}$ 如以下所示，是酉的



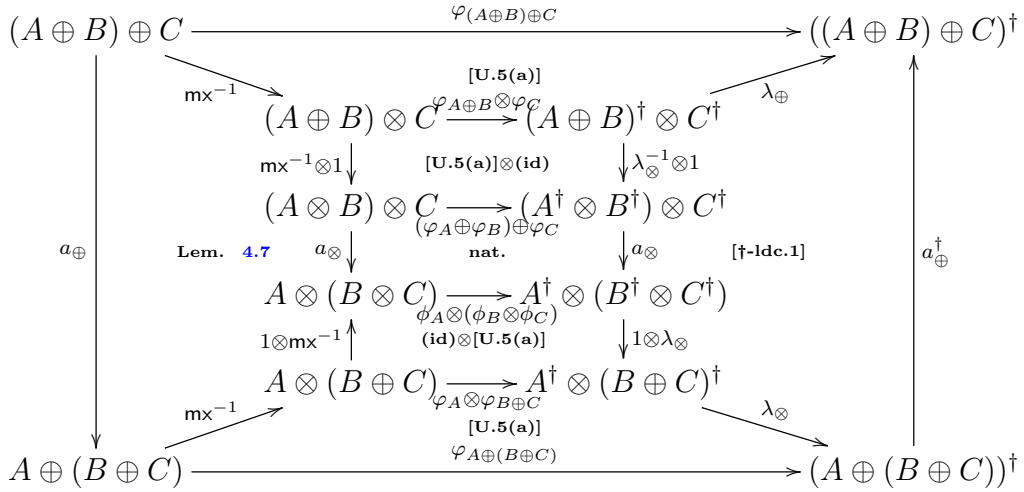
左三角形由 [U.3] 交换，而右三角形由以下方式交换：

$$\begin{aligned}(\iota^{-1})^\dagger &= ((\varphi_{A^\dagger})^{-1}\varphi_A^{-1})^\dagger = (((\varphi_A^{-1})^\dagger)^{-1}\varphi_A^{-1})^\dagger \\ &= ((\varphi_A^\dagger)(\varphi_A^{-1}))^\dagger = (\varphi_A^{-1})^\dagger(\varphi_A)^{\dagger\dagger} \\ &= \varphi_{A^\dagger}(\varphi_A)^{\dagger\dagger} = \varphi_{A^\dagger}(\varphi_{A^{\dagger\dagger}})\end{aligned}$$

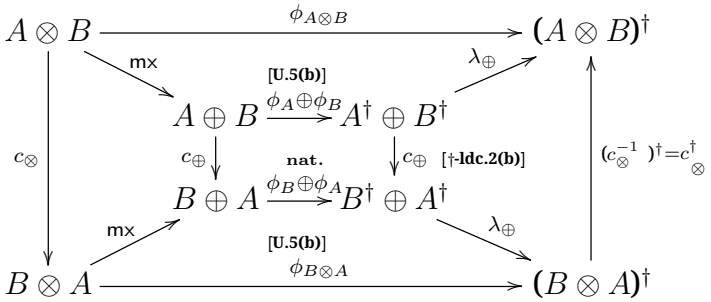
（ix） $a_\otimes$ 是酉的，因为：



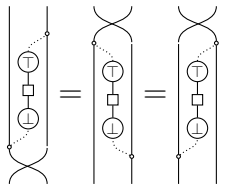
(x) $a_\oplus$ 是酉的，因为：



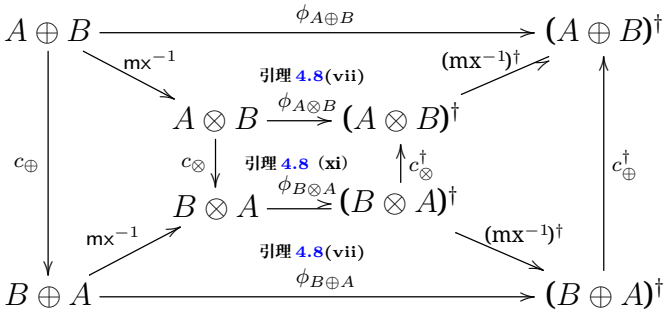
(xi) $c_\otimes$ 是酉的，因为：



其中左侧的方形交换图可交换，因为



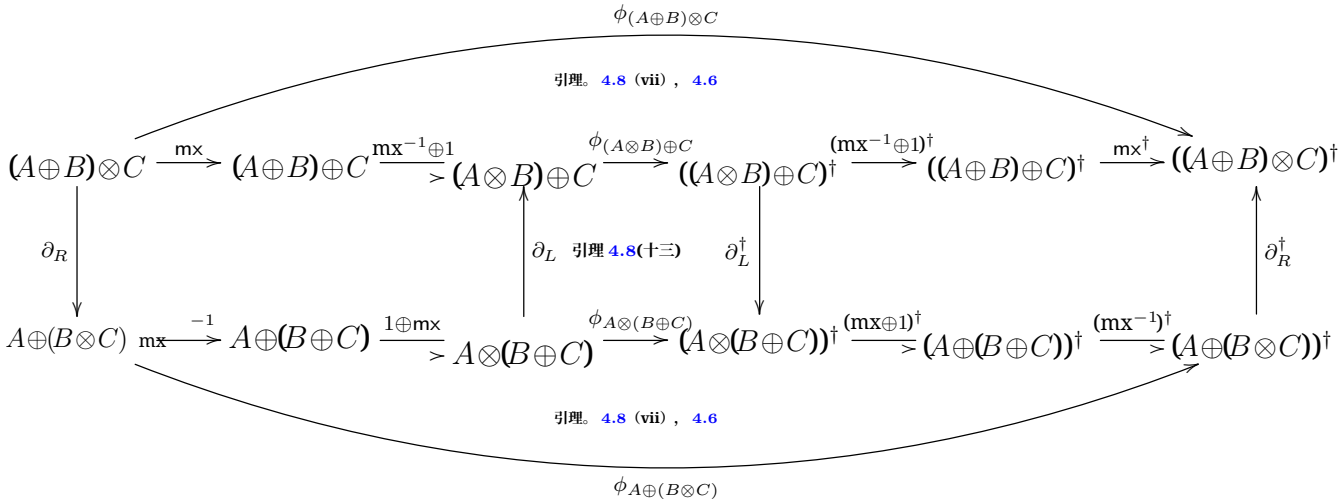
(xii) $c_\oplus$ 是酉的，因为：



其中左侧方形因相同的理由而交换，右侧方形则是左侧方形的匕首。

(xiii) ∂_L 是酉的，见图 4.1。

(xiv) ∂_R 是酉的，因为：



□

4.1.2 酉范畴

有了酉对象的概念后，可以考虑所有对象都是酉对象的 †-isomix范畴：这类范畴称为酉范畴。本节将阐述酉范畴的理论。

定义 4.9. 一个（**对称**）**酉范畴**是一个具有酉结构且每个对象都是酉对象的（对称） †-*isomix* 范畴。

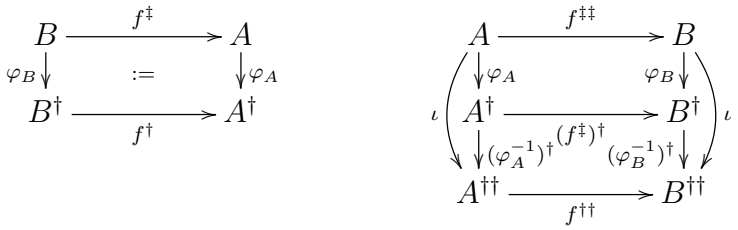
显然，酉范畴必定是紧 †-LDC，因为混合子是酉同构，见引理 4.8-(iii)。

†-幺半范畴是这样一种严格酉范畴，其中酉结构映射和混合映射都是恒等态射。类似地， †-紧闭范畴是这样一种严格酉范畴，其中所有对象都有酉对偶。

在本小节余下部分，我们将证明，任意酉范畴都与某个传统的 dagger 幺半范畴 †-线性等价。作为紧 LDC 的酉范畴，通过 $\mathsf{Mx}^*_\dagger\colon(\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)\to(\mathbb{X},\ \oplus,\ \oplus)$（见推论 2.18）与其底层

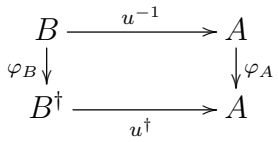
图 4.1: ∂_L 是一个酉同构

基于 par（以及张量）的幺半范畴。现在我们展示，对于一个酉范畴，可以在（$\mathbb{X}$，$\oplus$，$\oplus$）上诱导一个对象上静止的 dagger。我们将此 dagger 记为（ ）‡，并将其定义为 $f^\ddagger := \varphi_B f^\dagger \varphi_A^{-1}$，如下方左侧图表所示：



这个新的 dagger 显然保持复合，并且也是一个对象上静止的对合，如第二个图表所证明的那样：该图表下方的方形是取匕首后的逆定义，其生成的外部方形则是 ι 的自然性，从而强制 $f^{\ddagger\ddagger} = f$。

接下来，我们注意到，$u : X \to Y$ 在 $\mathbb{X}$ 中是一个酉同构，当且仅当 $u^{-1} = u^\ddagger$。这使得范畴量子力学传统意义上的酉同构与此处引入的概念相一致。因此，u 在此意义下是酉的，当且仅当下方图表可交换。

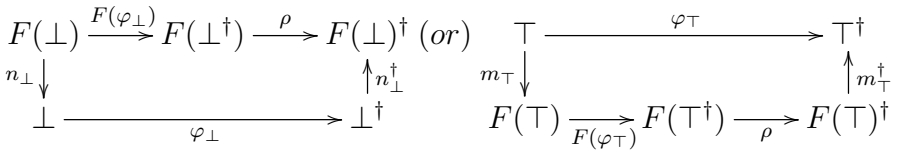


但当且仅当 $u^{-1} = u^\ddagger$ 时，该图表交换。

定义 4.10。设 †-*Frobenius* 混合函子 $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 定义在具有酉结构的紧 †-*isomix* 范畴之间，若其**保持酉结构**，则

(i) 对所有酉 对象 $A \in \mathbb{X}$、$F(A)$，$\varphi_{F(A)} = F(\varphi_A)\rho^F$ 是一个酉对象，使得

(ii) $n_\perp^F$ 或 $m_\top^F$ 是酉同构，即，



注意，如果 F 保持酉结构，则根据引理2.26，它必然是一个 isomix 函子。此外，当 $A \in \mathbb{X}$ 是一个酉对象时，$F(A)$ 必须是一个酉对象，因此$F(A)$ 属于核心。

现在我们证明，$\mathbf{Mx}^\uparrow : (\mathbb{X}, \oplus, \oplus) \to (\mathbb{X}, \otimes, \oplus)$ 提供了从 dagger 幺半范畴到酉范畴的保持酉结构的等价：

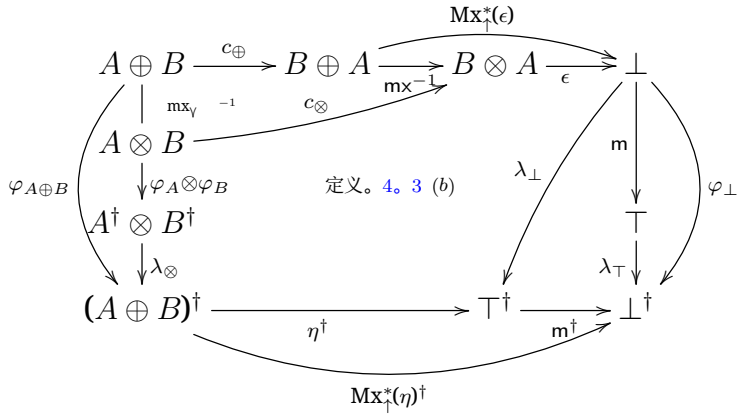
命题 4.11。 酉范畴通过混合函子 $\mathsf{Mx}^{\uparrow} : (\mathbb{X},\ \oplus,\ \oplus) \longrightarrow (\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)$ 在 *par* 上与底层 *dagger* 幺半范畴 †-线性等价。此外，在此等价下，闭酉范畴变为 *dagger* 紧闭范畴。

证明。 我们必须给出一个保持子，即一个表明对合得到保持的自然变换：

$$\frac{\mathsf{Mx}_{\uparrow}(A^{\ddagger}) \xrightarrow{\varphi_A} \mathsf{Mx}_{\uparrow}(A)^{\dagger}}{A \xrightarrow[\varphi_A]{} A^{\dagger}}$$

注意，根据 $(\,)^{\ddagger}$ 的定义， φ 是一个自然变换；其相干性要求使其成为线性自然等价。将其作为保持子，便立即意味着酉结构得到保持。

最后，我们必须证明，在 $\mathbf{Mx}^{*}_{\uparrow}$ 下，酉线性对偶成为 $\ddagger$-对偶。给定 $(\eta,\ \epsilon) : A \dashv\!\vdash_{u} B$ ，我们必须证明，在 $\mathbf{Mx}^{*}_{\uparrow}$ 下，这会产生一个 dagger 对偶。$\mathbf{Mx}^{*}_{\uparrow}(\eta) = \mathsf{m}\ \eta : \bot \longrightarrow A \oplus B$ ，且 $\mathbf{Mx}^{*}_{\uparrow}(\epsilon) = \mathsf{m}\mathsf{x}^{-1}\epsilon : B \oplus A \longrightarrow \bot$ 。接下来，我们要求 $c_{\oplus}\mathbf{Mx}^{*}_{\uparrow}(\epsilon) = \mathbf{Mx}^{*}_{\uparrow}(\eta)^{\ddagger}$。这由下式给出：



□

4.1.3 幺正构造

一个 †-isomix 范畴可以具有许多不同的酉结构，正如我们将在本节中所述，因此它是结构，而不是一种性质。然而，这些要求确实意味着，对于一个 †-isomix 范畴 $\mathbb{X}$，总是存在一个最小的酉结构，称为“平凡”酉结构，它在 $\mathbb{X}$ 中生成一个满酉子范畴。在本小节中，我们介绍一种称为酉构造的构造，它从任意 †-isomix 范畴生成这个酉范畴。该构造基于识别具有预幺正结构的对象：张量单位始终具有规范的“预幺正”结构，因此该构造始终生成一个非空范畴。然而，为了确保该构造的应用所得到的酉范畴中存在不与单位元同构的对象，必须具体展示这样的对象。

幸运的是，这通常并不难做到，因此该构造具有相当广泛的适用性。

定义 4.12。

(i) 在 †-*isomix* 范畴中，**预幺正对象** 是一个对象 $U \in$核心$(\mathbb{X})$，并配有一个同构 α：$U \longrightarrow U^\dagger$，使得 $\alpha(\alpha^{-1})^\dagger = \iota$。

(ii) 设 $\mathbb{X}$ 是一个 †-*isomix* 范畴，则定义 酉$(\mathbb{X})$，即 $\mathbb{X}$ 的**典范幺正核心**，如下所示：**对象：** 预幺正对象 (U, α)，**映射：** $(U, \alpha) \xrightarrow{f} (V, \beta)$，其中 $U \xrightarrow{f} V$ 是 $\mathbb{X}$ 的任意映射。

注意，任何与预幺正对象同构的对象也是预幺正的：

引理 4.13。在 †-*isomix* 范畴中，若 U 是一个预幺正对象，且存在一个同构 f：$U \longrightarrow U'$，则 U' 是预幺正的。

我们的目标是证明 Unitary$(\mathbb{X})$ 具备酉范畴的全部结构。

引理 4.14. 对于任意 †-*isomix* 范畴，其典范幺正核心是一个紧致的 †-*LDC*，其张量和 *par* 定义为

$$(\top, \mathsf{m}^{-1}\lambda_\perp : \top \longrightarrow \top^\dagger) \qquad (A, \alpha) \otimes (B, \beta) := (A \otimes B, \mathsf{mx}(\alpha \oplus \beta)\lambda_\oplus : A \otimes B \longrightarrow (A \otimes B)^\dagger)$$

$$(\perp, \mathsf{m}\ \lambda_\top : \perp \longrightarrow \perp^\dagger) \qquad (A, \alpha) \oplus (B, \beta) := (A \oplus B, \mathsf{mx}^{-1}(\alpha \otimes \beta)\lambda_\otimes : A \oplus B \longrightarrow (A \oplus B)^\dagger)$$

$$and\ (U, \alpha)^\dagger := (U^\dagger, (\alpha^{-1})^\dagger).$$

证明. 证明采用了引理4.2中的技巧。

请注意，由于映射和张量结构继承自 $\mathbb{X}$，只需证明这些对象都是预酉对象。从 $(U\alpha)^\dagger$ 开始，我们有：

$$(\alpha^{-1})^\dagger(((\alpha^{-1})^\dagger)^{-1})^\dagger = (\alpha^{-1})^\dagger(\alpha^\dagger)^\dagger = (\alpha^\dagger\alpha^{-1})^\dagger = (\iota^{-1})^\dagger = \iota$$

对于张量和 par，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathsf{m}^{-1}\lambda_\perp((\mathsf{m}^{-1}\lambda_\perp)^{-1})^\dagger &= \mathsf{m}^{-1}\lambda_\perp \mathsf{m}^\dagger \lambda_\perp^\dagger \\
&\overset{[\dagger\text{-mix}]}{=} \mathsf{m}^{-1}\mathsf{m}\lambda_\top\lambda_\perp^\dagger = \iota \\
\mathsf{mx}^{-1}(\alpha\oplus\beta)\lambda_\oplus((\mathsf{mx}^{-1}(\alpha\oplus\beta)\lambda_\oplus)^{-1})^\dagger &= \mathsf{mx}^{-1}(\alpha\oplus\beta)\lambda_\oplus(\mathsf{mx}^\dagger)(\alpha^{-1}\oplus\beta^{-1})^\dagger(\lambda_\oplus^{-1})^\dagger \\
&= \mathsf{mx}^{-1}(\alpha\oplus\beta)\mathsf{mx}\lambda_\otimes(\alpha^{-1}\oplus\beta^{-1})^\dagger(\lambda_\oplus^{-1})^\dagger \\
&= (\alpha\otimes\beta)\lambda_\otimes(\alpha^{-1}\oplus\beta^{-1})^\dagger(\lambda_\oplus^{-1})^\dagger \\
&= (\alpha\otimes\beta)((\alpha^{-1})^\dagger\otimes(\beta^{-1})^\dagger)\lambda_\otimes(\lambda_\oplus^{-1})^\dagger \\
&\overset{\text{Defn 4.12-(i)}}{=} (\iota\otimes\iota)\lambda_\otimes(\lambda_\oplus^{-1})^\dagger \\
&\overset{[\dagger\text{-ldc.4}]}{=} \iota
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{m}\lambda_\top((\mathsf{m}\lambda_\top)^{-1})^\dagger &= \mathsf{m}\lambda_\top(\mathsf{m}^{-1})^\dagger(\lambda_\top^{-1})^\dagger \\
&= \mathsf{m}\ \mathsf{m}^{-1}\lambda_\perp(\lambda_\top^{-1})^\dagger = \iota \\
\mathsf{mx}(\alpha\otimes\beta)\lambda_\otimes((\mathsf{mx}(\alpha\otimes\beta)\lambda_\otimes)^{-1})^\dagger &= \mathsf{mx}(\alpha\otimes\beta)\lambda_\otimes(\mathsf{mx}^{-1})^\dagger(\alpha^{-1}\otimes\beta^{-1})^\dagger(\lambda_\otimes^{-1})^\dagger \\
&= (\alpha\oplus\beta)\mathsf{mx}\ \mathsf{mx}^{-1}\lambda_\oplus(\alpha^{-1}\otimes\beta^{-1})^\dagger(\lambda_\otimes^{-1})^\dagger \\
&= (\alpha\oplus\beta)((\alpha^{-1})^\dagger\oplus(\beta^{-1})^\dagger)\lambda_\oplus(\lambda_\otimes^{-1})^\dagger \\
&= (\iota\oplus\iota)\lambda_\oplus(\lambda_\otimes^{-1})^\dagger = \iota.
\end{aligned}$$

□

这使 Unitary(𝕏) 成为一个紧的 †-LDC，其所有结构都直接继承自 𝕏。然而，情况还不止于此：现在每个对象都有显然的酉结构。因此：

命题 4.15. 对于任意 †-*isomix* 范畴 $\mathbb{X}$，Unitary($\mathbb{X}$) 是一个酉范畴，且其遗忘函子是一个满且忠实的 †-*isomix* 函子 U :Unitary($\mathbb{X}$) $\longrightarrow \mathbb{X}$。

证明。 所有松弛器都是恒等映射，因此遗忘函子立即是一个
†-混合函子。

剩下要证明每个对象都是酉的：我们将对象的酉结构定义为 $\alpha : (X,\alpha) \longrightarrow (X,\alpha)^\dagger$。然而，根据构造，[**U**。**1**] – [**U**。**5**] 立即成立，这就表明每个对象都有酉结构。

□

接下来，我们证明酉构造的余泛性质。定义 UCat 为酉范畴及 †-isomix 函子的范畴，其中这些函子按照定义4.10的含义保留酉结构；因此，每当 φ_A是酉结构时， $F'(\varphi_A)\rho^{F'}$

是酉结构。定义 Kompact 为紧致 †-线性分配范畴及 †-isomix 函子的范畴。

现在我们证明，酉构造为遗忘函子 U : UCat $\to$ Kompact（即恒等函子）产生一个右伴随。在证明这一结果之前，我们先证明 Frobenius 函子保持预幺正对象：

引理 4.16。若 F : $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是紧 †-线性分配范畴之间的 †-*isomix* 函子，且 (A, φ) 是 $\mathbb{X}$ 的预幺正对象，则 $(F(A)\ F(\varphi)\rho)$ 是 $\mathbb{Y}$ 的预幺正对象。

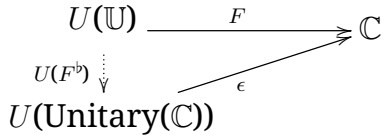
证明。要证明 $(F(A)\ F(\varphi)\rho)$ 是预幺正对象，可进行如下计算：

$$\begin{aligned} F(\varphi)\rho((F(\varphi)\rho)^{-1})^\dagger &= F(\varphi)\rho F(\varphi^{-1})^\dagger(\rho^{-1})^\dagger \\ &= F(\varphi(\varphi^{-1})^\dagger)\rho(\rho^{-1})^\dagger \\ &= F(\iota)\rho(\rho^{-1})^\dagger \overset{[\dagger-\mathbf{isomix}]}{=} \iota. \end{aligned}$$

□

命题 4.17。 U : UCat $\to$ Kompact 具有一个右伴随 Unitary: Kompact $\to$UCat; $\mathbb{C} \mapsto$ Unitary($\mathbb{C}$)。

证明。余泛图如下：



由于 F 是一个 †-isomix 函子，它保持预幺正结构（见引理 4.16）。这意味着，U, φ_U 中的每个 ($\mathbb{U}$都通过 F被映射到 $\mathbb{C}$中的一个预幺正对象 $(F(U)\ F(\varphi)\rho^F$。但是， $\mathbb{C}$ 中的预幺正对象是 Unitary($\mathbb{C}$) 的一个对象，这决定了 $F^\flat$。函子$F^\flat$ 是唯一确定的，因为它必须保持酉结构。 □

4.2 例子：幺正构造

在第3.3节中，我们讨论了 †-isomix 范畴的例子，其中 † 由共轭函子与对偶化函子复合而成。在本节余下部分，我们将幺正构造应用于其中的每个例子，以构造一个酉范畴：

4.2.1 抽象状态空间范畴

在第 3.2.3 节中，我们讨论了在一个 †-isomix 范畴 $\mathbb{X}$ 上的一个构造，该构造产生了一个抽象状态空间范畴 Asp($\mathbb{X}$)，它是一个 †-isomix 范畴。在本节中，我们考察 Asp($\mathbb{X}$) 的预幺正对象。由于所有基本自然同构都继承自 $\mathbb{X}$，Core($\mathbb{X}$) 决定了 Core(Asp($\mathbb{X}$))。如果 (A, α) 是 $\mathbb{X}$ 的一个预幺正对象，并且 $(A, e_A, u_A) \in$ Asp($\mathbb{X}$)，那么 $((A, e_A, u_A)\ \alpha)$ 是 Asp($\mathbb{X}$) 的一个预幺正对象，当且仅当 $u_A\alpha = \lambda_\top e_A^\dagger$。

4.2.2 带对合的群范畴

我们讨论了紧 †-LDC 的一个例子来源，这些例子由带共轭的群给出。对每个例子范畴应用酉构造，可得到以下酉范畴。可以注意到，这些范畴中的预酉对象包含满足 $g^{-1} = g$ 的那些群元素。更明确地说，预酉对象是满足 $g^{-1} = g$ 的 $(g, 1)$。

—

- 在复数的离散范畴中，$\mathbb{D}(\mathbb{C}, +, 0)$，

$$(a + ib)^\dagger := \overline{(a + ib)^*} = \overline{(-a - ib)} = -a + ib$$

  预酉对象在此范畴中由所有复数给出，即 $(ib, 1)$.

- 在非零复数的离散范畴中，$\mathbb{D}(\mathbb{C}, ., 1)$，预幺正对象是单位圆上的复数。

- 在离散范畴中，$\mathbb{D}(P(x)\ +, 0)$，其中 $P(x)$ 是多项式环，$P(x)^\dagger = -P(-x)$，而预幺正对象是多项式 $P(x) = \sum_n a_n x^n$，其中 n 为奇数。

- 在 $\mathbb{D}(\mathbb{M}_2, \cdot, I_2)$ 中，$\mathbb{M}_2$ 是 $\mathbb{C}$ 上可逆矩阵构成的群。其 † 结构如下：

$$\begin{pmatrix} a+ib & m+in \\ c+id & p+iq \end{pmatrix}^\dagger := \overline{\begin{pmatrix} a+ib & m+in \\ c+id & p+iq \end{pmatrix}^*} = \begin{pmatrix} a-ib & c-id \\ m-in & p-iq \end{pmatrix}^{-1}$$

  此范畴中的预幺正对象就是酉矩阵。

4.2.3 $*$-自对偶范畴中的 Hopf 模范畴

在第 3.4.4 节中，我们介绍了如何通过选取余交换 †-霍普夫代数上的 Hopf 模 $*$，从任意对称 isomix $\mathbb{X}$-自主范畴构造 $\otimes$-isomix 范畴。我们将所得范畴称为 $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$。现在我们将考察 $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 中的预幺正对象，以便将酉构造应用于此范畴。首先，我们来确定 $\mathbf{H\text{-}Mod}_{\mathbb{X}}$ 的核心中的对象：

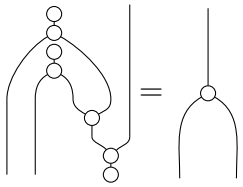
引理 4.18. 假设 $\mathbb{X}$ 是一个 *Mix* $*$-自对偶范畴，且 H 是 $\mathbb{X}$ 中的一个余交换 *Hopf* 代数。若 $(A,)$ 是一个 H-模，且 $A \in$ 核心$(\mathbb{X})$，则 $(A,) \in$ 核心$(\mathbf{H\text{-}模}_{\mathbb{X}})$。

证明。 混合子 mx：$A \otimes B \to A \oplus B$ 直接继承自 $\mathbb{X}$。因此，$(A,) \in$ 核心$(\mathbf{H\text{-}模}_{\mathbb{X}})$。

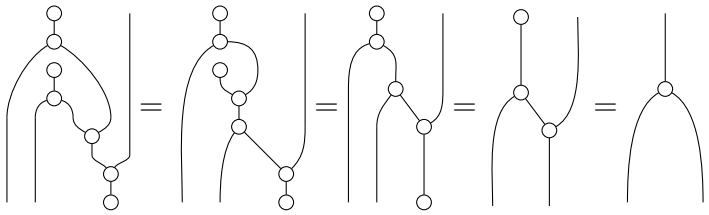
□

现在我们已经确定了核心中的对象，接下来证明一个引理，该引理稍后将用于确定核心中的预幺正对象：

引理 4.19. 以下等式对 *Frobenius* 代数成立：



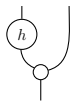
证明。



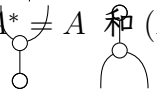
□

在下面的命题中，我们刻画核心中的预幺正对象：

命题 4.20. 设 $\mathbb{X}$ 是一个对称 *Mix* $*$-自主范畴，且 H 是 $\mathbb{X}$ 中的一个余交换霍普夫代数。若 $A \in$核心$(\mathbb{X})$ 且 $(A, , , ,)$ 是一个余交换 *Frobenius* 代数，并且存在一个代数同态 $H \xrightarrow{h} A$，则，

(a) $(A,)$是一个 H-模，其中，：$H \otimes A \to A :=$ 

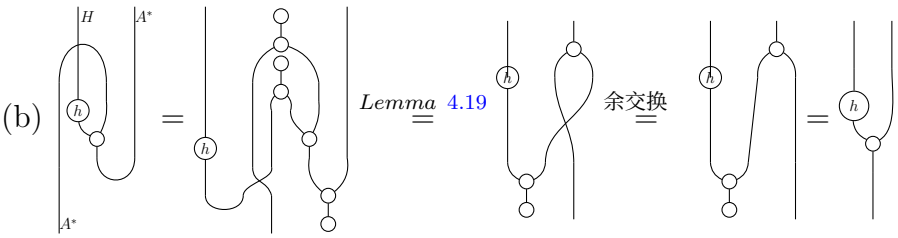
(b) $\overline{(A,)^*} = (A,)$，其中 A^* 是自对偶 *Frobenius* 代数，其杯与帽分别定义为 and。因此，$A^* \neq A$ 和 $(A,)^\dagger = (A,)$。





证明。

(a) $H \otimes A \to A$ 是左作用，因为 $h: H \to A$ 是代数同态。



□

推论 4.21。 $(((A, , , ,), \nabla, 1)$ 是预酉对象。

因此，我们有了非平凡预酉对象的来源，从而可以构造非平凡的酉范畴。

4.3 混合酉范畴

混合酉范畴具有一个酉核心，它是经典范畴量子力学的一种模型，并扩展到一个更广阔的框架，在其中可以对可能为无限维的对象进行建模。现在我们可以定义混合酉范畴了，这是本论文第一部分所发展的关键结构。

4.3.1 混合酉范畴

定义 4.22。 一个**混合酉范畴*(MUC)***是一个 †-*isomix* 范畴， $\mathbb{C}$，配备一个强 †-*isomix* 函子 $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$，它从酉范畴 $\mathbb{U}$ 映到 $\mathbb{C}$，并满足存在以下自然变换:

$$\mathsf{mx}' : M(U) \oplus X \to M(U) \otimes X \ \textit{with}\ \mathsf{mx}\ \mathsf{mx}' = 1 \ \textit{and}\ \mathsf{mx}'\ \mathsf{mx} = 1$$

$$\mathsf{mx}'' : X \oplus M(U) \to X \otimes M(U) \text{ 其中 } \mathsf{mx}\ \mathsf{mx}'' = 1 \text{ 且 } \mathsf{mx}''\mathsf{mx} = 1$$

混合酉范畴， $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 若函子 M、酉范畴$\mathbb{U}$以及 †-*isomix* 范畴 $\mathbb{C}$都是对称的，则称其为**对称的**。

在 MUC 的定义中，要求存在一个变换 mx'，它是 mx 的逆变换，这确保函子 $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 经由 核心($\mathbb{C}$)。图 4.2 是 MUC 的示意图。

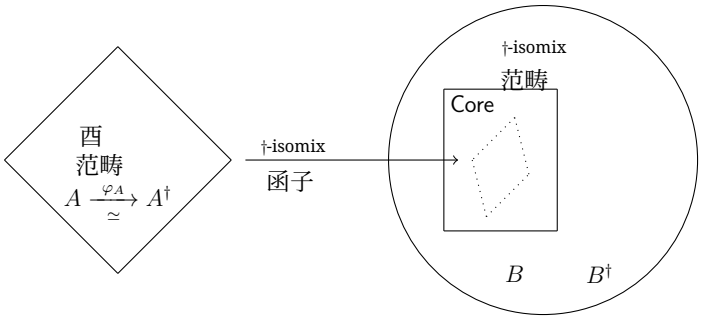


图4.2：MUC示意图

MUC 的 †-isomix 范畴可视为一个较大的空间，其中嵌入着一个（小型的）酉范畴。在酉范畴中，$A \simeq A^\dagger$ 借助酉结构映射；然而，在酉核心之外，一个对象通常并不同构于其匕首。

在论文的其余部分中，除非另有说明，否则均假定 MUC 是对称的。

混合酉范畴构成一个 2-范畴 MUC（尽管我们不讨论其 2-胞腔结构）：

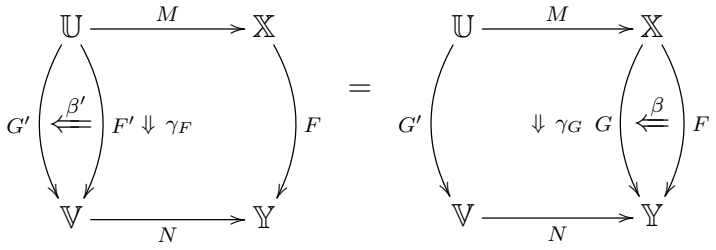
0-胞： 是混合酉范畴 $M : \mathbb{U} \to \mathbb{X}$;

1-胞： 是 MUC 态射：它们是由 †-isomix 函子组成的方形 (F', F, γ)： $M \to N$在一个 †- 线性自然同构 γ 下交换： $MF \Rightarrow F'N$:

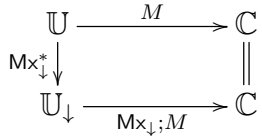
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \xrightarrow{M} & \mathbb{X} \\ {\scriptstyle F'}\downarrow & \Downarrow \gamma & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathbb{V} & \xrightarrow[N]{} & \mathbb{Y} \end{array}$$

函子 F'： $\mathbb{U} \to \mathbb{V}$ 是酉范畴之间的函子，我们要求它按照定义 4.10 保持酉结构，因此，只要 φ_A 是酉结构，那么 $F'(\varphi_A)\rho^F$ 就是酉结构。

2-胞腔： 这些是自然变换的“枕头”。$(\beta,\ \beta')$: $(F,\ F',\ \gamma_F) \Rightarrow (G,\ G',\ \gamma_G)$ 是一个 2-胞腔，当且仅当它满足以下等式:



我们要指出的是，我们已经观察到，任何 MUC 都可以“简化”为一个带有强 †-混合 Frobenius 函子、映入某个 †–isomix 范畴的 dagger幺半范畴：这是通过与 $\mathsf{Mx}_{\downarrow}$ 复合实现的。这看似是一个值得进行的简化，但应当认识到，它只是将复杂性从酉范畴本身转移到了保持子上，因为后者现在必须“创建”酉结构：



这里将 $\mathbb{U}_{\downarrow} = (\mathbb{U},\ \oplus,\ \oplus)$ 视为一个 dagger幺半范畴，而 $\mathsf{Mx}^*_{\downarrow}$ 是 $\mathsf{Mx}_{\downarrow}$ 的逆。关键在于，下方箭头 $\mathsf{Mx}_{\downarrow}; M$ 的保持子并非平凡，因为它必须编码 $\mathbb{U}$ 的酉结构。

4.3.2 典范混合酉范畴

现在我们的目标是证明，上一节中的酉构造给出了底层 2-函子 $U : \mathsf{MUC} \to \mathsf{MCC}$ 的一个右伴随，其中 2-范畴 MCC 定义如下：

0-胞：其对象是**混合 †-紧范畴 (MCC)**，即强 †-Frobenius函子 $V : \mathbb{C} \to \mathbb{Y}$，其中 $\mathbb{C}$ 是一个紧 †-LDC，$\mathbb{Y}$ 是一个 †-isomix 范畴，并且 V 经由 $\mathbb{Y}$ 的核心分解；也就是说，对于所有 $\forall$ 对象 $C \in \mathbb{C}$、$Y \in \mathbb{Y}$、$\exists$，都有 $\mathsf{mx}' : V(C) \oplus Y \to V(C) \otimes Y$，使得 $\mathsf{mx}\ \mathsf{mx}' = 1$ 且 $\mathsf{mx}'\ \mathsf{mx} = 1$。

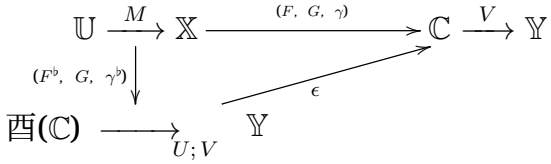
1-胞： 1-胞是混合 Frobenius 函子的方形，它们在相差一个线性自然同构的意义下交换；

2-胞腔： 是自然变换枕形（我们将忽略它们）。

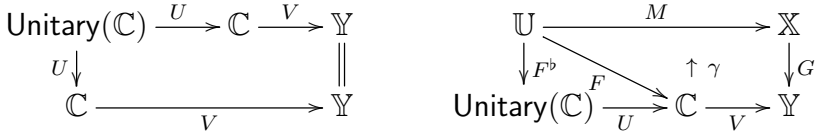
混合 †-紧范畴的一个例子，当然是将核心包含到一个 †-isomix 范畴 C 中的包含：$\mathsf{Core}(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{X}$;

命题 4.23。 $U : \mathsf{MUC} \to \mathsf{MCC}$ 有一个右伴随 酉 : MCC $\to$ MUC；$(\mathbb{C} \xrightarrow{V} \mathbb{X}) \mapsto (酉(\mathbb{C}) \xrightarrow{U\ V} \mathbb{X};)$。

证明。 余泛图如下：



其中 ϵ 是左侧的方形，而 $(F^\flat,\ G,\ \gamma^\flat)$ 是右侧的方形：



由命题 4.17 可知余泛图表交换。

□

该命题意味着，在从混合 †-紧范畴构造非平凡 MUC 时，只需证明紧 †-LDC 包含非平凡预幺正对象即可。

4.4 例子：混合酉范畴

我们已经注意到，伴随幺半范畴自动是酉范畴，其中酉结构由恒等映射给出。于是，恒等函子给出了一个相当平凡的 MUC。利用酉构造，可以从任意 †-isomix 范畴构造一个 MUC：对于任意 †-isomix 范畴，$\mathbb{X}$，$\mathsf{Unitary}(\mathsf{Core}(\mathbb{X})) \xrightarrow{U} \mathsf{Core}(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{X}$ 是一个 MUC。更有趣的是，可以对 †-幺半范畴进行双完备化 [82]：这是原始 †-幺半范畴的一个非平凡 †-isomix $*$-自伴范畴扩张，因此提供了一个有趣的例子，展示 MUC 如何产生。

本节旨在展示 MUC 各种结构组成部分的一些非平凡表现。为此，我们将详细讨论三个基本例子。

4.4.1 有限维框架向量空间

本节将展示，例子 FFVec_K（即第 3.2.2 节定义的有限维框架向量空间范畴）是一个酉范畴（因此立即也是一个混合酉范畴）。每个对象 $(V,\mathcal{V})$ 上的酉结构映射定义如下：

$$\varphi_{(V,\mathcal{V})} : (V,\mathcal{V}) \to (V,\mathcal{V})^\dagger; v_i \mapsto \widetilde{v_i}$$

接下来需要检查相干条件 [U.3]–[U.6]。首先注意到，[U.4] 可由上述观察立即得到 $\widetilde{\ }$，即 $\iota(v_i) = \widetilde{v_i}$。对于 [U.3]，我们要求 $\varphi_{A^\dagger}(\widetilde{a_i}) = (\varphi_A^{-1})^\dagger(\widetilde{a_i})$，该结果是一个高阶项，因此我们可以检查其在基元素上的取值相同：

$$\begin{aligned}(\varphi_{A^\dagger}(\widetilde{a_i}))(\widetilde{a_j}) &= \widetilde{\widetilde{a_i}}(\widetilde{a_j}) = \partial_{i,j}\\ ((\varphi_A^{-1})^\dagger(\widetilde{a_i}))(\widetilde{a_j}) &= \widetilde{a_i}((\varphi_A^{-1})^\dagger(\widetilde{a_j})) = \widetilde{a_i}(a_j) = \partial_{i,j}\end{aligned}$$

注意，在此例中，[U.5](a) 和 [U.5](b) 要求 $\lambda_\top = \varphi_\top$，这很容易验证，因为二者都归结为共轭。[U.6](a) 和 [U.6](b) 在此例中是同一个要求，可通过以下方式验证：

$$\lambda_\otimes(\varphi_A \otimes \varphi_B(a_i \otimes b_j)) = \lambda_\otimes(\widetilde{a_i} \otimes \widetilde{b_j}) = \widetilde{a_i \otimes b_j} = \varphi_{A\otimes B}(a_i \otimes b_j)$$

这给出：

命题 4.24。 FFVec_K 配备上述酉结构后是一个 *MUC*。

这引出了一个问题：这个例子中的酉映射究竟是什么。为阐明这一点，我们注意到可以很容易地构造一个函子 $U : \mathbf{FFVec}_K \to \mathbf{Mat}(K)$，其中，对于 $\mathbf{FFVec}_K$ 中的每个对象，我们在基的元素上选取一个全序，并注意到任意映射随后都由作用于这些基的矩阵给出：因此，是一个具有适当维数的 $\mathbf{Mat}(K)$ 中的矩阵。现在我们观察到：

引理 4.25。 *FFVec* 中的一个同构 $u : (A, \mathcal{A}) \to (B, \mathcal{B})$ 当且仅当 FFVec_K 中的 (f) 在 $\mathsf{Mat}(K)$ 中是酉的。

证明。 虽然 U 并未严格保持 $(\,)^\dagger$，但它在由 $U(\varphi_A)$ 确定的自然等价意义下保持了这一点；而该自然等价是一个基置换，因此是一个酉等价。所以，不难看出下图交换：

$$\begin{array}{ccc} U(B,\mathcal{B}) & \xrightarrow{U(\varphi_B)} & U((B,\mathcal{B})^\dagger) \\ {\scriptstyle U(f)^\dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U(f^\dagger)} \\ U(A,\mathcal{A}) & \xrightarrow[U(\varphi_A)]{} & U((A,\mathcal{A})^\dagger) \end{array}$$

回忆一下，在矩阵范畴中，匕首在对象上保持不变，因此 $U(B, \mathcal{B}) = U(B, \mathcal{B})^\dagger$。

现在假设 u 在 $\mathbf{FFVec}_K$ 中是酉的 $u^{-1} = \varphi_B u^\dagger \varphi_A^{-1}$，于是

$$U(u)^{-1} = U(u^{-1}) = U(\varphi_B u^\dagger \varphi_A^{-1}) = U(\varphi_B)U(u^\dagger)U(\varphi_A^{-1}) = U(u)^\dagger$$

因此其底层映射是酉的。反之，如果 $U(u)$ 是酉的，那么

$$U(u^{-1}) = U(u)^{-1} = U(u)^\dagger = U(\varphi_B u^\dagger \varphi_A^{-1})$$

由于 U 是忠实的，这立即推出 u 在 $\mathbf{FFVec}_K$ 中是酉的。 □

人们或许会合理地认为，这是一种相当迂回的方式，用来描述幺正映射的标准概念。不过，我们已经取得了两项重要成果。首先，我们展示了一个

具有非平稳匕首、因而具有非恒等映射酉结构的酉范畴实例。其次，我们说明了如何在这一形式体系中，利用非平稳构造重新表述标准酉结构。

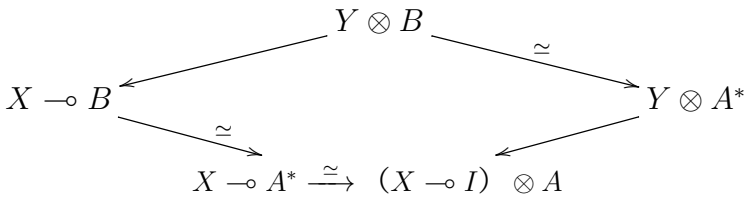
4.4.2 有限性矩阵

在第 3.4.2 节中，我们介绍了有限性矩阵范畴 FMat($\mathbb{C}$)。FMat($\mathbb{C}$) 的核心是由底集为有限集的对象确定的子范畴，也就是说，这些对象的形式为 $(X, P(X))$，其中 X 是有限集。显然，Core(FMat($\mathbb{C}$)) 等价于有限维矩阵范畴 Mat($\mathbb{C}$)。这是一个著名的 †-紧闭范畴，同时也是一个酉范畴，其酉结构由恒等映射给出（因为 $(\ )^\dagger$ 在对象上是平稳的）。包含映射 $\mathcal{I}$: Mat($\mathbb{C}$) $\to$ FMat($\mathbb{C}$) 提供了一个重要的 MUC 示例。

4.4.3 有限维希尔伯特空间向 Chu 空间的嵌入

在第 3.4.3 节中，我们证明了将 Chu 构造应用于带有拉回的对称共轭闭幺半范畴 $\mathbb{X}$，可得到一个 †-isomix 范畴。请回想一下，所得 Chu 空间范畴中的匕首，是通过将共轭与对偶化函子复合而得到的。本节首先一般性地讨论如何从 Chu 范畴 $\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(I)$ 构造混合酉范畴。关键步骤之一是确定该范畴核心中的对象。

回想一下，对称幺半闭范畴 $\mathbb{X}$（退化地）是一个紧线性分配范畴，因此可能存在具有线性伴随的对象：这些对象称为**核**对象 [79]。具体而言，对称幺半闭范畴中的核对象 A 是满足 $A \multimap B \cong A^* \otimes B$ 的对象，其中 $A^* := A \multimap I$。核对象构成 $\mathbb{X}$ 的一个紧闭子范畴；当 $\mathbb{X}$ 是共轭的时，该子范畴也是共轭的。在 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 中，核恰好由有限维向量空间组成。如果 $(\eta,\ \epsilon) : A \dashv B$ 是 A（以及 B）在 $\mathbb{X}$ 中为核对象的见证，那么对象 $(A,\ B,\ \epsilon,\ c_\otimes\epsilon)$ 属于 $\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(I)$ 的核心，因为与任意其他对象 $(X,\ Y,\ \nu,\ c_\otimes\nu)$ 作张量积时，其第二个分量中都有如下退化拉回：



这里我们使用同构 $B \xrightarrow{\simeq} A^*$。

通过这种方式，Nuclear($\mathbb{X}$) 中的核对象可以嵌入 $\mathsf{Chus}_{\mathbb{X}}(I)$ 的核心；这些核对象与匕首一起构成一个紧闭范畴。随后，要得到一个酉范畴，只需使用酉构造；而为了得到非平凡结果，我们需要证明存在非平凡的预酉对象。为此，我们考虑一个对象 H，使得 (e, n): $H \dashv H$，并且 e 满足:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\overline{H}} \otimes \overline{H} & \xrightarrow{\chi} & \overline{\overline{H} \otimes \overline{H}} \\ {\scriptstyle \varepsilon \otimes 1}\downarrow & & \\ H \otimes \overline{H} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{e}} \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \\ I & \xrightarrow[\chi^{\circ}]{} & \overline{I} \end{array}$$

对于这样的对象，我们注意到:

$$\begin{aligned} \overline{(H, \overline{H}, e, c_{\otimes} e)}^{*} &= (\overline{H}, \overline{\overline{H}}, \chi \overline{c_{\otimes} e}(\chi^{\circ})^{-1}, \chi \overline{e}(\chi^{\circ})^{-1})^{*} \\ &= (\overline{\overline{H}}, \overline{H}, \chi \overline{e}(\chi^{\circ})^{-1}, \chi \overline{c_{\otimes} e}(\chi^{\circ})^{-1}) \end{aligned}$$

这构成了

$$(\varepsilon^{-1}, 1) : (H, \overline{H}, e, c_{\otimes} e) \to (\overline{\overline{H}}, \overline{H}, \chi \overline{e}(\chi^{\circ})^{-1}, \chi \overline{c_{\otimes} e}(\chi^{\circ})^{-1})$$

一个预幺正映射。注意，根据上面的交换图，它是一个 Chu 映射，并且由于 $\varepsilon = \varepsilon$，我们有

$$(\varepsilon^{-1}, 1)(1, \overline{\varepsilon}) = (\varepsilon^{-1}, 1)(1, \varepsilon) = (\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$$

其中 $(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ 是对合子。

在 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 中，映射 $\overline{e} : H \otimes H \to \mathbb{C}$ 是一个“半双线性型”，而上面的图表断言它还具有对称型。因而，任何带有内积的希尔伯特空间都满足上述条件。因此，很明显，将有限维希尔伯特空间范畴嵌入 Chu 空间范畴，$\mathsf{FHilb} \hookrightarrow \mathsf{Chus}^{\mathsf{Vec}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$，是一个混合酉范畴。这个嵌入实际上是一个满且忠实的嵌入，并且可扩展到所有希尔伯特空间（尽管只有有限维希尔伯特空间落入核心）。

具体而言，嵌入定义如下：设 H 是一个（有限维）希尔伯特空间，则对应的 Chu 空间为 $(H, H, \langle -|- \rangle_H)$，其中 $\langle -|- \rangle_H : H \otimes H \to \mathbb{C}$ 是内积。对于希尔伯特空间之间的任意线性映射 $H \xrightarrow{f} K$，对应的 Chu 映射为 $(f, f^{\dagger}) : (H, H, \langle -|- \rangle_H) \to (K, K, \langle -|- \rangle_K)$，其中 $f^{\dagger}$ 是 f 的厄米共轭，因此 $\langle f(a)|b \rangle = \langle a|f^{\dagger}(b) \rangle$。

此外，注意到 $(H,\ H,\ \langle -|\overline{-}\rangle_H)^\dagger := (H,\ H,\ \overline{\langle -|-\rangle_H})^* = (H,\ H,\ \overline{\langle -|-\rangle}_H)$。因此，对于所有希尔伯特空间，此嵌入都保持（平稳）匕首。然而，在这个 Chu 范畴中，两个无限维希尔伯特空间的 par 并不是希尔伯特空间，因此这种对偶无法在希尔伯特空间范畴内体现。

第5章

总结

第3章和第4章扩展了 †-幺半范畴以及 †-紧闭范畴的理论，将其推广到线性分配和 $*$-自对偶环境，从而获得（乘法） †-线性逻辑的范畴语义。在这些线性情形中，两个不同的张量积（张量和par）必须通过匕首进行翻转。因此，不能使用静止的（对象上的恒等）匕首，于是不得不将传统匕首替换为逆变保结构对合。这带来了相容性后果：截面3.1专门用于理解这些相干条件的细节。

如果乘法 †-线性逻辑要为广义范畴量子力学（CQM）提供语义，那么等距同构和酉同构等概念——它们是范畴量子力学的核心——就应当在这种逻辑中有所表达。在截面 4.1 中，我们说明了，通过额外的“酉结构”，可以将经典范畴量子力学重新获得为乘法 †-线性逻辑的“酉核心”。此外，我们还说明，对于任意 †-isomix 范畴，总能提取出一个“酉核心”；该核心在等价意义下是一个 †-幺半范畴（即范畴量子力学的经典语义环境）。

由此，我们提出了混合酉范畴（MUC）的概念：它是一个带有选定酉核心的 †-isomix 范畴，可作为扩展范畴量子力学（CQM）的一种方案。MUC 可以被视为一种扩展，类似于 K-代数对域 K 的扩展，并能表达在 K 自身中难以表达的性质。在 MUC 的扩展框架中，例如，带有其核心的有限性矩阵，就拓展了经典的 CQM 框架，使得指数模态等无限维类型得以出现。此外，在这一扩展框架中，即使范畴并非紧致范畴，也可以弯曲和拉动导线。

至此，论文的第一部分告一段落。第二部分将讨论 MUC 在范畴量子力学（CQM）中的应用。

第二部分

dagger线性逻辑在范畴量子力学中的应用

第6章

范畴量子力学

范畴量子力学（范畴量子力学）的研究计划由 Coecke 和 Abram- sky 于2004年启动 [4] ，旨在开发一种用于量子力学的高层次形式语言，同时摆脱基于希尔伯特空间的标准形式体系。范畴量子力学从逻辑和计算机科学中汲取思想，并运用紧闭范畴的图示语言，以直观而严格的数学方式呈现量子理论的基本公理。

本章旨在回顾范畴量子力学的基础知识，并介绍其用于研究量子力学的核心特征。

6.1 匕首幺半范畴

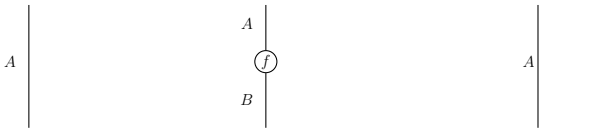
范畴量子力学（范畴量子力学）将物理系统建模为幺半范畴中的对象，并将物理过程建模为该范畴中的映射。恒等映射对应于无操作过程。过程的顺序复合由映射的复合给出，而并行复合则通过张量积建模。将传统量子理论中的内积概念范畴化，可得到一个用于幺半范畴的 †-函子，进而产生 †-幺半范畴理论。

6.1.1 幺半范畴的图形演算

幺半范畴配备了一种图形演算 [109], ，可用于以图示方式表示和操作系统与过程。图形演算的可用性或许是使用幺半范畴研究量子力学最具吸引力的方面。

在图形中　　在幺半范畴的演算中，对象由导线表示　　s,

，态射由圆圈表示 [1]。恒等箭头由不带圆圈的导线表示。



对象 A　　$f\colon A \to B$　　恒等箭头 1_A

注意，对象 A 的图表与 A 的恒等箭头相同，其含义如下：一个什么也不做的物理系统与系统本身相同。

态射复合通过依次连接导线来表示。对象的张量积通过将导线并排放置来表示。单位对象用一个空圆圈表示，代表空系统。请回想，在 LDC 中，当张量单位和 par 单位不同时，我们使用带标签的线来表示单位元。



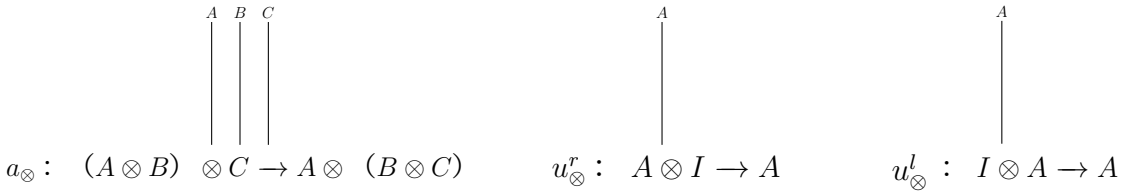
复合映射　　$f\colon\ A \otimes C \to B \otimes D$　　$f \otimes g\colon\ A \otimes C \to B \otimes D$

在范畴量子力学中，从张量单位映射到任意其他对象的映射称为**态**，从任意其他对象映射到张量单位的映射称为**效应**，而起点和终点均为张量单位的映射称为**标量**。态和效应用三角形表示：



态　　效应

结合律、左单位子、右单位子和对称自然同构如下所示：



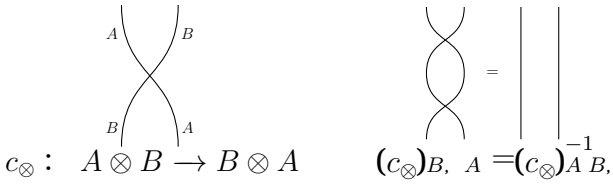
$a_{\otimes}\colon\ (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$　　$u^r_{\otimes}\colon\ A \otimes I \to A$　　$u^l_{\otimes}\colon\ I \otimes A \to A$

注意，结合的同构、左、右单位同构都是恒等映射。事实上，这是严格幺半范畴的图形演算。由于每个幺半范畴都等价于一个严格幺半范畴， [95]使得我们能够在任意幺半范畴上使用这一演算。

对称映射用交叉的线表示，如左图所示。逆

[1]在 CQM 社群中，映射通常画成方框。圆圈和框在拓扑上是相同的。

对称幺半范畴的定律由右侧的图示方程给出：



$c_{\otimes}: \ A \otimes B \to B \otimes A \qquad (c_{\otimes})_{B,\ A} = (c_{\otimes})^{-1}_{A\ B,}$

一个等式在对称幺半范畴中成立，当且仅当它在图形演算中成立。用图形演算证明等式，比通过数学符号推理来证明更简单，因为人脑擅长处理视觉信息。

如果一个图表可以通过平面同伦或使用公理转换为另一个图表，那么在图形演算中这两个图表相同。有关幺半范畴图形演算的详细信息，请参阅 [109]。

6.1.2 匕首幺半范畴

复希尔伯特空间是描述量子过程的事实标准框架。这些空间上的内积结构使伴随的概念成为可能，而伴随又是定义量子可观测量所必需的：即空间上的自伴算子。在量子计算中，每个量子逻辑门都由一个酉矩阵（换言之，是自伴矩阵）表示。范畴量子力学将内积的概念抽象为 †-幺半范畴的匕首 [110, 47] 函子。

定义 6.1。 ***A* 匕首** 范畴是一个范畴， $\mathbb{X}$，配备了一个自反的$(f^{\dagger\dagger} = f)$反变函子 $\dagger: \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$，该函子在对象上是恒等映射$(A = A^{\dagger})$。

注意，给定范畴可以有多个 †-函子，例如对于复矩阵范畴（参见第6.2.3节），矩阵上的共轭转置和转置运算给出了两个不同的匕首函子。因此， † 是范畴的一种结构，而不是一种性质。由于 †是一个反变函子， $(fg)^{\dagger} = g^{\dagger} f^{\dagger}$。

给定任意映射 $f: A \to B$，映射 $f^{\dagger}: B \to A$ 被称为其**伴随**。 †-范畴中的**酉**同构是满足 $f^{\dagger} = f^{-1}$ 的同构 f。如果映射 $f: A \to B$ 满足 $ff^{\dagger} = 1_A$，则它是一个等距同构。

定义6.2。 一个 **†-对称幺半**范畴是一个对称幺半范畴，同时也是一个 †-范畴，并且其 † 与幺半结构相容：

1. 对所有映射 f, g，$(f \otimes g)^{\dagger} = f^{\dagger} \otimes g^{\dagger}$

2. 结合律　　子、单位子和对称映射都是酉自然同构

接下来，我们讨论量子信息论中常用的一种重要对应关系，称为算子-态对偶性，也称为 Choi-Jamiolkowski同构：有限维希尔伯特空间之间的每个线性映射 H 和 K 张量积空间中的一个态 $H \otimes K$精确对应。利用幺半范畴的紧结构 [86] ，可将这种对应关系抽象如下。

定义 6.3。 在幺半范畴中，如果存在映射，使得对象 B 是对象 A 的**右对偶**：

$$\eta : I \to A \otimes B \qquad \epsilon : B \otimes A \to I$$

满足：

$$(1 \otimes \eta)(\epsilon \otimes 1) = 1_B \qquad (\eta \otimes 1)(1 \otimes \epsilon) = 1_A$$

映射 η 和 ϵ 在图形演算中分别用帽和杯表示：

$\eta : I \to A \otimes B =$  $\epsilon : B \otimes A \to I =$ 

右对偶满足的方程也称为蛇形方程，因为它们在图形演算中的形状像蛇：



类似地，如果存在映射 $\eta : I \to B \otimes A$和 $\epsilon : A \otimes B \to I$，且相应的蛇形方程成立，则对象 B 是对象 A 的**左对偶**。

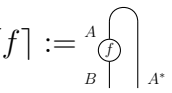
定义 6.4。 **紧闭范畴*(KCC)***是这样一种幺半范畴：其中每个对象 A 都配备了选定的右对偶和左对偶。

对于同时也是对称幺半范畴的 KCC，一个对象的右对偶也是其左对偶，反之亦然。对象 A 的这种对偶记作 A^*。

定义 6.5。 *[4]* 一个 **†-紧闭** 范畴（†-*KCC*）是一个 †-对称幺半范畴，同时也是一个紧闭范畴，其中每个对象 $\eta^\dagger = c_\otimes \epsilon$ （等价地$\epsilon^\dagger = \eta c_\otimes$）。

dagger 紧闭范畴由 Coecke 和 Abramsky [4] 提出，作为量子信息论的公理化框架，最初称为强紧闭范畴。在 †-紧闭范畴中，算子-态对应是直接的。每个映射 $f : A \to B$ 都精确对应于一个态 $\lceil f \rceil : I \to B \otimes A^*$ 以及一个

效应 $\lfloor f \rfloor : \ B^* \otimes A \to I$，定义如下：

$\lceil f \rceil :=$ 

$\lfloor f \rfloor :=$ 

在范畴量子力学中， †-KCC 是量子信息论和量子计算的基本框架。我们将在后续章节讨论这些范畴中量子信道、量子可观测量和强互补性的表示。

6.2 例子

本节回顾范畴量子力学中使用的几个标准 †-KCC 例子。

6.2.1 集合与关系范畴，Rel

在范畴量子力学中，集合与关系范畴被用作量子信息论的一种非标准模型。为区分量子特征与非量子特征，人们常将该范畴与希尔伯特空间及有界线性映射范畴进行比较 [76,78]。范畴 Rel 定义如下：

对象： 集合

态射： $R: \ X \to Y$ 其中 $R \subseteq X \times Y$

恒等映射： $I_X : = \{ (x, \ x) \mid x \in X\}$

复合： 假设 $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C$，则

$$RS : A \to C := \{(x, z) | \ \exists y \in Y, (x, y) \in R \text{ and } (y, z) \in S\}$$

张量积： $A \otimes B : = A \times B$ 是两个集合（以及态射）上的笛卡尔积，结合律映射为 $a_{\otimes} \subseteq ((A \times B) \times C) \times (A \times (B \times C)) : = \{(((a, \ b) \ c), \ (a, \ (b, \ c)))| a \in A, \ b \in B, c \in C\}$，单位是单元素集合 $I = \{\star\}$。

对称映射： $c_{\otimes} \subseteq (A \times B) \times (B \otimes A) : = \{((a, \ b), \ (b, \ a))|(a, \ b) \in A \times B\}$

匕首： 给定 $R: \ A \to B, \ B \xrightarrow{R^\dagger} A : = \{(b, \ a)|(a, \ b) \in R\}$ 是 f 的逆关系。

因此，Rel 是一个对称的 †-幺半范畴。在 Rel 中，每个对象都是自对偶的：$(\eta, \ \epsilon) : A \dashv A$ with $\eta : \ I \to A \times A := \{(\star, \ (x, \ x))| \ x \in A\}$，而 ϵ 由逆关系给出。因此，$\epsilon : A \times A \to I := \{((x, \ x) \ \star)| \ x \in A\}$。这使 Rel 成为一个 †-紧闭范畴。

6.2.2 希尔伯特空间与有界线性映射范畴，Hilb

希尔伯特空间及有界线性映射构成的范畴 Hilb 是一个 †-对称幺半范畴。Hilb 的子范畴 FHilb 仅由有限维希尔伯特空间组成，是一个 †-KCC。范畴量子力学（CQM）将 FHilb 用作研究量子信息论和量子计算中过程的标准框架。

范畴 Hilb 定义如下:

对象：希尔伯特空间

映射：有界线性映射

复合：线性映射的通常复合

张量积：底层向量空间的标准张量积。映射上的张量积由克罗内克积给出。张量单位为 $\mathbb{C}$。

匕首： 给定任意映射 $f\colon A \to B$，其伴随 $f^\dagger\colon B \to A$ 定义为满足以下方程的映射，其中 $a\colon I \to A$和 $b\colon I \to B$均为任意对象。

$$\left\langle bf^\dagger, a\right\rangle = \langle b, af\rangle$$

Hilb 是一个 †-对称幺半范畴。在有限维情形下，希尔伯特空间配备了**紧结构**。给定任意有限维希尔伯特空间， H^* 指所有泛函 $H \to H$构成的对偶空间。回想一下，每个有限维希尔伯特空间都有一个正交归一基。设 $\{e_i\}_{i=1}^{dim H}$是 H的一组正交归一基，则:

$$\eta : 1 \to H^* \otimes H; 1 \mapsto \sum_i e_i^* \otimes e_i \text{ and } \epsilon : H \otimes H^* \to I; e_i \otimes e_j^* \mapsto \delta_{ij}$$

请注意，无法像上面那样为希尔伯特空间定义余单位 ϵ，因为对于一个无限向量，它可能会产生一个无限和。

η 和 ϵ 满足如下蛇形方程。设 $a \in H$ 和 $a = \sum_i a_i e_i$。

$$\begin{aligned}(1 \otimes \eta)(\epsilon \otimes 1)(\sum_i a_i e_i) &= (\epsilon \otimes 1)(\sum_i a_i e_i \otimes \sum_j e_j^* \otimes e_j) \\ &= \sum_i \sum_j a_i((\epsilon \otimes 1)e_i \otimes e_j^* \otimes e_j)) \text{ (By linearlity)} \\ &= \sum_{ij} a_i(\delta_{ij} \otimes e_j) = \sum_j a_j e_j = a\end{aligned}$$

The 子范畴有限维希尔伯特空间 FHilb 是 †-紧的闭范畴 d.

6.2.3 交换幺半环 R上的有限矩阵范畴 $\mathsf{Mat}(R)$

考虑如下定义的范畴 Mat(R):

对象: $n \in \mathbb{N}$;

态射: $n \xrightarrow{M} m$，其中 M 是一个 $n \times m$ 交换幺半环上的矩阵[2] R;

复合: 矩阵乘法;

张量积: $n \otimes m := n \cdot m$; $M \otimes N$ 是矩阵的外积。

Mat(R) 是一个严格对称幺半范畴。Mat(R) 中的每个对象都是自对偶的: $(\eta_n, \epsilon_n) : n \dashv n$, 其中 η_n 和 ϵ_n 定义如下:

$$\eta_n : 1 \to n \otimes n := \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_i) \qquad \epsilon_n : n \otimes n \to 1 := \sum_{i=1}^{n} (e_i^T \otimes e_i^T)$$

其中, e_i 是 Mat(R) 的一个标准基向量，而 e_i^T 是 e_i的转置。例如，对于 $n = 2$, $e_1 := [1\ 0]$, $e_2 := [0\ 1]$，因此, $\eta_2 := [1\ 0\ 0\ 1]$。如果 $M : n \to m$，那么 $M^* : m \to n$; M, M^*的对偶就是转置，即 M^T。

当交换幺半环 R 具有一个共轭 $(\bar{\ })$: $R \to R$，使得 $\overline{r + s} = \bar{r} + \bar{s}$、$\overline{0} = 0$、$\overline{rs} = \bar{r}\bar{s}$ 以及 $\bar{1} = 1$成立时，Mat(R) 便具有由共轭转置给出的匕首。特别地，这意味着 Mat($\mathbb{C}$)（复数上的有限维矩阵）也具有由共轭转置给出的匕首。事实上，范畴 Mat($\mathbb{C}$) 等价于 FHilb [76, 例 1。34]。

注意，二元有序集$\mathbb{2}$以并为加法、交为乘法时是一个幺半环，因此 Mat($\mathbb{2}$) 等价于有限集与关系范畴。如果扩充 Mat(R)，使其对象为有限集、 I, $J \in \mathsf{Set}_f$，态射为映射 $M : I \times J \to R$ 给出的矩阵，则这一等价可转化为同构。

6.3 完全正性

本节讨论 †-对称幺半范畴和 †-KCC 中的量子信道。在量子力学中，物理态的表示可以是纯态，也可以是混合态。当一种表示是系统可能状态的统计系综时，它就是混合态。如果表示是纯态，那么就能确知系统的量子态。

纯态由希尔伯特空间中的向量表示，而混合态则由希尔伯特空间上的正自伴算子表示。混合态形式主义的

[2]没有负元的环，因此是半环

量子力学在实践中非常有用，因为在实验环境中，我们对量子系统状态的了解通常是有限的。在混合态形式主义中，量子过程是保持迹的完全正映射（将正自伴算子映射为正自伴算子）。在本节中，我们讨论如何在范畴论环境中抽象完全正映射和迹。

6.3.1 CPM构造

我们首先讨论有限维希尔伯特空间上的线性算子。**线性算子** 是从一个希尔伯特空间映射到其自身的线性映射。有限维希尔伯特空间 H 上的所有线性算子组成的空间$\mathcal{L}(H)$是一个 $\mathbb{C}^\star$-代数，其中在 $\mathcal{L}(H)$上的 $\star$ 定义为伴随运算。将线性映射表示为矩阵形式时，该矩阵的伴随就是它的共轭转置。若代数中的元素 a 满足存在代数中的元素 b 使得 $a = b^\star b$，则称其为**正**元素。注意，正元素是自伴的，即 $a^\star = a$。量子系统的混合态由 $\mathcal{L}(H)$中的一个范数为 1 的正元素表示。

两个 $\mathbb{C}^\star$ 代数之间的线性映射若保持正元素不变，即 $f(x^\star x) = y^\star y$，则称为**正**映射。若一个线性映射是正映射，并且对所有 $n > 0$，映射 $1_n \otimes f : \mathbb{C}^{n\times n} \otimes A \to \mathbb{C}^{n\times n} \otimes B$ 都是正映射，则称其为**完全正**映射。如果量子态以混合态表示，则使用保持迹不变的完全正映射来表示量子过程。

以下 Choi 的定理刻画了完全正映射的形式 :

定理 6.6. *[33, 定理 1]* 设 H 和 K 为有限维希尔伯特空间。线性映射 $\phi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(K)$ 是完全正的，当且仅当存在一组线性映射 $\{M_i | M_i \in \mathcal{L}(H, K)\}$，使得对所有 $A \in \mathcal{L}(H)$，

$$\phi(A) = \sum_i M_i^\dagger A M_i$$

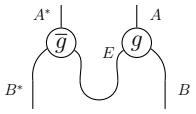
其中 $M_i^\dagger$ 是 M_i的伴随。

上述定理中的等式称为 ϕ的**Kraus分解**，而映射族 $\{M_i | M_i \in \mathcal{L}(H, K)\}$ 称为**Kraus算子**。

Selinger [110] 利用上述讨论的刻画，将完全正映射的概念推广到 †-紧闭范畴。在 †-紧闭范畴中，映射$f : A \to A$ 若存在一个 $g : A \to B$ 使得 $f = gg^\dagger$，则称其为**正**映射。映射 $f : A^* \otimes A$

$\to B^* \otimes B$ 若 f 具有以下形式，则称其为**完全正**映射：

$$f = \quad (6.1)$$



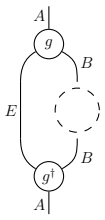
其中 $\bar{g} := g^{\dagger *} = g^{* \dagger}$。上述图表中的对象 E 被解释为 环境，它会在过程 f 完成后被 丢弃 。关于环境和丢弃的更多讨论将在稍后的第 f 6.3.3 节进行。映射 $g: \quad A \to E \otimes B$ 可以解释为一个 Kraus 算子，而图表本身则是对 Kraus 分解的描述。

Selinger 还引入了完全正映射（CPM）构造，在量子理论的理论框架内统一了纯态与混合态形式体系
†-紧闭范畴。给定一个 †-紧闭范畴 $\mathbb{X}$，范畴 CPM($\mathbb{X}$) 由形如 $A^* \otimes A$ 的对象（对所有 $A \in \mathbb{C}$ ）构成，其映射选为完全正映射。CPM($\mathbb{X}$) 仍然是一个 †-紧闭范畴 [110, 定理 4.20] ，具有与 $\mathbb{C}$ 相同的 † 函子。将 CPM 构造应用于有限维希尔伯特空间范畴，可得到一个包含混态和量子过程的范畴。

6.3.2 CP^∞ 构造

请注意，CPM构造使用了 †-KCC 的紧结构，因此仅适用于有限维希尔伯特空间范畴。Coecke 和 Heunen [46]将 CPM 构造推广到了 †-幺半范畴，从而消除了维数限制。因此，他们推广后的构造称为 CP^∞ 构造。

在 †-对称幺半范畴中，不能弯折导线，因此无法使用方程6.1 中所示的完全正映射表示法。为了在 †-对称幺半范畴中定义完全正映射，Coecke 和 Heunen 将图表6.1中表示环境的导线拉直，从而得到该情形下**完全正**映射的以下形式：

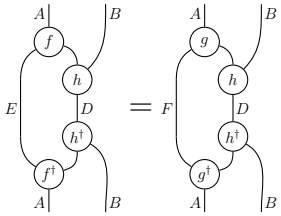


(6.2)

在虚线圆圈内，“测试映射”按照方程式 6.3 所示插入。该映射$g: \quad A \to E \otimes B$ 被称为 **Kraus** 映射，而 E 被称为环境或

辅助系统。

任意两个 Kraus映射 $f\colon A \to E \otimes B$ 和 $g\colon A \to F \otimes B$ 称为**等价**，即 $f \sim g$，若对于所有 $h\colon B \otimes C \to D$，它们满足以下等式：



(6.3)

对于任意 Kraus映射 $f\colon A \to E \otimes B$，我们将其等价类记为 $[f]$。

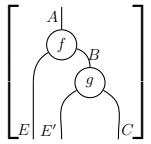
定义6.7。 *[46, 定义 3] The* CP^∞ **构造**定义如下。设 $\mathbb{C}$ 是任意一个 †-幺半范畴。

对象： 与 $\mathbb{C}$ 中的对象相同

映射： $\mathbb{C}$ 中 *Kraus*映射的等价类

恒等映射： 由左单位子给出的 *Kraus*映射等价类，$[(u^l_\otimes)^{-1}\colon A \to I \otimes A]$。

复合： 两个映射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to C \in$ 完全正$^\infty$（$\mathbb{C}$）的复合由将它们各自的 *Kraus*映射复合至等价确定：

$$fg := \left[\right.$$


$$\left.\right]$$

*Th*该复合是良定义的，因为如果 $f \sim f'$ 和 $g \sim g'$，那么 $fg \sim f'g'$.

如果 $\mathbb{C}$ 是一个 †-对称幺半范畴，那么 $\mathsf{CP}^\infty(\mathbb{C})$ 是一个对称幺半范畴 [46, 命题 5]。注意，在这种情况下，$\mathsf{CP}^\infty(\mathbb{C})$ 没有一个 †-函子。此外，如果 $\mathbb{C}$ 是一个 †-KCC，那么 $\mathsf{CP}^\infty(\mathbb{C})$ 同构于 $\mathsf{CPM}(\mathbb{C})$ [46, 命题 6]。

从一个希尔伯特空间到其自身的所有有界线性映射构成一个冯·诺伊曼代数。冯·诺伊曼代数与正规完全正映射所构成的范畴同构于 $\mathsf{CP}^\infty(\mathsf{Hilb})$ [46, 定理 13]。

6.3.3 环境结构

在前面的截面中，我们讨论了将纯态和过程范畴转换为混合态和完全正映射范畴的构造。在这一

截面中，我们使用环境[46, 50, 41]的概念来讨论这些构造的特征。纯态仅包含关于系统本身的信息，而混合态则同时包含关于系统及其环境的信息。因此，可以通过环境结构和丢弃映射的存在来刻画混合态范畴。

定义 6.8。一个 †-对称幺半范畴 $\mathbb{C}_{pure}$ 的**环境结构** 由一个严格幺半函子 $F:\ \mathbb{C}_{pure} \to \mathbb{C}$ 构成，其中 $\mathbb{C}$ 是一个带有指定映射的对称幺半范畴，$\gamma_A:\ A \to I$ 称为所有对象 $A \in \mathbb{C}$ 的**丢弃** 映射，并满足以下等式：

环境 1： 对于所有对象 $A, B \in \mathbb{C}_{pure}$, $\gamma_{F(A\otimes B)} = \gamma_{F(A)} \otimes \gamma_{F(B)}(u_{\otimes})_I$

Env 2: $\gamma_I = id_I$ *(F(I) = I)*

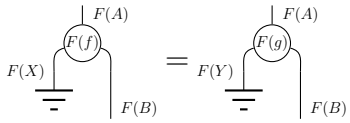
环境 3： 对于所有 *Kraus*映射 $f:\ A \to X \otimes B, g:\ A \to Y \otimes B \in \mathbb{C}_{pure}$,

$$f \sim g \ \textit{if and only if}\ F(f)(\gamma_{F(X)} \otimes 1_B) = F(g)(\gamma_{F(Y)} \otimes 1_B).$$

环境结构的公理如下图所示：

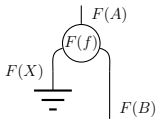
[**环境 1**]:

[**环境 2**]:

[**Env 3**]: $f \sim g \quad \Leftrightarrow$ 

若过程 $f:\ A \to B$ 属于带有环境结构 $(F:\ \mathbb{C}_{pure} \to \mathbb{C},\ )$ 的 †-对称幺半范畴，$\mathbb{C}_{pure}$ 且满足 $F(f)\gamma_{F(B)} = \gamma_{F(A)}$，则称其为**归一化的**。$\mathbb{C}_{pure}$中的归一化过程构成 $\mathbb{C}$ 的一个子-†-对称幺半范畴，并具有相同的环境结构。在这种情况下，对于该子-†-对称幺半范畴，丢弃映射 γ 是从函子 F 到常值自函子的一个幺半变换；该常值自函子将所有对象映射到 I，并将所有映射映射到 id_I。

定义 6.9。若一个 †-对称幺半范畴，$\mathbb{C}_{pure}$，带有环境结构$(F:\ \mathbb{C}_{pure} \to \mathbb{C},\ )$，且 $\mathbb{C}$ 中的每个映射都可以写成以下形式，其中 f 是某个 *Kraus*映射：$A \to X \otimes B \in \mathbb{C}_{pure}$，则称其允许**纯化**。

[**环境 4**] 

[**Env 3**]的理念是，$\mathbb{C}$ 中的每个过程都等于一个纯过程后接丢弃信息。

每个 †-对称幺半范畴， $\mathbb{C}_{pure}$都带有一种规范环境结构，使得纯化成为可能 [46, 定理 16]:

$$F : \mathbb{C}_{pure} \to \mathsf{CP}^{\infty}(\mathbb{C}_{pure}); A \xrightarrow{f} B \mapsto A \xrightarrow{[f(u^l_{\otimes})^{-1}]} B$$

$$\gamma_A : A \to I \in \mathsf{CP}^{\infty}(\mathbb{C}_{pure}) := [(u^r_{\otimes})^{-1}]$$

环境结构还允许进行纯化：对于每个 $[f] : A \to B$ in $\mathsf{CP}^{\infty}(\mathbb{C}_{pure})$,$F(f)(\gamma_I \otimes 1_B) = [f]$。

定理6.10。 *[46, 定理 15]* 对于任意 †-对称幺半范畴， $\mathbb{C}_{pure}$， $\mathsf{CP}^{\infty}(\mathbb{C}_{pure}) \simeq \mathbb{C}$ 是一个幺半范畴的同构，前提是为 $\mathbb{C}_{pure}$ 配备环境结构和纯化。

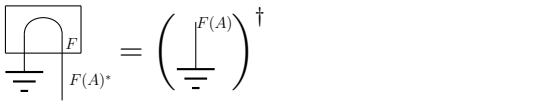
当环境结构与紧结构以如下方式相容时，上述结果可以推广到 †-紧闭范畴:

定义6.11。 对于 †-*KCC*， $\mathbb{C}_{pure}$，一个**环境结构** 由一个严格的 †-幺半函子 $F : \mathbb{C}_{pure} \to \mathbb{C}$构成，其中 $\mathbb{C}$ 也是一个 †-*KCC*，并且满足以下条件:

(i) 对所有 $A \in \mathbb{C}_{pure}$, $F(A^*) = F(A)^*$

(*ii*) 对所有 $A \in \mathbb{C}_{pure}$, $F(A)^* \simeq F(A)$

(*iii*) 对于每个对象 $X \in \mathbb{C}$，存在一个指定映射 $\gamma_X : X \to I$，使得 [**Env1**]-[**Env 3**]成立，并且:



若 [**Env 5**]成立，则该环境结构允许纯化。

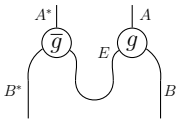
每个 †-紧闭范畴都具有如下给定的规范环境结构:

$$F : \mathbb{C}_{pure} \to \mathrm{CPM}(\mathbb{C}_{pure}); A \xrightarrow{f} B \mapsto (A^* \otimes A) \xrightarrow{f^* \otimes f} B^* \otimes B$$

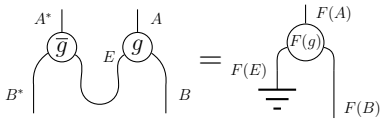
$$\gamma_A :=$$

在范畴 CPM(FHilb) 中，丢弃映射称为**迹**。如下所示，CPM(FHilb) 中的映射 $g : A \to B$ 正是一个**量子信道** （完全正

且保持迹），当 $g \in$ FHilb 归一化时，即 $F(g)\gamma_{F(E\otimes B)} = \gamma_{F(A)}$。



上述示例中的环境结构也允许进行纯化，因为 CPM($\mathbb{C}_{pure}$) 中的每个映射都具有以下形式，其中 g 为某个值：$A \to E \otimes B \in \mathbb{C}_{pure}$：



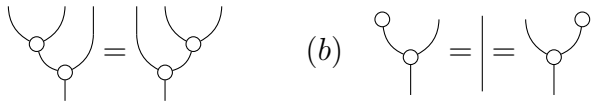
6.4 测量与互补性

上一节介绍了量子信道。本节将从范畴的角度回顾量子可观测量、测量和互补性的概念。

6.4.1 量子可观测量

量子可观测量是可以测量的物理属性。Frobenius 代数是范畴量子力学的支柱之一，因为它们用于抽象量子可观测量的概念。在传统量子力学中，可观测量由希尔伯特空间上的自伴算子（又称厄米算子）表示。可观测量的所有特征向量构成量子系统态空间的一个正交基。测量之后，量子系统的状态将是这些基态之一。与某个特征向量对应的特征值表示其概率幅，也就是说，量子系统在测量后处于特定基态的概率。Frobenius 代数在 †-幺半范畴中对这些思想进行了简洁的抽象。本节将回顾 Frobenius 代数及其与量子可观测量的对应关系。

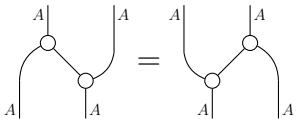
在对称幺半范畴中，一个幺半群（A, , ）由一个对象 A 、一个乘法映射 : $A \otimes A \to A$ 和一个单位映射: $I \to A$ 组成，并且乘法满足结合律（参见图（a））， 单位律成立（参见图（b））。



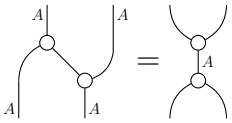
类似地，余幺半群 (A, ,)由一个对象 A 、一个余乘法 : $A \to A \otimes A$以及一个余单位映射 e : $A \to I$ 组成，并且余乘法满足余结合律

（结合律方程的垂直反射），且余单位律成立（单位律方程的垂直反射）。

定义 6.12。 在对称幺半范畴中，一个**Frobenius代数** $(A, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon)$由一个幺半群$(A, \nabla, \eta)$和一个余幺半群 (A, Δ, ϵ)组成，并且乘法与余乘法满足以下关系：



上面的方程称为 Frobenius律。可以证明，对于 A 上的一个幺半群和一个余幺半群，Frobenius律成立，当且仅当满足以下方程：



方程右侧的图表在 CQM 社群中被亲切地称为“蜘蛛”。

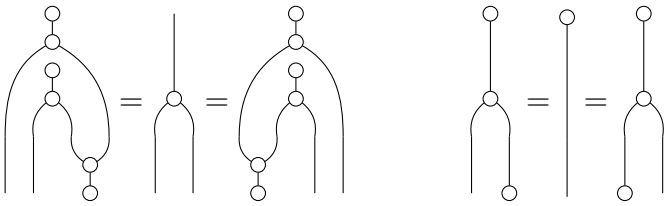
在对称幺半范畴中，如果一个对象 A 是弗罗贝尼乌斯代数，那么 A 是一个自对偶对象，其杯和帽如下：

$$\eta : I \to A \otimes A := \qquad \epsilon : A \otimes A \to I :=$$



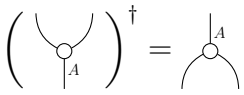


对于一个 Frobenius代数 $(A, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon)$，幺半群 (A, ∇, η) 和余幺半群 (A, Δ, ϵ) 通过自对偶杯和帽彼此互为对偶：

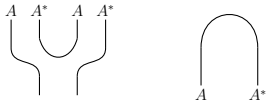


逆关系是，如果 A 是一个自对偶对象 $A \dashv\vdash A$ 和一个幺半群 (A, ∇, η)，并且存在一个映射： $A \to I$ 使得自对偶杯由 给出，那么 A 具有 Frobenius 结构，参见[76, 命题 5。16]。映射： $A \to I$ 被称为 Frobenius 结构的非退化形式。

定义 6.13. 在 †-对称幺半范畴中，**†-Frobenius 代数**是一个 *Frobenius*代数$(A, \nabla, \eta), \Delta, \epsilon)$满足



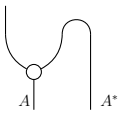
在 †-KCC 中，裤子代数 为 †-弗罗贝尼乌斯代数提供了一类重要的例子。要定义裤子代数，请注意，在 KCC 中，对每个对象 A， $A \otimes A^*$ 上都存在一个幺半群，其乘法和单位分别如下：



上述代数因其乘法映射的形状而被称为 **裤子代数** 。

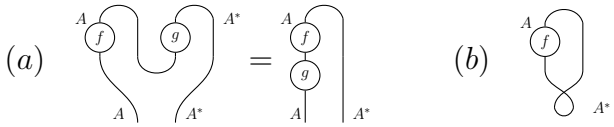
KCC 中的每个幺半群都嵌入裤子幺半群：

引理 6.14。 在 *KCC* 中，每个幺半群 $(A$、 、 都通过以下幺半群态射嵌入其在 $A^* \otimes A$上的裤子幺半群：



引理 6.15。 在 †-*KCC* 中，裤子代数是 †-*Frobenius* 的。

将算子-态对偶性应用于裤子 †-代数，我们得到以下结论。设 f， g： $A \longrightarrow A$ 是 †-KCC 中的任意两个过程。使用裤子幺半群将对应于这些过程的态相乘，可得到对应于复合 fg 的态，见方程（a）。此外，将余单位应用于 f 的态，可得到 f的迹，见图表（b）。



让我们回顾一个裤子代数的具体例子。考虑 $n \times n$ 复矩阵空间，写作 M_n，它给出了空间 $\mathbb{C}^n$ 在 FHilb [76, 例 4。12]上的裤子代数。我们将证明 M_n 是 $\mathbb{C}^n$的裤子代数。空间 $n \times n$ 复矩阵是一个希尔伯特空间，其内积定义为 $\langle A|B\rangle$ ： $= Tr(A^\dagger B)$（$A^\dagger$ 是 A的共轭转置），并带有典范基 $\{e_{ij}|i,j = 1,\cdots,n\}$。基 e_{ij}是一个$n \times n$ 矩阵，除条目（i, j）外，所有条目均为零。

T复矩阵的代数在 FHilb 中具有 Frobenius 结构 ：

幺半群结构：乘法 m 由矩阵乘法给出，而单位 u 是单位矩阵。

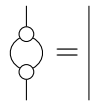
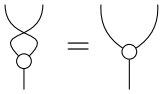
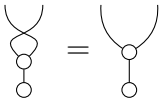
余幺半群结构： 定义余单位映射 e:$= u^\dagger$。那么，根据 † 在希尔伯特空间中的定义，$\langle e(e_{ij})|1\rangle = \langle (e_{ij})|e^\dagger(1)\rangle = \langle e_{ij}|u(1)\rangle = \langle e_{ij}|I_A\rangle = \delta_{ij} = Tr(e_{ij})$。由线性性扩展可知，对于所有的 $A \in M_n$， $e(A) = Tr(A)$。

类似地，将余乘法定义为 $d := m^\dagger$。根据 † 在 FHilb 中的定义，$\langle m(e_{ij} \otimes e_{kl}) | e_{pq} \rangle = \langle e_{ij} \otimes e_{kl} | m^\dagger(e_{pq}) \rangle$。如前所述，为了推导 $m^\dagger$ 的定义，我们展开等式的两边。

$$\begin{aligned}
\langle m^\dagger(e_{ij}) | e_{kl} \otimes e_{pq} \rangle &= \langle e_{ij} | m(e_{kl} \otimes e_{pq}) \rangle \\
&= \langle e_{ij} | \delta_{lp} e_{kq} \rangle \\
&= \delta_{lp} Tr(e_{ij}^* e_{kq}) \\
&= \delta_{lp} Tr(e_{ij}^* e_k q) \\
&= \delta_{lp} \delta_{ik} \delta_{jq}.
\end{aligned}$$

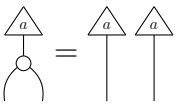
通过定义 $m^\dagger(e_{ij}) := \sum_l e_{il} \otimes e_{lj}$, $\langle m^\dagger(e_{ij}) | e_{kl} \otimes e_{pq} \rangle$ 的计算结果为 $\delta_{lp}\delta_{ik}\delta_{jq}$。

对称的 †-SMC 中的 †-Frobenius代数称为：当 (a) 成立时为**特殊的**，当 (b) 成立时为**交换的**，当 (c) 成立时为**对称的**：

(a)  (b)  (c) 

交换性是比对称性更强的条件。例如，裤子代数是非交换的，但却是对称的。

Frobenius代数与量子可观测量之间的联系在于：在 FHilb 范畴中，每个特殊交换的 †-FA （ †-SCFA ）都恰好对应于一个正交归一基。这种对应关系源于 †-FA 的**经典态**概念：这些态 $a : I \to A$可以像下图所示那样被复制和删除。

copy:  delete:  $= id_I$

定理 6.16。 *[49, 定理 5。1]* 在 FHilb中，希尔伯特空间上的 †-*SCFA* 的经典态集合 H 与 H的正交归一基

因此， †-SCFA 与正交归一基之间存在一一对应关系。基态是量子系统中唯一可以复制和删除的态，换言之，它们是经典态。因此， †-SCFA 也称为经典结构。在前一个定理中，如果去掉 special（特殊）这一限定词，那么对应的基就是正交基。

量子测量是从量子态中提取经典数据（可以复制和删除）的过程。从范畴论的角度看，Coecke和Pavlovic [48] 将幺半范畴中的“破坏性测量”描述为一个过程， $m : A \to X$, 其中 $m^\dagger m = 1_X$,

指向一个特殊的交换 †-Frobenius代数， X。对象 A 指的是量子系统的态空间。破坏性测量意味着我们忽略测量后量子系统的状态，只保留经典数据。

在定理 6.16中，我们看到 †-SCFA 对应经典数据。然而，非交换但对称的 Frobenius 代数对应量子信息：

定理 6.17。 *[118]* 在 FHilb 中，每个特殊对称的 †-弗罗贝尼乌斯代数都与一个$\mathbb{C}^*$-代数精确对应。

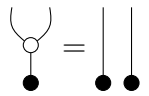
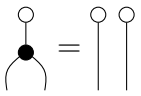
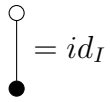
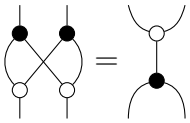
上述定理的证明依赖于引理 6.14。由于它们与$\mathbb{C}^*$-代数相对应，特殊对称的 †-弗罗贝尼乌斯代数也称为量子代数。注意，量子代数是非交换的。

6.4.2 强互补性

玻尔互补性 [71] 是区分量子力学与经典力学的一项关键特征。如果测量一个可观测量会使另一个可观测量的值变得最大不确定，那么这两个量子可观测量就称为互补的。位置和动量就是电子的一对互补可观测量。由于物质具有波动性和粒子性，所有物理性质都成对互补。

在范畴量子力学中，两个可观测量的互补相容性用 Hopf 代数公理化 [1], ，它们是带有对极的双代数：

定义 6.18。 *[105]* 在对称幺半范畴中，一个**双代数**$(A, \nabla, \iota, \Delta, \varepsilon)$由一个幺半群$(A, \nabla, \iota)$和一个余幺半群$(A, \Delta, \varepsilon)$ 组成，并满足以下方程：

(a)  (b)  (c)  $= id_I$ (d) 

最后一个方程通常称为双代数规则。观察方程（a）–（d），我们注意到乘法映射作为张量余幺半群$A \otimes A$的余幺半群态射。等价地，余乘法作为张量幺半群$A \otimes A$的幺半群态射。下面的引理给出了双代数的另一种描述：

引理 6.19。 在对称幺半范畴中，以下条件等价：

(i) $(A, \nabla, \iota, \Delta, \varepsilon)$ 是一个双代数。

(ii) (A, ∇, ι) 是一个幺半群，而(A, Δ, ε)是一个余幺半群，且其为张量幺半群$(A \otimes A, \nabla, \iota)$的幺半群态射。 

(iii) $(A, ,)$是一个幺半群，而$(A, ,)$是一个余幺半群，且其为张量余幺半群$(A \otimes A, ,)$的余幺半群态射。

以下是双代数的几个例子：

- 在具有双积的范畴中，每个对象都有由积映射和余积映射给出的双代数结构：

$$A + A \xrightarrow{\begin{bmatrix} id_A \\ id_A \end{bmatrix}} A \qquad 0 \xrightarrow{0_{0,A}} A \qquad A \xrightarrow{\langle id_A, id_A \rangle} A + A \qquad A \xrightarrow{0_A, 0} 0$$

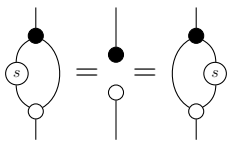
向量空间与线性映射范畴具有双积：‘+’由直和给出，而 0 是平凡向量空间。

- 考虑集合与函数范畴 Set。范畴 Set 不具有双积，但它是一个对称幺半范畴，其张量积由笛卡尔积给出，单位对象是选定的一个单元素集合。在 Set 中，每个幺半群（A, $\circ$, u）（也就是说，A 它是一个集合，配有二元运算 $\circ$ 和单位 u）都是一个双代数，其余幺半群结构如下所示：

$$\text{for all } a \in A, \ : A \longrightarrow A \times A; a \mapsto (a, a) \qquad : A \longrightarrow \{*\}; a \mapsto *$$

现在我们可以定义霍普夫代数了：

定义 6.20。 *[21, 28]* 在对称幺半范畴中，**霍普夫代数**是一个双代数$(A, , ,)$配有一个映射 $s:\ A \longrightarrow A$ 称为**对极**，满足：



上述方程称为霍普夫律。以下是几个 Hopf 双代数的例子：

- 在双代数的例子中，我们看到，Set 范畴中的每个幺半群（A, $\circ$, e）都是一个双代数。如果这个幺半群同时还是一个群，也就是说，A 的每个元素都配备了一个逆，那么该双代数就是带有反粒子映射 $s : A \longrightarrow A$ 的 Hopf 双代数，其中对所有 $a \in A$, $s(a) := a^{-1}$。

- 霍普夫代数的另一个例子是群 K-代数 [97]。给定一个有限群（G, $\circ$, u）（也就是说，G 是一个具有二元运算 $\circ$、单位元 u 且每个元素都有逆元的集合）

以及一个域 K，它是以 $\{e_g\}_{g\in G}$ 为基的 G 上的自由 K-向量空间 $K[G]$。$K[G]$ 是一个霍普夫代数，具有以下 K-线性映射：对所有 $g,\ h \in G$,

$$m : K[G] \otimes K[G] \to K[G]; e_g \otimes e_h \mapsto e_{g\circ h} \qquad u : K \to K[G]; 1 \mapsto e_u$$

$$d : K[G] \to K[G] \otimes K[G]; e_g \mapsto e_g \otimes e_g \qquad e : K[G] \to K; e_g \mapsto 1$$

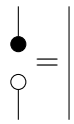
最后，对极为：

$$s : K[G] \to K[G]; e_g \mapsto e_{g^{-1}}$$

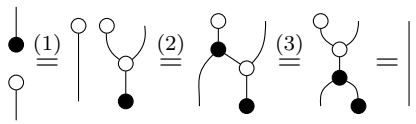
双代数和 Frobenius代数刻画了单个底层对象上的幺半群与余幺半群之间的相容性。然而，双代数的公理由不连通图表刻画，而 Frobenius代数的公理由连通图表刻画。霍普夫律描绘了最大的断开状态，可以将其解释为这样一个过程：乘法到余乘法之间不存在信息流。这使得 Hopf 代数成为一种很有吸引力的代数结构，可用于对两个量子可观测量的互补性进行建模 [44]。

值得注意的是，同时为 Frobenius代数和双代数的对象 A 是平凡的，即 $A \simeq I$：

引理 6.21。 *[76, 定理 6.23]* 在一个 †-对称幺半范畴中，假设幺半群 $(A,\ ,\ )$ 和余幺半群 $(A,\ ,\ )$ 同时是双代数和 *Frobenius*代数，则：



证明。



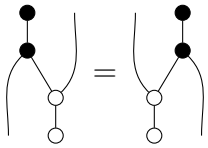
□

证明中的步骤（1）使用了幺半群的单位律，步骤（2）使用了双代数的方程（b），步骤（3）使用了Frobenius律。因此，对于同时也是双代数的Frobenius代数，单位映射是余单位映射的逆。

在上一节中，我们看到量子可观测量恰好是FHilb中的 †-SCFA。现在我们给出任意两个 †-SCFA互补的条件：

定义6.22。 *[76]* 在 †-对称幺半范畴中，任意两个 †-*SCFA*，例如 $(A,\ ,\ )$ 和 $(A,\ ,\ )$，若 **互补的** 是 $(A,\ ,\ ,\ )$（等价地 $(A,\ ,\ ,\ )$）构成带有

对极的霍普夫代数：



请注意，在范畴量子力学文献中，上述定义被称为强互补性。

让我们来看一个 FHilb 中互补可观测量的例子。一个简单但意义重大的例子是电子沿 X、Y 和 Z 轴方向的自旋。电子的自旋可以是向上、向下，或者是这两种态的叠加。在量子计算中，这个系统被称为量子比特，其态空间为 $\mathbb{C}^2$。

X、Y 和 Z 中的每一个可观测量都与其他可观测量互补。这些可观测量由泡利矩阵 X、Y 和 Z 给出，定义如下：

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

X、Y 和 Z的特征基分别为 $\{(|0\rangle + |1\rangle), (|0\rangle - |1\rangle)\}$、$Y$为 $\{(|0\rangle + i|1\rangle), (|0\rangle - i|1\rangle)\}$，以及 Z 为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$，其中：

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

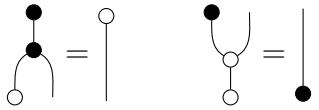
这些特征向量构成了 $\mathbb{C}^2$ 的正交归一基，因此它们是 †-SCFA，在 FHilb 中成立，参见 [44, 例 2。11]。请注意，在计算中使用时，X 和 Y-特征向量经过归一化，使得对于这些向量中的任意一个 v，$\langle v|v\rangle = vv^\dagger = 1$。在范畴量子力学中，通过在双代数方程 a: $I \to I$ 中引入标量来处理归一化 [44, 10]。

对于一对互补可观测量，对极是恒等映射，当且仅当 Frobenius代数的自对偶杯帽重合时成立。Z 和 X 可观测量的情形便是如此。（而 Z-Y 和 X-Y 对则不然）。Coecke 和 Duncan 为 Z 和 X 可观测量开发了一种图示演算，称为 ZX演算 [44]。在量子计算中，该演算利用 Z 与 X 可观测量之间的双代数相互作用来构造逻辑门。ZX演算被视为范畴量子力学计划最重要的成果之一，并广泛用于量子电路优化。

我们以给出互补系统的一种替代性且实用的刻画来结束本截面：

定理6.23。 *[60, 定理6.4]* 在一个 †-对称幺半范畴中，两个 †-*SCFA*（ ）和（）

当且仅当以下方程成立时，它们是互补的：



在上一节中，对于每个 Frobenius代数，乘法是余向乘法的对偶，而单位则通过该 Frobenius代数的自对偶杯和帽与余单位对偶。上述定理表明，两个 †-SCFA 互补，当且仅当使用各自互补代数的自对偶杯和帽时，这些代数各自的单位与余单位彼此对偶。

第7章

完全正映射

范畴量子力学（范畴量子力学）主要关注量子信息论和量子计算，它们是量子力学的有限维分支。为了拓宽范畴量子力学的范围，人们提出了各种方案 [46, 70, 6] ，旨在将范畴量子力学中的结构扩展到无限维系统。在本论文的第 I 部分中，我们将 dagger 紧闭范畴的框架推广到了我们称为混合酉范畴（MUC）的结构。在本章中，我们为 MUC 定义完全正映射。

7.1 MUC 的弦演算

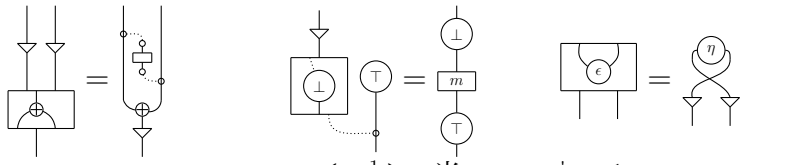
为了便于在 MUC 中进行推理，可以采用一种电路演算，它建立在 [30] 中介绍的 LDC 电路演算之上。混合酉范畴的扩展电路演算包括†-盒、用于幺正结构映射的组件，以及逆混合器态射。

7.1.1 酉结构映射

酉对象是配备了一个同构 $A \xrightarrow{\varphi_A} A^\dagger$ 的对象，该同构称为酉结构映射，其图示为一个指向下方的三角形：

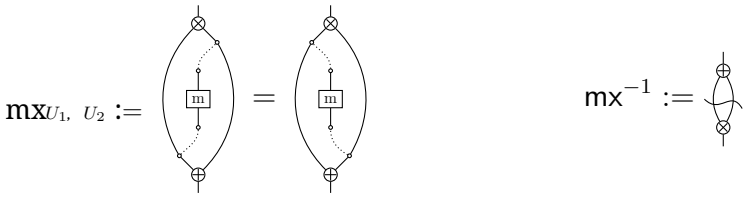


公理的图表表示 [U.5]-(a)， [U.4]-(a) 在定义4.1 中的酉结构，以及 [Udual]-(a) 在定义4.3 中的酉对偶，如下所示。

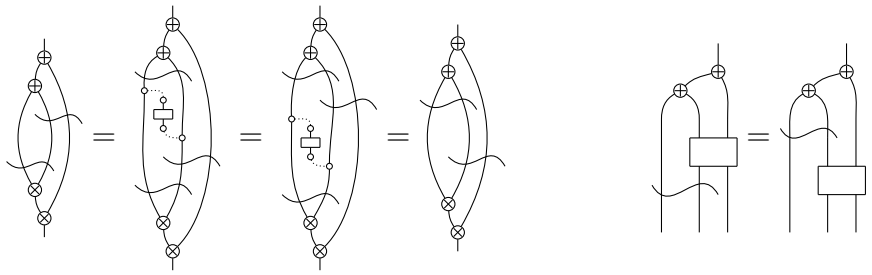


7.1.2 混合子的逆

混合子（由下方的混合映射 $\perp \xrightarrow{\mathsf{m}} \top$ 得到） $U_1 \otimes U_2 \xrightarrow{\mathsf{mx}} U_1 \oplus U_2$ 在 U_1 和 U_2 为酉对象时是同构，其逆的表示如下：



注意，mx^{-1} 映射到不同酉对象的对象彼此滑过；事实上，根据自然性，mx^{-1} 会滑过电路中的各个分量：



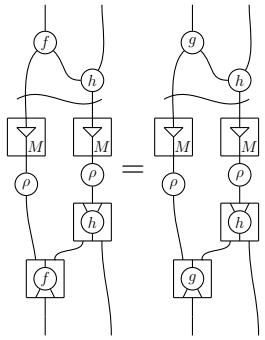
7.2 MUC 的量子信道

7.2.1 Kraus映射

混合酉范畴中的 Kraus映射（$f,\ U$） $M\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$，是一个映射 $f\colon A \to M(U) \oplus B \in \mathbb{C}$，其中 $U \in \mathbb{U}$。U称为 f的辅助系统。我们沿着其辅助系统将 Kraus映射与其匕首粘合起来，从而得到一个作用于“测试映射”的组合子。如果两个 Kraus映射对测试映射产生的效应无法区分，则称它们等价。

定义 7.1. 给定一个 *MUC*，$\mathbb{U} \xrightarrow{M} \mathbb{C}$，两个 *Kraus*映射 (f, U)、$(g, V)\colon A \to B$ 称为**等价**的，$(f, U) \sim (g, V)$，如果对于所有酉对象 X 以及所有映射 $h\colon B \otimes C \to V$（称为

测试映射），以下等式成立：



注意，根据 mx 映射的自然性，mx^{-1} 映射可以沿着酉对象$M(U)$ 和 $M(V)$ 的线向上或向下滑动。图表中包含表示 M 的协变函子框，以及表示匕首的反变函子框。左侧的图表可用等式表示如下：

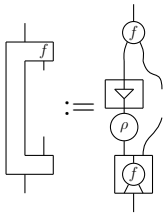
$$A\otimes C \xrightarrow{f\otimes 1} (M(U)\oplus B)\otimes C \xrightarrow{\partial} M(U)\oplus(B\otimes C) \xrightarrow{1\oplus h} M(U)\oplus M(V) \xrightarrow{\mathsf{mx}^{-1}} M(U)\otimes M(V)$$

$$\xrightarrow{M(\varphi_U)\otimes M(\varphi_V)} M(U^\dagger)\otimes M(V^\dagger) \xrightarrow{\rho\otimes\rho} M(U)^\dagger\otimes M(V)^\dagger \xrightarrow{1\otimes(h^\dagger\lambda_\oplus^{-1})} M(U)^\dagger\otimes(B^\dagger\oplus C^\dagger)$$

$$\xrightarrow{\delta} (M(U)^\dagger\otimes B^\dagger)\oplus C^\dagger \xrightarrow{\lambda_\otimes\oplus 1} (M(U)\oplus B)^\dagger\oplus C^\dagger \xrightarrow{f^\dagger\oplus 1} A^\dagger\oplus C^\dagger \xrightarrow{\lambda_\oplus} (A\otimes C)^\dagger$$

自然同构 ρ: $M(U^\dagger) \to M(U)^\dagger$是 †-isomix 函子 M的保持子，它确保与从 $\mathbb{U}$ 到 $\mathbb{C}$ 的 † 相干。在本章其余部分中，除非另有说明，协变函子框表示 MUC 的 †-isomix 函子 M。

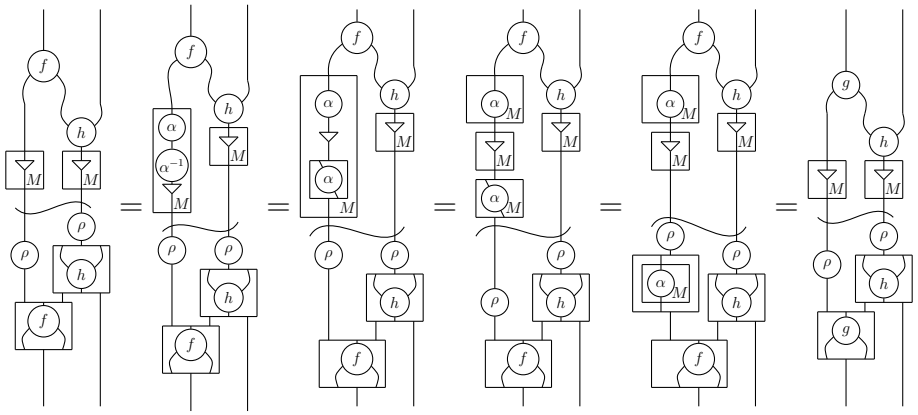
去掉测试映射，并将 Kraus映射与其匕首拼接起来，就得到一个便于记号表示的组合子，可用图表表示为：



Kraus态射的一个等价类就是一个**量子信道**。如果 $(f,U): A \to B$ 和 $(g,V): A \to B$ 是 Kraus映射，且 U与 V酉同构，那么相对于以下关系，它们必然等价：

引理 7.2。 设 (f,U)、(g,V): $A \to B$ 为 *Kraus*态射。若 $U \xrightarrow{\alpha} V$是一个酉同构且 $f(\alpha\oplus 1) = g$，则 $(f,U)\sim(g,V)$。

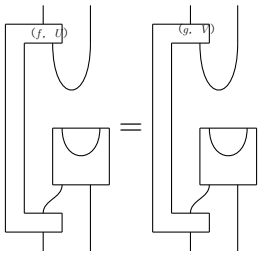
证明。 设 h： $B \otimes C \to M(X)$ 为任意测试映射。于是,



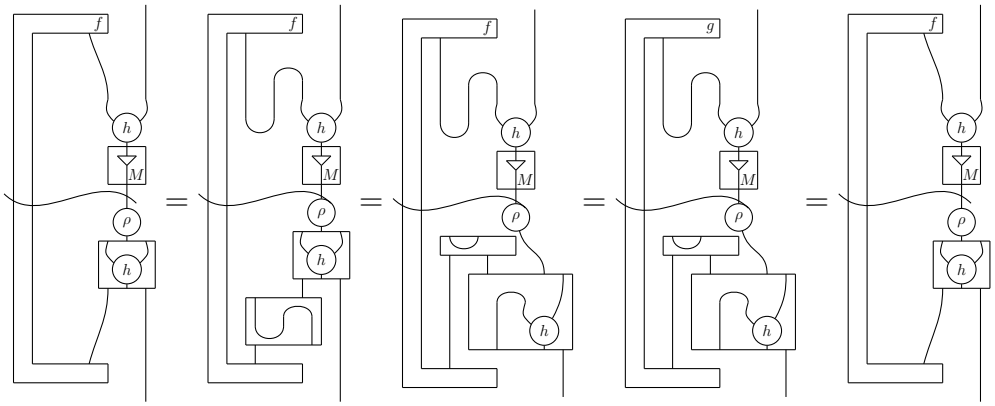
□

在 $*$-MUC 中，Kraus映射上的等价关系可按以下等式给出:

引理 7.3。 设 M： $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 是一个 $*$-*MUC*，即 $\mathbb{C}$ 中的每个对象都有线性伴随，那么两个 *Kraus*映射 （f、U）和 （g、V）等价，当且仅当



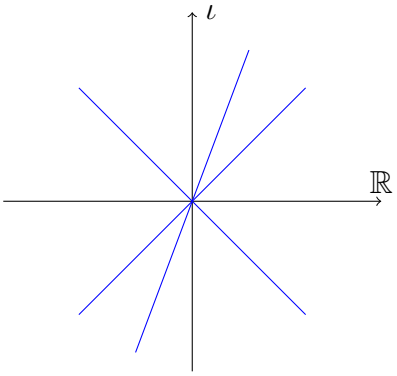
证明。 显然，当 Kraus映射（f，U）和（g，V）等价时，给定的方程成立。对于逆关系，假设给定的方程成立。那么，Kraus映射（f，U）和（g，V）是等价的，因为对于任意测试映射 h，我们都有:



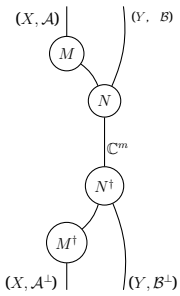
□

现在让我们考察贯穿示例中的 Kraus映射：

• 在 MUC 中，$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，令 c, c' 为任意两个复数。$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$中的 Kraus映射为满足 $c = rc'.$ 的 $(=, r)$：$c \to c'$。若 $c' \neq 0$，则至多存在一个 Kraus映射 $(=, r)$：$c \to c'$。若 $c' = 0$，则 $c = 0$，并且对所有 $r' \in \mathbb{R}$，$(=, r) \sim (=, r')$：$c \to c'$。因此，在复平面中，只有那些可以由一条穿过原点的直线连接的复数之间才存在 Kraus映射，这构成射影直线 $P^1(\mathbb{C})$，其中 $\mathbb{C}$ 表示复数域。



• 在 $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{FMat}_{\mathbb{C}}$ 中，每个 Kraus映射 $(M, \mathbb{C}^n)$：$(X, \mathcal{A}, \mathcal{A}^\perp) \to (Y, \mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp)$ 都可表示为**纯完全正映射**之和，即以 $\mathbb{C}$ 为辅助对象的 Kraus映射：



Choi定理指出，每个完全正映射都可以写成若干纯完全正映射之和。类似地，范畴 $\mathrm{FMat}_{\mathbb{C}}$中的每个 Kraus映射都可以像上文那样写成若干纯映射之和。给定一个 Kraus映射 $(M, \mathbb{C}^m)$，论证如下：

$$(M \otimes 1)(1 \otimes NN^\dagger)(M^\dagger \oplus 1) = (M \otimes 1)\left(\left(\sum_i {}_i\amalg_i\right) \otimes NN^\dagger\right)(M^\dagger \oplus 1)$$

$$= \sum_i \left((M({}_i \otimes 1) \otimes 1)(1 \otimes hh^\dagger)(((\amalg_i \oplus 1)M^\dagger) \oplus 1)\right) = \sum_i (M_i \otimes 1)(1 \otimes NN^\dagger)(M_i^\dagger \oplus 1)$$

7.2.2 CP$^\infty$构造（针对 MUC）

CPM-构造 [110] 作用于 †-紧闭范畴时，将有限维希尔伯特空间与线性映射构成的具体范畴转化为一个由混态和完全正映射构成的范畴。Coecke 和 Heunen [46] 将 CPM-构造推广到 †-对称幺半范畴，从而推广到无限维情形。他们将这一广义构造称为 CP$^\infty$-构造。在本节中，我们将 CP$^\infty$ 构造推广到 MUC：当 MUC 是CP$^\infty$-构造时，我们的构造与原始构造一致

†-幺半范畴。

MUC 上的 CP$^\infty$构造定义如下：

定义 7.4。给定一个 *MUC*，$M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$，定义 CP$^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 如下：

对象：与 $\mathbb{C}$**相同**

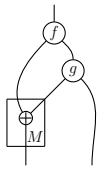
映射： $[(f,U)]:A\to B:=\{f:A\to M(U)\oplus B\in\mathbb{C})\}/\sim$

复合： $[(f、U)]:A\to B$与 $[(g、V)]:B\to C$的复合定义如下：

$$[(f,U)][(g,V)]:=(A\xrightarrow{f}M(U)\oplus B\xrightarrow{1\oplus g}M(U)\oplus(M(V)\oplus C)\xrightarrow{a_\oplus}(M(U\oplus V))\oplus C\in\mathbb{C})/\sim$$

恒等映射： 1_A 定义为 $[A\xrightarrow{(u_\oplus^L)^{-1}}\bot\oplus A)\xrightarrow{(n_\bot^M)^{-1}\oplus 1}M)(\bot)\oplus A]\in\mathbb{X}$

在 CP$^\infty$（$M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$）中，$f:A\to M(U)\oplus B$与 $g:B\to M(V)\oplus C$的复合如下图所示：



注意，当 $M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 是 dagger幺半范畴 $\mathbb{U}=\mathbb{C}$ 且 $M=id$时，我们对 $M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 的 CP$^\infty$构造与原始 CP$^\infty$构造 [46] 一致。

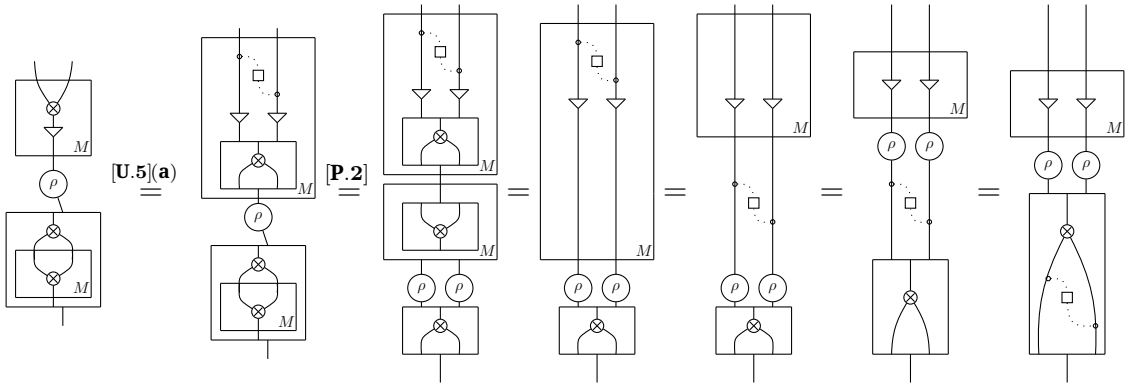
在证明 CP$^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 是一个范畴之前，我们先观察关于酉对象的以下结果：

引理 7.5。 假设 C 和 D 是酉对象。那么，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc}
M(C)\otimes M(D) & \xrightarrow{M(\varphi)\otimes M(\varphi)} & M(C^\dagger)\otimes M(D^\dagger) \\
{\scriptstyle m^M_\otimes}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho\otimes\rho} \\
M(C\otimes D) & & M(C)^\dagger\otimes M(D)^\dagger \\
{\scriptstyle M(\varphi)}\downarrow & \textbf{(a)} & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes} \\
M((C\otimes D)^\dagger) & & (M(C)\oplus M(D))^\dagger \\
{\scriptstyle \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}^\dagger} \\
(M(C)\otimes M(D))^\dagger & \xrightarrow[(m^M_\otimes)^\dagger]{} & (M(C)\otimes M(D))^\dagger
\end{array}$$

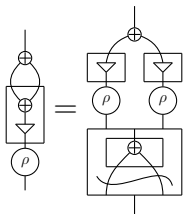
$$\begin{array}{ccc}
M(C)\oplus M(D) & \xrightarrow{M(\varphi_C)\oplus M(\varphi_D)} & M(C^\dagger)\oplus M(D^\dagger) \\
{\scriptstyle n^{-1}_\oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho\oplus\rho} \\
M(C\oplus D) & & M(C)^\dagger\oplus M(D)^\dagger \\
{\scriptstyle M(\varphi)}\downarrow & \textbf{(b)} & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\oplus} \\
M((C\oplus D)^\dagger) & & (M(C)\otimes M(D))^\dagger \\
{\scriptstyle \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathsf{mx}^{-1})^\dagger} \\
(M(C\oplus D))^\dagger & \xleftarrow[n^\dagger_\oplus]{} & (M(C)\oplus M(D))^\dagger
\end{array}$$

证明。



交换图 (b) 的证明类似。 □

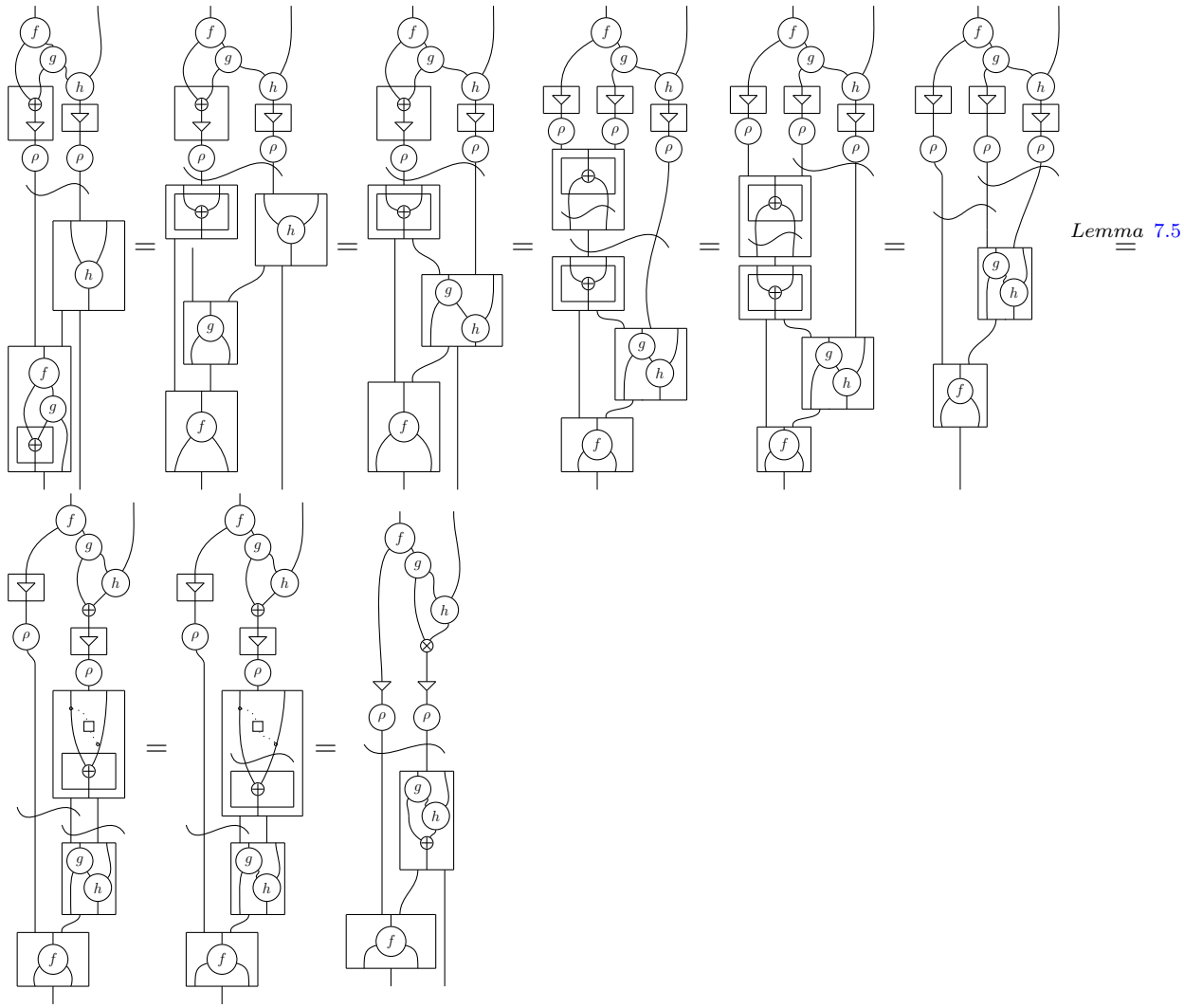
引理的图示表示 7.5（b）：



命题 7.6. $\mathsf{CP}^{\infty}(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 是一个范畴。

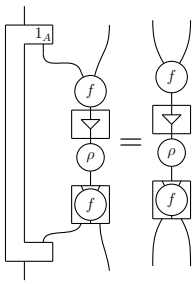
证明。

- 复合是良定义的：也就是说，若 $(f, U) \sim (f', U')$，则 $(f, U)(g, V) \sim (f', U')(g, V)$。首先我们注意到：只需证明：

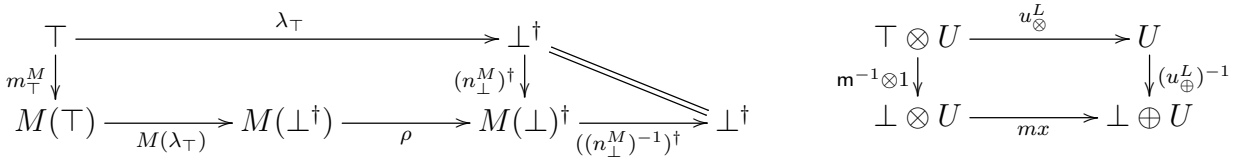


$(g, V) \sim (g', V') \Rightarrow (f, U)(g, V) \sim (f, U)(g', V')$，类似地可证。

- 恒等律成立：$[(u^L_{\oplus})^{-1}(n^M_{\perp})^{-1}][f] = [f] = [f][(u^L_{\oplus})^{-1}(n^M_{\perp})^{-1}]$ 只需证明以下内容：

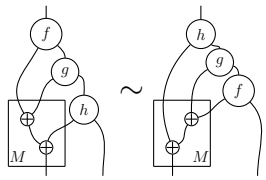


证明利用了以下事实： ρ 是幺半变换（左侧图表），并且对于任意酉对象 U，右侧图表成立：



- 复合满足结合律：设 $(f,U_1): A \to B, (g,U_2): B \to C, (h,U_3): C \to D \in \mathbf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C})$。那么，

$$((f,U_1)(g,U_2))(h,U_3) := \quad \sim \quad =: (f,U_1)((g,U_2)(h,U_3))$$



由于 $(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3 \xrightarrow{a_\oplus} U_1 \oplus (U_2 \oplus U_3)$ 是一个酉同构，根据引理 7.2，$(fg)h \sim f(gh) \in \mathbb{C} \Rightarrow ((f,U_1)(g,U_2))(h,U_3) = (f,U_1)((g,U_2)(h,U_3)) \in \mathbf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C})$。

□

存在一个典范函子 $Q: \mathbb{C} \to \mathbf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C})$，它将原范畴映入通道范畴：

引理 7.7. 设 $M: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 是一个混合酉范畴，则存在一个典范函子：

$$Q: \mathbb{C} \to \mathbf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C}); \begin{array}{c} A \\ f\downarrow \\ B \end{array} \mapsto \begin{array}{c} A \\ \downarrow f(u_\oplus^L)^{-1}((n_\perp^M)^{-1} \oplus 1) \\ M(\perp) \oplus B \end{array}$$

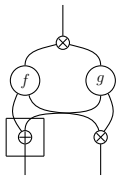
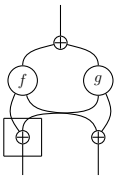
证明。 Q 保持恒等映射和复合，因为 $f(u_\oplus^L)^{-1} \sim f \sim (u_\oplus^L)^{-1} f$。 □

没有理由认为这个函子是忠实的；事实上，在许多情况下，它不会 是忠实的 [46]。

定理 7.8. $\mathbf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 是一个 *isomix* 范畴。

证明。 我们知道，$\mathbf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 是定义良好的范畴。事实上，它有两个张量：

$\widehat{\otimes}$ 以及由以下 Kraus映射给出的 $\widehat{\oplus}$：

$f \widehat{\otimes} g :=$  $f \widehat{\oplus} g :=$ 

$\widehat{\otimes}$ 和 $\widehat{\oplus}$ 的单位元分别是 $\top$ 和 $\bot$。

线性分配映射和所有基本自然同构都从$\mathbb{X}$ 继承而来，方法是将其中每一个与$(u_{\oplus}^{L})^{-1}$ 复合，即：

$$\frac{A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{a_{\otimes}} (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{(u_{\oplus}^{L})^{-1}} \mathbb{C} \ / \sim}{A \widehat{\otimes} (B \widehat{\otimes} C) \xrightarrow{a_{\widehat{\otimes}} := a_{\otimes}(u_{\oplus}^{L})^{-1}} (A \widehat{\otimes} B) \widehat{\otimes} C \in \mathsf{CP}^{\infty}(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})}$$

我们证明，上文定义的结合子及其他映射在$\mathsf{CP}^{\infty}(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$中都是自然同构：根据引理7.7，$Q : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathsf{CP}^{\infty}(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$是函子性的，这意味着所有交换图和同构都得以保持。还需证明 Q 保持线性结构和混合映射：

- Q保持 $\otimes$：假设 $f : A \to A'$且 $g : B \to B' \in \mathbb{C}$。那么，$Q(f) \widehat{\otimes} Q(g) = Q(f \otimes g)$：

$$Q(f) \widehat{\otimes} Q(g) := A \widehat{\otimes} B \xrightarrow{f(u_{\oplus}^{L})^{-1} \widehat{\otimes} g(u_{\oplus}^{L})^{-1}} (\bot \widehat{\oplus} \bot) \widehat{\oplus} (A' \widehat{\otimes} B')$$
$$Q(f \otimes g) := A \widehat{\otimes} B \xrightarrow{(f \otimes g) u_{\oplus}^{-1}} \bot \widehat{\oplus} (A' \widehat{\otimes} B')$$

由于，$\bot \oplus \bot \xrightarrow{u_{\oplus}^{L}} \bot$是酉同构，并且，$f (u_{\oplus}^{L})^{-1} \widehat{\otimes} g (u_{\oplus}^{L})^{-1} (u_{\oplus}^{L} \oplus 1) = (f \otimes g) (u_{\oplus}^{L})^{-1} \in \mathbb{C}$，根据引理 7.2，

$$f(u_{\oplus}^{L})^{-1}) \widehat{\otimes} (g(u_{\oplus}^{L})^{-1} \sim (f \otimes g)(u_{\oplus}^{L})^{-1}$$

因此，$Q(f) \widehat{\otimes} Q(g) = Q(f \otimes g)$。类似地，$Q(f) \widehat{\oplus} Q(g) = Q(f \oplus g)$。

- Q 保持所有基本的自然同构（结合子、单位子、对称映射、混合映射）以及线性分配：

要证明 $a_{\widehat{\otimes}}$ 在 $\mathsf{CP}^{\infty}(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 中是自然的，我们需要证明以下图表在 $\mathsf{CP}^{\infty}(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 中交换：

$$\begin{array}{ccc} A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C) & \xrightarrow{a_{\widehat{\otimes}}} & (A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C \\ {\scriptstyle (f\widehat{\otimes}g)\widehat{\otimes}h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\widehat{\otimes}(g\widehat{\otimes}h)} \\ A'\widehat{\otimes}(B'\widehat{\otimes}C') & \xrightarrow{a_{\widehat{\otimes}}} & (A'\widehat{\otimes}B')\widehat{\otimes}C' \end{array}$$

换言之，我们需要证明 $\mathbb{C}$ 中的两个复合是等价的 Kraus映射。这可由引理 7.2 推出，因为辅助对象 $\bot\oplus(U_1\oplus(U_2\oplus U_3))$ 与 $\bot\oplus(U_1\oplus U_2)\oplus U_3$之间存在酉同构。同样，我们可以证明，所定义的其他基本线性分配变换也是自然变换。由于 Q具有函子性，它保留同构和交换图，因此相干图会自动交换。

□

一般而言，即使 $\mathbb{C}$ 是一个 †-isomix 范畴，$\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 也没有匕首。不过，如果 $M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 是一个 $*$-MUdC，也就是说，是一个其中 $\mathbb{U}$ 中的每个对象都有酉对偶的混合酉范畴，并且如果 $\mathbb{C}$ 是一个 †-isomix $*$-自治范畴，那么 $\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 就有一个如下所示的显然匕首：

引理 7.9. 如果$M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 是一个 $*$-MUdC，那么$\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 是一个 †-*isomix* 范畴，并且

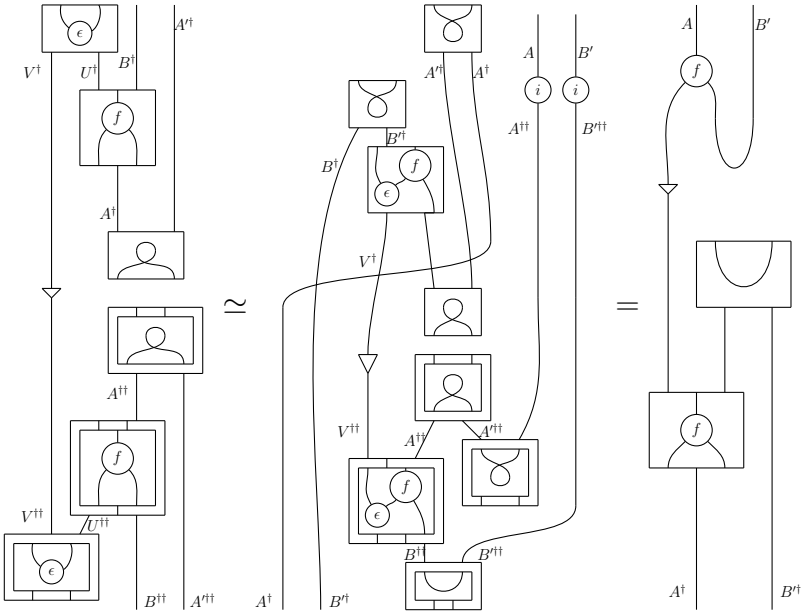
$$N:\mathbb{U}\to\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C});\ \begin{array}{c} U_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ U_2 \end{array}\ \mapsto\ \begin{array}{c} M(U_1) \\ \downarrow{\scriptstyle [(M(f)(u^L_\oplus)^{-1}((n^M_\bot)^{-1}\oplus 1),\bot)]} \\ M(U_2) \end{array}$$

是一个 $*$-MUdC。

证明。（证明概要）我们首先注意到，$\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 是一个 †-isomix 范畴。我们已经证明，$\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 是一个 isomix 范畴。假设 $\mathbb{X}$ 是一个 $*$-MUdC，那么 $\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 的 †函子定义如下：假设 $(f,U):A\to B$ 且 $(\eta,\epsilon):V\dashv_u U$，其中 $A'\dashv A$ 且 $B'\dashv B\in\mathbb{C}$，那么，

$$\dagger:\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})^{\mathrm{op}}\to\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C});\ \begin{array}{c} A \\ f \\ U\quad B \end{array}\ \mapsto\ \begin{array}{c} \epsilon\quad\ B^\dagger \\ f \\ V^\dagger\quad A^\dagger \end{array}$$

我们需要证明 † 定义良好： $f \sim g \Rightarrow f^\dagger \sim g^\dagger$。



该等式可通过蛇形图以及 [U.2], [U.5](b) 和 [**U 的对偶.**] 得证。假设 f: $A \to U_1 \oplus B$ 且 g: $B \to U_2 \oplus C$，其中 (η_1, ϵ_1): $U_1 \dashv\!\vdash_u V_1$ 且 (η_2, ϵ_2): $U_2 \dashv\!\vdash_u V_2$，则 † 保持复合，也就是说 $(fg)^\dagger = g^\dagger f^\dagger$:

$$\frac{(fg) : A \to (U_1 \oplus U_2) \oplus C}{(fg)^\dagger : C^\dagger \to (V_1 \otimes V_2)^\dagger \oplus A^\dagger}$$

$$\frac{g^\dagger : C^\dagger \to U_2^\dagger \oplus B^\dagger \qquad f^\dagger : B^\dagger \to U_1^\dagger \oplus A^\dagger}{(g^\dagger f^\dagger) : C^\dagger \to (V_2^\dagger \otimes V_1^\dagger) \oplus A^\dagger}$$

要证明 $(fg)^\dagger = (g^\dagger f^\dagger)$ 属于 $\mathsf{CP}^\infty(M\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C})$，将这些映射表示为电路演算中的电路，并融合 †-框。一旦融合了 †-框，使用引理 7.2 证明这两个 Kraus 操作属于同一个等价类。† 保持恒等映射，因为 $((u_\oplus^R)^{-1}, u_\oplus^L)$: $\top \dashv\!\vdash_u \bot$。因此，† 是一个函子。

与 † 函子 - $\lambda_\oplus$、$\lambda_\otimes$、$\lambda_\bot$、$\lambda_\top$、ι - 相关的所有基本自然同构，都是利用 $\mathbb{C}$ 通过 Q: $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathsf{CP}^\infty(M\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 提升得到的，该函子在引理 7.7 中定义。提升后的态射在 $\mathsf{CP}^\infty(M\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 中是自然的，因为它们的辅助对象是酉同构的。由于 † 具有函子性，所有交换图都得以保持。由同样的论证，酉结构在 Q下得到保持。

因此，$\mathsf{CP}^\infty(M\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 是一个混合酉范畴：由于 Q 保持所有酉线性伴随，这使得 $\mathsf{CP}^\infty(M\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 成为一个 $*$-MUdC。 □

引理 7.10。 CP^∞-构造在 $*$-*MUdC* 上是函子性的。

证明。设 $M:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 和 $M':\mathbb{U}'\to\mathbb{C}'$ 是 $*$-MUdC，且以下方形是一个 MUC 态射：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{U} & \xrightarrow{M} & \mathbb{C}\\ {\scriptstyle F_u}\downarrow & \Downarrow\alpha & \downarrow{\scriptstyle F}\\ \mathbb{U}' & \xrightarrow[M']{} & \mathbb{C}'\end{array}$$

F_u 和 F 是 †-isomix 函子，且 F_u 保留酉结构，即 $F_u(\varphi_A)\rho^{F_u}=\varphi_{F_u(A)}$以及（$n_\perp^{F_u}$或 $m_\top^{F_u}$）是酉同构。α 是一个 †-线性自然同构。

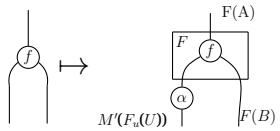
那么，若存在一个 MUC 态射，CP^∞-构造就是函子性的：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{U} & \xrightarrow{MQ} & \mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})\\ {\scriptstyle F_u}\downarrow & \Downarrow\alpha & \downarrow{\scriptstyle G}\\ \mathbb{U}' & \xrightarrow[M'Q]{} & \mathsf{CP}^\infty(M':\mathbb{U}'\to\mathbb{C}')\end{array}$$

回顾引理 $Q:\ \mathbb{C}\hookrightarrow\mathsf{CP}^\infty(M:\ \mathbb{U}\to\mathbb{C})$ 中的函子 7.7。定义 $G:\ \mathsf{CP}^\infty(M:\ \mathbb{U}\to\mathbb{C})\to\mathsf{CP}^\infty(M':\ \mathbb{U}'\to\mathbb{C}')$ 如下：

$$G:\mathsf{CP}^\infty(M:\mathbb{U}\to\mathbb{C})\to\mathsf{CP}^\infty(M':\mathbb{U}'\to\mathbb{C}');\qquad \begin{array}{c}A\\ {\scriptstyle[(f,U)]}\downarrow\\ B\end{array}\ \mapsto\ \begin{array}{c}F(A)\\ \downarrow{\scriptstyle[(F(f)n_\oplus^F(\alpha\oplus1),F_u(U))]}\\ F(B)\end{array}$$

函子 $G:\mathsf{CP}^\infty(M:\ \mathbb{U}\to\mathbb{C})\ \to\mathsf{CP}^\infty(M':\ \mathbb{U}'\to\mathbb{C}')$ 对映射的作用如下图所示：



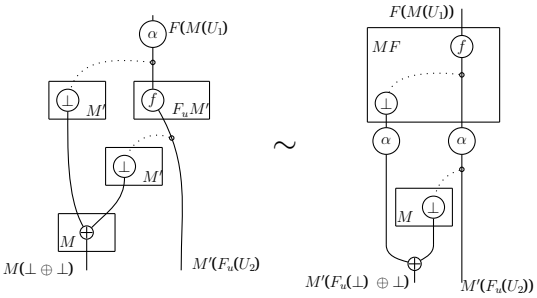
自然同构 α 提升到 $\mathsf{CP}^\infty(M':\ \mathbb{U}'\to\mathbb{C}')$ 的方式如下：

$$\alpha':=[(\alpha_u(u_\oplus^L)^{-1}((n_\perp^{M'})^{-1}\oplus 1),\perp)]:F(M(U))\to M'(F_u(U))$$

显然，$\alpha'_U:\ (G(Q(M(U_1):=F(M(U_1)))\to(Q(M'(F_u(U_2))):=M'(F_u(U_1))$ 是一个同构。令 $U_1\xrightarrow{f}U_2\in\mathbb{U}$。为了证明 α' 是自然的，我们证明下图在 $\mathsf{CP}^\infty(M':\ \mathbb{U}'\to\mathbb{C}')$ 中交换。

$$\begin{array}{ccc}F(M(U_1)) & \xrightarrow{[((F(M(f)(u_\oplus^L)^{-1}((n_\perp^M)^{-1}\oplus1))n_\oplus^F(\alpha\oplus1)),F_u(\perp))]} & F(M(U_2))\\ {\scriptstyle\alpha'_{U_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'_{U_2}}\\ M'(F_u(U_1)) & \xrightarrow[[(M'(F_u(f))(u_\oplus^L)^{-1}((n_\perp^{M'})^{-1}\oplus1),\perp)]]{} & M'(F_u(U_2))\end{array}$$

由于 $F_u(\perp)$ $\xrightarrow{(\ n_\perp^{F_u}\ -1\ )}$ $\perp$ 是酉同构的，因此这两个复合的底层 Kraus映射相同：



因此，该图表是交换的，并且 α' 在 $\mathrm{CP}^\infty(M' : \mathbb{U}' \to \mathbb{C}')$ 中是自然的。 □

下表总结了 $\mathrm{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 从$M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$继承的结构：

$M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$	$\mathrm{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$
混合酉范畴	isomix 范畴
$*$-混合酉范畴，带有酉对偶	$*$-混合酉范畴，带有酉对偶
†-对称幺半范畴	对称幺半范畴
†-紧闭范畴	†-紧闭范畴（$\mathrm{CP}^\infty(\mathbb{X}) \simeq \mathrm{CPM}(\mathbb{X})$）

7.3 MUC 的环境结构

本节将通过把环境结构的概念从$\mathrm{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 对称幺半范畴（见 †）推广到混合酉范畴，说明给定的 isomix 范畴何时具有 [46]的形式。随后我们证明，具有纯化的 M上的环境结构同构于 $\mathrm{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$。

7.3.1 环境结构

我们首先为 MUC 定义环境结构，并给出例子：

定义 7.11。 混合酉范畴的**环境结构** $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$是一个严格 *isomix* 函子 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 其中 $\mathbb{D}$ 是一个 *isomix* 范畴，并且有一族映射U： $F(M(U)) \to \perp$ 由对象 $U \in \mathbb{U}$ 索引，并满足以下条件：

[**Env**。**1**] 对于 U、$V \in \mathbb{U}$，以下图表交换：

(a)

$$\begin{array}{ccccc} F(M(U)) \otimes F(M(V)) & \xrightarrow{\mathsf{mx}} & F(M(U)) \oplus F(M(V)) & \xrightarrow{\bot\oplus\bot} & \bot \oplus \bot \\ \downarrow{\scriptstyle m_\otimes} & & & & \downarrow{\scriptstyle u_\oplus} \\ F(M(U \otimes V)) & & \xrightarrow[\bot]{} & & \bot \end{array}$$

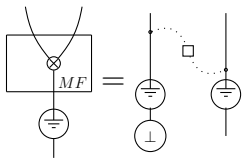
(b)

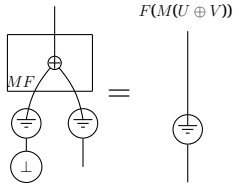
$$\begin{array}{ccccc} F(M(U \oplus V)) & & \xrightarrow{\bot} & & \\ \downarrow{\scriptstyle n_\oplus} & & & \searrow & \\ F(M(U)) \oplus F(M(V)) & \xrightarrow[\bot\oplus\bot]{} & \bot \oplus \bot & \xrightarrow[u_\oplus]{} & \bot \end{array}$$

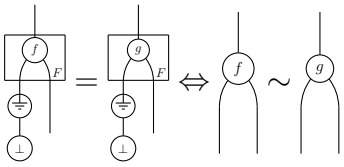
[**Env**。**2**] *Kraus*映射 $(f, U) \sim (g, V) \in \mathbb{C}$ 当且仅当以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & F(M(A)) & & \\ & \swarrow^{F(M(f))} & & \searrow^{F(M(g))} & \\ F(M(U \oplus B)) & & & & F(M(U \oplus B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_\otimes} & & & & \downarrow{\scriptstyle \nu_\otimes} \\ F(M(U)) \oplus MF(B) & & & & F(M(U)) \oplus F(M(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \bot\oplus 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \bot\oplus 1} \\ \bot \oplus F(M(B)) & & = & & \bot \oplus F(M(B)) \end{array}$$

这些条件可用图表表示如下：

[**Env.1a**] 

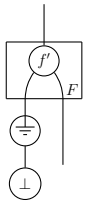
[**Env.1b**] 

[**Env.2**] 

定义 7.12. 混合酉范畴 $F\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 上的环境结构$M\colon\ \mathbb{U} \xrightarrow{\bot} \mathbb{C}$ 具有**纯化**，当且仅当

- F 在对象上是双射，并且
- 对于所有 $f\colon\ F(A) \to F(B) \in \mathbb{D}$，存在一个 *Kraus*映射 $(f', U)\colon\ A \to B \in \mathbb{C}$使得

that

[Env.3] $f =$ 

用等式表示，

$$F(A) \xrightarrow{f} F(B) = F(A) \xrightarrow{F(f')} F(M(U)\oplus B) \xrightarrow{n_\oplus} M(F(U))\oplus F(B) \xrightarrow{\underline{\perp}\oplus 1} \perp\oplus F(B) \xrightarrow{u_\oplus} F(B)$$

引理 7.13。 每个混合酉范畴 $M: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 都有一个环境结构，由下式给出

$$F : \mathbb{C} \to \mathsf{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C});\ \begin{array}{c} A \\ f\downarrow \\ B \end{array} \mapsto \begin{array}{c} A \\ \downarrow{\scriptstyle [(f(u_\oplus^L)^{-1}(n_\perp^M)^{-1},\perp)]} \\ M(\perp)\oplus B \end{array}$$

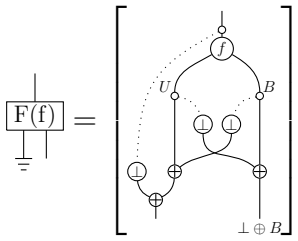
and

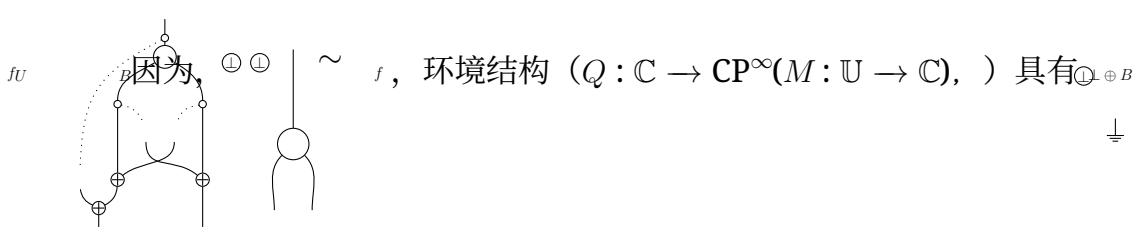
$$\underline{\perp} : M(U) \to \perp \in \mathsf{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}) := [((u_\oplus^R)^{-1}, U)]$$

对每个对象 $U \in \mathbb{U}$。此外，该环境结构具有纯化性质。

证明。 F具有函子性，因为 $f\ (u_\oplus^L)^{-1}\ ((n_\perp^M)^{-1} \oplus 1) \sim f \sim (u_\oplus^L)^{-1}\ (n_\perp^M)^{-1}\ (1 \oplus f)$。定义$F_\otimes = F_\oplus := F$。注意， F是一个严格幺半函子和 isomix 函子。为了证明 $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 满足环境结构的公理，使用了 isomix 函子的性质和引理 7.2 。

为了证明该环境结构具有纯化性质，考虑任意映射 $[(f, U)]: A \to B \in \mathsf{CP}^\infty(M: \mathbb{U} \to \mathbb{C})$。那么，存在一个 Kraus映射 $(f, U): A \to B \in \mathbb{C}$。那么，方程 **[Env. 3]** 中的映射如下图所示:





因为，f，环境结构（$Q : \mathbb{C} \to \mathsf{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$，）具有纯化。 □

以下是我们示例中使用的环境结构：

- 考虑 MUC，$\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}$。那么，

$$(\mathbb{R}^* \xrightarrow{Q} \mathsf{CP}^\infty(\mathbb{R} \subset \mathbb{C}), \perp_r : r \to 1)$$

  是一个环境结构，其中，$_r := (=,\ 1/r)$：$r \to 1$

- 考虑 MUC，$\mathsf{Mat}_{\mathbb{C}}$ →$\mathsf{FMat}_{\mathbb{C}}$。那么，

$$\mathsf{Mat}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{Q} \mathsf{CP}^\infty(\mathsf{Mat}_{\mathbb{C}} \subset \mathsf{FMat}_{\mathbb{C}})$$

  是一个环境结构，其中，$_{\mathbb{C}^n}$：$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$；$\rho \mapsto Tr(\rho)$。

7.3.2 刻画CP^∞ 构造

在本节剩余部分，我们将证明，任何具有纯化的环境结构都是环境结构范畴中的始对象。由引理7.13可知，这表明，任意在 $M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 上的具有纯化的环境结构都同构于 $\mathsf{CP}^\infty(M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C})$。因此，具有纯化的环境结构刻画了$\mathsf{CP}^\infty(M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C})$的抽象结构。

定义 7.14。设 $M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 为一个混合酉范畴。定义范畴 $\mathsf{Env}(M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 如下：

对象： $M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C}$的环境结构

态射： 设 $D:\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 带有，且 $D':\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}'$ 带有 是两个环境结构。则，环境结构态射是一个严格 *isomix* 函子$F:\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$，使得

- $DF = D'$
- $F(\ ) = \ $

恒等箭头： 恒等函子

复合： 线性函子复合

引理 7.15. 设 $M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 是一个混合酉范畴。假设 $D:\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *with* 是一个带纯化的环境结构，那么它是 $\mathsf{Env}(M:\ \mathbb{U} \to \mathbb{C})$中的初始对象。

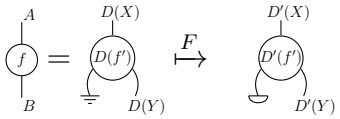
证明。假设 $(D' : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}', \ldots) \in \mathbf{Env}(\mathbb{C})$。我们证明存在唯一的严格 isomix 函子 $F : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}'$，使得 $DF = D'$ 且 $F(\ldots) = \ldots$

如下定义 $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$

- 由于 $(D, \ldots)$ 具有纯化，$D : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 在对象上是双射。于是，对于所有 $A \in \mathbb{D}$，$A = D(X)$ 都对应唯一的 $X \in \mathbb{C}$。于是，

$$F(A) := D'(X)$$

- 令 $f : A \to B \in \mathbb{D}$。由于 $(D : \mathbb{C} \to \mathbb{D}, \ldots)$ 具有纯化，

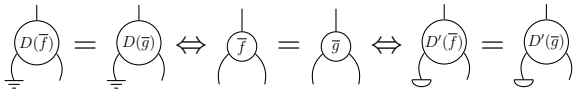


其中 $F(\ldots) = \ldots$

这确定了 F 的定义。为了证明 F 在态射上定义良好，我们需要证明 $f = g \Rightarrow F(f) = F(g)$。由于 $(D, \ldots)$ 具有纯化，令 $\ldots$



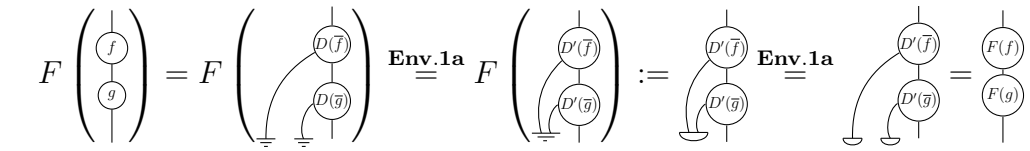
于是，



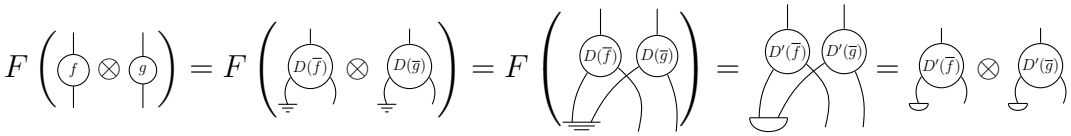
$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ 保持恒等映射：

$$F(1_A) = F(1_{D(X)}) = F(D(1_X)) = D'(1_X) = 1_{D'(X)} = 1_{F(D(X))} = 1_{F(A)}$$

$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ 保持复合：



$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ 在 $\otimes$ 中是严格幺半的：



并且，$F((u^L_\otimes)_A) = F((u^L_\otimes)^{D(X)}) = F(D((u^L_\otimes)_X)) = D'((u^L_\otimes)_X) = (u^L_\otimes)^{D'(X)} = (u^L_\otimes)^{F(D(X))} = (u^L_\otimes)^{F(A)}$

同样，可以证明 F 在 $\oplus$ 中是严格余幺半的。

定义 $F_\otimes = F_\oplus := F$，并将线性强度定义为恒等映射。因此，$F$ 是唯一的严格 Frobenius 函子。由于 D 和 D' 原封不动地保持混合映射 m，F 是一个 isomix 函子。

□

推论 7.16。设 $D : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *with* 是 $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 的一个带有纯化的环境结构。那么，$\mathbb{D} \simeq \mathsf{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$。

证明。由引理 7.15，$D : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 在 Env($M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$) 中是初始对象。由引理 7.13，$F$: $\mathbb{C} \to \mathsf{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$ 中的 $[(u^R_\oplus)^{-1}, U)]$ 是 $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 的一个环境结构，且具有纯化，因此它也是 Env($M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$) 中的初始对象。由于范畴中的初始对象彼此同构，存在一个严格 isomix 函子 $\mathbb{D} \xrightarrow{F} \mathsf{CP}^\infty(M : \mathbb{U} \to \mathbb{C})$，它是满且忠实的。

□

第8章

线性幺半群、余幺半群与双代数

在一个 †-幺半范畴中，（强）互补可观测量由两个特殊交换的 †-Frobenius代数公理化；它们以双代数式地相互作用，从而产生两个霍普夫代数，参见第 6.4.2 节。在 LDC 中，Frobenius代数被推广为线性幺半群。然而，由于线性分配子的方向性，两个线性幺半群之间不允许存在双代数相互作用。这引出了以下问题： 如何在 †-*isomix* 环境中对互补可观测量建模?

本章将介绍称为线性余幺半群和线性双代数的新结构，它们为描述 †-isomix 范畴中的互补系统提供了基础。

8.1 线性幺半群

对于 Frobenius 代数，幺半群和余幺半群作用于同一个对象，且该对象是自对偶的。在 LDC 中，由于存在不同的张量积——张量和 par，幺半群与其对偶余幺半群之间可以发生“Frobenius 互作用”；然而此时幺半群和余幺半群作用于不同的对象。宽泛地说，线性幺半群是在对象 A 上的 $\otimes$-幺半群，而 A 有一个对偶对象。

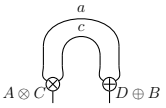
8.1.1 对偶

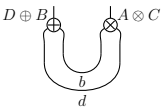
将否定的序列规则（见图 1.3）添加到线性分配范畴中，就得到了对偶的概念。我们在 [35] 线性分配范畴的第2.1.4节中简要讨论了对偶。接下来，我们将深入探讨对偶的概念，并在本节中介绍 †-对偶。

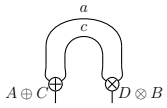
在紧闭范畴或 $*$-自反范畴中，每个对象都有一个规范的对偶。在 LDC 中，如果一个对象有对偶，就必须明确指定。当然，

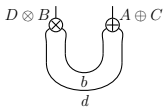
一个对象的任意两个对偶都是同构的。**自对偶性** 是一种对偶，$(\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\vdash B$，其中$A$ 与 B（或 $A = B$）同构。若一个对偶 $(\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\vdash B$ 满足 A 既是 B的左对偶又是右对偶，则称其为**循环对偶**。在对称 LDC 中，每个对偶 $(\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\vdash B$ 都会给出另一个对偶 $(\eta c_{\oplus}, c_{\otimes}\epsilon)\colon B \dashv\!\vdash A$，后者是通过利用对称映射扭曲导线得到的。因此，在对称 LDC 中，每个对偶都是循环对偶。

引理 8.1。 在一个 *LDC* 中，若 $(a, b)\colon A \dashv\!\vdash B$ 和 $(c, d)\colon C \dashv\!\vdash D$ 是对偶，则 $(x, y)\colon A \otimes C \dashv\!\vdash D \oplus B$ 和 $(x', y')\colon A \oplus C \dashv\!\vdash D \otimes B$ 是对偶，其中

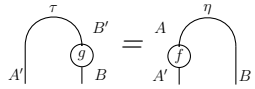
$x :=$ 

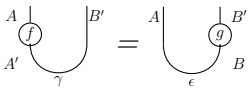
$y :=$ 

$x' :=$ 

$y' :=$ 

定义 8.2。 对偶态射 **morphism of duals** $(f, g)\colon ((\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\vdash B) \longrightarrow ((\tau, \gamma)\colon A' \dashv\!\vdash B')$由一对映射 $f\colon A \longrightarrow A'$ 和 $g\colon B' \longrightarrow B$ 给出，满足：

(a) 

(b) 

对偶态射由其中任一映射决定，因为 f 是 g的对偶。因此，它们是澳大利亚伴侣，参见 [35]。

在 †-LDC 中，如果 A 是 B的对偶，那么 $B^\dagger$ 是 $A^\dagger$的对偶：

引理 8.3。 在 *†-LDC* 中，如果 $(\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\vdash B$ 是一个对偶，而 $(\epsilon\dagger, \eta\dagger)\colon B^\dagger \dashv\!\vdash A^\dagger$ 是一个对偶，其中 e:

$$\epsilon\dagger := \top \xrightarrow{\lambda_\top} \bot^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} (B \otimes A)^\dagger \xrightarrow{\lambda_\oplus^{-1}} B^\dagger \oplus A^\dagger$$
$$\eta\dagger := A^\dagger \otimes B^\dagger \xrightarrow{\lambda_\otimes} (A \oplus B)^\dagger \xrightarrow{\eta^\dagger} \top^\dagger \xrightarrow{\lambda_\bot^{-1}} \bot$$

这引出了 †-对偶的概念：

定义 8.4。 在 *†-LDC* 中，一个**右 †-对偶**，$A \;{}^{\dagger}\!\shortparallel\, A^\dagger$ 是一个对偶(η, ϵ)：$A \dashv\!\vdash A^\dagger$，满足

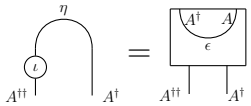
$$(\iota_A, 1_{A^\dagger})\colon (\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\vdash A^\dagger \longrightarrow (\eta^\dagger, \epsilon^\dagger)\colon A^{\dagger\dagger} \dashv\!\vdash A^\dagger$$

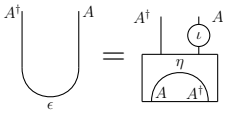
是一个对偶同构。一个**左 †-对偶**，$A^\dagger \;\shortparallel\, A$ 是一个对偶(η, ϵ)：$A^\dagger \dashv\!\vdash A$，满足

$$(1_{A^\dagger}, \iota_A)\colon \eta^\dagger, \epsilon^\dagger)\colon A^{\dagger\dagger} \dashv\!\vdash A^\dagger \longrightarrow (\eta, \epsilon)\colon A^\dagger \dashv\!\vdash A$$

是一个对偶同构。一个**自 †-对偶** 是一个右（或左）†-对偶，且具有一个同构α：$A \longrightarrow A^\dagger$，满足 $\alpha\alpha^{-1\dagger} = \iota$。

$(\iota_A,\ 1_{A^\dagger})$是 意味着对偶同构的以下方程成立：

(a) 

(equivalently) (b) 

(8.1)

在 †-线性逻辑的序列演算中，如果一个前提满足图 †中的规则，则称其为右8.1-对偶。如截面1.1.6所示，可以使用这些规则推导出 $\eta\colon\ \top \to A \oplus A^\dagger$以及 $A^\dagger \otimes A \to \bot$右 †-对偶。注意，左 †-对偶可以使用相同的规则、（†）规则以及截面ι中的（3.1.2）规则推导出来。

$$(\dagger\text{-dual:R})\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \vdash A^\dagger, \Delta} \qquad (\dagger\text{-dual:L})\ \frac{\Gamma, A^\dagger \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

图 8.1：右 †-对偶的序列规则

引理 8.5。 在一个 †-*LDC* 中，对于对偶 $(\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\shortmid B$，以下条件等价：

(i) 存在一个从该对偶到其右 †-对偶的同构（如下方图表(a) 所示）。

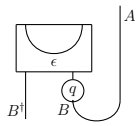
(ii) 存在一个从该对偶到其左 †-对偶的同构（如下方图表 (b)所示）。

(iii) 存在一个态射 (p, q)，它介于该对偶与其匕首之间，且 (p, q) 满足以下三个条件中的任意两个：*(1)* $pq^\dagger = \iota_A$、*(2)* $p^\dagger q = \iota_B^{-1}$，以及 *(3)* p 或 q是同构。

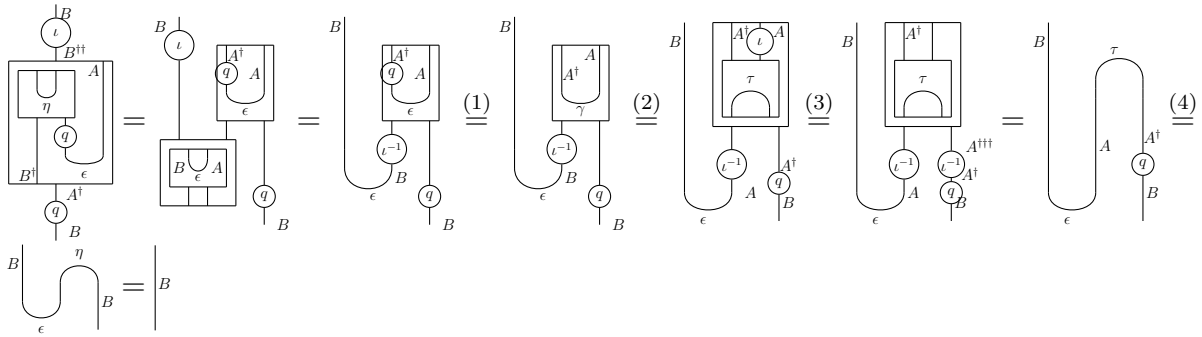
$$(a)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\eta,\epsilon)} & B \\ \| & & \uparrow q \\ A & \xrightarrow[\dagger(\tau,\gamma)]{} & A^\dagger \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\eta,\epsilon)} & B \\ p\downarrow & & \| \\ B^\dagger & \xrightarrow[\dagger(\tau',\gamma')]{} & B \end{array} \qquad (c)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\eta,\epsilon)} & B \\ p\downarrow & & \uparrow q \\ B^\dagger & \xrightarrow[(\epsilon\dagger,\eta\dagger)]{} & A^\dagger \end{array}$$

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$ 已知 $(\eta, \epsilon)\colon A \dashv\!\shortmid B \xrightarrow{(1,q)} (\tau, \gamma)\colon A \dashv\!\shortmid A^\dagger$ 是对偶同构。于是，定义 $p\colon A \to B^\dagger$ 如下：

$$p :=$$

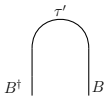
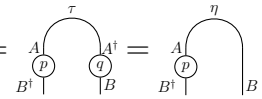
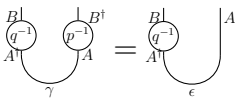


注意到 $\iota_B p^\dagger q = 1_B$：



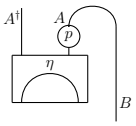
(1) 和 (4) 是因为 $(1, q)$ 是对偶态射，(2) 是因为 A 的右 †-对偶性，而 (3) 是因为 $\iota_B^{-1\dagger} = \iota_{B^\dagger}$。

定义左 †-对偶（τ'，γ'）如下：

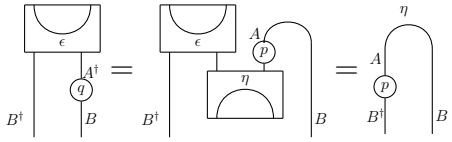
$\tau' =$  $:=$  $\gamma' =$ $:=$ 

显然，τ'和 γ'满足蛇形图。（τ'，γ'）：$B^\dagger \dashv B$可利用方程 $\iota_B p^\dagger q = 1_B$证明为左 †-对偶。根据$\tau'$和 γ'的定义可直接得出，（p，$\mathbf{1}$）是对偶态射。

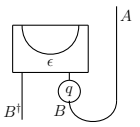
（ii）$\Rightarrow$（iii）已知（p，$\mathbf{1}$）是图表（b）所示的对偶态射。定义：

$$q : A^\dagger \to B := $$ 

（p，q）：**(**(η，ϵ)：$A \dashv B$**)** $\to$**(**($\eta\dagger$，$\epsilon\dagger$)：$B^\dagger \dashv A^\dagger$**)** 是对偶态射，因为：

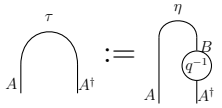
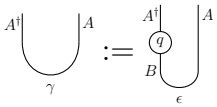


由于 p 和 q 是同构，因此只需证明 $pq^\dagger = i_A$ 或 $p^\dagger q = \iota_B^{-1}$。根据 q的定义，我们注意到，

$$p : A \to B^\dagger = $$ 

从 **(**i**)** $\Rightarrow$ **(**ii**)** 的证明中，我们知道 $p^\dagger q = \iota_B^{-1}$。因此，命题 **(**$iii$**)** 成立。

(iii**)** $\Rightarrow$ **(**i**)** 假设命题 **(**iii**)** 成立。定义一个对偶 (τ, γ)：$A \dashv B$ 如下：

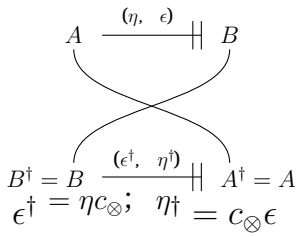
(τ, γ)：$A \dashv A^\dagger$ 是一个右 †-对偶，因为 $pq^\dagger = \iota_A$。显然，$(1_A, q)$ 是一个对偶态射。

□

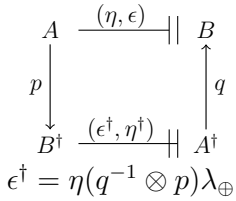
一个 **†-对偶**是满足前述引理中任意一个等价表述的对偶。不过请注意，在前述引理的 **(i)** 中，指向给定右 †-对偶的态射由以下要求唯一确定：该映射是 $(1_A,\ q)$ 1_A 完全

确定的。如果 存在 一个 A的右 †-对偶，那么 A 的任何普通线性对偶都是一个 †-对偶。因此， †-对偶性确实是对象 A 的性质，而不是对偶性的性质。因此，在本文余下部分，我们将右和左 †-对偶与 †-对偶视为同义词。

在 dagger 幺半群环境中，通常有一个 dagger 对偶 [110]，其中对称映射作用为对偶与其匕首之间的同构：



以这种方式使用对称映射，要求匕首函子在对象上保持不变（$A = A^\dagger$），但这在一般的 †-LDC 中并不成立（$A \neq A^\dagger$）。下图表示一个 †-LDC 中的 $dagger$-对偶：



在复有限性矩阵范畴 FMat($\mathbb{C}$) 中，它是一个 †-$*$-isomix 范畴，每个对偶都是 †-对偶。有限维复矩阵范畴 Mat($\mathbb{C}$) 是一个 †-紧闭范畴，与 FMat($\mathbb{C}$) 的核心同构，参见第 2.3.4 节。因此，Mat($\mathbb{C}$) 中的每个对偶也都是 †-对偶。事实上，FMat($\mathbb{C}$) 中的每个对偶既是 †-对偶，也是酉对偶（$\eta^\dagger = \epsilon c_\otimes$）。这些例子将在第 10.1.1 节中详细讨论。

注意， †-线性函子保持 †-对偶：

引理 8.6。 †-线性函子保持 †-对偶。

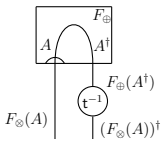
证明。 设 $\mathbb{X}$，且 $\mathbb{Y}$ 为 †-线性分配范畴。令（$F_\otimes$， $F_\oplus$）： $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 为一个 †-线性函子。于是，对于每个对象 A，我们有映射：

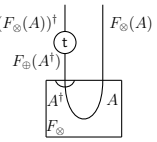
$$\mathsf{s}_A : F_\otimes(A^\dagger) \xrightarrow{\simeq} (F_\oplus(A))^\dagger \qquad \mathsf{t}_A : (F_\otimes(A))^\dagger \xrightarrow{\simeq} F_\oplus(A^\dagger)$$

使得 (s，t)：$(F_\otimes((-)^\dagger),\ (F_\oplus(-)^\dagger)) \Rightarrow ((F_\oplus(-))^\dagger,\ F_\otimes((-)^\dagger))$ 是一个线性自然同构。我们必须证明，如果 $A \ {}^{\dagger\circ}\!\!\shortparallel\ A^\dagger$ 是一个右 ŧ-线性对偶，那么 $F_\otimes(A)$具有一个右 †-对偶。

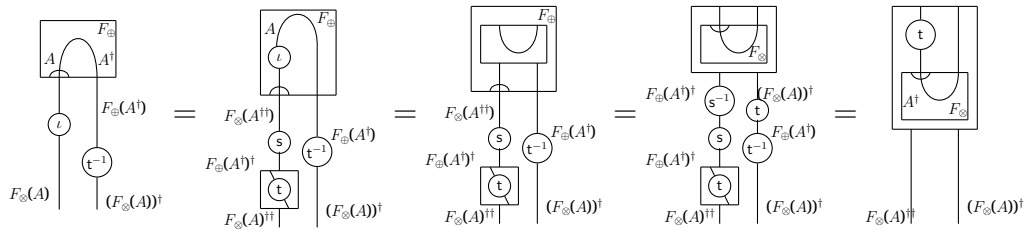
假设 $A \ {}^{\dagger}\!\!\shortparallel\ A^\dagger$ 是一个右 †-对偶。由于线性函子保留线性对偶， $F_\otimes(A)$ ⊣

$F_{\oplus}(A^{\dagger})$也是一个线性对偶，其帽和杯分别为：

$$\top \xrightarrow{\eta'} F_{\otimes}(A) \oplus F_{\otimes}(A)^{\dagger} :=$$ 

$$F_{\otimes}(A)^{\dagger} \otimes F_{\otimes}(A) \xrightarrow{\epsilon'} \bot :=$$ 

证明它是右 †对偶：



□

在对称的 †-LDC 中，如果 $(a,b):\underline{A}\ {}^{\dagger}\!\shortparallel\ A^{\dagger}$ 和 $(c,d):\underline{B}\ {}^{\dagger}\!\shortparallel\ B^{\dagger}$ 是 †-对偶，那么 $(A\otimes B)\dashv\!\shortparallel(A^{\dagger}\oplus B^{\dagger})$ 和 $(A\oplus B)\dashv\!\shortparallel(A^{\dagger}\otimes B^{\dagger})$ 是 †-对偶。

对偶 †-对偶的态射是以下形式之一的对偶态射：

- 对于右 †-对偶，它由一个映射及其匕首组成：

$$(f,f^{\dagger}):((\eta,\epsilon):A\ \xrightarrow{\dagger}\!\shortparallel\ A^{\dagger})\longrightarrow((\eta',\epsilon'):B\ \xrightarrow{\dagger}\!\shortparallel\ B^{\dagger})$$

- 对于左 †-对偶，其形式为：

$$(f^{\dagger},f):((\eta,\epsilon):A^{\dagger}\ \xrightarrow{\dagger}\!\shortparallel\ A)\longrightarrow((\eta',\epsilon'):B^{\dagger}\ \xrightarrow{\dagger}\!\shortparallel\ B)$$

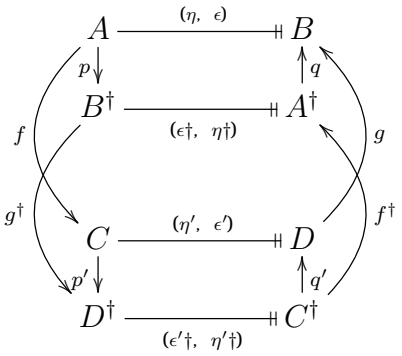
- 一对 $(f,g):((\eta,\epsilon):\ A\ {}^{\dagger}\!\shortparallel\ \underline{B})\ \longrightarrow((\eta',\epsilon'):\ C\ {}^{\dagger}\!\shortparallel\ \underline{D})$，用于一般的匕首对偶，使得以下等价图表之一交换：

$$(a)\quad \begin{array}{ccc} C^{\dagger} & \xrightarrow{f^{\dagger}} & A^{\dagger} \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ D & \xrightarrow[g]{} & B \end{array} \qquad (or) \qquad (b)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B^{\dagger} & \xrightarrow[g^{\dagger}]{} & D^{\dagger} \end{array} \tag{8.2}$$

其中 (p,q) 是对偶 $(\eta,\epsilon):\ A\dashv\!\shortparallel B$ 与其匕首 $(\epsilon\dagger,\eta\dagger):B^{\dagger}\dashv\!\shortparallel A^{\dagger}$之间的同构，而 (p',q') 是对偶 $(\eta',\epsilon'):\ C\dashv\!\shortparallel D$ 与其匕首 $(\epsilon'\dagger,\eta'\dagger):\ D^{\dagger}\dashv\!\shortparallel C^{\dagger}$之间的同构，参见引理 8.5 中的陈述 (iii)。

余向　　g 个图表（a）和（b）表明，态射（f,g）的行为具有相干性　　y

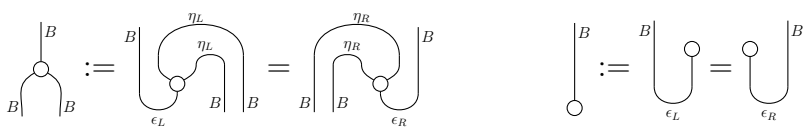
借助确定 †-对偶的同构，请参见下图表：



8.1.2 线性幺半群

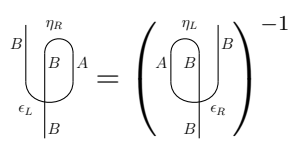
在线性环境中，存在两种不同的张量积，Frobenius 代数由线性幺半群推广而来 [62, 35]。描述线性幺半群最简单的方式，是将其视为对象上的一个 $\otimes$-幺半群，并为该对象配备一个对偶。当把线性幺半群视为一个 $\otimes$-幺半群和一个 $\oplus$-余幺半群，并使其带有作用与余作用时，它与 Frobenius 代数的相似之处便更加明显。

定义8.7。*LDC* 中的一个**线性幺半群** $A \overset{\circ}{\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\!\!\shortparallel} B$，由一个幺半群$(A, e: \top \to A, m: A \otimes A \to A)$、一个左对偶$(\eta_L, \epsilon_L)$: $A \dashv B$以及一个右对偶(η_R, ϵ_R): $B \dashv A$ 构成，且满足：

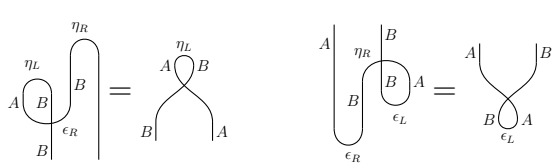


(8.3)

注意，在对称 LDC 中，给定一个对偶 $(\eta_L,\ \epsilon_L)$: $A \dashv B$，任何线性幺半群 $A \overset{\circ}{\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\!\!\shortparallel} B$ 都可以规范化为使用对称对偶 $(\eta_L c_\oplus,\ c_\otimes,\ \epsilon_L)$: $B \dashv A$。假设在对称 LDC 中，$(\eta_L,\ \epsilon_L)$: $A \dashv B$ 和 $(\eta_R,\ \epsilon_R)$: $A \dashv B$ 是循环对偶，则：



这是一个对偶同构：



因此，在非对称LDC中，对于任意线性幺半群，都可以假定其对偶是通过对称映射给出的。当一个线性幺半群的对偶**对称的** 时，称其为

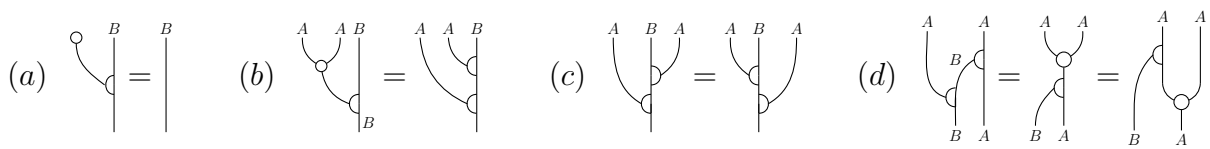
对称的。截面10.1.2 讨论了线性幺半群的不同例子。

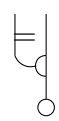
线性幺半群的另一种形式，展现了它们与 Frobenius 代数的相似性：

命题 8.8. *LDC* 中的一个**线性幺半群** $A \overset{\circ}{\shortparallel} B$ 等价于以下数据：

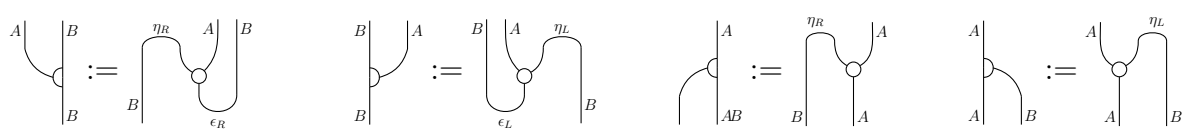
- 一个幺半群$(A,$  $: \quad A \otimes A \to A,$  $: \quad \top \to A)$
- 一个余幺半群$(B,$  $: \quad B \to B \oplus B,$  $: \quad B \to \bot)$
- 作用，：  $A \otimes B \to B$，：  $B \otimes A \to B$，以及余作用：  $A \to B \oplus A$，：  $A \to A \oplus B$，

使得下列公理（及其「逆向」和「余向」对称形式）成立：



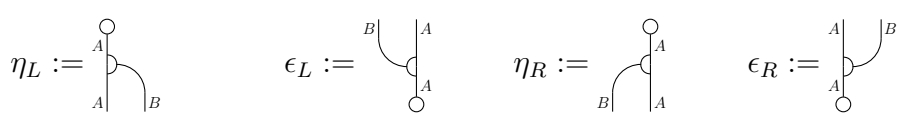
如果线性幺半群是对称的，  则： 

证明。设 $A \overset{\circ}{\shortparallel} B$ 是一个线性幺半群。那么，B 上的余幺半群由该幺半群的左对偶（或等价地，右对偶）给出。作用和余作用映射定义如下：



等式（a）-（d）很容易验证。

对于逆关系，左对偶和右对偶定义如下：



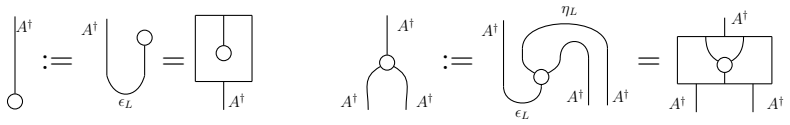
□

幺半范畴中的线性幺半群 $A \overset{\circ}{\shortparallel} B$ 若为自线性幺半群，即 $A = B$，且其对偶与自对偶杯和帽重合，则构成一个 Frobenius 代数。请注意，Frobenius 代数总是定义在自对偶对象上，而线性幺半群允许不同对偶对象之间存在 Frobenius 互作用。

定义 8.9。 线性幺半群态射 是由一对映射组成的，$(f,g):(A \overset{\circ}{\shortparallel} B)\longrightarrow(A' \overset{\circ}{\shortparallel} B')$，满足 $f\colon A\longrightarrow A'$ 是一个幺半群态射（或等价地， $g\colon B'\longrightarrow B$ 是一个余幺半群态射），并且 (f,g) 和 (g,f) 分别保持左对偶和右对偶。

注意，Frobenius 代数的态射通常由一个单一的幺半群态射和余幺半群态射给出，其作用是产生一个同构。然而，定义8.9中的线性幺半群态射并不局限于同构。这里，余幺半群态射 $g\colon B'\longrightarrow B$是幺半群态射的循环伴侣， $f\colon A\longrightarrow A'$。

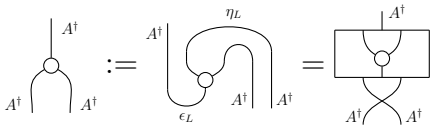
定义 8.10。 在一个 †-*LDC* 中， **†-线性幺半群** $(A,,)\overset{\dagger\circ}{\shortparallel}(A^\dagger,,)$是一个线性幺半群，满足 $(\eta_L,\epsilon_L)\colon A\dashv\!\vdash A^\dagger$，且 $(\eta_R,\epsilon_R)\colon A^\dagger\dashv\!\vdash A$ 是 †-对偶，并且：



(8.4)

在 †幺半范畴中，所有 †-Frobenius代数也都是 †-线性幺半群。然而，逆关系并不成立。例如，在复希尔伯特空间及线性映射构成的范畴中，基本魏尔代数 $\mathbb{C}[x]/x^2=0$ 是一个交换的 †-线性幺半群，但不是 †-Frobenius代数。更多例子将在第 10.1.2 节中讨论。

定义 8.11。 一个 †-线性幺半群称为**扭曲的**，如果乘法的对偶与乘法的匕首仅相差一个扭曲：



(8.5)

在对称的 †-线性分配范畴中，自同态幺半群（裤子幺半群）是一个扭曲的 †-线性幺半群，参见第 8.1.3 节。注意，每个交换的 †-线性幺半群都是扭曲的 †-线性幺半群。

按照与 †-对偶相同的模式， †-线性幺半群可分类如下：

- 一个**（扭曲）右 †-线性幺半群**，它是一个线性幺半群 $A \overset{\circ}{\shortparallel} A^\dagger$，具有左、右 †-对偶，且幺半群的对偶与其（扭曲）匕首相同，

- 一个**（扭曲）左 †-线性幺半群**，也就是说，一个线性幺半群 $A^\dagger \overset{\circ}{\shortparallel} A$，具有左、右 †-对偶，且余幺半群的对偶与其（扭曲）匕首相同，并且

- 一个**一般 †-线性幺半群**，它是一个线性幺半群（$A,,$） $\overset{\circ}{\shortparallel}(B,,)$ ，满足以下三个条件之一：

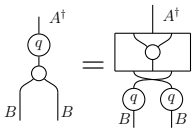
(i) $A \overset{\circ}{\rule{2em}{0.4pt}}\!\!\shortparallel B$ 通过同构（$1_A, q$）与其右侧的 †-线性幺半群同构：
$A \overset{\circ}{\shortparallel} \underline{B} \to A \overset{\dagger\circ}{\shortparallel} \underline{A^\dagger}$,

(ii) $A \overset{\circ}{\rule{2em}{0.4pt}}\!\!\shortparallel B$ 通过同构 $(p,\ 1_B)$ 与其左 †-对偶同构： $B^\dagger \overset{\dagger\circ}{\shortparallel} B \to A \overset{\circ}{\shortparallel} B$，或

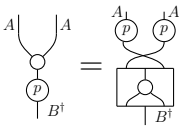
(iii) $A \overset{\circ}{\rule{2em}{0.4pt}}\!\!\shortparallel B$ 通过同构 $(p,\ q)$ 与 $\underline{B^\dagger} \overset{\bullet}{\shortparallel} A^\dagger$ 同构，并且 $pq^\dagger = \iota_A$;

一般的 †-线性幺半群在满足以下条件之一时称为**扭曲**：

– 在条件 (i) 中， q ： $(A^\dagger,$  †,  $^\dagger) \to (B,$  $,$ $,$  $)$ 是扭曲余幺半群态射：



– 在条件 (ii) 中， p ： $(A,$  $,$  $) \to (B^\dagger,$  †,  †,  $^\dagger)$ 是扭曲幺半群态射：

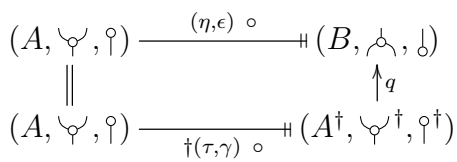


– 在条件（iii）下， p 要么是扭曲幺半群态射，要么 q 是扭曲余幺半群态射。

对于一般的 †-线性幺半群，恒等映射完全决定了 q。因此，我们注意到，只要存在一个右 †-线性幺半群，就足以使任意线性幺半群成为一个 †-线性幺半群。根据引理 8.12，这一观察也推广到扭曲
†-线性幺半群：只要存在一个扭曲的右 †-线性幺半群，就足以使任意线性幺半群成为一个扭曲的 †-线性幺半群。

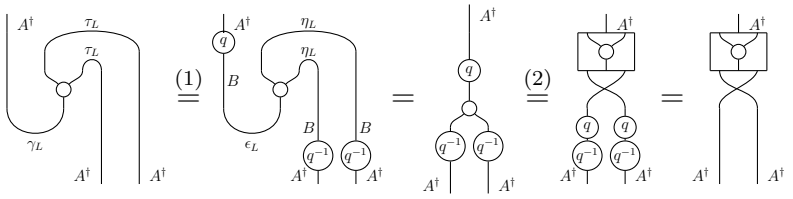
线性幺半群与其右（或左） †-线性幺半群之间存在扭曲同构，当且仅当该右（或左） †-线性幺半群是扭曲的：

引理 8.12。 在一个 †-*LDC*中，设（η, ϵ）：  $(A,$  $,$ $)$  $(B,$  $,$  $)$ 是一个与其右 †-线性幺半群同构的线性幺半群：



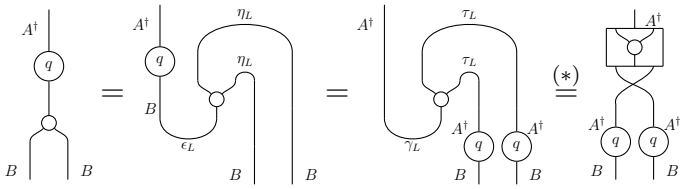
同构 $(1, q)$ 是扭曲的，也就是说， q 是扭曲余幺半群态射，当且仅当 $A \overset{\dagger\circ}{\shortparallel} A^\dagger$ 是扭曲的 †-线性幺半群。

证明。 假设 q 是扭曲幺半群态射。那么， $A \overset{\dagger\circ}{\parallel} A^\dagger$ 是扭曲的 $\dagger$-线性幺半群，因为:



步骤 (1) 成立，因为 $(1, q)$ 是底层对偶的一个态射。步骤 (2) 成立，因为 q 是一个扭曲余幺半群态射。

反过来，假设 (τ, γ) : $A \overset{\dagger\circ}{\parallel} A^\dagger$ 是一个扭曲右 $\dagger$-线性幺半群。那么，q 是一个扭曲余幺半群态射，因为:



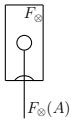
步骤 $(*)$ 成立，因为 A 是一个扭曲右 $\dagger$-线性幺半群。 □

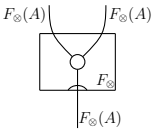
接下来注意到， $\dagger$-线性幺半群在 $\dagger$-线性函子作用下保持不变:

引理 8.13。 $\dagger$-线性函子保持（扭曲） $\dagger$-线性幺半群。

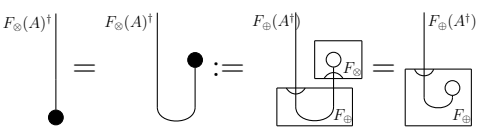
证明。 设 $(F_\otimes, F_\oplus)$: $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个 $\dagger$-线性函子，且 $A \overset{\dagger\circ}{\parallel} A^\dagger$ 是 $\mathbb{X}$ 中的一个 $dagger$-线性幺半群。由于线性函子保持线性幺半群，因此 $F_\otimes(A) \overset{\circ}{\parallel} F_\oplus(A^\dagger)$ 是一个线性幺半群。

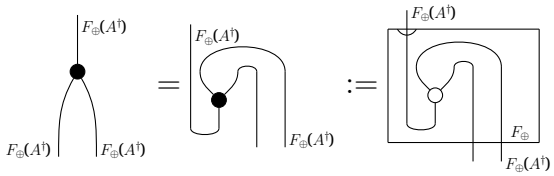
为证明 $F_\otimes(A)$ 是右 $\dagger$-线性幺半群，定义如下乘法、单位、余乘法、余单位、作用和余作用映射:

$$\top \overset{\bullet}{\longrightarrow} F_\otimes(A) :=$$ 

$$F_\otimes(A) \otimes F_\otimes(A) \overset{\curlyvee}{\longrightarrow} F_\otimes(A) :=$$ 

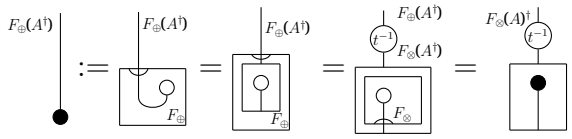
定义:



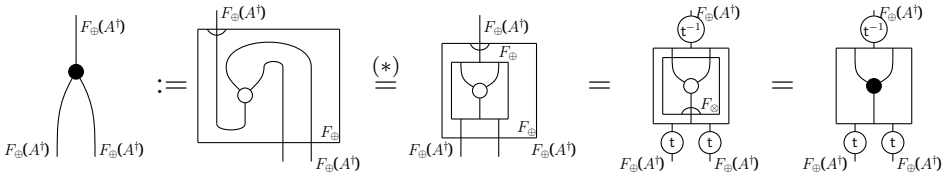


还需证明：

- 余单位是单位映射的匕首：



- 余乘法是乘法映射的匕首：



Obs请注意，在步骤（$*$）中，如果 †-线性幺半群被扭曲，则会引入一个扭曲 d.

□

（扭曲） †-线性幺半群的态射，遵循与 †-对偶的态射相同的模式：

†-对偶：

定义 8.14。一个**（扭曲） †-线性幺半群的态射**定义为以下两者之一：

- 对于（扭曲）**右** †-线性幺半群，它是一对映射$(f, f^\dagger)$，且是底层线性幺半群的态射。

- 对于（扭曲）**左** †-线性幺半群，它是一对映射$(f^\dagger, f)$，且是底层线性幺半群的态射。

- 对于（扭曲的）**一般** †-线性幺半群，它是一个二元组 （f、 g）$\underline{:}$ $A \overset{\dagger\circ}{\parallel} B \to C \overset{\dagger\bullet}{\parallel} D$满足以下条件：（$f$、 g）是底层线性幺半群的一个态射，并且下列等价图表中的一个交换：

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} C^\dagger & \xrightarrow{f^\dagger} & A^\dagger \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ D & \xrightarrow[g]{} & B \end{array} \qquad (or) \qquad (b) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B^\dagger & \xrightarrow[g^\dagger]{} & D^\dagger \end{array} \tag{8.6}$$

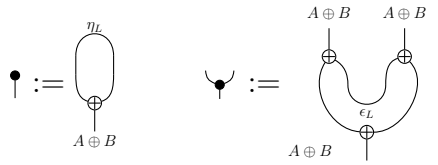
其中，（p、q）是线性幺半群 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 与其匕首 $B^\dagger \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ A^\dagger$ 之间的同构，而（p'、q'）是线性幺半群 $C \ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel\ D$ 与其匕首 $D^\dagger \ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel\ C^\dagger$ 之间的同构（根据一般 †-线性幺半群所满足的条件）。

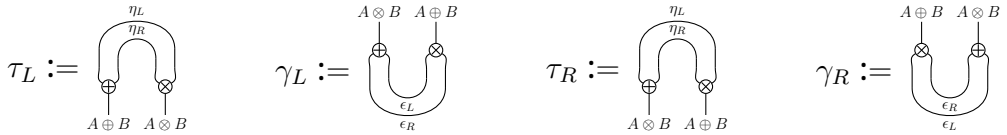
在交换图（a）中，$f^\dagger : C^\dagger \to A^\dagger$ 是 dagger 余幺半群之间的态射，而 $g : D \to B$ 是对偶余幺半群之间的态射。若给定的 †-线性幺半群是扭曲的，则 q 和 q' 为扭曲余幺半群态射。对偶地，在交换图（b）中，$f : A \to C$ 是一个幺半群态射，而 $g^\dagger : B^\dagger \to D^\dagger$ 是共轭幺半群之间的态射。若给定的 †-线性幺半群是扭曲的，则态射 p 和 p' 为扭曲幺半群态射。

8.1.3 自同态线性幺半群

在第 6.4.1 节中，我们讨论了 †-Frobenius 代数，它们位于 †-KCC 中。对于 KCC 中的对象 A，A 的对偶结构在对象 $A \otimes A^*$ 上诱导出一个裤子代数，亦称自同态幺半群。若 KCC 是对称的，则裤子代数是 Frobenius 代数。此外，在 †-KCC 中，这些代数是 †-Frobenius 代数。本节中，我们将在 †-LDC 中介绍裤子代数的类似物。

引理 8.15。 在 *LDC* 中，每个对偶 $(\eta_L, \epsilon_L) : A \dashv B : (\eta_R, \epsilon_R)$ 都会诱导出一个线性幺半群：$(\tau, \gamma) : (A \oplus B) \ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel\ (A \otimes B)$：



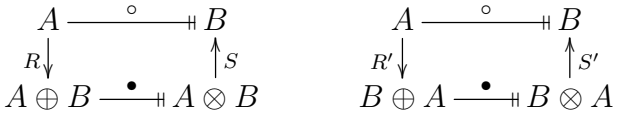


在对称 LDC 中，每个对偶都会自动诱导出一个裤子线性幺半群，如前一个引理所示。每个线性幺半群都嵌入其裤子线性幺半群中：

引理 8.16。 在 *LDC* 中，每个线性幺半群都嵌入由其左对偶和右对偶诱导的裤子线性幺半群中。

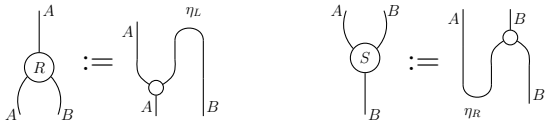
证明。设 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 是一个包含幺半群（A、、）的线性幺半群，具有左对偶（η_L、ϵ_L）：$A \dashv B$，以及右对偶（η_R、ϵ_R）：$A \dashv B$。左对偶和右对偶分别给出两个裤子线性幺半群（τ、γ）：（$A \oplus B$）$\ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ (A \otimes B)$ 和（τ'、γ'）：（$B \oplus A$）$\ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel\ (B \otimes A)$，如引理 8.15 所示。

为了证明 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 嵌入其裤子线性幺半群中，我们必须证明存在线性幺半群的态射（R, S）和（R', S'），并且这些态射具有左逆：

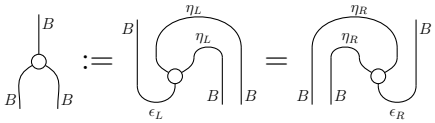


我们首先证明 $(\eta, \epsilon) : A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 嵌入到 $(\tau, \gamma) : (A \oplus B) \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel (A \otimes B)$ 中。

定义 $R : A \to A \oplus B$ 和 $S : A \otimes B \to A$ 如下：

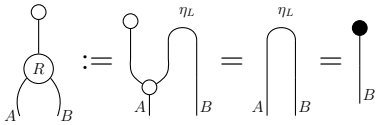


其中，

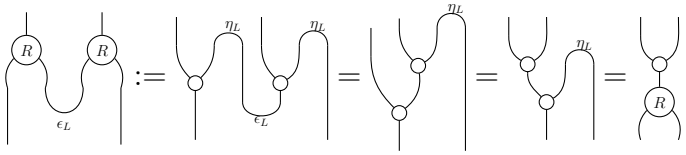


我们证明 $R : (A, ,) \to (A \oplus B, ,)$ 是一个幺半群态射。

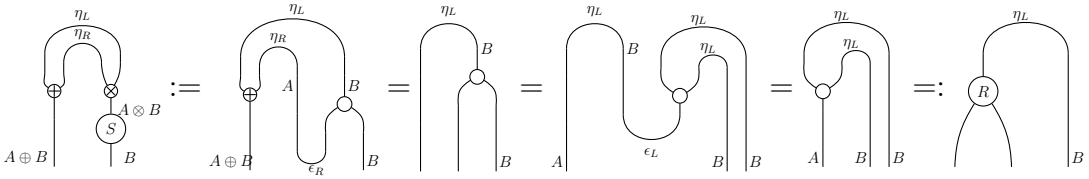
R 保持单位：

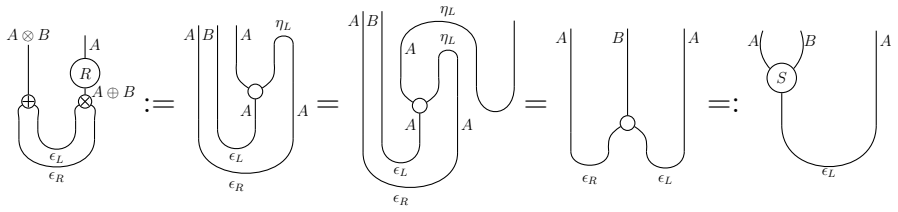


R 保持乘法：



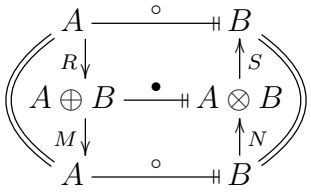
最后，$(R, S) : ((\eta_L, \epsilon_L) : A \dashv B) \to ((\tau_L, \gamma_L) : (A \oplus B) \dashv (A \otimes B))$ 是一个对偶态射：



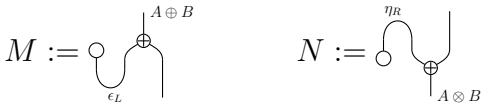


同理，我们可以证明 $(S,R):((\tau_R,\gamma_R):(A\otimes B)\dashv(A\oplus B))\to((\eta_R,\epsilon_R):B\dashv A)$ 是一个对偶态射。

要证明 R 是一个嵌入，只需证明 R 是左可逆的，也就是说，存在 (M,N)，使得 $(R,S)(M,N):=(RM,NS)=(1_A,1_B)$:



定义:



容易验证 $RM=1_A$ 和 $NS=1_B$。因此，$(\eta,\epsilon):A\ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 嵌入到 $(\tau,\gamma):(A\oplus B)\ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel(A\otimes B)$ 中。证明 $(\eta,\epsilon):A\ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 嵌入到 $(\tau,\gamma):(A\oplus B)\ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel(A\otimes B)$ 中的过程，是上述证明的镜像反射。 □

在对称的 †-LDC 中，事实证明，裤子“幺半群”是一个扭曲的 †-线性幺半群，见 8.11：因此，余乘法是乘法经过扭曲（使用对称映射）后的匕首。

在对称的 †-LDC 中，一个扭曲的 †-线性幺半群嵌入裤子 †-线性幺半群。

引理 8.17。在对称的 †-*LDC* 中，若 $(\eta,\epsilon):A\dashv A^\dagger$ 是一个 †-对偶，则裤子幺半群 $(\tau,\gamma):(A\oplus A^\dagger)\ {}^{\circ}\!\!\shortparallel(A\otimes A^\dagger)$ 是一个扭曲的 †-线性幺半群。

证明。为了证明 $(\tau,\gamma):(A\oplus A^\dagger)\ {}^{\circ}\!\!\shortparallel(A\otimes A^\dagger)$ 是一个 †-线性幺半群，我们证明存在如下所示的线性幺半群态射 (p,q)，使得 p 和 q 是同构，并且 $pq^\dagger=\iota$:

$$\begin{array}{ccc} A\oplus A^\dagger & \xrightarrow{(\tau,\gamma)} & A\otimes A^\dagger \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle q} \\ (A\otimes A^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[(\gamma\dagger,\tau\dagger)]{} & (A\oplus A^\dagger)^\dagger \end{array}$$

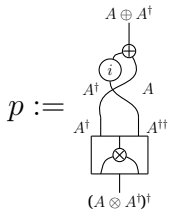
此外，要证明 †-线性幺半群是扭曲的，我们必须证明 p 是扭曲幺半群态射（或者等价地，q 是扭曲余幺半群态射）。一个幺半群态射

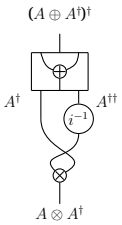
$f\colon (A, m, u) \to (B, m', u')$ 在 LDC 中称为扭曲的，如果 $(f \otimes f)m = c_{\otimes} m' f$。映射 p 和 q 如下：

$$p := A \oplus A^{\dagger} \xrightarrow{\iota \oplus 1} A^{\dagger\dagger} \oplus A^{\dagger} \xrightarrow{c_{\otimes}} A^{\dagger} \oplus A^{\dagger\dagger} \xrightarrow{\lambda_{\oplus}} (A \otimes A^{\dagger})^{\dagger}$$

$$q := (A \oplus A^{\dagger})^{\dagger} \xrightarrow{\lambda_{\otimes}^{-1}} A^{\dagger} \otimes A^{\dagger\dagger} \xrightarrow{1 \otimes i^{-1}} A^{\dagger} \otimes A \xrightarrow{c_{\otimes}} A \otimes A^{\dagger}$$

用图表表示，

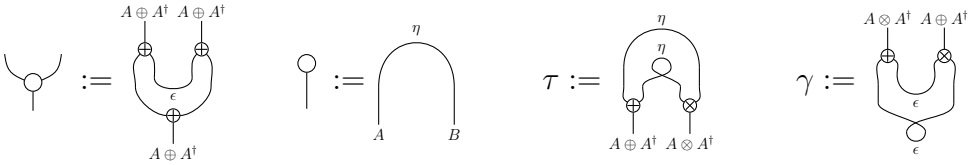
$p :=$ 

$q :=$ 

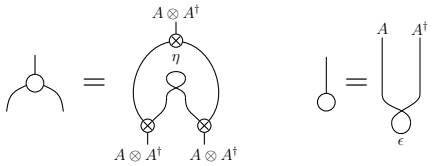
注意， p 和 q 都是同构。我们必须证明 $pq^{\dagger} = \iota$：

$$\begin{aligned}
pq^{\dagger} &= (\iota_A \oplus 1)(c_{\oplus})_{A^{\dagger\dagger},A}(\lambda_{\oplus})_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}}((\lambda_{\oplus})^{-1}_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}}(1 \otimes \iota_A^{-1})(c_{\otimes})_{A,A^{\dagger}})^{\dagger} \\
&= (\iota_A \oplus 1)(c_{\oplus})_{A^{\dagger\dagger},A}(\lambda_{\oplus})_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}}(c_{\otimes})^{\dagger}_{A,A^{\dagger}}(1 \otimes \iota_A^{-1})^{\dagger}(\lambda_{\oplus}^{-1})^{\dagger}_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}} \\
&= (\iota_A \oplus 1)(c_{\oplus})_{A^{\dagger\dagger},A}(c_{\oplus})_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}}(\lambda_{\oplus})_{A^{\dagger\dagger},A^{\dagger}}(1 \otimes \iota_A^{-1})^{\dagger}(\lambda_{\oplus}^{-1})^{\dagger}_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}} \\
&\overset{[\dagger\text{-LDC}]\text{-}7}{=} (\iota_A \oplus 1)(\lambda_{\oplus})_{A^{\dagger\dagger},A^{\dagger}}(1 \otimes \iota_A^{-1})^{\dagger}(\lambda_{\oplus}^{-1})^{\dagger}_{A^{\dagger},A^{\dagger\dagger}} \\
&\overset{Nat.\ \lambda_{\oplus}}{=} (\iota_A \oplus 1)(1 \oplus i_A^{-1\dagger})(\lambda_{\oplus})(\lambda_{\otimes}^{-1})^{\dagger} \\
&\overset{\iota_A^{-1\dagger} = \iota_{A^{\dagger}}}{=} (\iota_A \oplus \iota_{A^{\dagger}})(\lambda_{\oplus})(\lambda_{\otimes}^{-1})^{\dagger} \\
&\overset{[\dagger\text{-LDC}]\text{-}4}{=} \iota
\end{aligned}$$

还需证明（p， q）是一个扭曲线性幺半群态射。为此，我们证明 q 是一个扭曲余幺半群态射，并且（p， q）是底层对偶的一个态射。回顾一下，线性幺半群（τ， γ）：（$A \oplus A^{\dagger}$） $\circ_{\shortparallel}$（$A \otimes A^{\dagger}$）定义如下：证明 q 保留余单位：

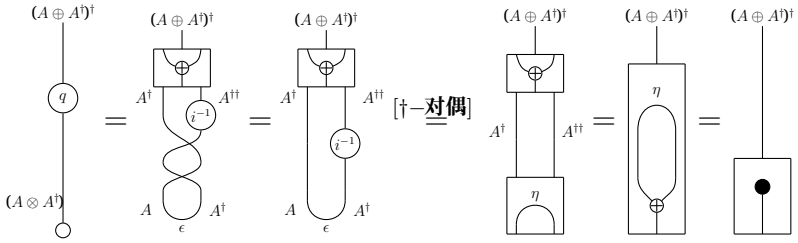


余幺半群（$A \otimes A^\dagger$、 、 ）是幺半群 $A \oplus A^\dagger$ 利用 τ 和 γ 得到的对偶：

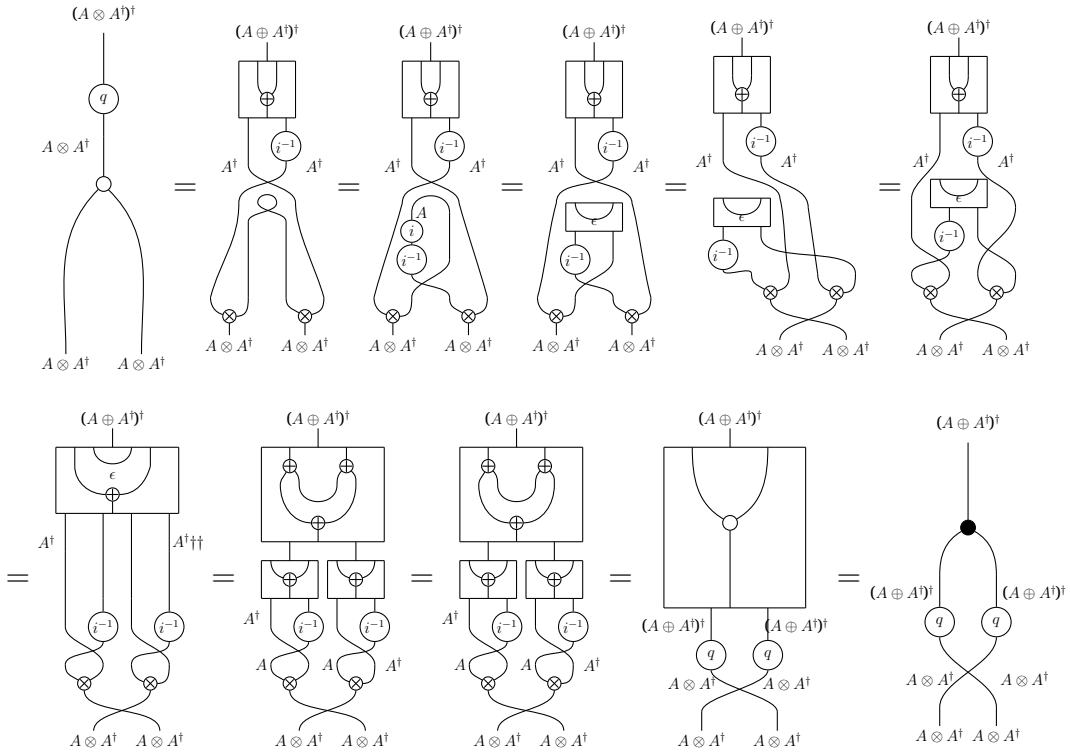


线性幺半群 $(\gamma\dagger, \tau\dagger) : (A \otimes A^\dagger)^\dagger$ $\bullet$ $(A \oplus A^\dagger)^\dagger$ 是 $(\tau, \gamma) : (A \oplus A^\dagger)$ $\circ$ $(A \otimes A^\dagger)$ 的匕首。下面证明 $q : ((A \oplus A^\dagger)^\dagger, ,) \to ((A \otimes A^\dagger), ,))$ 是扭曲余幺半群态射。

证明 q 保持余单位：



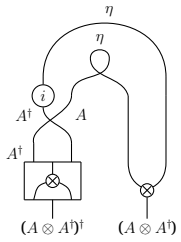
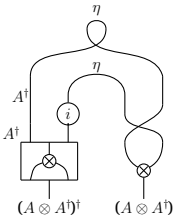
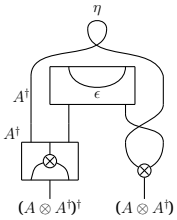
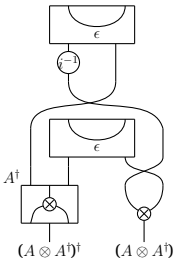
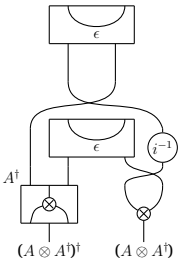
证明 q 保持余乘法，但带有扭曲：

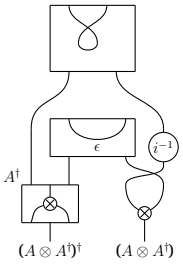
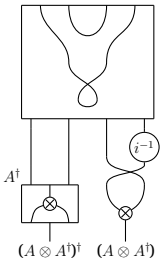
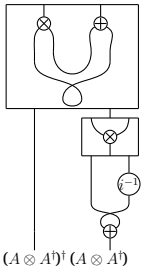


还需证明 $(p,\ q)$ 是一个对偶态射：

$$\begin{array}{ccc} A \oplus A^\dagger & \xrightarrow{(\tau,\gamma)} & A \otimes A^\dagger \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle q} \\ (A \otimes A^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[(\gamma\dagger,\tau\dagger)]{} & (A \oplus A^\dagger)^\dagger \end{array}$$

证明如下：

$\tau(p \oplus 1)$ $=$  $=$  $=$  $=$  $=$ 

$=$  $=$  $=$  $= (\gamma^\dagger)(1 \oplus q)$ $\square$

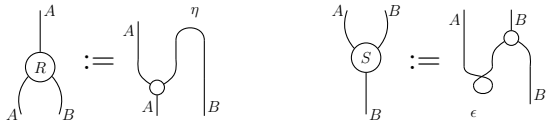
裤子 †线性幺半群在 †-LDCs 中带有扭曲，这既令人惊讶，又并不令人惊讶。之所以会有扭曲，是因为将乘法的导线弯折成余乘法时，会改变导线原有的顺序，而取匕首不会产生这种效果（等价地说，共轭会反转张量积：$A \otimes B \simeq B \otimes A$）。然而，在 †-KCCs 中，裤子 †-FAs 并不带有扭曲，因为 † 对偶本身已配备了一个扭曲（$\eta^\dagger = c_\otimes \epsilon$），它会消除裤子 †-FA 的扭曲。

引理 8.18。 在对称的 †-*LDC* 中，每个带扭曲的 † 线性幺半群都嵌入其裤子 † 线性幺半群。

证明。在引理8.16中，我们证明了，对于每个线性幺半群，都存在一个映射到其裤子幺半群的左可逆映射（$R,\ S$）。令 $A \overset{\dagger\circ}{=\!=} A^\dagger$ 为一个扭曲的 †-线性幺半群。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\circ} & A^\dagger \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S} \\ A \oplus A^\dagger & \xrightarrow{\bullet} & A \otimes A^\dagger \end{array}$$

其中，$R\colon\ A \to A \oplus A^\dagger$ 和 $S\colon\ A \otimes A^\dagger \to A$ 定义如下：

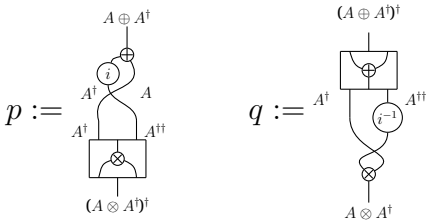


要证明每个扭曲 †-线性幺半群都嵌入其裤子 †-线性幺半群，只需证明 (R, S) 是扭曲 †-线性幺半群的态射。

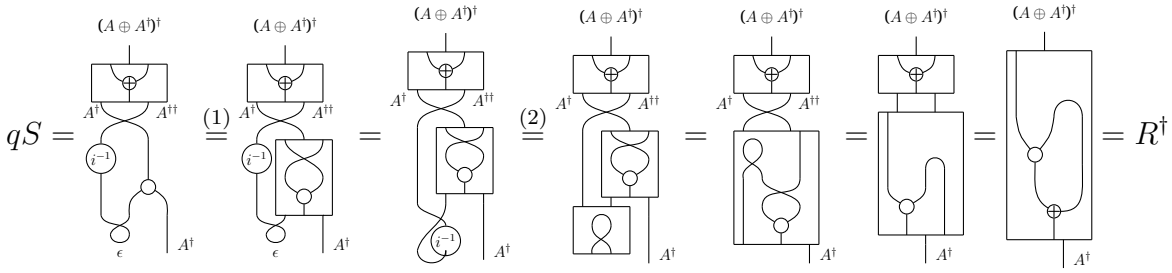
F根据引理 8.17，我们有 (p, q) 是线性幺半群的同构 ：

$$\begin{array}{ccc} A \oplus A^\dagger & \xrightarrow{(\tau,\gamma)} & A \otimes A^\dagger \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle q} \\ (A \otimes A^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[(\gamma\dagger,\tau\dagger)]{} & (A \oplus A^\dagger)^\dagger \end{array}$$

其中映射 p 和 q 的图表如下所示：



为了证明 (R, S) 是扭曲 †-线性幺半群的态射，我们必须证明 $qS = R^\dagger$ 或 $Rp = S^\dagger$（见定义 8.14）：



步骤 (1) 成立，因为 A 是一个扭曲的 †-线性幺半群。步骤 (2) 成立，因为 A 是一个 †-对偶。 □

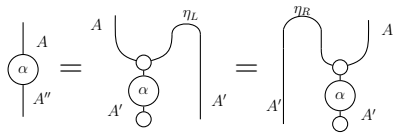
8.1.4 成为 Frobenius

线性幺半群将幺半范畴中的 Frobenius 代数推广到了 LDC。在 2.18中，已证明紧 LDC 与幺半范畴之间存在线性等价。因此，了解紧 LDC 中的线性幺半群在等价的幺半范畴中成为 Frobenius 代数的确切条件是有益的。在本节中，我们

建立这些条件并加以扩展，以展示 †-Frobenius 代数与 †-线性幺半群之间的对应关系。

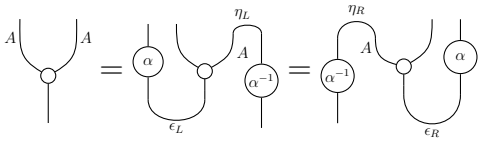
引理 8.19. 在 *LDC* 中，对于一个自线性幺半群 $A \;{}^{\circ}_{\shortparallel}\; A'$ *with* $\alpha\colon A \longrightarrow A'$ 为同构时，以下条件（及其「逆向」对称条件）等价。

(a) 同构 α 与以下映射一致：



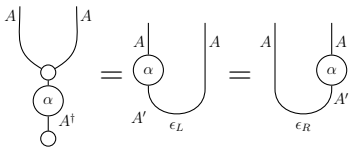
(8.7)

(b) 由余乘法和线性对偶给出的余作用映射与余乘法一致：



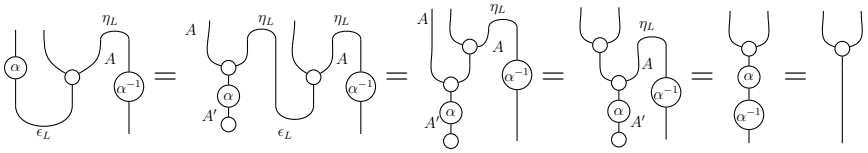
(8.8)

(c) 自对偶杯与线性幺半群中对偶对象的杯和帽一致：



(8.9)

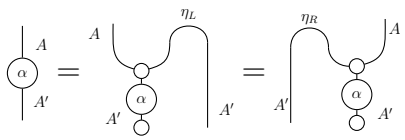
证明。 对于 $(a) \Rightarrow (b)$，在 (α) 中代入 b，并使用 8.7。



$(b) \Rightarrow (c)$，以及 $(c) \Rightarrow (a)$ 都是显然的。 □

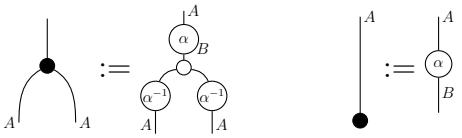
在紧 LDC 中，满足前一个引理中的某个条件的线性幺半群，恰好对应于一个 Frobenius代数：

引理 8.20。 在紧 *LDC* 中，具有同构 $\alpha\colon\ A \longrightarrow A'$ 的自线性幺半群 $A \;{}^{\circ}_{\shortparallel}\; A'$ 在该线性等价 *Mx*Mx↓ 下当且仅当满足以下方程时，恰好对应于一个 *Frobenius*代数。

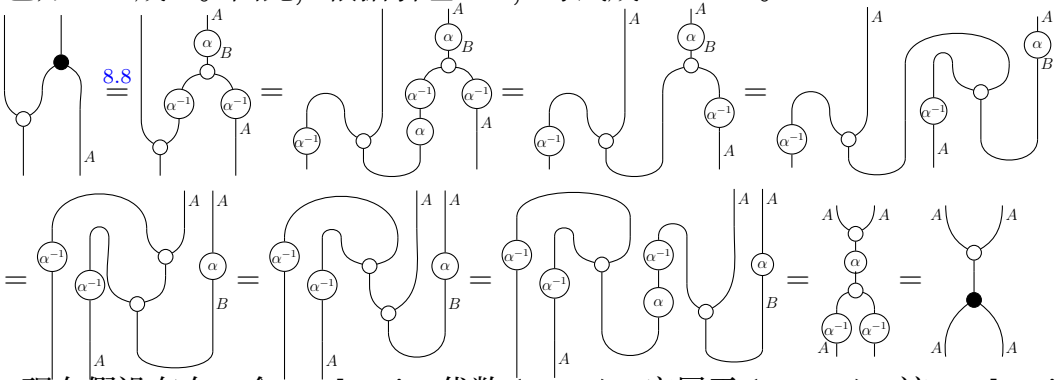


(8.10)

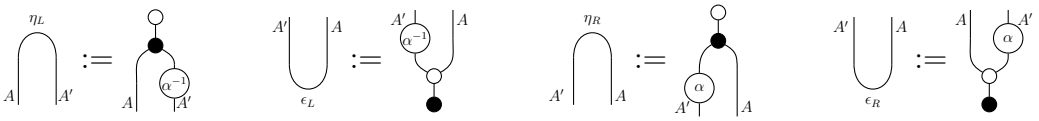
证明。 设 $(\mathbb{X},\ \otimes,\ \oplus)$ 是一个紧致-LDC。我们知道存在一个线性等价 Mx↓：$(X,\ \otimes,\ \oplus)$ $\to (\mathbb{X},\ \otimes,\ \otimes)$。设 $A\ {}^{\circ}\!\shortparallel\ A'$ 是 $\mathbb{X}$-中具有同构$\alpha:\ A \to A'$ 的自线性幺半群。$(\mathbb{X},\ \otimes,\ \otimes)$ 中的 Frobenius代数 $(A,\ ,\ ,\ ,\ )$ 定义如下：幺半群与线性幺半群中的相同，余幺半群由以下数据给出。



已知8.10 成立。因此，根据引理 8.8 ，等式成立：8.19。

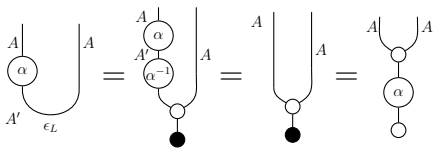


现在假设存在一个 Frobenius代数 $(A,,,,)$，它属于 $(\mathbb{X},\otimes,\otimes)$↓，该 Frobenius代数会导出一个线性幺半群 $A\ {}^{\circ}\!\shortparallel\ A'$，它属于 $(\mathbb{X},\otimes,\oplus)$。这个线性幺半群包含幺半群 $(A,,)$，其对偶如下所示：



利用 Frobenius律，很容易验证左对偶和右对偶对于该幺半群是循环的。

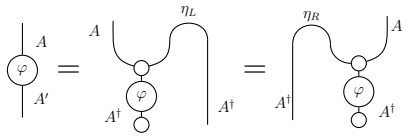
对于逆关系，假设一个自线性幺半群 $A\ {}^{\circ}\!\shortparallel\ A'$ 在此线性等价下对应于一个 Frobenius代数$(A,,,,)$。我们证明引理 8.8 中的命题（iii），它与当前引理给出的等式等价。↓。



这就证明了逆关系。 □

推论8.21。 在酉范畴中，任意 †-线性幺半群 A 在等价 Mx↓ 下对应于一个 †-*Frobenius*代数，当且仅当酉结构映射 $\varphi_A:\ A \to A^{\dagger}$

满足以下方程：

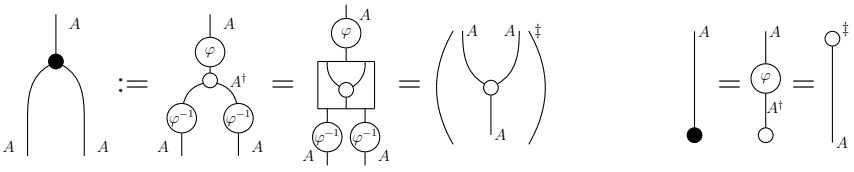


(8.11)

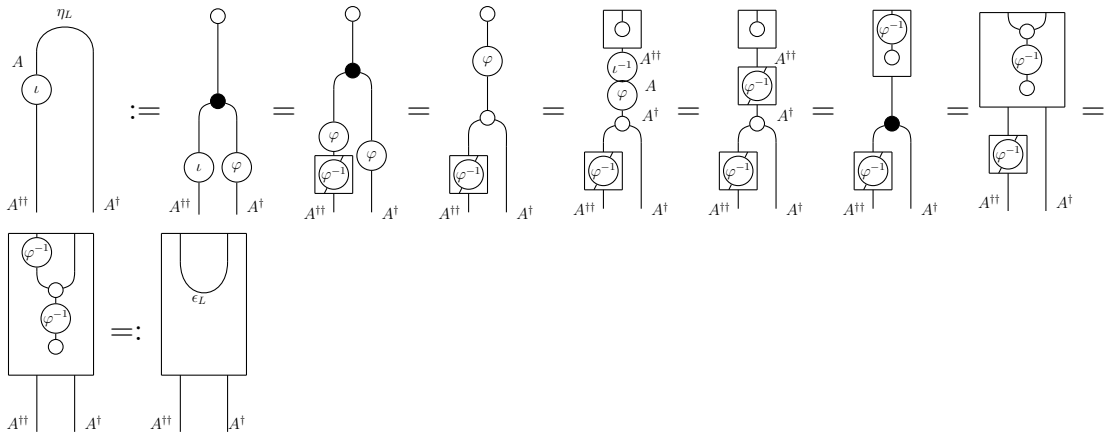
证明。 假设 $A \overset{\dagger}{\circ\!\!-\!\!\circ} A^\dagger$ 是酉范畴（$\mathbb{X}$、$\otimes$、$\oplus$）中的自-†-线性幺半群，且给定的方程成立。存在一个 †-线性等价 $\mathbf{Mx}\downarrow : (\mathbb{X}, \otimes, \oplus) \to (\mathbb{X}, \otimes, \otimes)$，其在 $(\mathbb{X}, \otimes, \otimes)$ 上的匕首定义如下：

$$f^\ddagger = B \xrightarrow{\varphi_B} B^\dagger \xrightarrow{f^\dagger} A^\dagger \xrightarrow{\varphi_A^{-1}} A$$

根据引理 8.20，我们知道，$A \circ\!\!-\!\!\circ A^\dagger$ 中（$\mathbb{X}$、$\otimes$、$\oplus$）的自线性幺半群对应于（A、、、、）中的 Frobenius 代数（$\mathbb{X}$、$\otimes$、$\otimes$）。如果 A 是一个 †- 线性幺半群，那么（A、、、、）是一个 †-Frobenius 代数，因为：



反过来，由 †-Frobenius代数 $(A, , , ,) \; A \circ\!\!-\!\!\circ A^\dagger$ 给出的线性幺半群是一个 †-线性幺半群，因为线性幺半群的对偶是 †-对偶：



该幺半群的对偶与其匕首相同，因为 $(A, , , ,) \; A \circ\!\!-\!\!\circ A^\dagger$ 是 †-Frobenius。

对于逆关系，假设 $A \overset{\dagger}{\circ\!\!-\!\!\circ} A^\dagger$ 在上述讨论的等价关系下对应于 †-Frobenius代数 $(A, , , ,)$。那么，根据前一个引理的逆关系可知，酉结构映射 $\varphi_A : \; A \to A^\dagger$ 满足给定的方程。

□

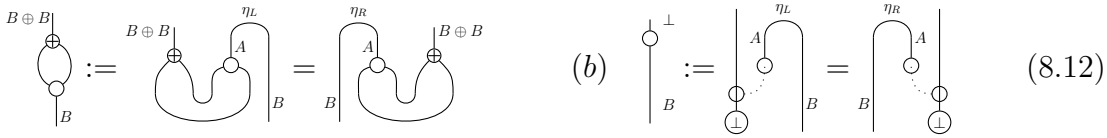
本推论中给出的方程应当使人联想到对合幺半群 [76,

28] 在 †-幺半范畴中的定理 5。

8.2 线性余幺半群

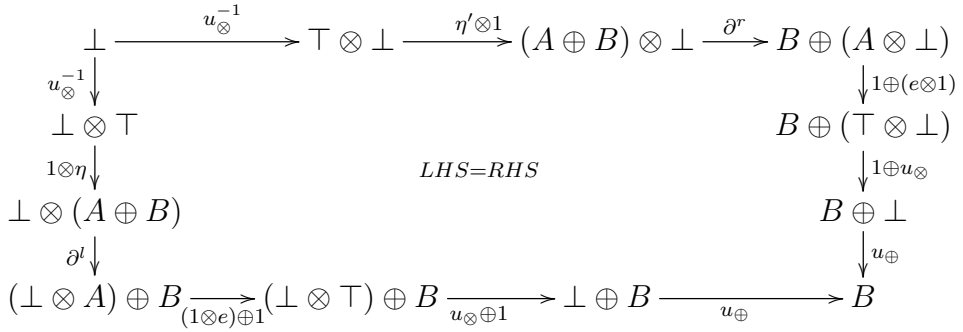
我们定义 †-线性幺半群的动机，是为了描述一个
†-LDC 设定。双代数定律是互补系统的核心要素。LDC 中线性分配子的方向性使两个线性幺半群之间不可能发生双代数相互作用。然而，线性幺半群可以与线性余幺半群发生双代数相互作用。

定义 8.22。 在 *LDC* 中，**线性余幺半群** $A \multimap B$ 由一个 $\otimes$-余幺半群$(A, ,)$，以及一个左对偶和一个右对偶$(\eta_L, \epsilon_L) : A \dashv B$ 和$(\eta_R, \epsilon_R) : B \dashv A$ 组成，并满足：



(8.12)

注意，线性幺半群具有一个 $\otimes$<style id='4}-幺半群和一个 $\oplus$<style id='7}-余幺半群，而线性余幺半群具有一个 $\otimes$<style id='10}-余幺半群和一个 $\oplus$<style id='13}-幺半群。方程 8.12(b) 的交换图如下。注意，该图包含单位子和线性分配子。



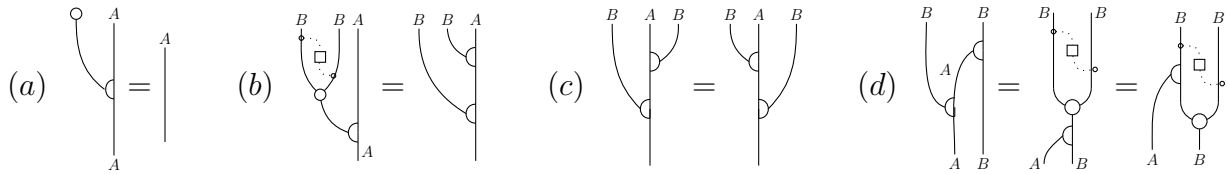
与线性幺半群类似，但仅存在于 isomix 环境中，线性余幺半群允许其 $\otimes$-幺半群与 $\oplus$-余幺半群之间存在 Frobenius 互作用：

引理 8.23。 *isomix* 范畴中的一个**线性余幺半群** $A \multimap B$ 等价于以下数据：

- 一个幺半群（B; $B \oplus B \to B$; $\bot \to B$）
- 一个余幺半群（A; $A \to A \otimes A$; $A \to \top$）
- 作用 $\triangleright : B \otimes A \to A$、$\triangleleft : A \otimes B \to A$，以及

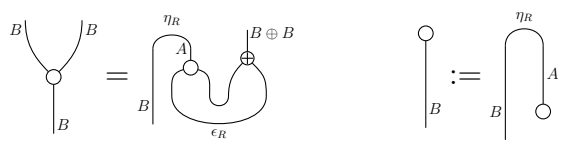
coactions  $: B \longrightarrow A \oplus B,$  $: B \longrightarrow B \oplus A,$

使得以下公理（及其“逆向”和“余向”对称形式）成立:

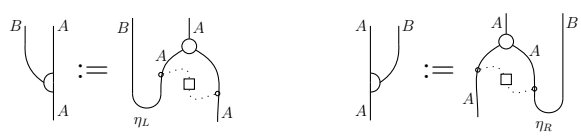


证明。 已知 A  B是一个线性余幺半群。因此，$(A, ,)$是  一个 $\otimes$-余幺半群，并且存在对偶 (η_L, ϵ_L)： $A \dashv\!\vdash B$ 和 (η_R, ϵ_R)： $B \dashv\!\vdash A$。

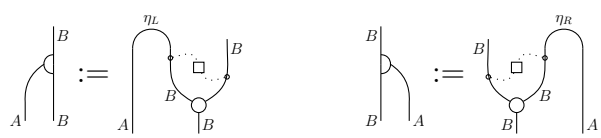
B 上的 $\oplus$-幺半群定义如下:



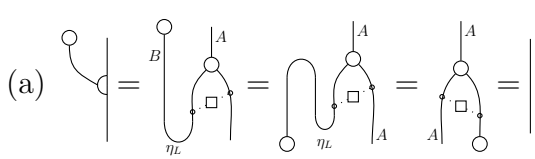
左作用和右作用定义如下:

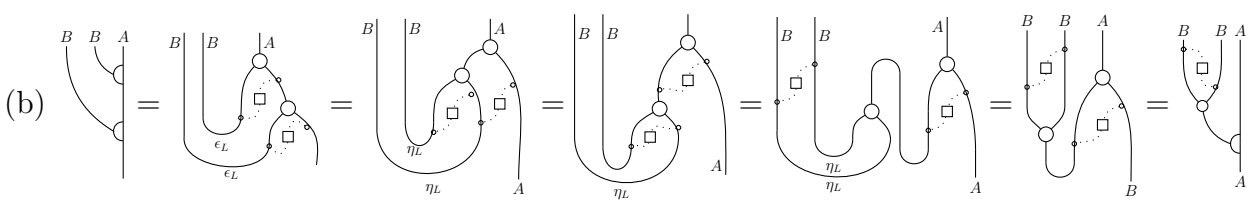


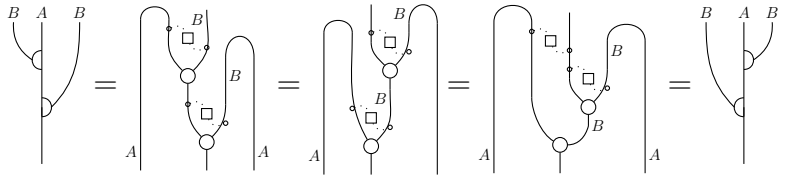
左余作用和右余作用定义如下:

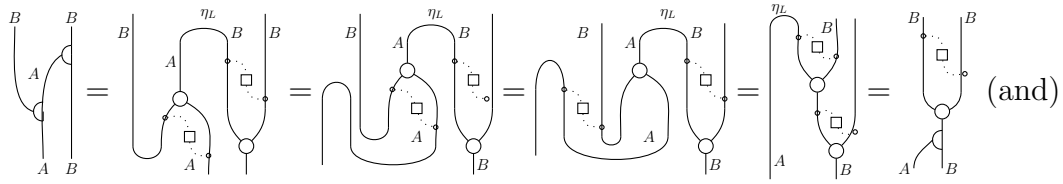


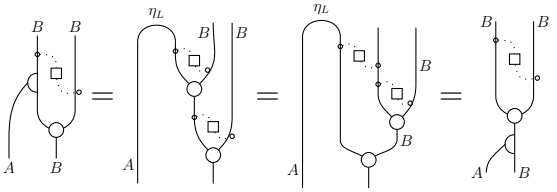
所需公理成立的证明如下。我们证明一组具有代表性的公理。其他公理是以下公理的水平反射和垂直反射:



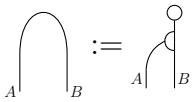
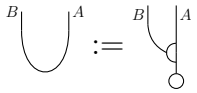


(c) 

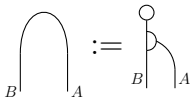
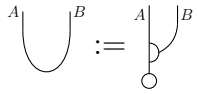
(d)  (and)



对于逆关系，假设引理中给出的数据。定义线性对偶（η_L， ϵ_L）:$B \dashv A$ 如下:

$\eta_L =$  $\epsilon_L =$ 

类似地，线性对偶（η， ϵ）的杯和帽 $A \dashv B$ 定义如下 s:

$\eta_R =$  $\epsilon_R =$ 

不难验证蛇形方程成立，且 $A \ {}_{\circ\shortparallel} \ B$ 是一个线性余幺半群。 —

□

LDC 的指数模态提供了线性余幺半群的一个例子。稍后在第 9.4 节讨论 LDC 中的指数模态时，我们将证明，具有指数模态的 LDC 中的每个对偶也是一个线性余幺半群。

接下来，我们探讨紧LDC中线性幺半群与线性余幺半群之间的对应关系。线性余幺半群与线性幺半群相同，不同之处在于，线性幺半群具有一个 $\otimes$-幺半群（以及一个 $\oplus$-余幺半群），而线性余幺半群具有一个 $\otimes$-余幺半群（以及一个 $\oplus$-幺半群）。这意味着，在张量与 par 乘积同构的紧致情形下，线性幺半群与线性余幺半群之间存在对应关系。事实上，我们证明存在一种称为 **紧反射**的对称性，它是紧LDC范畴及线性函子上的一种对合：在这种对称性下，线性幺半群转化为线性余幺半群，反之亦然。紧反射对称性定义如下:

设 $\mathbb{X}$ 为一个紧LDC。考虑范畴 $\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$，它是一个与 $\mathbb{X}$具有相同张量和 par 乘积的紧 LDC。$\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$ 中的映射如下：

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \in \mathbb{X}}{B \xrightarrow{\overline{f}} A \in \mathbb{X}^{\mathsf{op}}}$$

此处，上划线并不表示共轭，我们使用这一概念来指代相反范畴中的逆向。张量和 par 积的相干同构如下所示：

$$\begin{aligned}
&A \otimes (B \oplus C) \xrightarrow{\widehat{\partial}} (A \otimes B) \oplus C := \overline{\partial}^{-1} \\
&\bot \xrightarrow{\widehat{\mathsf{m}}} \top := \overline{\mathsf{m}}^{-1} \\
&A \otimes B \xrightarrow{\widehat{\mathsf{mx}}} A \oplus B := \overline{\mathsf{mx}}^{-1}
\end{aligned}$$

结合子和单位子以类似方式定义。

引理 8.24。 紧 *LDC* 中的每个线性幺半群 $\mathbb{X}$，在 $\mathbb{X}$ 的紧反射下，都对应于 $\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$ 中的一个线性余幺半群，反之亦然。

证明。设 $A \parr B$ 是紧 LDC $\mathbb{X}$ 中的一个线性幺半群。我们知道，任意线性幺半群 $A \parr B$ 恰好是一个带对偶的幺半群（A，m，{v12)，其对偶为（η_L，ϵ_L)：$A \dashv\!\vdash B$，以及（η_R，ϵ_R)：$B \dashv\!\vdash A$，并且这些对偶在该幺半群上是循环的。幺半群（A，m，u) 在紧反射下给出 $\otimes$-余幺半群（A，$\Delta := m$，$e := u$）于 $\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$ 中。线性幺半群中的对偶（η_L，ϵ_L)：$A \dashv\!\vdash B$ 给出 $\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$ 中的以下映射：

$$\frac{\top \xrightarrow{\eta_L} A \oplus B \in \mathbb{X}}{A \oplus B \xrightarrow{\overline{\eta_L}} \top \in \mathbb{X}^{\mathsf{op}}} \qquad \frac{B \otimes A \xrightarrow{\epsilon_L} \bot \in \mathbb{X}}{\bot \xrightarrow{\overline{\epsilon_L}} B \otimes A \in \mathbb{X}^{\mathsf{op}}}$$

类似地，对偶 (η_R，ϵ_R)：$B \dashv\!\vdash A$ 给出映射 $\eta_R : \top \to B \oplus A \to \top$，以及映射 $\epsilon_R : \bot \to A \otimes B$，位于$\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$中。通过对 $A \parr B$进行这一翻译，我们在 $\mathbb{X}^{\mathsf{op}}$ 中得到一个线性余幺半群 $A \mathbin{\reflectbox{$\parr$}} B$，其 $\otimes$-余幺半群为 (A，Δ，e)，而对偶为 (τ_R，γ_R)：$B \dashv\!\vdash A$、(τ_L，γ_L)：$A \dashv\!\vdash B$，其中，

$$\begin{aligned}
&\top \xrightarrow{\tau_L} A \oplus B := \top \xrightarrow{\overline{\mathsf{m}}} \bot \xrightarrow{\overline{\epsilon_R}} A \otimes B \xrightarrow{\overline{\mathsf{mx}}^{-1}} A \oplus B \\
&B \otimes A \xrightarrow{\gamma_L} \bot := B \otimes A \xrightarrow{\overline{\mathsf{mx}}^{-1}} B \oplus A \xrightarrow{\overline{\eta}_R} \top \xrightarrow{\overline{\mathsf{m}}} \bot
\end{aligned}$$

$\tau_R : \top \to B \oplus A$和 $\gamma_R : A \otimes B \to \bot$ 的定义方式类似。对所得线性余幺半群作紧反射，即可在 $(\mathbb{X}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathbb{X}$ 中还原原来的线性幺半群。 □

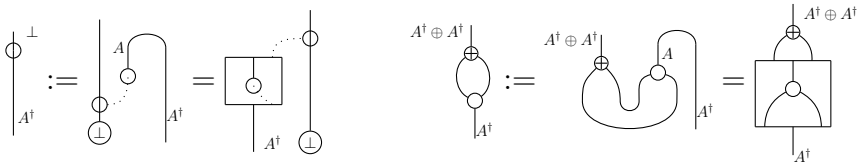
由前面的引理可知，关于

紧 LDC 中线性幺半群的结果，在紧反射下同样适用于线性余幺半群。

接下来我们讨论线性余幺半群的态射：

定义 8.25。 线性余幺半群的**态射** $(f,g):(A \;{}_{\circ}\!\!\parallel\; B) \longrightarrow (A' \;{}_{\circ}\!\!\parallel\; B')$由一对映射组成：$f: A \longrightarrow A'$ 和 $g: B' \longrightarrow B$，其中 f 是一个余幺半群态射，并且(f,g)和(g,f)分别是左对偶和右对偶的态射。

定义 8.26。 **†-线性余幺半群** 在一个 †-*LDC* 中是 $A \;{}_{\dagger\circ}\!\!\parallel\; A^\dagger$ 一个线性余幺半群，$A \;{}_{\circ}\!\!\dashv\!\!\dashv\; A^\dagger$满足$(\eta_L,\epsilon_L)$：$A \dashv\!\!\dashv A^\dagger$和$(\eta_R,\epsilon_R)$：$A^\dagger \dashv\!\!\dashv A$ 是 †-对偶，并且：



(8.13)

一个 **†-自线性余幺半群** 由一个同构 $\alpha: A \longrightarrow A^\dagger$ 构成，且满足 $\alpha\alpha^{-1\dagger} = \iota$。

接下来，我们讨论紧 †-LDC 中 †-线性余幺半群的紧反射。若 $\mathbb{X}$是一个紧 †-LDC，那么由 $\mathbb{X}$ 的紧反射给出的 $\mathbb{X}^{\mathrm{op}}$ 具有相同的匕首函子。在这种情况下，松弛器和对合自然同构的定义方式与其他相干同构类似：

$$
\begin{aligned}
&A^\dagger \otimes B^\dagger \xrightarrow{\widehat{\lambda}_\otimes} (A \oplus B)^\dagger := \overline{\lambda_\otimes}^{-1} \\
&\top \xrightarrow{\widehat{\lambda}_\top} \bot^\dagger := \overline{\lambda_\top}^{-1} \\
&A \xrightarrow{\widehat{\iota}} A^{\dagger\dagger} := \overline{\iota}^{-1}
\end{aligned}
$$

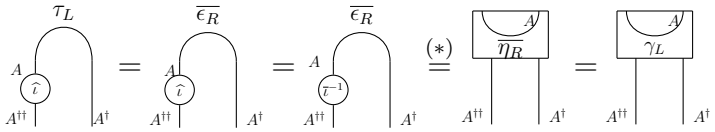
若 $\mathbb{X}$ 是一个酉范畴，那么在紧反射下， $\mathbb{X}^{\mathrm{op}}$ 也是一个酉范畴，其对象 A的酉结构映射定义为 $\widehat{\varphi}_A := \varphi_A{}^{-1}$。

在引理 8.24中，我们证明了，紧 LDC 中线性幺半群的紧反射给出一个线性余幺半群，反之亦然。在下面的引理中，我们将此结果推广到
紧 †-LDC 上的†-线性幺半群：

引理 8.27。 若 $\mathbb{X}$ 是紧 †-*LDC*，则每个 *dagger* 线性幺半群在紧反射下都对应于一个 *dagger* 线性余幺半群。

证明。 设 $\mathbb{X}$ 是紧 †-LDC，且 $A \;{}^{\dagger\circ}\!\!\parallel\; A^\dagger$ 是一个 †-线性幺半群。那么，我们有一个带有右 †-对偶 $A \dashv\!\!\dashv A^\dagger$ 和左 †-对偶 $A^\dagger \dashv\!\!\dashv A$ 的 $\otimes$-幺半群 (A,m,u)，它们满足 †-线性幺半群的方程。要证明在紧反射下，一个 †-线性幺半群会转化为一个 †-线性余幺半群，只需证明 $\mathbb{X}$ 中的 †-对偶会转化为

†-对偶位于 $\mathbb{X}_{逆向}$中。对偶（τ_L， γ_L）： $A \dashv\!\!\dashv A^\dagger$ 如引理 8.24 中所定义，是一个 †-对偶，因为：



步骤（$*$）成立，因为（η_R，ϵ_R）：$A^{\dagger}$ † $\underline{A}$是一个 †-对偶。 □

定义 8.28。 ***A* 态射 †-线性余幺半群** 是一个有序对 $(f, f^{\dagger})$，使得 $(f, f^{\dagger})$是底层线性余幺半群的一个态射。

8.3 线性双代数

线性双代数为在 isomix 范畴中定义互补系统奠定了基础。线性双代数包含一个 $\otimes$-双代数和一个 $\oplus$-双代数，它们由线性幺半群与线性余幺半群的双代数相互作用给出。因此，在线性双代数中，发挥作用的是两种不同的对偶：线性幺半群的对偶和线性余幺半群的对偶。

所有关于双代数的结果都必然是在对称 LDC 中给出的，我们将假设线性幺半群和线性余幺半群是对称的。

定义 8.29。 在 *LDC* 中，一个**线性双代数**(a, b) (a', b') : $A \circ B$由以下部分组成：

（*a*）一个线性幺半群，（a、b）：$A \circ B$，以及

（*b*）一个线性余幺半群，（a'、b'）：$A \mathrel{\rotatebox{90}{$\vdash$}} B$，

满足：

（*i*）（A、、、、）是一个 $\otimes$-双代数，
并且（*ii*）（B、、、、）是一个 $\oplus$-双代数。

如果 $\oplus$-幺半群和 $\otimes$-幺半群都是交换的，则线性双代数是**交换的**。**自线性双代数**是一个线性双代数，其中存在一个同构 $A \xrightarrow{\alpha} B$（因此本质上该代数只有一个对象）。

定义 *8.30*。线性双代数的态射（f、g）：（a、b）（a'、b'）：$A \circ B \to$（c、d）（c'、d'）：$C \circ D$是线性幺半群的一个态射（（f、g）：（$A \circ B$）$\to$（$C \circ B$）），以及线性余幺半群的一个态射（（f、g）：（$A \mathrel{\rotatebox{90}{$\vdash$}} B$）$\to$（$C \mathrel{\rotatebox{90}{$\vdash$}} D$））。

同构传递线性双代数：

引理 *8.31*。在 *LDC* 中，如果 (a,b) (a',b') : $A \circ B$ 是一个线性双代数，且 f : $A' \to A$ 和 g : $B \to B'$ 是同构，那么 $A' \circ B'$ 是一个线性双代数，其线性幺半群为 $(a(f^{-1} \oplus g), (g^{-1} \otimes f)b)$: $A' \circ B'$，线性余幺半群为 $(a'(f^{-1} \oplus g), (g^{-1} \otimes f)b')$:$A' \mathrel{\rotatebox{90}{$\vdash$}} B'$。

定义 †-线性双代数如下：

定义 8.32. *(i)* **†-线性双代数**，$_{(a,b)\ (a',b')}: A \overset{\dagger\circ}{\diamond} A^{\dagger}$ 是一个线性双代数，具有一个 †-线性幺半群和一个 †-线性余幺半群。

(ii) **†-自线性双代数**是一个 †-线性双代数，同时也是一个自线性双代数，其中同构 $\alpha : A \longrightarrow A^{\dagger}$ 满足 $\alpha\alpha^{-1\dagger} = \iota$。

注意，A 是一个弱预酉对象；如果它属于核心，则是一个预酉对象。

下一章将运用本章中构建的结构，探讨 MUC 中的互补系统和测量。

第9章

测量与互补性

本章介绍 MUC 中的测量，并使用“紧化”刻画测量。我们还提出了 (†)-互补系统在 (†)-isomix 范畴中的概念，并证明在具有自由指数模态的 isomix 范畴中，每个互补系统都可表示为自由指数模态上的线性双代数的规范紧化。

Coecke和Pavlovic [48] 将 †-幺半范畴中的“破坏性”测量描述为一个映射，$m: A \to X$，其中 $m^\dagger m = 1_X$，映射到一个特殊交换的 †-Frobenius代数，X。本章将这一思想推广到 MUC。在 MUC 的 †-isomix 范畴中，通常有 $A \neq A^\dagger$，因此等式 $m^\dagger m = 1$ 没有意义。不过，MUC 的酉核心中可以定义拆除测量。因此，在 MUC 中，测量可以看作一个两步过程：首先通过收缩“紧化”到酉核心，然后进行传统拆除测量。第9.1 节讨论紧化过程，并由此引出 †-二元幂等元的概念。另一方面，一个可分裂且满足“余环”技术条件的 †-二元幂等元，则会导出到“典范”酉核心的紧化。

9.1 紧化

为了对 MUC 的 †-isomix 范畴中的对象 A 进行测量，我们必须先将 A 紧化为酉核心中的一个对象：

定义 9.1。 </style}设： $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 为一个 *MUC*。对象 $A \in \mathbb{C}$ 到 U 的**紧化** 是一个收缩，$r\colon A \to M(U)$。这意味着存在一个截面 $s\colon M(U) \to A$，使得$sr = 1_{M(U)}$。当 $\mathbb{U}$ 是典范幺正核心时，这种紧化称为**典范** 紧化；换言之，U 是一个预酉对象。

对象 $M(U)$（对于 $U \in \mathbb{U}$）具有一个酉结构映射，该映射是 $M(U)$ 与 $M(U)^\dagger$之间的同构，由将 U的酉结构映射与保持子复合而成：

$$\psi := M(U) \xrightarrow{M(\varphi)} M(U^\dagger) \xrightarrow{\rho} M(U)^\dagger$$

一旦得到 $M(U)$，就可以在 $\mathbb{U}$ 中进行传统拆除测量$U \xrightarrow{w} X$，从而得到整体紧化 $A \overset{rM}{\underset{(w)}{\longrightarrow}} M(X)$。这个复合可以看作 MUC 中拆除测量的对应物。

我们首先说明紧化如何产生一个二元幂等元：

定义 9.2。 任意范畴中的一个二元幂等元 是由一对映射 (u,v) 组成的，其中 $\mathsf{u}: A \to B$，且 $\mathsf{v}: B \to A$，满足 $\mathsf{uvu} = \mathsf{u}$，以及 $\mathsf{vuv} = \mathsf{v}$。

一个二元幂等元 $(\mathsf{u},\mathsf{v}): A \to B$ 给出一对幂等元 $e_A := \mathsf{uv}: A \to A$，以及$e_B := \mathsf{vu}: B \to B$。如果幂等元 e_A 和 e_B分裂，我们就称二元幂等元**分裂** 。

引理 9.3。 在任意范畴中，以下各项等价：

(i) $(\mathsf{u},\mathsf{v}): A \to B$ 是一个可分裂的二元幂等元。

(ii) 存在一对幂等元 $e: A \to A$ 和 $d: B \to B$，它们通过同构对象分裂。

证明。

$(i) \Rightarrow (ii)$: 假设 uv 分裂为 $A \xrightarrow{r} A' \xrightarrow{s} A$（即 $e := rs = \mathsf{uv}$ 和 $sr = 1_{A'}$），并且 $d := \mathsf{vu}$ 分裂为 $B \xrightarrow{p} B' \xrightarrow{q} B$（即 $pq = \mathsf{vu}$ 和 $qp = 1_{B'}$），那么我们得到两个映射$\alpha := s\mathsf{u}p: A' \to B'$ 和 $\beta := q\mathsf{v}r: B' \to A'$，它们互为逆：

$$\alpha\beta := (s\mathsf{u}p)(q\mathsf{v}r) = s\mathsf{u}(pq)\mathsf{v}r = s\mathsf{uvuv}r = s\mathsf{uv}r = srsr = 1_{A'}$$
$$\beta\alpha := (q\mathsf{v}r)(s\mathsf{u}p) = q\mathsf{v}(rs)\mathsf{u}p = q\mathsf{vuvu}p = q\mathsf{vu}p = qpqp = 1_{B'}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: 假设 $e_A : A \to A$ 和 $e_B : B \to B$ 是幂等元，分别分裂为 $A \xrightarrow{r} A' \xrightarrow{s} A$ (因此 $rs = e_A$ 和 $sr = 1_{A'}$) 以及 $B \xrightarrow{p} B' \xrightarrow{q} B$ (因此 $pq = e_B$和 $qp = 1_{B'}$)，并且 $\gamma: A' \to B'$ 是一个同构，那么我们得到两个映射 $\mathsf{u} := r\gamma q: A \to B$ 和 $\mathsf{v} := p\gamma^{-1}s: B \to A$。我们注意到：

$$\mathsf{uvu} := r\gamma qp\gamma^{-1}sr\gamma q = r\gamma\gamma^{-1}sr\gamma q = rsr\gamma q = r\gamma q = \mathsf{u}$$
$$\mathsf{vuv} := p\gamma^{-1}sr\gamma qp\gamma^{-1}s = p\gamma^{-1}\gamma qp\gamma^{-1}s = pqp\gamma^{-1}s = p\gamma^{-1}s = \mathsf{v}.$$

□

注意，在任意 MUC 中，对象 A 的紧化会给出以下映射系统：

$$A \underset{s}{\overset{r}{\rightleftarrows}} M(U) \underset{\psi^{-1}}{\overset{\psi:=M(\varphi)\rho}{\rightleftarrows}} M(U)^\dagger \underset{s^\dagger}{\overset{r^\dagger}{\rightleftarrows}} A^\dagger$$

因此，紧化产生了一个二元幂等元 (u，v)：$A \to A^\dagger$ 其中 u：$= r\psi r^\dagger$，而 v：$= s^\dagger\psi^{-1}s$

由于 U 是一个酉对象，我们有 $\varphi(\varphi^{-1\dagger}) = \iota$。另一方面，保持子满足 $\iota\rho^\dagger = M(\iota)\rho$（参见 [34]中定义 3.17之后的内容）。因此，$\iota\rho^\dagger = M(\iota)\rho = M(\varphi\varphi^{-1\dagger})\rho = M(\varphi)\rho M(\varphi^{-1})^\dagger$，从而 $\psi = M(\varphi)\rho = \iota\rho^\dagger M\varphi(^\dagger = \iota)M(\varphi)\rho)^\dagger = \iota\psi^\dagger$。这使我们可以观察到：

$$\iota\mathsf{u}^\dagger = \iota(r\psi r^\dagger)^\dagger = \iota r^{\dagger\dagger}\psi^\dagger r^\dagger = r\iota\psi^\dagger r^\dagger = r\psi r^\dagger = \mathsf{u}$$
$$\mathsf{v}^\dagger = (s^\dagger\psi^{-1}s)^\dagger = s^\dagger(\psi^\dagger)^{-1}s^{\dagger\dagger} = s^\dagger(\iota^{-1}\psi)^{-1}s^{\dagger\dagger} = s^\dagger\psi^{-1}\iota s^{\dagger\dagger} = s^\dagger\psi^{-1}s\iota = \mathsf{v}\iota$$

这引出了如下定义：

定义 9.4。在一个 †-*LDC* 中，二元幂等元 (u、v)：$A \to A^\dagger$ 是一个 **†-二元幂等元**，记作 †(u、v)，如果 u $= \iota$u†，且 v$^\dagger =$ vι。

在一个 †-幺半范畴中，其中 $A = A^\dagger$ 和 $\iota = 1_A$ 使得 u $=$ u†，且 v $=$ v†，因此 uv $=$ (vu)†。这意味着，若要求 uv $=$vu，我们便得到一个符合 [111]意义下的 dagger 幂等元。

分裂 dagger 二元幂等元几乎就能得到一个预幺正对象。在一个 †-LDC 中，我们将带有同构 $\varphi: A \to A^\dagger$ 且满足 $\varphi\varphi^{\dagger-1} = \iota$ 的对象 A 称为**弱预酉对象**。在一个 †-is omix 范畴中，弱预酉对象（A，φ）若还满足 A 属于核心，则为预幺正对象。接下来我们将看到，dagger 二元幂等元总能经由弱预酉对象分裂：

引理 9.5. 在一个带有 †-二元幂等元 †(u v) : $A \to A^\dagger$ 的 †-*LDC* 中：

(i) $e_{A^\dagger}$:= vu = (uv)† =: (e_A)†;

(ii) 若 †(u, v) 以 $e_A = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$ 分解，则 $(E, s\mathsf{u}s^\dagger)$ 是一个弱预酉对象。

证明。

(i) $e_{A^\dagger} = \mathsf{vu} = \mathsf{v}\iota\mathsf{u}^\dagger = \mathsf{v}^\dagger\mathsf{u}^\dagger = (\mathsf{uv})^\dagger = e_A^\dagger$.

(ii) 假设 (u,v) 是一个 †-二元幂等元，并且 uv 分裂为 $\mathsf{uv} = A \xrightarrow{r} U \xrightarrow{s} A$。这意味着 vu 分裂为 $\mathsf{vu} = A^\dagger \xrightarrow{s^\dagger} U^\dagger \xrightarrow{r^\dagger} A^\dagger$。这给出了一个同构 $\alpha = s\mathsf{u}s^\dagger : E \to E^\dagger$ 满足：

$$\alpha(\alpha^{-1})^\dagger = s\mathsf{u}s^\dagger(r^\dagger \mathsf{v} r)^\dagger = s\mathsf{u}s^\dagger r^\dagger \mathsf{v}^\dagger r^{\dagger\dagger} = s\mathsf{uvuv}^\dagger r^{\dagger\dagger} = s\mathsf{uv}^\dagger r^{\dagger\dagger} = s\mathsf{uv}\iota r^{\dagger\dagger} = s\mathsf{uv}r\iota = srsr\iota = \iota$$

□

因此，在 a †-isomix 范畴中，分裂一个 †-二元幂等元的对象总是弱前酉。为了确保 dagger 二元幂等元的分裂是预酉对象——从而成为规范紧化——还需确保该分裂位于核心中。由此得到以下定义：

定义 9.6. *isomix* 范畴 $\mathbb{X}$ 中的幂等元 $A \xrightarrow{e} A$，若配备自然的 $\kappa_X^L : X \oplus A \to X \otimes A$ 和 $\kappa_X^R : A \oplus X \to A \otimes X$，使得下列图表可交换，则称为 **余环幂等元**：

$$\begin{array}{ccc} X\otimes A & \xrightarrow{1\otimes e} & X\otimes A \\ {\scriptstyle 1\otimes e}\downarrow & [\mathbf{KL.1}] & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}} \\ X\otimes A & \xleftarrow[\kappa_X^L]{} & X\oplus A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X\oplus A & \xrightarrow{1\oplus e} & X\oplus A \\ {\scriptstyle 1\oplus e}\downarrow & [\mathbf{KL.2}] & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X^L} \\ X\oplus A & \xleftarrow{\mathsf{mx}} & X\otimes A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\otimes X & \xrightarrow{e\otimes 1} & A\otimes X \\ {\scriptstyle e\otimes 1}\downarrow & [\mathbf{KR.1}] & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{mx}} \\ A\otimes X & \xleftarrow[\kappa_X^R]{} & A\oplus X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\oplus X & \xrightarrow{e\oplus 1} & A\oplus X \\ {\scriptstyle e\oplus 1}\downarrow & [\mathbf{KR.2}] & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X^R} \\ A\oplus X & \xleftarrow{\mathsf{mx}} & A\otimes X \end{array}$$

对于余环幂等元 $A \xrightarrow{e} A$，变换 κ_X 在一个分裂上的作用等同于混合子的逆 mx。因此，余环幂等元总是经由核心分裂：

引理 9.7. 在混合范畴中：

(i) 幂等元当且仅当它是余环时，才会通过核心分裂；*(ii)* 如果

(u, v) 是二元幂等元，那么 uv 是余环，当且仅当 vu 是余环。

证明。

(i) 设 $A \xrightarrow{e} A$ 是一个余核幂等元，且它分裂为 $A \xrightarrow{r} U \xrightarrow{s} A$。定义 $\mathsf{mx}'_{U,X} := U \oplus X \xrightarrow{s\oplus 1} A \oplus X \xrightarrow{\kappa_R^X} A \otimes X \xrightarrow{r\otimes 1} U \otimes 1$，则 U 属于核心，因为 $\mathsf{mx}'_{U,X} = \mathsf{mx}^{-1}_{UX,}$。反过来，$U$ 与一个对象 X 的混合子的逆定义了 κ_X。

-

（*ii*） uv 的分裂与 vu 的分裂同构，且核心包含同构映射。

□

这使得：

定义 9.8。 混合范畴中的**余环二元幂等元** 是一个二元幂等元（u、v），且uv 或vu 中的一个是余核幂等元。

这些观察可以概括如下：

定理 9.9。 在 *MUC* M：酉（$\mathbb{X}$） $\to \mathbb{X}$中，对于 †-*isomix* 范畴 $\mathbb{X}$，对象 U 是 A 的紧化，当且仅当 U 是余环 †-二元幂等元 †（u、v）的分裂： $A \to A^{\dagger}$。

利用规范紧化的这一刻画，我们将证明，在存在自由 †-指数模态的情况下，互补性总是作为指数模态上的一个 †-线性双代数的规范紧化而产生。

9.2 二元幂等元

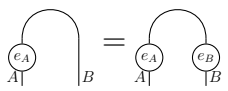
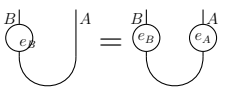
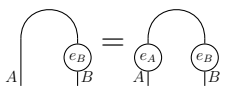
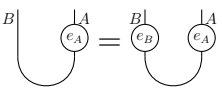
本节研究线性幺半群、余幺半群和双代数的二元幂等元，以回答以下问题： 这些结构上的二元幂等元何时会通过具有相同结构的对象进行分裂？ 为此，我们为对偶、线性幺半群、余幺半群和双代数引入截面型和收缩型二元幂等元的概念。这些幂等元将在第 9.4.2 节中用于建立指数模态与互补系统之间的联系。

在线性幺半群上分裂截面型或收缩型二元幂等元，会在分裂对象上诱导出自线性幺半群。该结果同样适用于线性余幺半群和双代数。

9.2.1 线性幺半群

二元幂等元可以隐式表达对偶态射，而在幂等元分裂后，该态射便显式呈现。

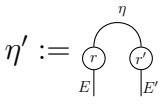
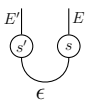
定义 9.10。 在一个 *LDC* 中，幂等元对，$(e_A : A \to A, e_B : B \to B)$ 在对偶$(\eta, \epsilon) : A \dashv B$ 上是**收缩型** 的，当且仅当下方的方程(a) 和(b)成立。另一方面，(e_A, e_B) 是**截面型**的，当方程(c) 和(d) 成立时：

(a)  (b)  (c)  (d) 

二元幂等元 (u,v) 是**截面型**的（分别地，是**收缩型**的），当且仅当 *(*uv, vu*)* 是截面型的（分别地，是收缩型的）。

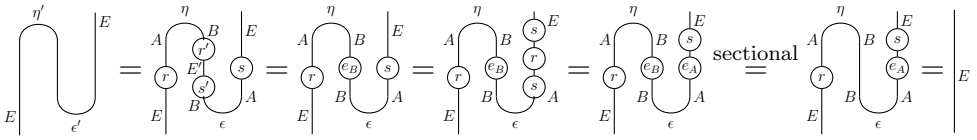
幂等元对 $(e_A,\ e_B)$ 是对偶态射，当且仅当它既是截面型的又是收缩型的。对对偶上的截面型或收缩型二元幂等元进行分裂，会产生一个自对偶。

引理 9.11. 在 *LDC* 中，若对偶 $(\eta, \epsilon):\ A \dashv B$ 上的一对幂等元 (e_A, e_B)具有分裂 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，且 $B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$ 是截面型（分别为收缩型），当且仅当截面 (s, r')（分别为收缩 (r, s')）是关于$(\eta', \epsilon'):\ E \dashv E'$ 的对偶态射，其中：

$$\eta' :=$$  $$\epsilon' :=$$ 

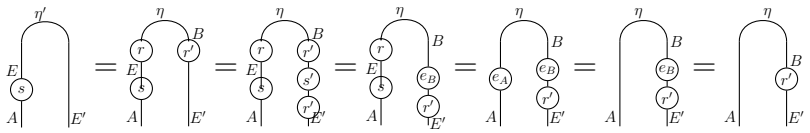
证明。 假设 (u,v) 是对偶 $(\eta, \epsilon):\ A \dashv B$ 上的截面二元幂等元，具有分裂$A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，且 $B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$。令 $e_A = uv$，且 $e_B = vu$。我们必须证明 $(\eta(r \oplus r'),(s' \otimes s)\epsilon):\ E \dashv E'$ 是对偶，且 (s, r') 是对偶同态。

我们首先证明 $(\eta',\ \epsilon'):\ E \dashv E'$ 满足蛇形方程，其中 $\eta' = \eta(r \oplus r'),\epsilon' = (s' \otimes s)\epsilon$。

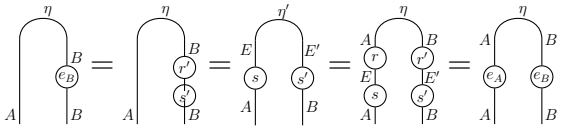


类似地，可以证明另一个蛇形方程。

接下来，我们证明 $(s,\ r'):((\eta',\ \epsilon'):\ E \dashv E') \to ((\eta,\ \epsilon):\ A \dashv B)$ 是一个对偶同态：



对于逆关系，假设 $(\eta' := \eta(r \oplus r')\ \epsilon' := (s' \otimes s)\epsilon):\ E \dashv E'$ 是对偶的，且 $(s,\ r')$ 是一个对偶同态。我们证明 $(u,\ v)$ 在 $(\eta,\ \epsilon):\ A \dashv B$ 上是截面型的：



同样，可以证明该结论对回缩二元幂等元也成立。 . □

推论 9.12。 在 *LDC* 中，对偶$(\eta, \epsilon):\ A \dashv B$上的二元幂等元(u,v)，其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，且 $B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$ 是截面型（分别为收缩型），当且仅当截面(s, r')（分别是收缩(r, s')）是自线性对偶$(\eta', \epsilon'):\ E \dashv E'$ 的对偶态射，其中 $\eta' := \eta(r \oplus r')$ 且 $\epsilon' := (s' \otimes s)\epsilon$。

引理 9.11 的一个推论是，在一个 †-LDC 中，分裂一个 †-二元幂等元 †-对偶在二元幂等元为截面型或收缩型时给出 †-自对偶性：

引理 9.13. 在一个 †-*LDC* 中，若幂等元对$(e, e^\dagger)$作用于一个 †-对偶$(\eta, \epsilon) : A \dashv B$，且其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，则该对幂等元为截面型（分别为收缩型），当且仅当截面$(s, s^\dagger)$（分别为收缩$(r, r^\dagger)$）是$(\eta(r \oplus s^\dagger), (r^\dagger \otimes s)\epsilon) : E \dashv E^\dagger$的态射。

证明。 设 $(e, e^\dagger)$ 在一个 †-对偶 $(\eta, \epsilon) : A \overset{\dagger}{\dashv} A^\dagger$ 上为截面型。设该幂等元分裂为：

$$e = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A \qquad \text{Hence, } e^\dagger = A^\dagger \xrightarrow{s^\dagger} E^\dagger \xrightarrow{r^\dagger} A^\dagger$$

由引理9.11 可知，分裂是自对偶的。该自对偶由 $(\eta',\ \epsilon') : E \dashv E^\dagger$给出，其中 $\eta' := \eta(r \oplus s^\dagger)$，且 $\epsilon' := (r^\dagger \otimes s)\epsilon$。我们必须证明，该自对偶也是一个 †-对偶，即等式 8.1-(a) 对 $(\eta', \epsilon') : E \dashv E^\dagger$:

$$\begin{aligned}
\eta'(\iota \oplus 1) &= \eta(r \oplus s^\dagger)(\iota \oplus 1) = \eta(r\iota \oplus s^\dagger) \\
&\overset{nat.\ \iota}{=} \eta(\iota r^{\dagger\dagger} \oplus s^\dagger) = \eta(\iota \oplus 1)(r^{\dagger\dagger} \oplus s^\dagger) \\
&\overset{\dagger-dual}{=} (\epsilon)^\dagger \lambda_\oplus^{-1}((r^{\dagger\dagger} \oplus s^\dagger)) \overset{nat.\ \lambda_\oplus}{=} (\epsilon)^\dagger((r^\dagger \otimes s)^\dagger)\lambda_\oplus^{-1} \\
&= ((r^\dagger \otimes s)\epsilon)^\dagger \lambda_\oplus^{-1} = (\epsilon')^\dagger \lambda_\oplus^{-1}
\end{aligned}$$

当幂等元是收缩型时，该命题的证明类似。逆关系显然成立。

□

推论 9.14. 在一个 †-*LDC* 中，作用于具有分裂 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$ 的 †-对偶 $(\eta, \epsilon) : A \dashv B$ 上的 †-二元幂等元 †(u,v)，是截面型（分别为收缩型）当且仅当该截面 $(s, s^\dagger)$（分别为该收缩 $(r, r^\dagger)$）是自 †-对偶 $(\eta(r \oplus s^\dagger), (r^\dagger \otimes s)\epsilon) : E \dashv E^\dagger$ 的态射。

下面讨论线性幺半群的幂等元。

给定一个幂等元 $e_A : A \to A$，以及幺半范畴中的一个幺半群 $(A,\ m,\ u)$，若 $e_A m = e_A m(e_A \otimes e_A)$，则 e_A在该幺半群上是**收缩型的**。若$m(e_A \otimes e_A) = e_A m(e_A \otimes e_A)$且 $ue_A = u$，则 e_A 在该幺半群上是**截面型的**。

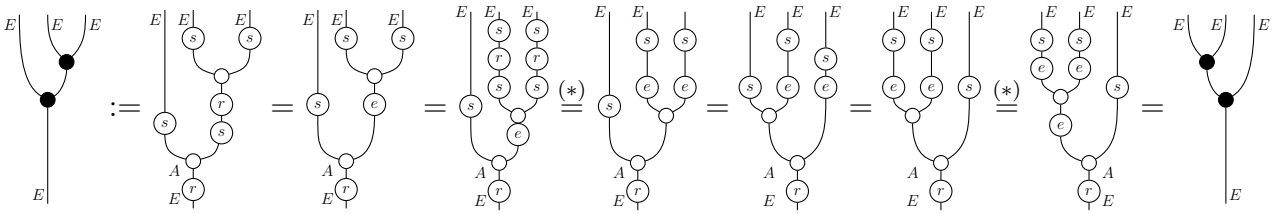
引理 9.15。 在幺半范畴中，幺半群(A, m, u)上的一个分裂幂等元 $e : A \to A$，其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，当且仅当截面$s$（相应地，收缩 r）是 $(E, (s \otimes s)mr, ur)$的一个幺半群态射时，才是截面型的（相应地，收缩型的）。

证明。 假设 $e : A \to A$是一个幂等元，其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s}$，且 $(A,\ m,\ u)$ 是一个幺半群。假设 e 在 A 上是截面型的，即 $(e \otimes e)m = (e \otimes e)me$，并且 $ue = u$。

我们必须证明 $(E,\ m',\ u')$ 是一个幺半群，其中 $m' := (s \otimes s)mr$ 且 $u' := ur$。单位律和结合律的证明如下。

$$(u' \otimes 1)m' = (ur \otimes 1)(s \otimes s)mr = (urs \otimes s)mr = (ue \otimes s)mr \overset{sectional}{=} (u \otimes s)mr = sr = 1$$

在以下弦图中，我们用黑色圆圈表示（$E,\ m',\ u'$），用白色圆圈表示（$A,\ m,\ u$）。



标记为（$*$）的步骤是有效的，因为 e 在（$A,\ m,\ u$）上是截面型的。最后，$s : E \to A$ 是一个幺半群同态，因为：

$$m's = (s \otimes s)mrs = (srs \otimes srs)me = (s \otimes s)(e \otimes e)me = (s \otimes s)(e \otimes e)m = (s \otimes s)m$$

对于逆关系，假设（$E,\ m',\ u'$）是一个幺半群，其中 $m' = (s \otimes s)mr$，且 $u' = ur$，并且 s 是一个幺半群同态。那么，$e : A \to A$ 在（$A,\ m,\ u$）上是截面型的，因为：

$$ue = urs = u's = u$$
$$(e \otimes e)m = (r \otimes r)(s \otimes s)m = (r \otimes r)m's = (r \otimes r)(s \otimes s)mrs = (e \otimes e)me$$

该陈述 当幂等元在该幺半群上是收缩型时，可以用类似的方法证明。 . □

如果幂等元对满足下表中的条件，则幂等元对（$e_A,\ e_B$）在一个线性幺半群 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 上是**截面型的**（分别为**收缩型**）。

$(e_A,\ e_B)$ **截面型**于 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$	$(e_A,\ e_B)$ **收缩型**于 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$
e_A 保持 $(A,\ m,\ u)$ 截面地	e_A 保持 $(A,\ m,\ u)$ 回缩地
$(e_A,\ e_B)$ 保持 $(\eta_L,\ \epsilon_L)$: $A \dashv\!\shortparallel B$ 截面地	$(e_A,\ e_B)$ 保持 $(\eta_L,\ \epsilon_L)$: $A \dashv\!\shortparallel B$ 回缩地
(e_B, e_A) 保持 (η_R, ϵ_R)：$B \dashv\!\shortparallel A$ 回缩地	(e_B, e_A) 保持 (η_R, ϵ_R)：$B \dashv\!\shortparallel A$ 截面地

线性幺半群上的二元幂等元 (u,v) 若 (uv,vu) 是截面型（分别为收缩型），则称其为**截面型**（分别为**收缩型**）。

对线性幺半群上的截面型或收缩型幂等元进行分裂，会在该分裂上得到一个线性幺半群：

引理 9.16。 在一个 *LDC* 中，设 (e_A, e_B) 是线性幺半群 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 上的一对幂等元 __

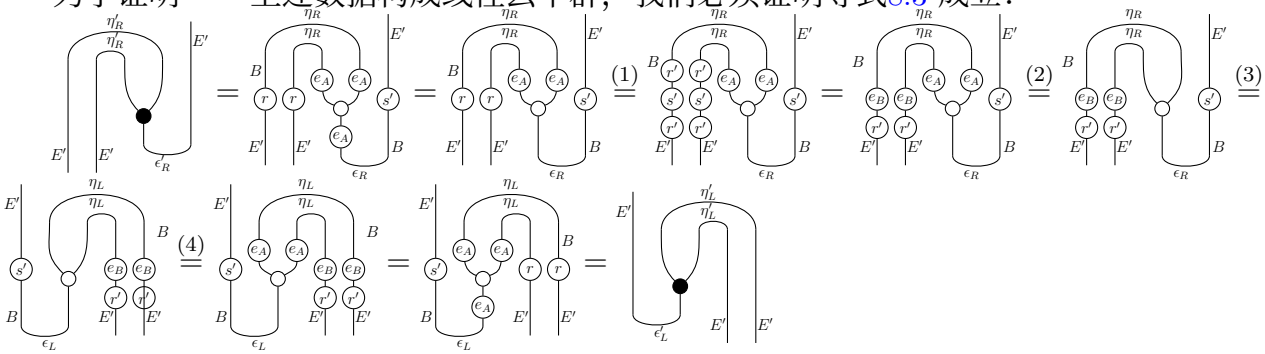
且这些幂等元按如下方式分裂： $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，以及 $B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$。当且仅当截面 $(s, r') : (E \ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel\ E') \to (A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B)$（分别为收缩 $(r, s') : (A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B) \to (E \ {}^{\bullet}\!\!\shortparallel\ E')$）是线性幺半群态射时，幂等元对 (e_A, e_B) 是截面型（分别为收缩型）。

证明。 假设 (e_A, e_B) 是 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ B$ 上的截面型。令

$$e_A = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A \qquad e_B = B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$$

为 (u, v) 的一个分裂。由引理 9.15 可知，(A, m', u') 是一个幺半群，其中 $m' = (s \otimes s)mr$ 和 $u' = ur$；由引理 9.11 可知，$(\eta_L(r \otimes r'),\ (s' \otimes s)\epsilon_L) : E \dashv E'$ 和 $(\eta_R(r' \otimes r),\ (s \otimes s')\epsilon_R) : E' \dashv E$ 分别是左对偶和右对偶。

为了证明 上述数据构成线性幺半群，我们必须证明等式8.3 成立：



其中，(1) 成立是因为 e_A 是 (A, m, u) 上的截面，(2) 成立是因为 (e_B, e_A) 是 (η_R, ϵ_R) 上的收缩型映射： $B \dashv A$；(3) 成立是因为 A 是一个线性幺半群；(4) 成立是因为 (e_A, e_B) 是 (η_L, ϵ_L) 上的截面型映射： $A \dashv B$。

该命题的逆向可由引理9.11直接得出，而引理9.15. □

作为前述引理的推论，分裂二元幂等元是截面型（分别地，收缩型）的，当且仅当其截面（分别地，收缩）是一个态射，它从（分别地，到）由该分裂给出的自线性幺半群。

下面的引理将引理 9.16推广到截面型/收缩型 †-二元幂等元上的 †-线性幺半群：

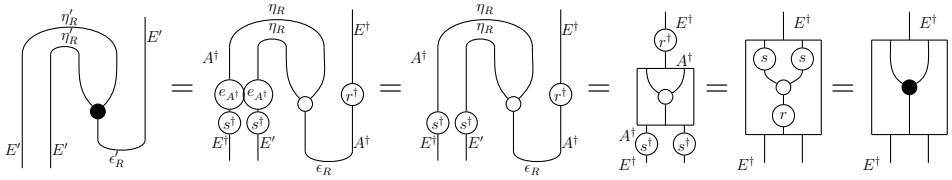
引理 9.17。 在 †-*LDC* 中，设 $(e, e^\dagger)$ 是 †-线性幺半群 $A \ {}^{\circ}\!\!\shortparallel\ A^\dagger$上具有分裂 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$ 的一对幂等元。幂等元对 $(e, e^\dagger)$ 是截面型的（分别是收缩型的），当且仅当截面 $(s, s^\dagger)$（分别为收缩 $(r, r^\dagger)$）是

†-线性幺半群的态射。

证明。 设幂等元对（e， $e^\dagger$）是 †-线性幺半群 $A \ {}^{\dagger\circ}\!\!\shortparallel\ A^\dagger$上的一个截面型。此外，幂等元 e 按如下方式分裂：

$$e = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$$

我们必须证明 E 是一个 †-线性幺半群。由引理 9.16可知， $E \ {}^{\circ}_{\shortparallel}\ E^{\dagger}$ 是一个线性幺半群。它也是一个 †-线性幺半群，因为：



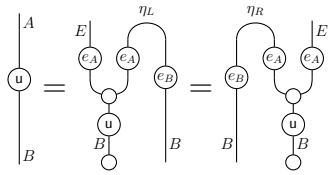
关于回缩型二元幂等元的陈述也可类似证明。逆关系直接由引理 9.16 得出。

□

作为上述引理的推论，分裂的 †-二元幂等元在 †-线性幺半群上是截面型（分别是回缩型），当且仅当其截面（分别是收缩）是从（分别到）分裂中给出的 †-自线性幺半群的态射。

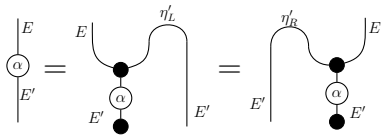
由引理 9.16可知，分裂截面型或回缩型二元幂等元会产生自线性幺半群。如果该二元幂等元也是余环，且满足方程9.1，那么它会在分裂上产生一个 Frobenius代数：

引理 9.18。 在 *isomix* 范畴 $\mathbb{X}$ 中，设 $E \ {}^{\bullet}_{\shortparallel}\ E'$ 是 $\mathsf{Core}(\mathbb{X})$ 中由线性幺半群 $A \ {}^{\circ}_{\shortparallel}\ B$ 上一个余环截面型/回缩型二元幂等元 (u,v) 分裂得到的自线性幺半群。设 $\alpha\colon E \to E'$ 是该同构。那么，在该线性等价 $\mathsf{Mx}_{\downarrow}$ 下， E 是 *Frobenius*代数，当且仅当该二元幂等元满足以下方程，其中 $e_A = \mathsf{uv}$ 和 $e_B = \mathsf{vu}$：

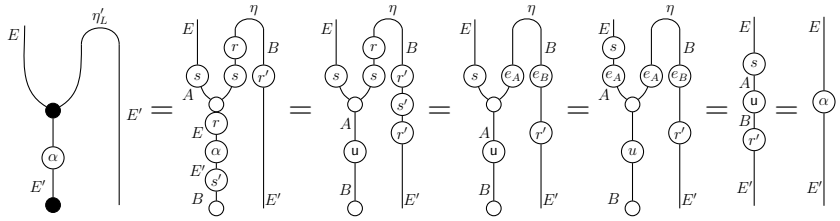


(9.1)

证明。 设 $E \ {}^{\bullet}_{\shortparallel}\ E'$ 是通过分裂 $A \ {}^{\circ}_{\shortparallel}\ B$上的截面型或收缩型二元幂等元而得到的自线性幺半群 $A \ {}^{\circ}_{\shortparallel}\ B$。设该二元幂等元的分裂为 $e_A = \mathsf{uv} = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，且 $e_B = \mathsf{vu} = B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$。假设 u 满足给定的方程。若能证明下列方程成立，则根据引理8。20 E 是一个 Frobenius代数：



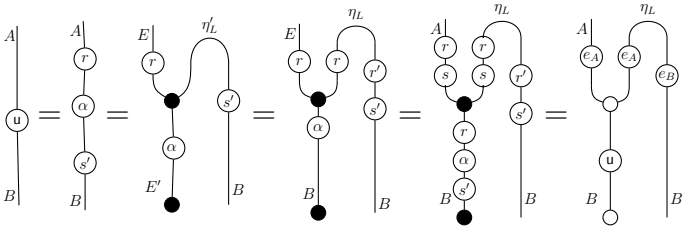
证明如下：



对于逆关系，假设 $E \bullet\!\!\shortparallel E'$ 是通过分裂线性幺半群 $A \circ\!\!\shortparallel B$ 上的余环截面型/收缩型二元幂等元 (u, v) 得到的自线性幺半群。线性幺半群 $E \bullet\!\!\shortparallel E'$ 在关于线性等价 Mx↓ 的意义下，恰好对应于一个 Frobenius代数 $(E, , , ,)$。我们必须证明该二元幂等元满足给定的方程。设该二元幂等元为截面型或收缩型，并按如下方式分裂：

$$A \underset{s}{\overset{r}{\rightleftarrows}} E \xrightarrow[\simeq]{\alpha} E' \underset{r'}{\overset{s'}{\rightleftarrows}} B$$

于是，



□

在 †-isomix 范畴中，将 †-二元幂等元在 †-线性幺半群上分裂，可在预酉对象上得到一个 †-自线性幺半群。若该二元幂等元还满足方程 9.1(a)，那么利用引理 8.20 和 9.18，便可在该分裂上得到一个 †- Frobenius代数。

9.2.2 线性余幺半群

在幺半范畴中，余幺半群 $(A,\ d,\ k)$ 上的幂等元 $e: A \to A$ 是**截面型**（分别是**收缩型**）的，当且仅当 $ed = ed(e \otimes e)$（分别地，当 $d(e \otimes e) = ed(e \otimes e)$，且 $ek = k$）。

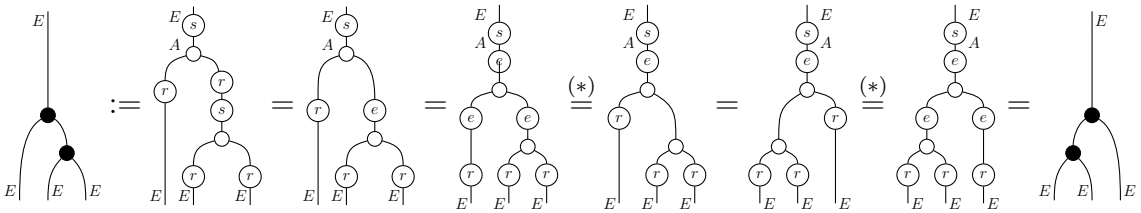
引理9.19。在幺半范畴中，余幺半群(A, d, k)上的分裂幂等元 $e: A \to A$，其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，是截面型（分别是收缩型）的，当且仅当截面 s（分别是收缩 r）是$(E, sd(r \otimes r)\ sk)$的余幺半群态射。

证明。设 $e: A \to A$ 是一个带有分裂 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s}$ 的幂等元，且（$A,\ d,\ k$）是一个幺半群。设 e 在 A 上是截面型的，即 $d(e \otimes e) = ed(e \otimes e)$。

我们必须证明（E， d'， k'）是一个幺半群，其中 $d' := sd(r \otimes r)$ 且 $k' := sk$。单位律和结合律如下所示。

$$\begin{aligned} d'(k' \otimes 1) &= sd(r \otimes r)(sk \otimes 1) = sd(rsk \otimes r) = sd(ek \otimes r) \\ &= srsd(ek \otimes rsr) = sed(ek \otimes er) \overset{sectional}{=} sed(k \otimes r) = ser = srsr = 1 \end{aligned}$$

在下面的弦图中，我们用黑色圆圈表示（E， d'， k'），用白色圆圈表示（A， d， k）：



标记为（$*$）的步骤是因为 e 在（A， d， k）上是截面型的。
最后， $s : E \to A$ 是一个余幺半群同态，因为：

$$d'(s \otimes s) = sd(r \otimes r)(s \otimes s) = sd(rs \otimes rs) = sd(e \otimes e) = srsd(e \otimes e) = sed(e \otimes e) = sed = sd$$

反过来，假设（E， d'， k'）是一个余幺半群，其中 $d' = sd(r \otimes r)$，且 $k' = sk$，并且 s 是一个幺半群同态，那么， e： $A \to A$ 在（A， d， k）上是截面型的，因为：

$$ed = rsd = rd'(s \otimes s) = rsd(r \otimes r)(s \otimes s) = ed(e \otimes e)$$

该陈述已得到证　明；当幂等元在余幺半群上是收缩型时，证明方法类似。 □

在 LDC 中，当 e_A 和 e_B 满足下表所列条件时，幂等元对（e_A， e_B）在线性余幺半群上是**截面型**（分别为**收缩型**）的。

$(e_A,\ e_B)$ 在线性余幺半群 A 上是截面型的 $\overset{\circ}{\dashv\!\shortmid} B$	$(e_A,\ e_B)$ 在线性余幺半群 A 上是收缩型的 $\overset{\circ}{\dashv\!\shortmid} B$
e_A 截面地保持（A， d， k）	e_A 回缩地保持（A， d， k）
（e_A， e_B）保持（η_L， ϵ_L）： $A \dashv\!\shortmid B$ 截面地	(e_A， e_B) 保持 (η_L， ϵ_L)： $A \dashv\!\shortmid B$ 回缩地
(e_B， e_A) 保持 (η_R， ϵ_R)： $B \dashv\!\shortmid A$ 回缩地	(e_B， e_A) 保持 (η_R， ϵ_R)： $B \dashv\!\shortmid A$ 截面地

当 (uv，vu) 是截面型（分别为收缩型）时，二元幂等元 (u，v) 在线性幺半群上是**截面型**（分别为**收缩型**）。

引理 9.20。 在一个 *LDC* 中，设 (e_A, e_B) 是线性余幺半群 $A \overset{\circ}{\dashv\!\shortmid} B$上的一对幂等元，且其 $\otimes$-余幺半群为 (A, d, e)，分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$和 $B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$。

幂等元对 (e_A, e_B) 是截面型（分别地，收缩型），当且仅当截面 (s, r'):$(E \mathrel{{}_{\bullet}\!\!\parallel} E') \longrightarrow (A \mathrel{{}_{\circ}\!\!\!+\!\!\!+} B)$（分别地，收缩 (r, s'): $(A \mathrel{{}_{\circ}\!\!\parallel} B) \longrightarrow (E \mathrel{{}_{\bullet}\!\!\parallel} E')$）是线性余幺半群的态射。

证明与线性幺半群上截面型/收缩型幂等元的引理 9.16的证明类似。

作为上述引理的推论，线性余幺半群上的分裂二元幂等元是截面型（分别为收缩型），当且仅当其截面（分别为收缩）是从（分别到）分裂所给出的自线性余幺半群的态射。

当线性余幺半群上的截面型或收缩型 †-二元幂等元分裂时，它在该分裂上给出一个 †-自线性余幺半群:

引理 9.21。在一个 †-*LDC* 中，设 †-线性幺半群 $A \mathrel{{}_{\circ}\!\!\parallel} A^{\dagger}$ 上有幂等元对$(e, e^{\dagger})$，其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$。当且仅当截面$(s, s^{\dagger})$（分别为收缩$(r, r^{\dagger})$）是……的态射时，幂等元对$(e, e^{\dagger})$ 是截面型（分别为收缩型）。

†线性幺半群。

证明类似于引理 9.17 中关于 †线性幺半群上的截面型/收缩型幂等元的论述。

作为上述引理的推论，†-二元幂等元的一个分裂在 †-线性幺半群上是截面型（分别为收缩型）的，当且仅当其截面（分别为收缩）是从（分别到）由该分裂给出的 †-自线性幺半群的态射。

9.2.3 线性双代数

我们将注意力转向线性双代数的二元幂等元:

定义 9.22。线性双代数上的二元幂等元，如果其在线性幺半群和线性余幺半群上分别是**截面型（分别为收缩型）**，则称为**截面型（分别为收缩型）**。

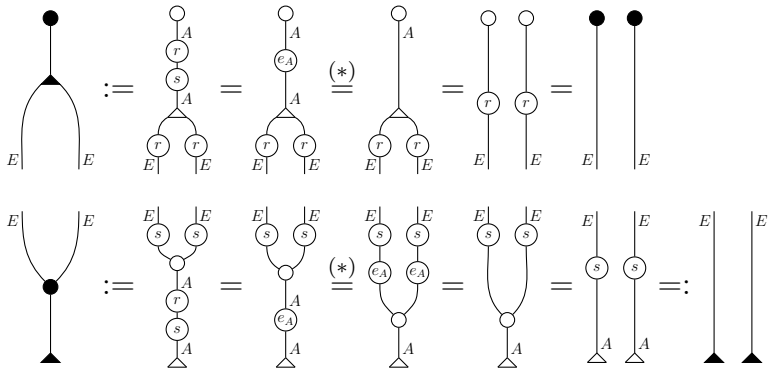
引理 9.16 指出，一对分裂幂等元在线性幺半群上是截面型（分别地，收缩型）的，当且仅当截面（分别地，收缩）是线性幺半群的态射。引理 9.20 指出，一对分裂幂等元在线性余幺半群上是截面型（分别地，收缩型）的，当且仅当截面（分别地，收缩）是线性余幺半群的态射。将这些结果应用于线性双代数上的截面型／收缩型二元幂等元，可得:

引理 9.23。在 *LDC* 中，设 (u,v) 是线性双代数 $A \circ B$ 上的一个分裂二元幂等元，其分裂为 $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，则 $B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$ 是截面型（分别地，收缩型），当且仅当截面 (s, r')（分别地，收缩 (r, s')）是线性

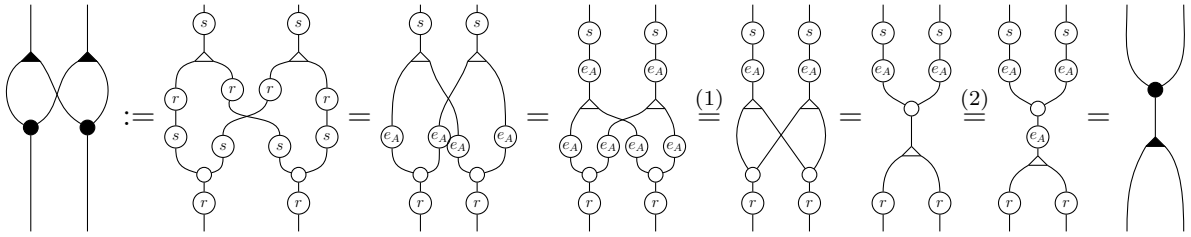
双代数态射，其中 $E \bullet E'$ 其线性幺半群和线性余幺半群分别如引理 (i)的陈述 *9.16*和引理 *9.20*所给出。

证明。 设（u，v）是线性双代数 $A \circ B$上的一个截面二元幂等元。设（u， v）按如下方式分解： $e_A = \mathsf{uv} = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，且 $e_B = \mathsf{vu} = B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$。根据引理 i9.16 的陈述（）以及引理 i9.20 的陈述（），我们知道 E 既是线性幺半群，也是线性余幺半群。

还需证明 $E \bullet E'$ 和 $E \bullet E'$ 在 E 上构成一个 $\otimes$-双代数，并在 E' 上构成一个 $\oplus$-双代数。证明 E 是一个 $\otimes$-双代数如下：



标记为（$*$）的步骤是因为 e_A 是线性幺半群上的截面型映射。



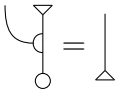
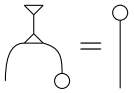
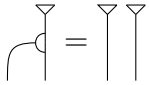
步骤（1）是因为 e_A 是线性余幺半群上的截面型映射，而步骤（2）成立是因为 e_A 分别是线性幺半群上的截面型映射。同样， E' 是一个 $\oplus$-双代数。逆关系可由引理9.16 的陈述（i）和9.20得出。 □

上述引理可直接推广到 †-线性双代数上的 †-二元幂等元。

9.3 互补线性双代数

在范畴量子力学中，玻尔的互补原理是通过幺半范畴中的相互作用的交换 †-Frobenius 代数来描述的。本节旨在描述 isomix 范畴中的互补性。为此，我们至少要求一个满足下述方程的自线性双代数。

定义 9.24。 *isomix* 范畴 $\mathbb{X}$ 中的一个**互补系统** 是一个交换且余交换的自线性双代数，$_{(a,b)}$ $_{(a',b')}$：$A \circ A$ 它满足以下方程（及其“逆向”对称形式）：

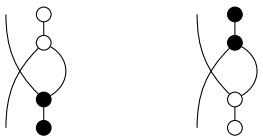
[**comp.1**]  [**comp.2**]  [**comp.3**] 

一个 †-**互补系统** 在 †-*isomix* 范畴中，是一个 †-自线性双代数，同时也是一个互补系统。

所谓“逆向”对称性，是指图表的垂直反射。方程的“余向”对称性（水平反射）可由线性双代数的交换性和余交换性直接得到。

请注意，我们使用了通过作用和余作用表示线性幺半群的另一种形式（参见命题 8.8）。因此，[**补集。1**] 要求线性余幺半群的余单位经由线性幺半群对偶与余单位互为对偶，而 [**补集。2**] 要求线性幺半群的单位经由线性余幺半群的对偶与余单位互为对偶。最后，[**补集。3**] 要求线性幺半群的余作用映射复制 †-线性余幺半群的单位。方程 [**补集。1**]-[**补集。3**] 的“逆向”对称性对于 †-互补系统总是自动成立。

在幺半范畴中，一个互补系统由一对交换且余交换的弗罗贝尼乌斯代数（A，，，，）和（A，，，，）给出；二者相互作用，生成具有以下对极的霍普夫代数对 [76, 定义 6.3]。



在 [60, 定理 6.4], 中，Duncan 和 Dunne 证明，一对交换的 †-Frobenius 代数是互补系统，当且仅当满足以下条件：



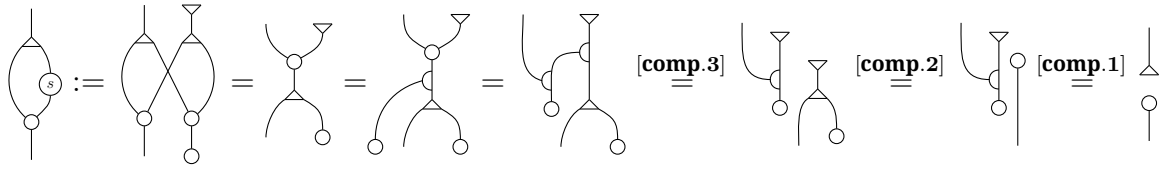
注意，[**补集1**] 的“逆向”对称性类似于左侧的方程，而 [**补集2**]类似于右侧的方程。在以下引理中，我们证明，在 isomix 范畴中，互补系统的 $\otimes$ 和 $\oplus$-双代数是霍普夫代数：

引理 9.25。I $f\,A$ A 是 *isomix* 范畴中的一个互补系统，则 A 是 $\otimes$ -

对极由 (a) 给出的双代数，以及对极由 (b)给出的 $\oplus$-双代数：

(a)  (b) 

证明。 给定一个互补系统，我们证明 $\otimes$-双代数具有对极，因而是一个$\otimes$-Hopf代数：

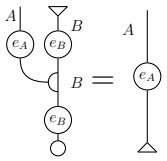
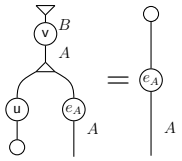
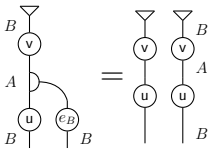


类似地，利用 [的“逆向”版本， $\oplus$-双代数具有对极：**补集**。**1**]-[**补集**。**3**]。

□

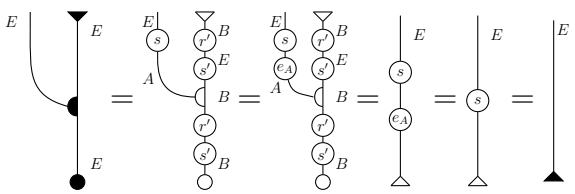
一个 †-互补系统在酉范畴中，当其酉结构映射满足 8.11 对线性幺半群和线性余幺半群均成立时，对应于通常的交换的 †-Frobenius代数 [44] 概念。在以下条件下，对线性双代数上的二元幂等元进行分裂会产生一个互补系统：

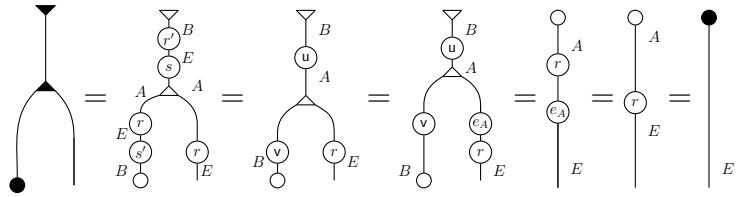
引理 9.26。 在一个 *isomix* 范畴中，通过在一个交换的且余交换的线性双代数 $A \circ B$ 上分裂一个余环二元幂等元(u,v) 所得到的自线性双代数是一个互补系统，当且仅当该二元幂等元满足以下条件（以及它们的“逆向”对称性）：

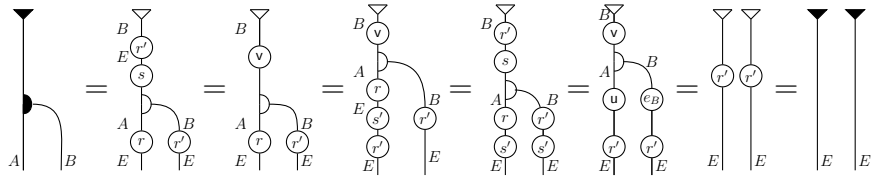
(a)  (b)  (c)  (9.2)

其中 $e_A = \mathsf{uv}$，以及 $e_B = \mathsf{vu}$

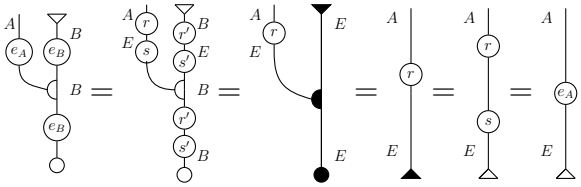
证明。 假设 $E \bullet E$ 是通过在一个交换的且余交换的线性双代数 $A \circ B$ 上分裂一个二元幂等元 (u,v) 所得到的自线性双代数。该双代数的分裂如下给出：$\mathsf{uv} = A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{s} A$，以及 $\mathsf{vu} = B \xrightarrow{r'} E' \xrightarrow{s'} B$。如果 (u,v) 满足给定的方程，那么 $E \bullet E$ 是一个互补系统，因为 [**comp.1**]-[**comp.3** 成立：

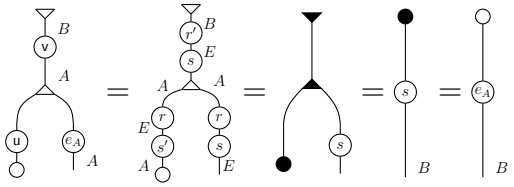
[**补集.1**]: 

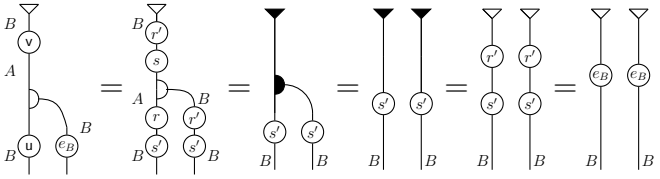
[**comp.2**]: 

[**comp.3**]: 

对于逆关系，假设 $E \bullet E$ 是通过分裂线性双代数 $A \circ B$ 上的一个截面型或回缩型二元幂等元 (u，v) 得到的互补系统。我们证明 $A \circ B$ 满足引理陈述中给出的方程 (a)-(c)。

(a): 

(b): 

(c): 

□

在下一节中，我们将给出一个使用指数模态的引理 9.26 示例。

9.4 指数模态

线性逻辑 [68] 将公式/类型视为可耗尽的资源，因此得名“线性”逻辑。不过，它也允许非线性类型，也就是说，借助指数算子 !（读作“bang”），资源可以无限次地更新并被擦除。本节旨在说明线性逻辑中的 ! 算子与互补性之间存在联系，而且这种联系揭示了量子系统中测量与互补性的一种不同视角。

9.4.1 幺半范畴的指数模态

我们首先探讨对称幺半范畴（SMCs）中 ! 算子的语义。在对称幺半范畴中，! 算子是一个余单子函子。应用了 ! 函子的对象可以被复制和擦除，因此，对于所有对象 A，$!A$ 都是余交换余幺半群。此外，余单子结构与余幺半群结构相协调地作用。这种函子称为余代数余模态。最后，! 余代数模态与张量积相协调地作用，因此是幺半的。

定义 9.27。 *[24]* 对称幺半范畴上的 **余代数模态**由一个余单子 $(!\ \delta, \epsilon)$ 和自然变换 $\Delta_A :! A \longrightarrow !A \otimes !A$ 以及 $_A :! A \longrightarrow I$ 构成，并满足$(!A, \Delta_A, e_A)$ 是一个余交换余幺半群，且 $\delta_A :! A \longrightarrow !!A$ 保持余乘法，也就是说，

$$\begin{array}{ccc} !A & \xrightarrow{\ \delta\ } & !!A \\ {\scriptstyle \Delta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{!A}} \\ !A \otimes !A & \xrightarrow[\delta \otimes \delta]{} & !!A \otimes !!A \end{array}$$

对于余代数模态 $(!\ \delta, \epsilon)$，对任意对象 A，$\delta_A :! A \longrightarrow !!A$ 是一个余幺半群态射，因为可以证明 δ 保持余单位。

定义 9.28。 *[23]* 余代数模态，$(!\ \delta, \epsilon, \Delta,)$，称为**幺半群的**，如果$(!\ \delta, \epsilon)$ 是一个幺半余单子（也就是说，$(!\ m_\otimes, m_I)$ 是一个幺半函子，且 δ 和 ϵ 是幺半自然变换），并且 Δ 和 e 是幺半自然变换：

$$\begin{array}{ccc} !A \otimes !B & \xrightarrow{\ m_\otimes\ } & !(A \otimes B) \\ {\scriptstyle \Delta \otimes \Delta}\downarrow & & \\ !A \otimes !A \otimes !B \otimes !B & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ {\scriptstyle 1 \otimes c_\otimes \otimes 1}\downarrow & & \\ !A \otimes !B \otimes !A \otimes !B & \xrightarrow[m_\otimes \otimes m_\otimes]{} & !(A \otimes B) \otimes !(A \otimes B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} !A \otimes !B & \xrightarrow{\ m_\otimes\ } & !(A \otimes B) \\ {\scriptstyle m_I \otimes m_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_I} \\ I \otimes I & = & I \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\ m_I\ } & !I \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ I \otimes I & \xrightarrow[m_I \otimes m_I]{} & !I \otimes !I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\ m_I\ } & !I \\ & \searrow^{=} & \downarrow{\scriptstyle \perp_I} \\ & & I \end{array}$$

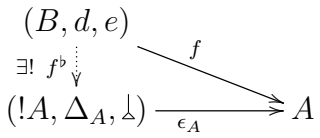
并且 Δ和 e 是 !-余代数态射：

$$\begin{array}{ccccc} !A & & \xrightarrow{\qquad\delta\qquad} & & !!A \\ {\scriptstyle \Delta}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle !\Delta} \\ !A \otimes !A & \xrightarrow[\delta \otimes \delta]{} & !!A \otimes !!A & \xrightarrow[m_\otimes]{} & !(!A \otimes !A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} !A & \xrightarrow{\ \delta\ } & !!A \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle !\perp} \\ I & \xrightarrow[m_I]{} & !I \end{array}$$

幺半群余代数模态，也称为**指数模态** [108], 提供

对称幺半范畴中线性逻辑的指数算子提供一种语义。带有指数模态的对称幺半闭范畴称为**线性范畴** [20]。

定义 9.29。 *[89, 90]* 如果对于任意对象 A，$(!A, \Delta_A, \curlywedge_A)$ 都是余自由余交换余幺半群，则称余代数模态为**自由的**；也就是说，如果(B, d, e) 是余交换余幺半群，那么对于所有映射 $f : B \to A$，都存在唯一的余幺半群态射 $f^\flat : (B, d, e) \to (!A, \Delta_A, \perp)$，使得下图交换。



自由余代数模态也是幺半的余代数模态。这种幺半的余代数模态称为**自由指数模态**。Lafont 在其博士论文 [89],中通过证明以下事实，为自由指数模态提供了一个重要的例子来源：

命题 9.30。 在对称幺半范畴中，$\mathbb{X}$，如果每个对象 A 都生成一个余自由余交换余幺半群$!A$，那么 $\mathbb{X}$ 具有自由指数模态。

证明可概述如下。若 $\mathbb{X}$ 是一个对称幺半范畴，其中每个对象 A 都自由生成一个余交换余幺半群，那么遗忘函子$U : \mathsf{Comon}[\mathbb{X}] \to \mathbb{X}$（其中 $\mathsf{Comon}[\mathbb{X}]$ 是 X 中由余幺半群及其间的余幺半群态射构成的对称幺半范畴）有一个右伴随，记作 $F : \mathbb{X} \to \mathsf{Comon}[\mathbb{X}]$。该函子将每个对象 A 映射到它的余自由交换余幺半群 $!A$，并将 $f : A \to B$ 中的每个态射映射为唯一的余幺半群态射 $(\epsilon_A f)^\flat : (!A, \Delta_A, \curlywedge_A) \to (!B, \Delta_B, \curlywedge_B)$；这一态射由 $(!B, \Delta_B, \curlywedge_B)$的余泛性质给出。遗忘函子 U与余自由函子 F复合所得到的余单子是一种指数模态。我们将在第 10.2⊥节稍后讨论具有自由指数模态的范畴的例子。

自由指数模态已被用作建模无限维系统的事实标准结构：[117] 使用指数模态对量子谐振子建模，[26] 则用它对玻色福克空间建模。

9.4.2 †-LDC 的指数模态

如果一个 LDC 配备了线性余单子 $((!, ?), (\epsilon, \eta), (\delta, \mu))$，则称其具有指数模态。这意味着：

定义 9.31。 *[22, 定义 2.1]* 一个 **!-?-LDC（指数 LDC）**是一个 *LDC*，$\mathbb{X}$，配备了一个余单子 $(!\ \delta, \epsilon)$和一个单子 $(?\ \mu, \eta)$，使得

(i) $(!, ?)$：$\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是线性函子；

(ii) $(\delta,\ \mu)$、$(\epsilon,\ \eta)$、$(\Delta,\ \nabla)$和$(\ ,\ )$是线性变换。

(iii) 对每个对象 $A \in \mathbb{X}$，$(!A, \Delta_A, \curlywedge_A)$是一个交换的 $\otimes$-余幺半群，而$(?A, \nabla_A,\ _A)$是一个交换的 $\oplus$-幺半群。

在 (!, ?)-LDC 中，函子的线性性意味着 (! δ, ϵ) 是幺半余单子，而 (? μ, η) 是余幺半群单子；并且 (!(A) $\Delta_A, \curlywedge_A$) 是自然余交换余幺半群，而 (?(A) $\nabla_A,\ _A$) 是自然交换幺半群。

†-(!,?)-LDC 是一种 (!,?)-LDC，其中所有函子和自然变换都是 †-线性的：

定义 9.32。 **†-(!,?)-线性分配范畴** 是一个$(!, ?)$-*LDC*，同时也是一个 †-*LDC*，并满足以下条件：

(i) $(!,\ ?)$ 是一个 †-线性函子，即我们有：

$$!(A^\dagger) \xrightarrow[\simeq]{\mathsf{s}} (?A)^\dagger \qquad (!A)^\dagger \xrightarrow[\simeq]{\mathsf{t}} ?(A^\dagger)$$

是一个线性自然同构，使得

$$\begin{array}{ccc} !X & \xrightarrow{\iota} & (!X)^{\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle !\iota}\downarrow & (a) & \downarrow{\scriptstyle (\mathsf{t}^{-1})^\dagger} \\ !(X^{\dagger\dagger}) & \xrightarrow[\mathsf{s}]{} & (?(X^\dagger))^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} ?X & \xrightarrow{\iota} & (?X)^{\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle ?\iota}\downarrow & (b) & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{s}^\dagger} \\ ?(X^{\dagger\dagger}) & \xrightarrow[\mathsf{t}^{-1}]{} & (!(X^\dagger))^\dagger \end{array} \tag{9.3}$$

(ii) 这一对 $\Delta_A : !A \to !A \otimes !A$ 和 $\nabla_A : ?A \oplus ?A \to ?A$ 是一个 †-线性自然变换。即以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} !(A^\dagger) & \xrightarrow{\Delta} & !(A^\dagger) \otimes !(A^\dagger) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{s}\otimes\mathsf{s}} \\ {\scriptstyle \mathsf{s}}\downarrow & (a) & (?A)^\dagger \otimes (?A)^\dagger \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\otimes} \\ (?A)^\dagger & \xrightarrow[\nabla^\dagger]{} & (?A \oplus ?A)^\dagger \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (!A \otimes !A)^\dagger & \xrightarrow{\Delta^\dagger} & (!A)^\dagger \\ {\scriptstyle \lambda_\oplus^{-1}}\downarrow & & \\ (!A)^\dagger \oplus (!A)^\dagger & (b) & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{t}} \\ {\scriptstyle \mathsf{t}\oplus\mathsf{t}}\downarrow & & \\ ?(A^\dagger) \oplus ?(A^\dagger) & \xrightarrow[\nabla]{} & ?(A^\dagger) \end{array} \tag{9.4}$$

Δ 完全由 ∇ 决定，反之亦然。

(iii) 这一对，$\top : !A \to \top$ 和 $: \curlywedge \to ?A$ 是一个 †-线性自然变换，即 ***th*** e

以下图表交换:

$$
\begin{tikzcd}
!(A^\dagger) \arrow[r, "\perp"] \arrow[d, "\mathsf{s}"'] \arrow[dr, phantom, "(a)"] & \top \arrow[d, "\lambda_\top"] \\
(?A)^\dagger \arrow[r, "\top^\dagger"'] & \perp^\dagger
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\top^\dagger \arrow[r, "\perp^\dagger"] \arrow[d, "\lambda_\perp^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(b)"] & (!A)^\dagger \arrow[d, "\mathsf{t}"] \\
\perp \arrow[r, "\top"'] & (?A)^\dagger
\end{tikzcd}
\tag{9.5}
$$

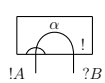
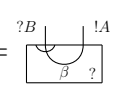
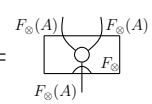
(iv) T 该对 $\delta : !A \to !!A$，以及 $\mu : ??A \to ?A$ 是一个 †-线性自然变换 :

$$
\begin{tikzcd}
!(A^\dagger) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dd, "\mathsf{s}"'] \arrow[ddr, phantom, "(a)"] & !!(A^\dagger) \arrow[d, "!\mathsf{s}"] \\
 & !((?A)^\dagger) \arrow[d, "\mathsf{s}"] \\
(?A)^\dagger \arrow[r, "\mu^\dagger"'] & (??A)^\dagger
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(!!A)^\dagger \arrow[r, "\delta^\dagger"] \arrow[d, "\mathsf{t}"'] \arrow[ddr, phantom, "(b)"] & (!A)^{(}\dagger) \arrow[dd, "\mathsf{t}"] \\
?((!A)^\dagger) \arrow[d, "?\mathsf{t}"'] & \\
??(A^\dagger) \arrow[r, "\mu"'] & ?(A^\dagger)
\end{tikzcd}
\tag{9.6}
$$

该对 $\epsilon_A : !A \to A$，以及 $\eta_A : A \to ?A$ 是一个 †-线性自然变换，即以下图表交换:

$$
\begin{tikzcd}
!(A^\dagger) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\mathsf{s}"'] \arrow[dr, phantom, "(a)"] & A^\dagger \arrow[d, equal] \\
(?A)^\dagger \arrow[r, "\eta^\dagger"'] & A^\dagger
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A^\dagger \arrow[r, "\epsilon^\dagger"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(b)"] & (!A)^\dagger \arrow[d, "\mathsf{t}"] \\
A^\dagger \arrow[r, "\eta"'] & ?(A^\dagger)
\end{tikzcd}
\tag{9.7}
$$

在一个 (!,?)-LDC 中，任意对偶 (a, b) : $A \dashv\!\!\!\dashv B$ 利用 (!,?) 的线性性，在指数模态上诱导出一个对偶 $(a_!, b_?)$:$!A \dashv\!\!\!\dashv ?B$（见下方图表）。这意味着，任意对偶都会诱导出一个线性余幺半群 $(a_!, b_?)$:$!A\ ?B$，其中余幺半群结构由模态给出。

$a_! :=$  $= m_\top(!\alpha)\nu_\otimes$ $\qquad b_? :=$  $= \nu_\oplus(?\epsilon)n_\perp$ $\qquad m_F :=$  $= m_\otimes F_\otimes(m)$

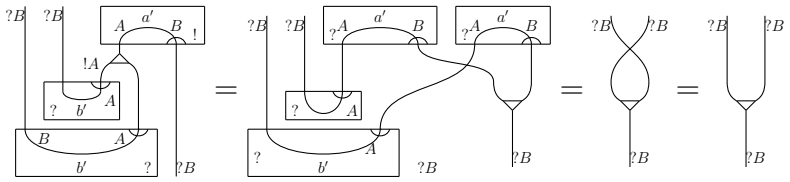
任意线性函子 $(F_\otimes, F_\oplus)$ 应用于线性幺半群 (α, β) : $A \ {}^\circ\!\!\shortparallel\ B$ 时，总会产生一个线性幺半群 (α_F, β_F) : $F_\otimes(A)\ F_\oplus(B)$，其乘法为 m_F，如上方图表所示。将这一简单观察应用于指数模态时，会产生显著影响:

引理 9.33。 在任意 (!，?)-*LDC* 中，任意线性幺半群 (a, b):$A \ {}^\circ\!\!\shortparallel\ B$ 和任意对偶(a', b') : $A \dashv\!\!\!\dashv B$，借助自然余交换余幺半群 $(!A, \Delta_A, \wedge_A)$，可构成一个线性双代数 $(a_!, b_?)\ (a'_!, b'_?)$:$!A\ ?B$。

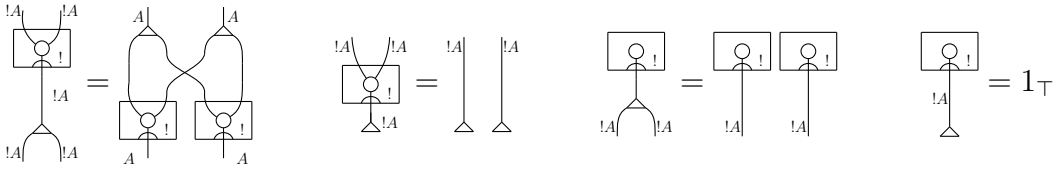
证明。 已知 $A \ {}^\circ\!\!\shortparallel\ B$ 是一个线性幺半群，且 (a, b) : $A \dashv\!\!\!\dashv B$ 是在 !-?-线性分配范畴中的一个线性对偶。

由于 (!,?) 是线性函子，而线性函子保持线性幺半群，因此我们知道 $!A\ ?B$ 是一个线性幺半群。

类似地，根据（!，？）的线性性，我们有对偶（$a'_!$，$b'_?$）：$!A \multimap ?\ B$。由模态 ! 与对偶（$a'_!$，$b'_?$）：$!A \multimap ?\ B$ 给出的余交换$\otimes$-余幺半群（$!A$，Δ_A，e_A）产生了线性余幺半群 $!A ?\ B$。注意，（$!A, \Delta_A$，e_A）是由 ? 模态给出的交换余幺半群（$?B$，∇_B，u_B）的对偶，利用（a'，b'）：$!A \multimap ?\ B$:



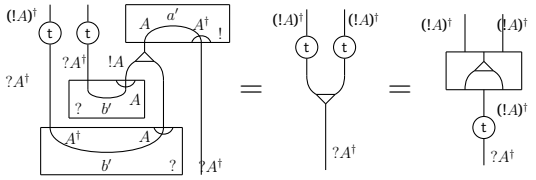
线性幺半群 $!A ?\ B$ 和线性余幺半群 $!A ?\ B$ 在 $!A$上给出了一个 $\otimes$-双代数，并在 $?B$上给出了一个 $\oplus$-双代数。根据 Δ、∇、u 和 e 的自然性，双代数规则是直接成立的:



□

引理 9.34。在任意 (!，？)-†-*LDC* 中，任意 †-线性幺半群 (a, b)：$A \multimap A^\dagger$ 以及任意一个 †-对偶 (a', b')：$A \multimap A^\dagger$ 给出一个 †-线性双代数 $(a_!\ \ b_?)\ (a'_!\ b'_?)$：$!A ?\ A^\dagger$。

证明。回忆一下，存在一个自然同构 $\mathsf{t}: (!\ A)^\dagger \to ?\ A^\dagger$，因为 (!，？) 是一个 †-线性函子。$(a_!\ \ b_?)$：$!A \dagger\text{-}?\ A^\dagger$ 是一个 †-线性幺半群，因为 †-线性函子保持 †-线性幺半群。因此，$(a_!\ \ b_?)$：$!A \dagger\text{-}?\ A^\dagger$ 是一个 †-线性幺半群。$(a'_!\ b'_?)$：$!A \dagger\text{-}?\ A^\dagger$ 是一个 †-线性余幺半群，因为 †-线性函子保持 †-对偶，并且（Δ，∇）是 †-线性变换，即，



根据引理9.33，$!A ?\ A^\dagger$ 是一个线性双代数。因此，$!A ?\ A^\dagger$ 是一个 †-线性双代数。

□

双代数结构源于 Δ 的自然性以及函子性诱导的幺半群结构。

接下来，我们探讨自由指数模态所诱导的双代数结构，以及它们与互补系统的联系。

9.4.3 指数 †-线性逻辑的相继式演算

在线性逻辑的相继式演算中，指数 ! 和 ? 的规则如图所示9.1。

$$(thin.L)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} \qquad (thin.R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, ?B}$$

$$(der.L)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} \qquad (der.R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, ?B}$$

$$(contr.L)\ \frac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} \qquad (contr.R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, ?B, ?B}{\Gamma \vdash \Delta, ?B}$$

$$(stor.L)\ \frac{!\Gamma, A \vdash ?\Delta}{!\Gamma, ?A \vdash ?\Delta} \qquad (stor.R)\ \frac{!\Gamma \vdash ?\Delta, B}{!\Gamma \vdash ?\Delta, !B}$$

图 9.1：指数模态的序列规则

从范畴论的角度看，相继式规则（$thin.L$）和（$contr.L$）意味着 $!A$ 是一个余交换余幺半群。同样，规则（$thin.L$）和（$contr.L$）意味着 $?B$ 是一个交换幺半群。存储规则（$stor.L$ 和 $stor.R$）以及去直规则（$der.L$ 和 $der.R$）使 (!,?) 成为一个线性函子，如图9.2所示。此外，该线性函子也是一个线性余单子，详情见 [22] 。

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{!\Gamma, A \vdash ?\Delta}\, der.L, der.R}{!\Gamma, ?A \vdash ?\Delta}\, stor.L \qquad \frac{\dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{!\Gamma \vdash B, ?\Delta}\, der.L, der.R}{!\Gamma \vdash !B, ?\Delta}\, stor.R$$

图 9.2：(!,?) 线性函子的推导

在存在 †的情况下，(!,?) 指数模态必须满足图 9.3 中给出的附加规则，使 (!,?) 成为一个 †-线性函子。图 9.4和 9.5展示了 (!,?) 成为 †-线性函子的同构 $\mathsf{s} : (?A)^\dagger \xrightarrow{\simeq} (!A)^\dagger$和 $\mathsf{t} : (!A)^\dagger \to ?(A^\dagger)$。

$$(\dagger\text{-}exp.L)\ \frac{\Gamma, ?(A^\dagger) \vdash \Delta}{\Gamma, (!A)^\dagger \vdash \Delta} \qquad (\dagger\text{-}exp.R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, !(B^\dagger)}{\Gamma \vdash \Delta, (?B)^\dagger}$$

图 9.3： †-指数模态的序列规则

在一个（！，？）-†-LDC 中，对于任意 †-对偶， A，！A 是一个 †-对偶，因为这一对（！，？）是一个 †-线性函子，而 †-线性函子保持 †-对偶。图9.6 展示了相继式演算中的证明：如果 A 是一个 †-对偶，那么！A 也是一个 †-对偶。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,id}{A\vdash A^{\dagger\dagger}}\,\iota L}{?(A^{\dagger\dagger})\vdash ?A}\,(!,?)\text{ linear functor}}{(!A^{\dagger})^{\dagger}\vdash ?A}\,\dagger\text{-}exp.L}{(?A)^{\dagger}\vdash(!(A^{\dagger}))^{\dagger\dagger}}\,\dagger}{(?A)^{\dagger}\vdash !(A^{\dagger})}\,\iota R^{(-1)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,id}{A^{\dagger}\vdash A^{\dagger}}\,\dagger}{!(A^{\dagger})\vdash !(A^{\dagger})}\,(!,?)\text{ linear functor}}{!(A^{\dagger})\vdash(?A)^{\dagger}}\,\dagger\text{-}exp.R$$

图 9.4：同构 s : (?A)† →!($A^{\dagger}$) 的推导

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,id}{A\vdash A^{\dagger\dagger}}\,\iota R}{!A\vdash !(A^{\dagger\dagger})}\,(!,?)\text{ linear functor}}{!A\vdash(?(A^{\dagger}))^{\dagger}}\,\dagger\text{-}exp.R}{(?(A^{\dagger}))^{\dagger\dagger}\vdash(!A)^{\dagger}}\,\dagger}{?(A^{\dagger})\vdash(!A)^{\dagger}}\,\iota L^{(-1)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,id}{A^{\dagger}\vdash A^{\dagger}}\,\dagger}{?(A^{\dagger})\vdash ?(A^{\dagger})}\,(!,?)\text{ linear functor}}{(!A)^{\dagger}\vdash ?(A^{\dagger})}\,\dagger\text{-}exp.L$$

图 9.5：同构 t：(!A)† →?($A^{\dagger}$) 的推导

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,id,(\top L)}{\vdash A,A^{\dagger}}\,\dagger\text{-}dual.R}{\vdash !A,?(A^{\dagger})}\,(!,?)\text{ linear functor}\qquad ?(A^{\dagger})\vdash(!A)^{\dagger}}{\vdash !A,(!A)^{\dagger}}\,\text{cut}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,id}{A^{\dagger},A\vdash}\,\dagger\text{-}dual.L}{?(A^{\dagger}),!A\vdash}\,(!,?)\text{ linear functor}}{(!A)^{\dagger},!A\vdash}\,\dagger\text{-}exp.\mathrm{L}}{(!A)^{\dagger}\otimes !A\vdash\bot}\,(\otimes L),(\bot R)$$

$$\dfrac{\top\vdash !A\oplus(!A)^{\dagger}}{\vdash !A,(!A)^{\dagger}}\,(\top L),(\oplus R)$$

图 9.6：序列演算证明：- !A 是 †-对偶，当且仅当 A 是 †-对偶

9.4.4 自由指数模态的互补性

在本节中，我们证明，在具有自由指数的 †-isomix 范畴中，每个 †-互补系统都源自由自由指数诱导的 †-线性双代数的紧化。为此，我们考虑 isomix 范畴中的任意互补系统，以及自由指数模态在该互补系统上诱导的线性双代数（如引理 9.33所述）。我们证明，所诱导的线性双代数配备了一个截面余代数二元幂等元，该幂等元分裂后给出原互补系统。

定义 *9.35*。若 *(!, ?)*-线性范畴具有自由指数模态 *[89]*，则对于任意对象 A，$(!A, \Delta_A, \epsilon_A)$ 是一个余自由余交换 $\otimes$-余幺半群，而 $(?A, \nabla_A, \eta_A)$ 是一个自由交换的 $\oplus$-幺半群。这意味着，若 (B, d, e) 是一个余交换余幺半群，则对于所有映射 $f\colon B \to A$，都存在唯一的余幺半群态射 $f^\flat\colon (B, d, e) \to (!A, \Delta_A, \epsilon_A)$，使得图表 *(a)* 交换。类似地，若 (C, m, u) 是一个交换幺半群，则对于所有 $g\colon A \to C$，都存在唯一的幺半群态射 $g^\sharp\colon (?A, \nabla_A, \eta_A) \to (C, m, u)$，使得图表 *(b)* 交换：

$$(a)\quad \begin{array}{ccc} (B,\ d,\ e) & & \\ {\scriptstyle \exists!\ f^\flat}\big\downarrow & \searrow^{f} & \\ (!A, \Delta_A, \epsilon_A) & \xrightarrow[\epsilon_A]{} & A \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (?A,\ \nabla_A,\ \eta_A) \\ & \searrow_{g} & {\scriptstyle \exists!\ g^\sharp}\big\downarrow \\ & & (C, m, u) \end{array}$$

在一个 (!,?)-LDC 中，自由指数模态的泛性质意味着，对于任意对偶，由自由指数在该对偶上诱导的线性余幺半群在以下意义下是余泛的：

引理 9.36. 在具有自由指数的$(!,\ ?)$-*LDC* 中，若$(x, y)\colon X \multimap Y$是一个线性余幺半群，并且

$$(f, g)\colon ((x, y)\colon X \multimap Y) \to ((a, b)\colon A \multimap B)$$

是对偶态射，那么由自由指数的泛性质所诱导的唯一映射$(f^\flat, g^\sharp)$是线性余幺半群态射：

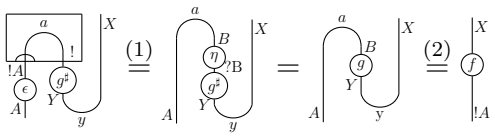
$$\begin{array}{ccc} (x, y) : X \multimap Y & & \\ {\scriptstyle (f^\flat, g^\sharp)}\big\downarrow & \searrow^{(f,g)} & \\ (a_!, b_?) : !A \multimap ?B & \xrightarrow[(\epsilon,\eta)]{} & (a, b) : A \multimap B \end{array}$$

证明。 已知 (f, g) 是一个对偶态射。我们必须证明，由 (!,?) 的泛性质给出的 $(f^\flat, g^\sharp)$ 是一个对偶态射；为此，只需证明下方左侧的等式成立，

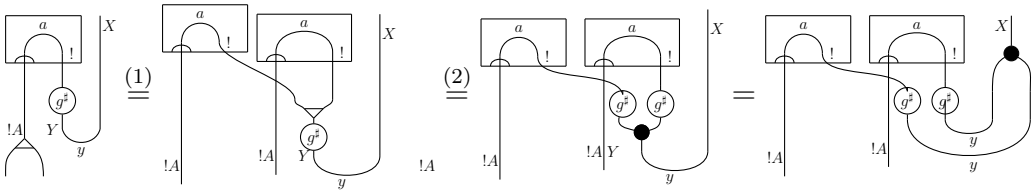
然而，左侧的等式成立，当且仅当右侧的等式成立：



现在，根据 !函子的余泛性质， $f^\flat$ 是满足 $f^\flat\epsilon = f$ 的唯一余幺半群同态。要证明后一个等式成立，只需证明：



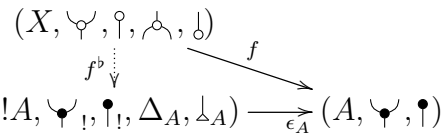
其中，(1) 成立是因为 (ϵ, η) 是线性变换，而 (2) 成立是因为 f 和 g 是伴随对应。



步骤 (1) 用到了 (Δ, ∇) 是线性变换这一事实，而 (2) 成立是因为 $g^\sharp$ 是幺半群态射。因此，$(f^\flat, g^\sharp)$ 是对偶态射。 □

接下来，我们证明，在具有自由指数模态的 (!,?)-LDC 中，给定任意幺半群，由自由指数在该幺半群上诱导的线性双代数（如引理9.33 所述）在以下意义下是余泛的：

引理 9.37。 在具有自由指数模态的(!,?)-*LDC* 中，如果$(X, , , ,)$ 是一个双代数，且 $f : X \to A$ 是幺半群态射，那么由 ! 的余泛性质给出的 $f^\flat : X \to !A$ 是一个双代数同态



其中，$!A$ 上的乘法和单位由(!,?)的线性性诱导):

$$:=!A\otimes!A \xrightarrow{m_\otimes}!(A\otimes A) \xrightarrow{!( )}!A \qquad := \top \xrightarrow{m_\top}!\top \xrightarrow{!( )}!A$$

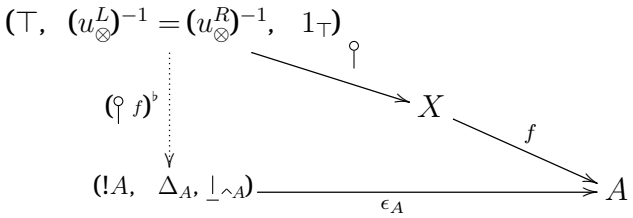
证明。 鉴于在具有自由指数模态的 (!,?)-LDC 中，$(X, , , ,)$ 是一个双代

数，$(A, ,)$是一个幺半群，且 $f: X \to A$ 是一个幺半群态射。 A 上的幺半群诱导出一个双代数 $(!A, !, !\Delta_A, \wedge_A)$。我们必须证明，由 $(!A, \Delta_A, \wedge_A)$ 的余泛性质所确定的 $f^\flat$ 是一个双代数态射，也就是说， $f^\flat$ 同时是幺半群态射和余幺半群态射。

由给定的余泛图可知， $f^\flat : (X, ,) \to (!A, , \Delta_A, e_A)$ 是一个余幺半群态射。我们必须证明 $f^\flat : (X, ,) \to (!A, ,)$ 是一个幺半群态射，也就是说，以下图表是交换的：

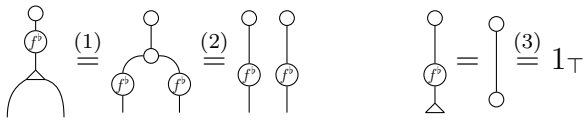
$$(a)\quad \begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{f^\flat \otimes f^\flat} & !A \otimes !A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f^\flat]{} & !A \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{ccc} \top & & \\ \downarrow & \searrow^{!} & \\ X & \xrightarrow[f^\flat]{} & !A \end{array}$$

为了证明 (a) 是交换的，考虑以下余泛图表。



证明 $(f)^\flat = f^\flat$：

显然，$(f)^\flat \epsilon_A = f^\flat \epsilon_A = f$。此外， $f^\flat$ 是余幺半群同态，因为：



其中，(1) 是因为 $f^\flat : X \to !A$ 是余幺半群态射，而 (2) 和 (3) 是因为 X是双代数。

证明 $(f)^\flat = :$

我们有 $\epsilon_A = m_\top ( ) \epsilon_A = = f$，因为 ϵ_A 是幺半群的变换，且 f是幺半群同态。此外， 是余幺半群态射，这归因于Δ和 的自然性。

根据 $^\flat$的唯一性，我们有 $(f)^\flat = f^\flat$。因此， $f^\flat$ 保持 X的单位。于是， $f^\flat : (X, ,) \to (!A, ,)$ 是幺半群同态。由于 $f^\flat$ 既是幺半群态射又是余幺半群态射，因此它是双代数态射。 □

至此讨论的结果可以结合起来，得出关于线性双代数的更复杂结论：

命题 9.38。 在具有自由指数模态的 *(!,?)-LDC* 中，设 $(x,y)\ (x',y') : X \bullet Y$ 是一个线性双代数，$(a,b) : A \circ B$ 是一个线性幺半群，且 $(a',b') : A \multimap B$ 是一个对偶，则

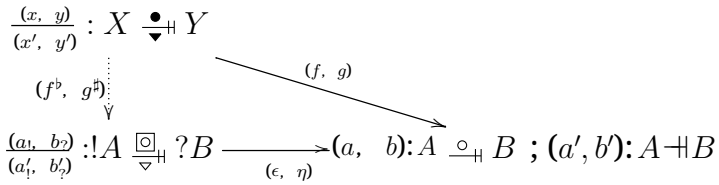
$$(f^\flat, g^\sharp) : \left(\frac{(x,y)}{(x',y')} : X \multimap Y\right) \to \left(\frac{(a_!, b_?)}{(a'_!, b'_?)} : !A \multimap ?B\right)$$

是一个双代数态射，当且仅当 $f : (X, ,) \to (A, ,)$ 是一个幺半群态射，并且 (f, g) 是两个对偶的态射

$$(f,g) : ((x,y) : X \multimap Y) \to ((a,b) : A \multimap B) \quad \text{and} \quad (f,g) : ((x',y') : X \multimap Y) \to ((a',b') : A \multimap B)$$

证明。 给定一个线性幺半群 $(a,b) : A \circ B$，以及 $(a',b') : A \multimap B$ 是一个任意的对偶。根据引理 9.33，我们知道 $!A\ ?B$ 是一个线性双代数。

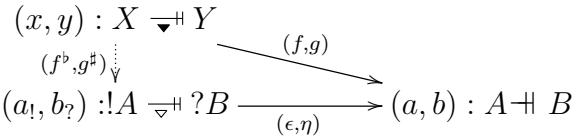
已知 (f,g) 是一个线性幺半群态射，也是如下图表所示的对偶态射。我们必须证明 $(f^\flat, g^\sharp)$ 是一个双代数态射：



由于 $(f,g) : ((x',y') : X \multimap Y) \to ((a',b') : A \multimap B)$ 是对偶态射，因此由引理 9.36 可知，$(f^\flat, g^\sharp) : ((x',y') : X \multimap Y) \to ((a'_!, b'_!) : !A \multimap ?B)$ 是线性余幺半群态射。

已知 $(f,\ g)$ 是线性幺半群态射。这意味着 $(f,\ g) : ((x,\ y) : X \multimap Y) \to ((a,\ b) : A \multimap B)$ 是对偶态射，而 $f : (X,\ ,\ ) \to (A,\ ,\ )$ 是幺半群态射。我们需要证明 $(f^\flat,\ g^\sharp)$ 是线性幺半群态射。

我们知道，在对称 LDC 中，任何带有 $\otimes$-余幺半群的对偶都会给出一个线性余幺半群。因此，对偶 $(x,y) : X \multimap Y$ 和 $\otimes$-余幺半群 $(X, ,)$ 会产生一个线性余幺半群 $(x,y) : X \bullet Y$。现在，对偶 $(a,b) : A \multimap B$ 在指数模态上诱导出一个线性余幺半群 $(a_!, b_?) : !A\ ?B$。由此得到如下图表所示的情形：

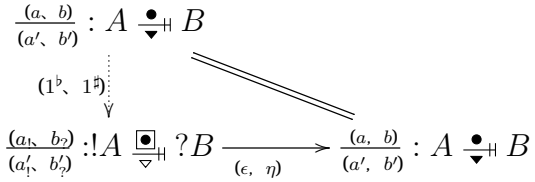


应用引理 9.36 于上述图表可得，$(f^\flat,\ g^\sharp)$ 是一个对偶态射。注意，上述图表中 X 和 $!A$ 上的线性余幺半群不同于 $X \bullet Y$ 和 $!A\ ?\ B$ 双代数中的线性余幺半群。

接下来还需证明 $f^\flat$： $(X、\ 、\ )\ \bullet\ \to\ (!\ A、\ ?\ ,\ !\ )$ 是幺半群态射。这由引理 9.37给出。 □

推论 9.39。 在具有自由指数模态的*(!,?)-LDC*中，如果$A \bullet B$ 是线性双代数，那么$(1^\flat、1^\sharp)$: $(A \bullet B) \to (!A\ ?B)$ 是双代数态射，使$A \bullet B$成为$!A\ ?B$ 的收缩，如下图表所示：

$$\begin{tikzcd}
\frac{(a、b)}{(a'、b')} : A \bullet B \arrow[d, dotted, "(1^\flat、1^\sharp)"'] \arrow[dr, equal] & \\
\frac{(a_!、b_?)}{(a'_!、b'_?)} : !A \bullet ?B \arrow[r, "(\epsilon,\ \eta)"'] & \frac{(a,\ b)}{(a',\ b')} : A \bullet B
\end{tikzcd}$$



该推论表明，在带有自由指数模态的(!,?)-LDC中，每个自线性双代数都会为指数模态上诱导的线性双代数诱导出一个截面二元幂等元：

$$!A \underset{1^\flat}{\overset{\epsilon}{\rightleftarrows}} A \simeq B \underset{1^\sharp}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} ?B$$

此外，该幂等元可分裂；当自线性双代数位于核心中时，它是余环。

结合推论9.39和引理 9.26，可得：

定理 9.40。 在具有自由指数模态的$(!,?)$-*isomix* 范畴中，每个互补系统都可表示为自由指数模态上的一个截面二元幂等元的分裂。

由于 (!,?)、(η, ϵ)、(Δ, ∇) 和 (,) 的 †-线性性，上述结果可直接推广到具有自由指数模态的 †-LDC 中的 †-线性双代数。

定理 9.40 是量子理论中的一项新发现：它提供了一种非函子方法，可从「第二次量子化」中重新获得「第一次量子化」。

第10章

例子

本章将介绍线性幺半群和余幺半群的例子，以及适用于线性分配范畴的指数模态。

10.1 对偶与线性幺半群

本节　　专门讨论（†-）对偶和（†-）线性幺半群的例子　　s.

10.1.1 FRel 中的对偶与FMat（R）

在本节中，我们将考察 FRel、FMat(R)、Rel 和 Mat(R) 中的对偶，其中 R 是交换幺半环。我们将证明，在 FRel 和 FMat(R) 中，每个对偶也是一个 †-对偶。我们还将证明，在 Rel 和 Mat(R) 中，†-对偶与酉对偶一致。在开始证明之前，我们先简要回顾 FRel 和 FMat(R) 中的对偶、匕首、张量以及 par 积。

在 FRel 和 FMat(R) 中，一个有限性空间的对偶 (X，$F(X)$ $F(X)^{\perp}$)* 由 (X，$F(X)^{\perp}$，$F(X)$) 给出。对于任意有限性关系 R，其对偶关系 R^* 是 R 的逆关系。对于任意有限性矩阵 M，其对偶矩阵 M^* 由对 M 进行转置得到。

FRel 和 FMat(R) 都是共轭的 $*$-isomix 范畴，参见 3.23。共轭函子 (–) 与 $*$ 一起给出 † 函子：$(–)^{\dagger} = (–)^* = (–)^*$。在 FRel 中，共轭函子是恒等函子，因此，† 与 $*$ 函子一致。在 FMat(R) 中，共轭函子由幺半环 R 上的共轭给出。因此，有限性矩阵的 † 由其共轭转置给出。

范畴 FRel 具有对称的张量积，可用于在 FMat(R) 上构造相应的张量积。FRel 的张量积定义如下：　$X \otimes Y =$

$(X,\ F(X))\ \otimes(Y,\ F(Y)):=(X\times Y,\ F(X\otimes Y)\ F(X\otimes Y)^{\perp})$，其中

$$F(X\otimes Y):=\downarrow\{A\times B\mid A\in F(X),B\in F(Y)\}$$

其中 $\downarrow\mathcal{A}:=\{A'\mid A'\subseteq A,A\in\mathcal{A}\}$ 是子集集合 $\mathcal{A}$ 的向下闭包。par 按照标准方式定义：

$$X\oplus Y=(X^*\otimes Y^*)^*$$

张量和 par 的单位相同：$\top=\perp=(\{*\},\ \{\varnothing,\{*\}\})$。FRel 和 FMat($R$) 都是对称的 †-$*$-isomix 范畴。

引理 10.1。在FRel 和 FMat(R)中，每个对偶也是一个 †-对偶。

证明。我们先在 FRel 中证明该命题。设 $(X,\ F(X)\ F(X)^{\perp})$ 是 FRel 中任意一个有限性空间。考虑它的对偶 $(\eta,\ \epsilon):X\dashv X^*$。关系 $\eta:\top\to X\oplus X$ 和余单位$\epsilon:X\otimes X\to\perp$ 与 Rel 中对偶的情况相同：

$$\eta:=\{(*,(x,x))|x\in X\}\qquad\epsilon:=\{((x,x),*)|x\in X\}$$

我们证明 η和 ϵ 确实是有限性关系。为证明 η 是有限性关系，根据引理 2.33-(iii)，只需证明以下内容：

(i) for all $A\in F(\top)=\{\varnothing,\{*\}\}$, $A\triangleright\eta\in F(X\oplus X^{\perp})$,

(ii) 对所有 $b\in X\oplus X^{\perp}=X\times X$, $\eta\triangleleft b\in F(\top)^{\perp}=\{\varnothing,\{*\}\}$。

(ii) 显然成立。我们证明 (i) 成立：若 $A=\emptyset$，则 $A\triangleright\eta=\emptyset\in F(X\oplus X^{\perp})$；若 $A=\{*\}$，则：

$$A\triangleright\eta=\{(x,x)\mid x\in X\}$$

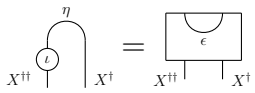
我们必须证明 $A\triangleright\eta\in F(X\oplus X^{\perp})$ 然而，$F(X\oplus X^{\perp})=F(X^{\perp}\otimes X^{\perp\perp})^{\perp}=F(X^{\perp}\otimes X)^{\perp}$。根据引理 2.40，$A\eta\in F(X^{\perp}\otimes X)^{\perp}$ 当且仅当以下条件成立：

(a) 对所有 $P\in F(X)^{\perp}$, $P\triangleright S\in F(X)^{\perp}$

(b) 对所有 $Q\in F(X)$, $S\triangleleft Q\in F(X)^{\perp\perp}=F(X)$

其中 $S=A\eta$。然而，显然 $P\triangleright S=P$，且对于所有 $P\in F(X)^{\perp}$，$S\triangleleft Q=QQ\in F(X)$。因此，$S=A\triangleright\eta\in F(X\oplus X^{\perp})$。由此，$\eta$满足条件（$i$），因而是一个有限性关系。由于 ϵ 只是 η的逆关系，它也是一个有限性关系。

最后，为了证明在 FRel 中每个对偶都是一个 †-对偶，我们必须证明以下等式成立：



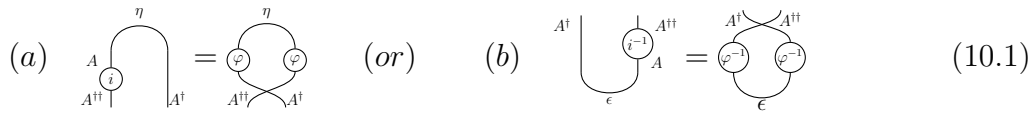
然而，上述方程是自动成立的，因为在 FRel 中，对于任意有限性空间 X，我们都有 $X^\dagger = X^*$ 和 $X = X^{\dagger\dagger}$。此外，对于任意有限性关系 R，有限性关系 $R^\dagger$ 由 R的逆关系给出，因此 $\eta = \epsilon^\dagger$，正如所要求的那样。

同样的证明可以扩展到证明：在 FMat(R) 中，每个对偶都是一个 †-对偶，因为每个有限性矩阵的支撑都是一个有限性关系。 □

注意，当 X 是有限集时，该有限性空间为（X，$\mathcal{P}(X)$），它是一个自对偶对象。这类空间属于 FMat(R) 的核心，并给出子范畴 Mat(R)，后者是一个 †-紧闭范畴。因此，Mat(R) 中的每个对偶也是 † 对偶。这引出了一个问题：在 Mat(R) 中，†-对偶是否与传统 dagger 对偶（$\eta^\dagger = c_\otimes \epsilon$）相同。

为了回答这个问题，我们先确定在酉范畴中，†-对偶成为酉对偶的条件（参见 4.3）。回顾一下，酉范畴是松的 † 幺半范畴（$A \simeq A^\dagger$），而 †-幺半范畴是严格酉范畴（$A = A^\dagger$）。当酉范畴是 †-幺半范畴时，酉对偶恰好就是传统 dagger 对偶。

引理 10.2。 设 $(\eta, \epsilon) \colon A \dashv\!\vdash A^\dagger$ 是酉范畴中的一个右 †-对偶，则若满足以下任一条件，$(\eta, \epsilon) \colon A \dashv\!\vdash A^\dagger$就是酉对偶：



(10.1)

现在来考察在 Mat(R) 中，if †-对偶是否与酉对偶重合。Mat(R) 是一个 †-幺半范畴，其中每个对偶也是酉对偶。因此，该范畴是 †-紧闭的。

引理 10.3。 在 Mat(R) 和 Rel中，每个对象都是其自身的右 †-对偶和左 †-对偶。因此，每个对偶都是 †-对偶。

证明。 我们先考虑Mat(R)。回顾第 6.2.3 节，在 Mat(R) 中，每个对象n 都是自对偶的。此外，对合 $\iota : n \to n^{\dagger\dagger}$ 是 I_n恒等映射。给定 $(\eta, \epsilon) \colon n \dashv\!\vdash n$，我们有 $\eta^\dagger = \epsilon$:

$$\eta^\dagger := \left(\overline{\sum_{i=1}^{n}(e_i \otimes e_i)}\right)^T = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{(e_i \otimes e_i)}\right)^T = \sum_{i=1}^{n}(\overline{e_i}^T \otimes \overline{e_i}^T) = \sum_{i=1}^{n}(e_i^T \otimes e_i^T) =: \epsilon$$

因此，FMat(R) 中的每个对偶也是一个 †-对偶。还需注意，Mat(R) $\simeq$Core(FMat(R))。由于该命题在 FMat(R) 中成立，因此它在 Mat(R) 中也必然成立。

在 Rel 中，每个对象也是自对偶的，且对合为 $\iota = 1$。注意，在 Rel 中，对于任意 (η, ϵ)：$A \dashv\vdash A$,

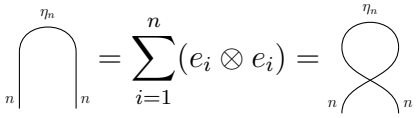
$$\eta := \{(*,(x,x)) \mid x \in A\} = \{(,(x,x))| \ x \in A\}^{\dagger\dagger} = \{((x,x),\{*\}) \mid x \in A\}^{\dagger} =: \epsilon^{\dagger}$$

□

接下来我们证明 在 Mat(R) 和 Rel 中，匕首对偶与酉对偶一致 ：

引理 10.4。 在 Mat(R)和 Rel 中，每个 †-对偶也是酉对偶。

证明。 根据引理 10.3，在 Mat($\mathbb{C}$) 和 Rel 中的每个对偶 †-对偶。现在注意，在Mat($\mathbb{C}$) 中，对于所有 $n \in N$,

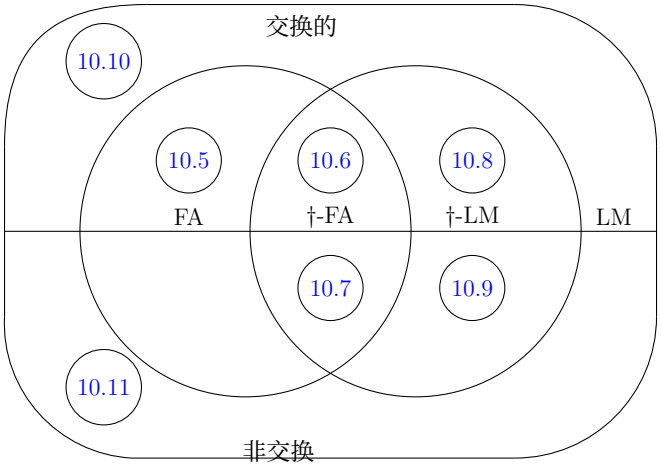


并且， $c_{\otimes}\epsilon_n = \epsilon_n$因此，根据引理 10.2 在 Mat(R) 中，每个 †-对偶也是酉对偶。

在 Rel 中也一样，对于所有 (η, ϵ)：$\{*\} \longrightarrow A \times A$, $\eta = \{(*, (x, x))| \ x \in A\} = \eta c_{\otimes}$, 由此 $\epsilon = c_{\otimes}\epsilon$。因此，在 Rel 中，每个 †-对偶都是酉对偶。 □

10.1.2 FHilb 中的线性幺半群

本节将通过下图所示的维恩图，介绍 FHilb 中线性幺半群和 Frobenius 代数的区分性例子。



LM：线性幺半群

FA：弗罗贝尼乌斯代数

图表各截面中的数字指向下方列出的例子。

例10.5。 *[49]* FHilb 中的每个特殊交换 *Frobenius* 代数（*SCFA*）都恰好对应于任意一个可复制基。

所谓可复制基，是指相应 SCFA 的余乘法会复制（即生成副本）基元素。类似地，给定一个 SCFA，相应的基由那些会被该 SCFA 的余乘法复制的向量构成。

例子 10.6。 *[49]*每个交换的 †-*Frobenius*代数在 FHilb 都恰好对应一个正交可复制基。

例子 10.7。 裤子代数是非交换的 †-*Frobenius*代数。回顾一下，在FHilb中，裤子代数由 $n \times n$ 复矩阵的代数给出，参见截面 *6.4.1*。

域上的多项式代数 给出了丰富的线性幺半群例子 .

例子 10.8。 在 FHilb 中，基本魏尔代数 $\mathbb{C}[x]/x^2 = 0$ 是一个交换的 †-线性幺半群。

证明。 考虑二维基本魏尔代数： $\mathbb{C}[x]/x^2 = 0$ 该代数的乘法 m 可以表示为一个矩阵 M，具有 4 行和 2 列。行从顶到底的索引为 1。1、 $1.x$、 $x.1$ 和 $x.x$。列从左到右的索引为 1 和 x。乘法矩阵如下所示：

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然， $M^* = M^\dagger$，也就是 M 的转置，与其共轭转置相同。此外，乘法是交换的。因此，$\mathbb{C}[x]/x^2 = 0$ 是一个交换的 †-线性幺半群。

它不是一个 †-Frobenius代数，因为该代数并非由可复制基生成。证明如下。反设 $\mathbb{C}[x]/x^2 = 0$ 由可复制基生成，并令 $b_i = a + bx$ 为一个基元素。由于该基可复制，我们有 $(b_i \otimes b_i)m = b_i$。利用 b_i 的矩阵表示，可得以下方程：

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right] M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

上述方程的可能解为： $b_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$、 $b_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $b_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$。显然，这些矩阵不能构成该代数的一组基。因此，给定的 Weil代数不是 Frobenius。

□

例 10.9。 在 FHilb 中，多项式代数 $\mathbb{C}[x, y, z]/x^2 = 0\, y^2 = 0\, z^2 = 0\, xy = iz\, yx = -iz$ $xz = 0\, zx = 0\, yz = 0\, zy = 0$ 是一个非交换的 †-线性幺半群。

证明。 考虑四维多项式代数,

$$\mathbb{C}[x,y,z]/x^2=0,y^2=0,z^2=0,xy=iz,yx=-iz,xz=0,zx=0,yz=0,zy=0$$

考虑该代数的乘法映射 m。注意，对于所有 i， $j\in\{1,x,y,z\}$，乘法的共轭与乘法映射重合:

$$\overline{m}(i,j)\overset{(1)}{=}\overline{m(j,i)}\overset{(2)}{=}m(i,j)$$

步骤（1）成立，因为共轭会反转类型的顺序。对于所有 i， j，步骤（2）对于给定的代数成立。由于给定的幺半群与共轭幺半群重合（等价地， † 该幺半群的对偶与该幺半群重合），且乘法是非交换的，因此我们得到一个非交换的 †-线性幺半群。

如同前一截面中一样，我们证明该代数不是由可复制基生成的。假设该代数存在一个可复制基，考虑任意一个基元素$e_i=(a+bx+cy+dz)$。求解方程 $e_i.e_i=e_i$ 得到以下情形:

$$a^2=0\qquad ab+ba=b\qquad ac+ca=c\qquad ad+da=d$$

上述方程的解为： $a=1$， -1，0； $b=c=d=0$，这不是一个基。这导致矛盾。因此，给定的代数不是 †-Frobenius。 □

例 10.10. 在FHilb中，下列代数是一个交换线性幺半群 :

$$C[x,y,z]/x^2=0,y^2=0,z^2=0,xy=iz,yx=iz,xz=0,zx=0,yz=0,zy=0$$

证明。 回想一下，FHilb 是一个对称 KCC。范畴中的每个对象都带有一个选定的对偶，且对偶是对称的。因此，该范畴中的每个幺半群都自动是一个线性幺半群。注意，这个幺半群是交换的。因此，给定的代数是一个交换线性幺半群。

它不是一个交换 Frobenius 代数，因为该代数不存在可复制基：反设 $e_i=a+bx+cy+dz+e(yz)$ 是可复制基中的一个元素。由于该基可复制，必须满足：$(e_i\otimes e_i)m=e_i$。 于是我们有，

$$a^2=a;\qquad 2ab=b\qquad 2ac=c\qquad 2(ad+ibc)=d$$

上述方程的解为： $a=1$， -1，0； $b=c=d=0$，它们不构成一个基。因此，给定的代数不可能是 Frobenius。 □

示例 10.11。 在FHilb中，下述代数是一个非交换线性幺半群：

$$\mathbb{C}[x,y,z]/x^2=0,y^2=0,z^2=0,xy=iz,yx=z,xz=0,zx=0,yz=0,zy=0$$

与上面的例子类似可证。

10.2 指数模态

本节给出几个具有自由指数模态的 LDC 的例子。 [81, 90] 讨论了更多具有自由指数模态的范畴例子。关于自由指数模态的显式构造，详见 [98, 113]。

10.2.1 Rel 的自由指数模态

我们知道，Rel，即集合与关系范畴，是一个 †-紧闭范畴，参见第 6.2.1 节。因此，Rel 是一个具有 $\otimes=\oplus$ 的紧 LDC。范畴 Rel 带有如下定义的自由指数模态：

(i) 对于集合 X，$!X$ 是由 X 的所有有限多重集构成的集合：

$$!X:=\{[\![x_1,\cdots,x_n]\!]\ |x_i\in X\}$$

对于关系 $R:\ X\to Y$，$!R$ 将具有相同数量不同元素的多重集相关联，使得每个多重集中的 i^{th} 不同元素都通过 R相关联：

$$!R:=\{([\![x_1,\cdots,x_n]\!],[\![y_1,\cdots,y_n]\!])|(x_i,y_i)\in R\}$$

在 Rel 中，由于每个对象都是自对偶的，$?X=(!X)^{\dagger *}=!X$。类似地，对于任意关系 R，

$$?R=(!R)^{\dagger *}=(?R^{\circ})^{\dagger}=!(R^{\circ\circ})$$

其中 R° 是逆关系。

（ii） $\delta_X:\ !X\to !!X$ 将一个 X 有限多重集与该多重集所有可能拆分的集合相关联。

$$\delta_X:=\{K,[\![K_1,K_2,\cdots,K_n]\!])|K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_n=B\}\subseteq !X\times !!X$$

注意，$!!X$ 的一个元素是一个有限多重集，其元素是X的有限多重集。 $\mu_X:?X\to ??X$ 是 δ_X的逆关系。

(iii) $\epsilon_X :!X \to X$ 将 X 中的单元素多重集与该元素本身关联起来。 η_X 是 ϵ_X的逆关系。

$$\epsilon_X := \{([\![x]\!], x) | x \in X\} \subseteq !X \times X$$

(iv) $(m_\otimes)_{X,\ Y} :!X \times !Y \to !(X \times Y)$ 是一种关系，它将 X 和 Y 中具有相同不同元素个数的有限多重集，与它们的笛卡尔积所得到的多重集关联起来：

$$(m_\otimes)_{X,Y} := \{(([\![x_1, \cdots, x_n]\!], [\![y_1, \cdots, y_n]\!]), [\![(x_i, y_j))|0 < i, j \leq n]\!] | x_i \in X, y_j \in Y\}$$
$$\subseteq (!X \times !Y) \times !(X \times Y)$$

$(n_\otimes)_{X,\ Y} :?(X \times Y) \to ?X \times ?Y$ 是 $(m_\otimes)_{X,\ Y}$ 的逆关系。

(v) $m_I = \{*\} \to !\{*\}$ 就是笛卡尔积 $\{*\} \times !\{*\}$，也就是说， m_I 将 $*$ 与 $!\{*\}$ 中的每个元素关联起来。关系 $n_I :?\{*\} \to \{*\}$ 是 m_I 的逆关系

(vi) $\Delta_X :!X \to !X \times !X$ 将 X 的一个有限多重集与两个有限多重集组成的有序对关联起来，使得该有序对是原多重集的一种分裂：

$$\Delta_X := \{K, (K_1, K_2) | K, K_1, K_2 \in !X, K_1 \cup K_2 = K\} \subseteq !X \times (!X \times !X)$$

$\nabla_X :?X \otimes ?X \to ?X$ 是 Δ_X 的逆关系。

(vii) $\text{⊥}_X : !X \to \{*\}$ 将空集与 $!X$ 关联起来。 $\text{⊥}_X : \{*\} \to ?X$ 是 ⊥_X的逆关系。

$$\text{⊥}_X := \{(\emptyset, *)\} \subseteq !X \times \{*\}$$

10.2.2 FRel 和FMat(R)的自由指数模态

在 [64] 中，描述了FRel 以及更一般的 FMat(R) 的指数模态。此外，Christine Tasson 在她的博士论文 [115], 中证明，这个模态在 FRel中是 自由的，其意义取自 Yves LaFont。本节旨在回顾这些结果，并进一步证明 Mat(R) 中的模态也是自由的。这意味着，根据定理 9.40，在 MUC Mat$(\mathbb{C}) \hookrightarrow$ FMat$(\mathbb{C})$ 中，自由指数上的每个互补系统都可作为一个 †-线性双代数的紧化出现。

在一个对称幺半范畴中，我们看到， $\mathbb{X}$，一个**余代数余模态** 由一个余单子给出

$$(! : \mathbb{X} \to \mathbb{X}, !(A) \xrightarrow{\varepsilon} A, !(A) \xrightarrow{\delta} !(!(A)))$$

其中每个对象 !(X) 都自然地带有余交换余幺半群的结构

$$\top \xleftarrow{e} !(X) \xrightarrow{\Delta} !(A)\otimes !(A)$$

使得 $\delta : !(A) \to !(!(A))$ 是这些余幺半群的态射。

在具有有限积和终对象的对称幺半范畴中 $\top$，余代数余模态具有**Seely 同构** [20, 23]，当且仅当以下自然变换是同构：

$$s_\top : !\top \xrightarrow{\lrcorner} I \qquad s_\otimes : !(A \times B) \xrightarrow{\Delta} !(A \times B)\otimes !(A \times B) \xrightarrow{!(\pi_0)\otimes !(\pi_1)} !A \otimes !B$$

因此，$!\top \simeq I$ 和 $!(A \times B) \simeq !A \otimes !B$。

在具有有限积和终对象的对称幺半范畴中，余代数模态是幺半的，当且仅当它具有 Seely 同构：通常，展示 Seely 同构比直接展示幺半结构更容易。

在集合与关系范畴 Rel 中，众所周知，集合 X 上的自由指数模态是 $!(X) := \mathsf{Bag}(X)$，也就是说，它是 X 的所有多重集构成的集合（多重集或袋是允许元素重复出现的集合）。因此，在 FRel 中，我们预期自由指数模态的底集为 $\mathsf{Bag}(X)$；难点在于定义有限性结构。[64] 中对此的描述如下：

$$F(!(X)) := \{S \subseteq \mathsf{Bag}(X) | S^\cup \in F(X)\}$$

其中 $S^\cup$ 是 S中所有多重集的并。因此，$!(X)$ 的有限集是由多重集组成的集合，$S \subseteq \mathsf{Bag}(X)$，其并是 X 的有限集。不难看出这是一个正交闭子集：

引理 10.12。如上所定义，$F(!(X)) = F(!(X))^{\perp\perp}$。

证明。假设 $S \in F(!(X))^{\perp\perp}$ 我们旨在证明由此可推出 $S \in F(!(X))$。反设 $S \notin F(!(X))$，则存在一个 $w \in F(X)^\perp$，使得 $w' := S^\cup \cap w$为无限。这意味着存在一个函数 $f : w' \to S$，它将每个 $a \in w'$ 关联到一个 $f(a) \in S$，且满足 $a \in f(a)$。注意，$\mathsf{cod}(f)$ 是无限的，因为 f 是有限纤维的，这是由于每个多重集只包含有限多个元素。

然而，对于每个 $T \in F(!(X))$，我们都有 $\mathsf{cod}(f) \cap T$有限，而 $\mathsf{cod}(f) \in F(!(X))^\perp$则

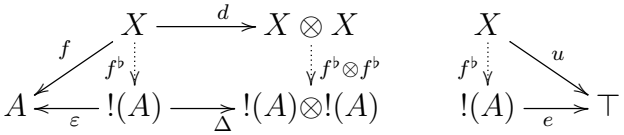
$$f^{-1}(\mathsf{cod}(f) \cap T) \subseteq f^{-1}(\mathsf{cod}(f)) \cap T^\cup \subseteq S^\cup \cap w \cap T^\cup \subseteq w \cap T^\cup$$

其中 $w \cap T^\cup$在 $T \in F(!(X))$ 中是有限的。但 $\mathsf{cod}(f) \cap S = \mathsf{cod}(f)$ 是无限的，因此 S 不属于 $F(!(X))^{\perp\perp}$，证毕。 □

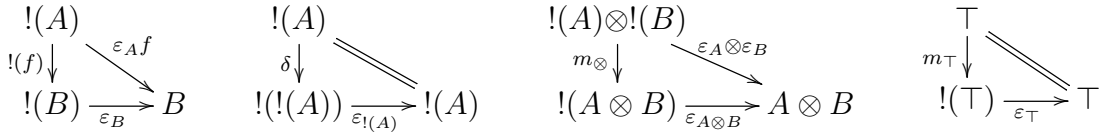
我们将证明如下 [115], 按此定义的 $!(X)$ 是一个自由指数模态。若一个指数模态满足以下条件，则称其为**自由的**：对于任意余交换余幺半群

$$\top \xleftarrow{u} X \xrightarrow{d} X \otimes X$$

以及映射 $f\colon X \to A$，存在唯一的余幺半群同态 $f^\flat\colon X \to !(A)$，使得 $f^\flat \varepsilon = f\colon X \to A$，也就是说，以下图表交换：



回想一下，该性质还给出了指数模态所需的相干条件：



该映射是幺半映射，利用具有余乘法的余交换幺半群来定义

$$!(A)\otimes!(B) \xrightarrow{\Delta\otimes\Delta} !(A)\otimes!(A)\otimes!(B)\otimes!(B) \xrightarrow{1\otimes c_\otimes\otimes 1} !(A)\otimes!(B)\otimes!(A)\otimes!(B)$$

以及具有余乘法 $\top \xrightarrow{u^1_\otimes} \top\otimes\top$ 的单位。

因此，一旦证明某个模态具有这一泛性质，所有必需的相干性便会自动成立。指数模态在 FRel 中是自由的这一事实证明如下： [115]

引理 10.13。 FRel 中的指数模态是自由的。

证明。 由 Rel 我们知道：

$$f^\flat := \{(x,\mu) | \exists n \text{ such that } x d^n(x_1,...,x_n),\ \mu = (a_1,..,a_n), \forall i \le n\ x_i f a_i\}$$

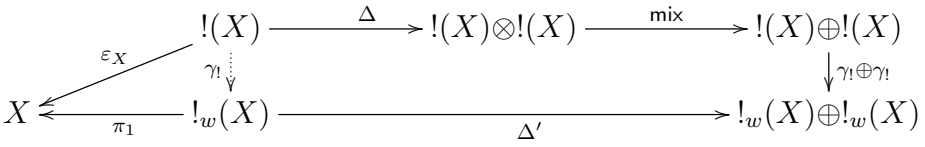
其中 $d^n : X \to X^{\otimes n}$ 是使图表交换的唯一关系。我们必须证明 $f^\flat$ 是有限性关系。

为此，考虑 $f^\flat \triangleleft \{(a_1, \ldots\ldots, a_n)\}$，这与 $d^n(f\otimes\ldots\otimes f) \triangleleft \{(a_1, \ldots\ldots, a_n)\}$相同；后者是一个 X 的余有限集，因为 d^n 和 f 是有限性关系。

还需证明有限关系在 $f^\flat$ 下保持不变。设 $W \in F(X)$，那么我们必须证明 $W \triangleright f^\flat \in F(!(A))$。但 $W \triangleright f^\flat \in F(!(A))$ 当且仅当 $(W \triangleright f^\flat)^\cup \in F(A)$。但 $a \in (W \triangleright f^\flat)^\cup$ 当且仅当存在一个 $w \in W$，使得 $(w, (a_1, ..., a_n)) \in f^\flat$ 且 $a = a_i$。进一步分解可得，$(w, (a_1, ..., a_n)) \in f^\flat$ 当且仅当 $(w, (x_1, ..., x_n)) \in d^n$ 且 $(x_i, a) \in f$。由于 d 是交换的，我们可以假设 $(x_1, a) \in f$；此外，利用结合律，可假设 $(w, (x_1, x_2)) \in d$ 且 $(x_1, a) \in f$。但这样就得到 $(W \triangleright f^\flat)^\cup = (W \triangleright f) \cup \pi_0(W \triangleright d(f \otimes f))$，这是所需的有限集。

□

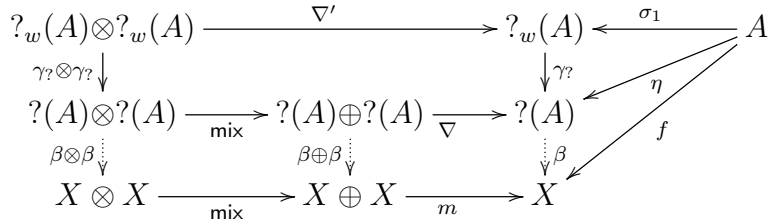
拥有自由指数是一种很强的性质，但当然并非 FRel 独有（例如，参见 [52]）。接下来，我们要证明 $\mathsf{FMat}(R)$ 也具有自由指数。首先值得注意的是，在 FRel 中，总是存在一个从指数模态到线性幺半群模态的变换（见第 10.3节），因为 $!A$ 是一个余幺半群：



请注意，$\gamma_!$ 是一个双射映射，因为它在 Rel 中对应于恒等映射。

定理 10.14。 $\mathsf{FMat}(R)$具有自由指数模态。

证明。 首先注意，对象 $?(A)$ 是一个 $\oplus$-幺半群，其中幺半群映射 $\nabla : ?(A) \oplus ?(A) \to ?(A)$ 和 $\bot \xrightarrow{u} ?(A)$ 由 FRel 中相应映射的特征映射给出。这意味着存在一个由泛映射 $?(A) \xrightarrow{\gamma_?} ?(A)$ 给出的线性变换，该泛映射是通过将混合子与 $\nabla : ?A \oplus ?A \to ?A$ 复合而诱导的。现在，假设给定 $f : A \to X$ 和一个 par 交换幺半群 $m : X \oplus X \to X \leftarrow \bot : e$，那么我们有：



这表明，由于 $\gamma_?$ 和混合子都是双射，若存在一个映射 β 使右下方形图表交换，那么它必定唯一。

现在 $\gamma_?\beta$ 由$?_w$ 的泛性质得出，且 $\gamma_?$ 是单位矩阵（不过，有限性拓扑显著地被弱化了）。因此，只需证明 $\gamma_?\beta$ 诱导出一个映射$?(A) \to X$：这相当于证明 $\gamma_?\beta$ 的支撑是$?(A)$的有限集。然而，将图表转换到 FRel 中后，由于在那里存在这样的 β，可以看出该支撑对于$?(A)$显然是有限的。因此，β 在 $\mathsf{Mat}(R)$ 中是良定义的。

□

在 [64] FMat 的指数模态FMat(R)可通过为有限性矩阵 $R:\ X \to Y$ 在Mat(R)中显式描述 !(A) $\to A^{\otimes^n}\backslash n!$：投影上的映射行为

$$\begin{array}{ccc} !(A) & \xrightarrow{!(R)} & !(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ A^{\otimes^n}\backslash n! & \xrightarrow[R^{\otimes^n}\backslash n!]{} & B^{\otimes^n}\backslash n! \\ {\scriptstyle \nu_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ A^{\otimes^n} & \xrightarrow[R^{\otimes^n}]{} & B^{\otimes^n} \end{array}$$

使用 [64] 中记号的公式：

$$!(R)_{u,v} = \sum_{\sigma \in L(u,v)} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} R^{\sigma}$$

其中 $\sigma \in L(u,\ v) \subseteq \mathrm{Bag}(A \times B)$ 满足 $v(a) = \sum_{b \in B} \sigma_{a,\ b}$ 且 $u(b) = \sum_{a \in A} \sigma_{a,\ b}$（这里我们将多重集视为取值于自然数、具有有限支撑的映射），$R^{\sigma} := \prod_{(a,\ b) \in A \times B} R^{\sigma_{a,\ b}}{}^{b}$，以及 $\begin{bmatrix} v \\ \sigma \end{bmatrix} := \prod_{b \in B} v(b)! / \prod_{a \in A,\ b \in B} \sigma_{a,\ b}!$ 。

对于长度为 n 的多重集，当幺半环中可以除以自然数时，这可以重新表示为 $\nu R^{\otimes^n} \nu^{\square}$。值得注意的是，在 [64] 中，函子被描述为 $!(R)_{u,\ v} = \sum_{\sigma \in L(u,\ v)} \begin{bmatrix} v \\ \sigma \end{bmatrix} R^{\sigma}$（注意，分拆计数项现在是余域）。函子的这种形式源于使用另一种分裂（见注 10.19）；当假设幺半环 R 是一个域时（该论文即采用了这一假设），这种分裂便可用。特别是，这意味着，当 R 具有自然数的逆元时，存在一个非平凡的自同构$\square$:!(A) $\to$!(A)，它会改变组合加权。

10.2.3 Chu 空间中的自由指数模态

Barr 证明了：

定理 10.15. *[16, 定理 4.8]* 如果 $\mathbb{X}$ 是一个局部可呈现的对称幺半闭范畴，且 D 是该范畴中的任意对象，那么 $\mathrm{Chu}_{\mathbb{X}}(D)$ 就是一个带有自由指数模态的线性逻辑模型。

复数域上向量空间及线性映射构成的范畴 Vec($\mathbb{C}$)，是一个对称

的局部可呈现度量幺半闭范畴。值得注意的是，$\mathbf{Chus}^{\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$ 是一个 †-isomix 范畴，参见第 4.4.3 节。我们猜想，$\mathbf{Chus}^{\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$ 的自由指数模态是 †-指数；换言之，$\mathbf{Chus}^{\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$ 是一个 (!，?)-†-isomix 范畴。

10.3 FRel 和$\mathsf{FMat}(R)$中的自由无限线性幺半群

本节中，我们将介绍一种构造，利用 LDC 中用于指数模态的标准构造（参见第9.4节），在具有某些极限和余极限的 isomix 范畴中构造自由无限线性幺半群。

在 LDC 中尝试构造万有指数模态的一种标准方法，是使用以下公式（出自 Michael Barr [15]）：

$$!_w(A) := \prod_{n\in\mathbb{N}} A^{\otimes^n}\backslash n! \quad \text{and} \quad ?_w(A) := \coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!.$$

这里，$A^{\otimes^n}\backslash n!$ 表示 $A^{\otimes^n}$ 的所有 $n!$ 置换的等化子。对偶地，$A^{\oplus^n}/n!$ 表示 $A^{\otimes^n}$ 的所有 $n_!$ 置换的余等化子。在域 K 上的向量空间范畴中，$!_w(V)$ 是向量空间 V 上的自由对称代数，$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes^n}$。

要使 $!_w$ 和 $?_w$ 成为指数模态，除其他条件外，我们要求对于 LDC 中的所有对象 A，$!_w(A)$ 是一个余自由 $\otimes$-余代数，而 $?_w(A)$ 是一个自由 $\oplus$-代数。为了定义 $\Delta_A : !_w(A) \to !_w(A)\otimes !_w(A)$ 以及 $\nabla_A : ?_w(A)\oplus ?_w(A) \to ?_w(A)$，要求 $\otimes$ 在积上分配，即 $X \otimes \prod_{n\in\mathbb{N}} A^{\otimes^n} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X \otimes A^{\otimes^n}$，并且 $\oplus$ 分别在余积上分配——而通常的自然分配（即得到保证的那些分配）是张量对余积的分配，以及 par 对积的分配。这一构造，以及它何时无法产生指数模态，将在 [98] 中详细讨论。

尽管如此，有时确实会出现这些意料之外的分配律成立的情况：也就是说，张量对（可数）积具有分配性，而 par 对（可数）余积具有分配性。例如，在 Rel 中，张量与 par 相同，且继承自集合中的积；对积和余积的分配性则继承自集合中积对余积的分配性。在完备格中也同样成立（见 [15]）。然而，即使 FRel 与 Rel 关系密切，这种构造在 FRel 中并不奏效。不过，它确实提供了一种模态（即线性函子），可生成自然 $\otimes$-幺半群（以及自然$\oplus$-余幺半群），且这些结构还具有泛性质。尤其是，这为我们在 FRel 和 Mat(R) 中提供了一个现成的无限线性幺半群来源。此外，由于这种构造适用于具有适当极限和余极限的所有 isomix范畴，因此它为我们提供了一个非常普遍的无限线性幺半群来源，可供利用。

这种构造的一个显而易见的特点是，在存在对偶的情况下，$!_w(X) \simeq (?_w(X^*))^*$ 为：

$$\begin{aligned}(?_w(A^*))^* &:= \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} (A^*)^{\oplus^n}/n!\right)^* = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left((A^*)^{\oplus^n}/n!\right)^* \\ &= \prod_{n\in\mathbb{N}} \left((A^*)^{\oplus^n}\right)^* \backslash n! = \prod_{n\in\mathbb{N}} (A^{**})^{\otimes^n} \backslash n! \\ &= \prod_{n\in\mathbb{N}} A^{\otimes^n} \backslash n! = !_w(A)\end{aligned}$$

这意味着，重要的是，只要 $!_w(A)$ 关于张量是幺半函子（或者等价地，$?_w(A)$ 关于 par 是余幺半函子），$(!_w, ?_w)$ 就构成一个线性函子对。然而请注意，由于 $!_w$ 是通过极限构造的，它自动具有幺半结构，因此 $(!_w, ?_w)$ 若存在，则始终是一个线性函子。

之所以希望有 $\oplus$ 关于余积的分配律，是因为这样才能定义自然乘法 $\nabla_2 : ?_w(A) \oplus ?_w(A) \to ?_w(A)$；然而，若没有分配律，就无法定义这样的乘法。不过，我们确实有乘法 $\nabla_2' : ?_w(A) \otimes ?_w(A) \to ?_w(A)$，因为我们具备张量所需的分配律，因此定义乘法如下：

$$\frac{\left\{(A^{\oplus^i}/i!) \otimes (A^{\oplus^j}/j!) \xrightarrow{\mathsf{mix}} (A^{\oplus^i}/i!) \oplus (A^{\oplus^j}/j!) \to A^{\oplus^{i+j}}/(i+j)! \xrightarrow{\sigma_{i+j}} \coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!\right\}_{n\in\mathbb{N}}}{\dfrac{\coprod_{n\in\mathbb{N}} \coprod_{i+j=n} (A^{\oplus^i}/i!) \otimes (A^{\oplus^j}/j!) \to \coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!}{\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!\right) \otimes \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!\right) \xrightarrow[\nabla_2']{} \coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!}}$$

乘法的单位是 $u := \sigma_0 : \top = \bot \xrightarrow{u} \coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\oplus^n}/n!$ 。

一般而言，这显然不是自由的 $\otimes$-交换幺半群，但它是一种线性函子构造，基于非常一般的理由而存在，并且存在于完备且余完备的 isomix 范畴中（在这些范畴中，余极限对张量分配，极限对 par 分配——当然，这在 *-自主范畴中是显而易见的）。

注意，$!_w$ 的公式使用等化子和可数积；对偶地，$?_w$ 的公式使用余等化子和可数余积。在 FRel 和 FMat(R) 中，并非所有极限和余极限都存在，因此在构造 $!_w$ 时必须稍加谨慎。我们知道任意积和余积都存在，只需讨论余等化子的构造

$A^{\oplus^n}/n!$ 这就是余等化子

$$A^{\oplus^n} \underset{\rho_{n!}}{\overset{\rho_1}{\rightrightarrows}} A^{\oplus^n} \xrightarrow{\nu_n} A^{\oplus^n}/n! \tag{10.2}$$

其中 ρ_i 是 par 幂的 i^{th} 置换。当范畴是加性富集的（FRel 和 FMat(R) 就是如此），并且幺半环 R允许除以正自然数时，我们可以用更简单的余等化子替换这个余等化子

$$A^{\oplus^n} \underset{(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i)/n!}{\overset{}{\rightrightarrows}} A^{\oplus^n} \xrightarrow{\nu_n} A^{\oplus^n}/n! \tag{10.3}$$

要进行这种简化，必须能够除以 $n!$ 。注意，在 FRel 中， $m = 1 \cup ... \cup 1 = 1$ 因此它允许除以正数。一般而言，在 FMat(R) 中，要实现这种简化，幺半环 R 必须允许除以自然数：显然，所有域和 $\mathbb{Q}$-代数都满足这一条件。

我们证明，公式 10.3 中较简单的映射平行对 - 1 , $(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i)/n!$ 与公式 10.2 中的映射 $\rho_1, \cdots, \rho_{n!}$ 具有相同的余等化子。假设 ν_n 是 10.3 中 1 和 $(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i)/n!$ 的余等化子，即 $1_{A^{\oplus^n}}\nu_n = (\sigma_i^{n!}\rho_i)/n!$，那么 ν_n 会将公式 10.2 中的所有 ρ_i 和 ρ_j 对余等化，特别是，对于所有 $i \in n!$，我们有 $\rho_i\nu_n = 1_{A^{\oplus^n}}\nu_n = \rho_1\nu_n$。

$$\rho_i\nu_n = \rho_i 1_{A^{\oplus^n}}\nu^n = \rho_i\left(\sum_{j=1}^{n!}\rho_j/n!\right)\nu_n = \left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i\rho_j/n!\right)\nu_n \overset{(*)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i/n!\right)\nu_n = 1_{A^{\oplus^n}}\nu_n = \rho_1\nu_n$$

步骤（$*$）成立，因为所有置换构成一个群。同样地，如果 $\lambda : A^{\oplus^n} \to Y$余等化所有置换 ρ_1， $\cdots$， $\rho_{n!}$，那么 λ余等化 1 和 $\left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i\right)/n!$ ：

$$\left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i/n!\right)\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i\lambda\right)/n! = \left(\sum_{i=1}^{n!}\lambda\right)/n! = \left(\sum_{i=1}^{n!}1_{A^{\oplus^n}}\right)/n!\lambda = 1_{A^{\oplus^n}}\lambda$$

因此，10.3 中的公式的余等化子恰好是这些置换的余等化子。显然 $\left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i\right)/n!$ 是一个幂等元，因为：

$$\left(\sum_{i=1}^{n!}\rho_i/n!\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n!}\rho_j/n!\right) = \sum_{i=1}^{n!}\sum_{j=1}^{n!}\rho_i\rho_j/(n!)^2 = \sum_{j=1}^{n!}n!\rho_j/(n!)^2 = \sum_{j=1}^{n!}\rho_j/n!$$

这意味着，在这种情况下，我们所寻求的余等化子（实际上也包括等化子）是通过分裂这个幂等元得到的（而且所有函子都保持此类分裂）。因此，当

我们可以除以正自然数时，只要这些幂等元能够分裂，我们就能得到所寻求的余等化子。尽管这只是一个很宽松的要求，但请记住，在 FRel 中并非所有幂等元都能分裂，因此我们必须更详细地考察这个特定的幂等元。

在 Rel 中，积幂的置换的余等化由满射$\nu_n : A^n \to \mathsf{Bag}(A)_n$给出，其中 $\mathsf{Bag}(A)_n$ 是由恰好包含 n 个 A 的多重集组成的集合。截面就是该映射的逆关系 $\nu_n^\circ : \mathsf{Bag}(A)_n \to A^n$（它恰好因为是满态射的逆关系而成为单射！）。在 SRel 的底集上，分裂必须采取其在 Rel 中的形式；不过，我们必须证明有限性结构与之相容。我们将处理 par，因此将使用余有限集进行论证。

$F(A^{\oplus^n})^\perp = \downarrow \{A_1 \times ... \times A_n \mid A_i \in F(A)^\perp\} = \downarrow \{A_0^n \mid A_0 \in F(A)^\perp\}$，其中最后一个集合支配前一个集合，因为 $A_1 \times ... \times A_n \subseteq A_0^n$ 其中 $A^0 := \bigcup_{i=1}^n A_i$。

我们定义 $F(A^{\oplus^n}/n!)^\perp = \{X \mid \nu_n \triangleleft X \in F(A^{\oplus^n})^\perp\} = \{X \mid \nu_n \triangleleft X \subset A_0^n, A_0 \in F(A)^\perp\} = \{X \mid X^\cup \in F(A)^\perp\}$ 其中，$X^\cup$ 表示 $X \subseteq \mathsf{Bag}(A)_n$ 中所有多重集元素的并集。我们必须证明，这确实在 $\mathsf{Bag}(A)_n$ 上定义了一个良定义的有限性空间。为此，注意到 ν_n 是一个映射，因此 $\{a_1 \oplus ... \oplus a_n\} \triangleright \nu_n$ 是一个单元素集，也就是 $\mathsf{Bag}(A)_n$ 中的一个有限集。此外，根据定义，ν_n 反映余有限集。另一方面，$\nu_\circ$ 仍然具有 $\{b\} \triangleright \nu_n^\circ$ 有限性，并且根据定义同样保持余有限集。

这意味着余等化子在 FRel 中存在，并且由幂等元的分裂给出。要将其转置为 $\mathsf{FMat}(R)$ 中的余等化子，我们取 ν_n 的特征函数；然而，对于 ν_n°，我们使用矩阵（记作 $\nu^\square$），其元素由下式确定：

$$\nu^\square : \mathsf{Bag}(A)_n \times A^n \to R; (y, x) \mapsto \begin{cases} \frac{r_1!...r_p!}{n!} & \text{when } y = \nu_n(x) \text{ and } y = r_1 \cdot a_1 + ... + r_p \cdot a_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

该公式考虑了袋中的重复项：重复项会减少与该袋对应的序列数量。现在我们有：

引理 10.16。 在 FRel 和 $\mathsf{FMat}(R)$ 中，若 R 是一个可除以正自然数的幺半环，则在 $A^{\oplus^n}$ 和 $A^{\otimes^n}$ 上的幂等元 $(\sum_{i=1}^{n!} \rho_i)/n!$ 均可分裂。

事实上，对于任意幺半环 R，余等化子 $\nu_n : A^{\oplus^n} \to A^{\oplus^n}/n!$ 在 $\mathsf{FMat}(R)$ 中都存在。不过，一般而言，它并非由幂等元的分裂给出。关键在于，映射 $\nu_n : A^{\oplus^n} \to A^{\oplus^n}/n! = \mathsf{Bag}_n(A)$ 始终存在，它是 ν_n 的特征函数。其泛性质由其有限性关系普适性给出。这意味着，在所有这些范畴中，我们都具备所提议的模态构造（$!_w$,$?_w$）的全部组成部分：

命题 10.17。 在 FRel 和 $\mathsf{FMat}(R)$中，其中 R 为任意幺半环，上文所述的模态 ($!_w$、$?_w$) 均存在。此外，它会产生无限线性幺半群：因此，对于任意对象

A, $?_w(A) \;\overset{\circ}{\perp\!\!\!\perp}\; !_w(A^*)$ 是一个线性幺半群。

线性函子（$!_w$，$?_w$）对于交换的“混合” $\oplus$-幺半群和 $\otimes$-余幺半群具有泛性质：设 $m : X \oplus X \to X \leftarrow \bot : u$ 是一个交换幺半群，并且存在一个映射 $f\colon A \to X$，那么存在唯一的映射 $f^{\oplus^r} m_r\colon A^{\oplus^r}/r! \to X$，由 n 重复乘法 $m_r : X^{\oplus^r}/r! \to X$ 所确定；这就给出了一个从余积$f^\sharp : ?_w(A) \to X$ 的映射，使得：

$$\begin{array}{ccccc}
?_w(A)\otimes ?_w(A) & \xrightarrow{\nabla_2'} & ?_w(A) & \xleftarrow{\sigma_1} & A \\
{\scriptstyle f^\flat\otimes f^\sharp}\downarrow & & {\scriptstyle f^\sharp}\downarrow & \swarrow_{f} & \\
X\otimes X & \xrightarrow[\mathsf{mix}]{} X\oplus X & \xrightarrow[m]{} & X &
\end{array}$$

其中 $f^\flat := \{A^{\oplus^n}/n! \xrightarrow{f^{\oplus^n}/n!} X^{\oplus^n}/n! \xrightarrow{m_n} X\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是来自余积的比较映射。映射 $f^\flat$ 在混合子 $\mathsf{mix} : A\otimes B \to A\oplus B$ 为满态射时是唯一的——值得注意的是，在 FRel 和 Fmat(R) 中确实如此，因为它在 Rel 中导出为恒等映射——因为：

$$\begin{array}{ccccc}
A^{\oplus^p}/p!\otimes A^{\oplus^q}/q! & \xrightarrow{\mathsf{mix}} & A^{\oplus^p}/p!\oplus A^{\oplus^q}/q! & \xrightarrow{\nabla'_{n,m}} & A^{\oplus^{p+q}}/(p+q)! \\
{\scriptstyle \mu_p\otimes\mu_q}\downarrow & & {\scriptstyle \mu_p\oplus\mu_q}\downarrow & & {\scriptstyle \mu_{p+q}}\downarrow \\
X\otimes X & \xrightarrow[\mathsf{mix}]{} & X\oplus X & \xrightarrow[m]{} & X
\end{array}$$

只要外层方形交换，由于左侧方形交换，便可推出右侧方形必定交换（假设混合子为满态射）。然而，余极限确定右侧方形满足 $\mu_r = f^{\oplus^r} m_r$，因此 $\{\mu_r\}_{r\in\mathbb{N}} = f^\flat$。由此可得：

命题10.18。 在任何具有积（可对 *par* 分配）和余积（可对张量分配），且混合子为双射（即既是满态射又是单射）的 *isomix* 范畴中，弱指数具有如下泛性质：给定任意交换幺半群 $X \oplus X \xrightarrow{m} X \xleftarrow{u} \bot$ 和 $f : A \to X$，存在唯一一个到混合幺半群 $f^\sharp : ?_w(A) \to X$ 的态射，使得：

$$\begin{array}{ccccc}
?_w(A)\otimes ?_w(A) & \xrightarrow{\nabla_2'} & ?_w(A) & \xleftarrow{\sigma_1} & A \\
{\scriptstyle f^\sharp\otimes f^\sharp}\vdots & & {\scriptstyle f^\sharp}\vdots & \swarrow_{f} & \\
X\otimes X & \xrightarrow[\mathsf{mix}]{} X\oplus X & \xrightarrow[m]{} & X &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\bot & \xrightarrow{\nabla_0'} & ?_w(A) \\
& {\scriptstyle u}\searrow & \vdots{\scriptstyle f^\sharp} \\
& & X
\end{array}$$

对偶地，给定一个余交换余幺半群 $Y\otimes Y \xleftarrow{d} Y \xrightarrow{e} \top$ 和映射 $g : Y \to B$，存在唯一一个从混合余幺半群 $f^\flat : Y \to !_w(B)$ 出发的态射，使得 $f^\flat d$混合 $= \Delta'(f^\flat \oplus f^\flat)$。

备注 10.19. 在一个FMat(R)中，其中 R 具有除以自然数的除法，幂等元还存在第二种规范的分解方式，即 $\omega_n^\square : A^{\oplus^n} \to A^{\oplus^n}/n!$，其截面为 $\omega : A^{\oplus^n}/n!$

$\to A^{\oplus^n}$ 为特征函数。因此，

$$\omega_n^{\square}([a_1,..,a_n],r_1\cdot a_{r_1}+...+r_p\cdot a_r=\wr a_1,..,a_n\int=r_1!...f_p!/n!.$$

这种另一种分裂将权重从截面转移到了收缩上。由 ν_n 和 $\nu_n^{\square}$ 给出的分裂具有这样的优势：对于每个幺半环 R，映射 ν_n 都存在——这就是为什么我们能够为所有幺半环构造弱指数。

第11章

总结

这篇论文的第二部分专注于在 MUC 中表述范畴量子力学（CQM）所基于的结构，即完全正映射、 †-Frobenius 代数和互补双代数。回顾一下，MUC， $M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$，由从酉范畴 $\mathbb{U}$ 到 †-isomix 范畴 $\mathbb{C}$ 的 †-isomix 函子 M 给出。此外， M 经过 $\mathbb{C}$ 的核心进行分解。

第一章 7 推广了 Coecke 和 Heunen 的 CP^∞ 构造 [46] 到 †-对称幺半范畴中的构造，使其适用于 MUC。在 MUC 情形下，Kraus 映射的辅助线必须是酉的。与CP^∞在 †-对称幺半范畴上的构造类似，我们使用环境结构来刻画 MUC 上的CP^∞ 构造。与 †-对称幺半范畴不同，MUC 的环境结构只要求在酉核心内有丢弃映射。具有带纯化的环境结构的 MUC 同构于某个其他 MUC 的CP^∞ 范畴。我们在 MUC 上的CP^∞ 构造会产生一个 isomix 范畴。当基范畴具有酉对偶时，该构造保留匕首结构。

第一章 9 讨论了如何使用第一章 8中发展的结构，在 MUC 中建模测量和互补性。在 †-对称幺半范畴中，Coecke和Pavlovic [48] 将拆除测量描述为一个映射 $f :\ A \to X$ 其中 X 是一个特殊交换的 †-Frobenius代数，并且$f^\dagger f = 1_X$。Coecke和Pavlovic的测量公式无法直接应用于 MUC 情形，因为在 †-isomix 范畴中，对象 A 并不总是与 $A^\dagger$ 同构，除非处于酉核心之中。因此，在 MUC 情形下，测量分两步进行：首先将一个对象紧化到酉核心中，然后进行拆除测量。有趣的是，紧化会产生一个余环 †-二元幂等元，而一个余环 †-二元幂等元在分裂后，会产生典范幺正核心中的一个对象。详情见第9.1节。

Coecke和Pavlovic的测量公式的一个组成部分是一种特殊的交换的 †-Frobenius代数（†-弗罗贝尼乌斯代数）。在线性分配范畴中，Frobenius代数被包含一个$\otimes$-幺半群的线性幺半群所推广，例如定义在 A上，以及定义在 B上的对偶 $\oplus$-余幺半群。请注意，幺半群和余幺半群

通常并不定义在同一个对象上，这正是线性幺半群与Frobenius代数的区别。在紧致情形中，当同构满足某个条件时，定义在同构对象上的线性幺半群会归并为弗罗贝尼乌斯代数。我们证明这些结果也适用于 † 情形，见第8.1节。

尽管这是预期的结果，但线性幺半群会引出由一个 $\otimes$-余幺半群和一个 $\oplus$-幺半群构成的线性余幺半群这一概念，仍然令人惊讶。该概念在第8.2节中介绍。LDC 的指数模态是线性余幺半群的重要例子来源。在 LDC 中，线性幺半群和线性余幺半群以双代数式地相互作用，产生一对双代数——一个定义在张量积上，另一个定义在 par 积上。线性双代数是互补系统的基础，互补系统将在第8.3节中讨论。当自线性双代数满足某些条件时，其 $\otimes$ 和 $\oplus$ 双代数是带有某个对极的霍普夫代数；这样的自线性双代数被称为互补系统，见第9.3节。

在存在自由指数模态（!，?）的情况下，isomix范畴中的每个互补系统都会在自由指数模态上诱导出一个线性双代数——所诱导的（!，?）-线性双代数的线性余幺半群由 ! 的自由典范余交换$\otimes$-余幺半群给出。自由（!，?）的泛性质会在（!，?）-线性双代数上诱导出一个二元幂等元，该幂等元分裂后产生原始的互补系统。因此，每个互补系统都源自自由指数模态上所诱导的线性双代数的一个二元幂等元的分裂，见第 9.4 节。结果可直接推广到 †-isomix范畴中具有自由（!，?）的 Rel、FRel、FMat(R)，其中 R 是交换幺半环，以及某些 Chu 范畴，都是具有自由指数模态的 †-isomix范畴的例子，见第 10.2 节。

第 12 章

结论与未来工作

12.1 结论

本论文是我们致力于为不受维数约束的量子过程发展合适的范畴语义这一历程的产物。自诞生以来，范畴量子力学凭借其研究量子基础和量子过程时兼具多样性与优雅的方法，激发了研究者的兴趣。尽管范畴量子力学建立在紧闭范畴之上——即线性逻辑的范畴语义，其中一对乘法联结词合并为一个，一对加法联结词合并为一个——这使得希尔伯特空间模型被迫是有限维的，但人们一直在努力解决范畴量子力学的维数约束问题。

一种方法是构造一个仍然是紧闭范畴、但能够恰当地描述任意维数的量子过程的范畴 [70, 77]，；另一种方法则是在 †- 对称幺半范畴 [46, 6] 中构造适当的代数结构。人们也尝试为底层幺半范畴添加性质，使其能够容纳任意维数的对象 [75, 118]。在我们的探索过程中，我们走出了范畴量子力学中 †-幺半范畴这条人们熟知的路径，回归基础，并以范畴论学者的视角提出了这样的问题：“我们能否考虑一种并非退化的 †-线性逻辑语义？”这使我们将注意力转向线性分配范畴和 $*$-自主范畴（即不带否定的线性分配范畴）。

接下来，我们定义线性分配范畴的 † 函子，以及 †-isomix范畴的酉结构，由此得到了混合酉范畴（MUC）的概念。混合酉范畴是具有选定酉核心的 †-isomix范畴。如图 4.2 中混合酉范畴的示意图所示，
†-isomix 范畴是一个更大的空间，（较小的）酉范畴嵌于其中。对于任意 MUC，其酉核心等价于一个 †-幺半范畴；若存在酉对偶，则等价于一个 †-紧闭范畴。因此，我们得以简洁地描述

传统的范畴量子力学框架，并将其置于一个更大、更一般的框架中。随着结构的逐步建立，我们讨论了不少 MUC 的例子。其中重要的例子包括有限性关系范畴 FRel，它有一个到 Rel 的忠实函子；以及基于交换幺半环 R 的有限性矩阵范畴 FMat(R)。事实上，有限复矩阵范畴 Mat($\mathbb{C}$) 与 FMat($\mathbb{C}$) 的核心同构。

在我们的探索旅程中，我们通过将 CQM 的基础代数结构——模拟量子过程的完全正映射、模拟量子可观测量的特殊交换的 †-Frobenius代数，以及模拟互补可观测量的双代数和霍普夫代数——从 †- 对称幺半范畴推广到 †-isomix范畴，检验了该框架在量子力学中的适用性。通过将 $\mathbf{CP}^\infty$ 构造从 †-对称幺半范畴推广到 MUC，我们注意到，在 MUC 中，一个完全正映射在其 Kraus分解形式下总是经由酉核心进行分解。此外，为了刻画 $\mathbf{CP}^\infty$ 构造，只需能够对酉对象丢弃信息即可。因此，环境结构这一概念，换言之，丢弃信息，只是酉核心内部的一项要求。

接下来，我们将注意力转向线性幺半群 [30]，它们存在于 LDC 中，是 Frobenius代数 的一种一般化：在线性幺半群中，幺半群与余幺半群通常作用于不同的对象上，幺半群位于 $\otimes$-积上，余幺半群位于 $\oplus$-积上，而幺半群对象与余幺半群对象彼此对偶。我们引入了 †-线性幺半群；当酉结构映射满足某个条件时，它们在酉范畴中等价于 †-Frobenius代数。线性余幺半群与线性幺半群相同，只是幺半群位于 $\oplus$-积上，而余幺半群位于 $\otimes$-积上；它们是我们试图理解线性幺半群的双代数相互作用时得到的一个令人意外的结果。两个线性幺半群之间的双代数相互作用蕴含着一个 $\otimes$-幺半群与一个 $\oplus$-余幺半群之间的双代数相互作用，而 LDC 并不支持这种相互作用。这促成了线性余幺半群这一概念。事实上，线性余幺半群并非仅仅是为方便而定义的代数构造，而是具有重要意义的，因为线性逻辑的指数模态为线性余幺半群提供了例子来源。

线性幺半群和线性余幺半群可以优雅地相互作用，生成一个 $\otimes$-双代数和一个 $\oplus$-双代数，我们将这种相互作用称为线性双代数。在这一阶段，人们可以看出，在该框架中保持张量积（线性逻辑中的乘法联结词）彼此区分的重要性。互补可观测量与测量这一概念密切相关。在 MUC 中，我们展示了测量分两步进行：首先，将任意的（非酉）类型紧化到酉核心中；而在酉核心内部，则可以使用 CQM 的传统工具进行测量。有趣的是，紧化会产生一个具有某些性质的二元幂等元。我们

将其称为余环 †-二元幂等元。反过来，余环 †-二元幂等元会诱导出一次紧化。

最后，将注意力转向互补系统，我们将 †-isomix范畴中的此类系统视为满足某些方程的自线性双代数。这些方程意味着这对双代数确实是具有特定反极的 Hopf 代数。我们注意到，当 †-isomix 范畴具有自由指数模态（即线性逻辑的指数算子，它为具有无限复制和丢弃的非线性类型提供支持）时，每个互补系统都会在自由指数模态（在更大的空间中）上诱导出一个线性双代数。实际上，在这种设定下，每个互补系统都可由诱导出的 †-线性双代数上的一个余环 †-二元幂等元的分裂而产生。这或许是本论文中与量子力学相关的最有趣结果。

玻尔互补原理 [71] 指出，由于物质的波粒二象性，物理性质以互补对的形式出现。我们将互补性与指数模态联系起来的结果，将一个互补系统呈现为某个 †-线性双代数的紧化，其中两种对偶结构（一种属于线性幺半群，另一种属于线性余幺半群）分别出现，从而为玻尔原理提供了一个有趣的视角。

12.2 未来工作

当前的探索之旅还有许多值得进一步探究的有趣方向，下面将讨论其中几个：

12.2.1 物理系统模型

在本文中，我们从数学的角度讨论了多个 MUC 的例子，例如 FRel、FMat(R) 和 Chu 空间。这些范畴在量子基础研究及量子理论其他领域中的作用仍有待探索。特别是，FMat(R) 似乎是研究量子力学的一个有趣候选，因为它的典范幺正核心与 FHilb 同构，而 FHilb 是范畴量子力学中一个研究充分的模型。此外，FMat(R) 是完整线性逻辑的模型，并具有自由指数模态。

在 [117]，中，Vicary 使用 ! 指数模态和微分映射 [24]，将 Fock 空间中产生与湮灭算符范畴化到带有 † 双积的 †-幺半范畴中。他假设 † 与 ! 模态可交换。回想一下，在线性环境中，我们看到对 ! 模态应用 † 会得到 ? 模态。Vicary 将这一套工具应用于范畴 Inner；该范畴由可数维复内积空间及定义良好的线性映射构成，用以研究量子谐振子的态空间。

（量子谐振子，QHO）。然而，关于产生 ! 模态的余自由函子与遗忘函子之间的伴随定义良好的说法，仍只是一项猜想。有人指出，难点在于证明 η 该伴随的映射定义良好。重新探讨 Vicary 将量子谐振子范畴化的想法 [117] 在线性分配框架中会很有意思，尤其是在 FMat（R）中，其中 ! 模态和 ? 模态彼此不同。

在 [117], Vicary指出，借助指数模态可以对QHO的态空间进行建模。然而，为了实现对系统动力学的范畴描述，需要能够以范畴方式表达微分方程。微分范畴 [24, 29] 是带有余代数余模态和微分组合子的加性对称幺半范畴，似乎是满足这一要求的自然候选。[91] 强调了微分范畴对量子基础的重要性。事实上，FRel和FMat(R)确实是微分范畴，这是由于其中存在自由指数模态。这引出了一个问题：能否在微分范畴中获得对量子谐振子的完整范畴描述?

我们的论文证明，在 †-isomix范畴中，当存在自由指数模态时，典范幺正核心内的每个互补系统都源自自由指数模态上诱导的线性双代数。自由指数模态意味着存在微分组合子 [65, 29] ，并为QHO的态空间提供范畴描述 [26, 117]。这不禁让人思考：量子谐振子与物理学中的互补可观测量之间是否存在某种有趣的联系。

12.2.2 Joyal 的双完备化构造

MUC 的一个有趣例子来源是 Joyal 在幺半范畴上的 [82, 83] 双完备化过程。从一个 †-幺半范畴或酉范畴 $\mathbb{C}$ 出发，只需对该 †-幺半范畴进行双完备化（添加任意极限和余极限），即可构造出一个 MUC $i : \mathbb{C} \to \Lambda(\mathbb{C})$。此外，双完备化 $\Lambda(\mathbb{C})$ 是一个（非紧） †-isomix 范畴；当起始点 $\mathbb{C}$ 是 †-紧闭时，它便是一个 †-isomix $*$-自主范畴。对幺半范畴 $\mathbb{C}$ 进行双完备化，会使其张量分裂为两个线性相关的张量积 $\otimes$ 和 $\oplus$ ，并在双完备范畴及双连续函子的范畴上诱导出一个余自由函子 $i : \mathbb{C} \to \Lambda(\mathbb{C})$。由单个对象生成的自由双完备范畴是一个 $*$-自主范畴 [83, 推论 - 定理3]。

12.2.3 线性情形中的克利福德代数

克利福德代数[1] [73, 94, 57] 因其与几何学密切相关，被视为物理学的通用语言。它们巧妙地将代数几何化，并将几何代数化。克利福德代数已应用于物理学的诸多领域，包括量子引力 [66,58]，量子场论 [116] 和量子电动力学 [19]。

时空的克利福德代数刻画了狭义相对论的几何学 [73]。在讨论量子谐振子的范畴化时 [117, 第 Discussion 节]，Vicary 指出，在当前的范畴量子力学形式体系中，

“……对薛定谔方程的其他组成部分（例如普朗克常数 h和虚数单位 i）进行优雅的范畴化描述，远非显而易见。”

克利福德代数通过将虚常数 i 解释为时空中的旋转，以几何方式回应了上述问题。在量子场论中，伽马矩阵是满足狄拉克方程的 4×4反交换酉矩阵，它们为克利福德代数 $Cl_{1,\,3}(\mathbb{R})$ [116]提供了矩阵表示。对于量子力学和量子计算都相当重要的泡利 I， X， Y， Z矩阵，为克利福德代数 $Cl_{0,\,3}(\mathbb{R})$ [57]提供了一种表示。薛定谔方程可以表示为克利福德代数$Cl_{0,\,1}(\mathbb{R})$ [80]中的一个元素。

克利福德代数提供了一种有趣的可能性，即通过几何学而非其他标准但不直观的方法来理解并形式化量子计算，例如酉矩阵形式主义或借鉴自经典计算的电路语言方法。这种方法与现有方法截然不同，并能为量子计算提供全新的视角。
[114, 120, 119, 7, 53, 93, 92] 将克利福德代数应用于非范畴论环境下量子计算的努力，强调了克利福德代数所提供的概念清晰性和计算优势。在 [114] 中，作者表明，量子计算操作的克利福德代数描述与核磁共振波谱学具有直接对应关系，因此可无需进一步转换便在核磁共振量子计算中实现。较新的工作 [93, 92] 有趣地运用幺半范畴的弦图来描述克利福德操作。

未来，我们希望在线性情形下表述抽象的克利福德代数。将CQM的弦图应用于克利福德代数也会很有趣。克利福德代数的元素总是反交换的。这表明这些代数与互补测量之间存在联系。通过采用一种与经典计算截然不同的方法，克利福德代数能否为量子计算提供全新的视角？从ZX演算 [44]，汲取灵感，能否构建一个

[1]请注意，在物理学文献中，“克利福德代数”和“几何代数”这两个术语可互换使用。然而，克利福德代数是满足泛性质的自由几何代数。

能够连接量子研究多个领域的通用Clifford演算？这种Clifford演算能否将ZX演算巧妙地推广到任意维数的系统？如果能够为量子化学及量子力学其他分支中复杂方程领域设计一种图示演算，将会非常有趣且极具价值。在ZX演算中，互补的 Z 和 X 可观测量之间的双代数相互作用被用于构造量子计算门。Pauli X，Y和 Z 矩阵以及单位矩阵是克利福德代数的一种表示。这引出了一个问题：双代数与克利福德代数之间是否存在某种有趣的联系？这些问题尚待探索。

参考文献

[1] Eiichi Abe。《霍普夫代数》。剑桥大学出版社，2004年。[2] Samson Abramsky。“大型玩具模型”。载于：《Synthese》186.3（2012年），第697–718页。[3] Samson Abramsky。“余代数、Chu 空间与物理系统的表示”。载于：《哲学逻辑杂志》42.3（2013年），第551–574页。[4] Samson Abramsky和Bob Coecke。“量子协议的范畴语义”。载于：第19届IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集。LICS '04。美国华盛顿特区：IEEE计算机学会，2004年，第415–425页。 ISBN：0-7695-2192-4。 DOI: 10.1109/LICS.2004.1。 URL： http://dx.doi.org/10.1109/LICS.2004.1。[5] Samson Abramsky和Ross Duncan。“一种范畴量子逻辑”。载于：第2届国际量子编程语言研讨会（QPL '04）论文集。2004年。[6] Samson Abramsky和Chris Heunen。“H*-代数与非幺 Frobenius 代数：无限维范畴量子力学的初步研究”。载于：《克利福德讲座》71（2012年），第1–24页。[7] Diederik Aerts和Marek Czachor。“卡通计算：无需量子力学的类量子计算”。载于：《物理学杂志A：数学与理论》40.13（2007年3月），F259–F266。[8] Warren Ambrose。“一类特殊巴拿赫代数的结构定理”。载于：《美国数学会汇刊》57.3（1945年），第364–386页。[9] Steve Awodey。《范畴论》。第2版。美国：牛津大学出版社，2010年。 ISBN：0199237182。[10] Miriam Backens。“使稳定子ZX演算对标量完备”。载于：《理论计算机科学电子札记》195（2015年11月），第17–32页。

[11] John Baez和Michael Stay。“物理学、拓扑学、逻辑与计算：罗塞塔石碑”。载于：《物理学讲义》813（2011年），第95–172页。 URL： http://arxiv.org/abs/0903.0340。[12] John Baez和Mike Stay。“物理学、拓扑学、逻辑与计算：罗塞塔石碑”。载于：《物理学讲义》（2010年），第95–172页。[13] Howard Barnum和Alexander Wilce。“凸运算理论中的信息处理”。载于：《理论计算机科学电子札记》270.1（2011年），第3–15页。[14] Michael Barr。“*-自主范畴与线性逻辑”。载于：《计算机科学中的数学结构》1.2（1991年），第159–178页。 DOI: 10.1017/S0960129500001274。[15] Michael Barr。“*-自主范畴与线性逻辑”。载于：《计算机科学中的数学结构》1.2（1991年），第159–178页。[16] Michael Barr。“可达范畴与线性逻辑模型”。载于：《纯粹与应用代数杂志》69.3（1991年），第219–232页。[17] Michael Barr和Charles Wells。《计算科学范畴论》。美国：Prentice-Hall出版社，1990年。 ISBN：0131204866。[18] Michel Barr。“Chu 构造：一个思想的历史”。载于：《范畴理论与应用》17.1（2006年），第10–16页。[19] William Baylis。《电动力学：一种现代几何方法》。施普林格，2004年。¨Birkh[20] auser。Gavin M. Bierman。“什么是直觉主义线性逻辑的范畴模型？”载于：第二届国际类型化λ演算与应用会议论文集。TLCA ’95。柏林、海德堡：施普林格出版社，1995年，第78–93页。[21] Richard Blute。“霍普夫代数与线性逻辑”。载于：《计算机科学中的数学结构》6.2（1996年），第189–212页。[22] RichardBlute、Robin Cockett和Robert Seely。“!与?存储作为张量强度”

载于：《计算机科学中的数学结构》6.4（1996），第313–351页。[23] Richard Blute、Robin Cockett和Robert Seely。《具有存储的笛卡尔微分范畴》。载于：《范畴理论与应用》30.18（2015），第622–672页。[24] RichardBlute、Robin Cockett和Robert Seely。《微分范畴》。载于：《计算机科学中的数学结构》16.6（2006），第1049–1083页。[25] Richard Blute、Robin Cockett和Robert Seely。《线性分配范畴的反馈：迹与不动点》。载于：《纯粹与应用代数杂志》154.1-3（2000），第27–69页。

[26] Richard Blute、Prakash Panangaden和Robert AG Seely。《Fock空间：线性指数类型的一种模型》。载于：《第九届编程语义数学基础会议论文集》，《计算机科学讲义》（柏林）。第802卷。施普林格，1994年，第1–25页。[27] Richard Blute、Prakash Panangaden和Sergey Slavnov。《深度推理与概率相干空间》。载于：《应用范畴结构》20.3（2012），第209–228页。[28] Richard Blute和Philip Scott。《面向线性逻辑学家的范畴论》。载于：计算机科学中的线性逻辑316（2004），第3–65页。[29] Richard Blute等人。《重新审视微分范畴》。载于：《应用范畴结构》（2019），第1–65页。[30] Richard Blute等人。《弱分配范畴的自然演绎与相干性》。载于：《纯粹与应用代数杂志》113.3（1996），第229–296页。 ISSN: 0022-4049. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-4049(95)00159-X. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002240499500159X.[31] ArkadyBolotin。不可克隆意味着过去的不可改变性。2019年。arXiv: 1905.06766 [quant-ph].[32] Francis Borceux。《范畴代数手册 1——基础范畴论》。剑桥大学出版社，1994年。[33] Man-Duen Choi。《复矩阵上的完全正线性映射》。载于：《线性代数及其应用》10（1975），第285–290页。[34] Robin Cockett、Cole Comfort和Priyaa Srinivasan。《范畴量子力学的dagger线性逻辑》。2018年。arXiv: 1809.00275 [math.CT].[35] Robin Cockett、J¨urgen Koslowski和Robert Seely。《线性双范畴导论》。载于：《计算机科学中的数学结构》10.2（2000），第165–203页。[36] Robin Cockett和Robert Seely。《线性分配函子》。载于：《纯粹与应用代数杂志》143.1-3（1999），第155–203页。[37] Robin Cockett和Robert Seely。《完全直觉主义线性逻辑、双线性逻辑与混合范畴的证明论》。载于：《范畴理论与应用》3.5（1997），第85–131页。[38] Robin Cockett和Robert Seely。《弱分配范畴》。载于：《纯粹与应用代数杂志》114.2（1997），第133–173页。

[39] Robin Cockett 和 Priyaa Srinivasan。 指数模态与互补性。“即将发表于第四届应用范畴论国际会议论文集，2021年”。2021年。arXiv： 2103.05191 [math.CT]。[40] Robin Cockett 和 Priyaa V. Srinivasan。《混合酉范畴的完全正性》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1905.08877*（2019年）。[41] Bob Coecke。《Selinger 的 CPM-构造中混合态的公理化描述

”.

载于：《理论计算机科学电子札记》210（2008年）。第四届量子编程语言国际研讨会（QPL 2006）论文集，第3–13页。 ISSN：1571-0661。[42] Bob Coecke。《向执业物理学家介绍范畴》。载于：（2008年）。arXiv：0808.1032 [math-ph]。[43] Bob Coecke。《终端性蕴含非信号传递》。载于：《理论计算机科学电子札记》172（2014年12月），第27–35页。 DOI： 10.4204/eptcs.172.3。[44] Bob Coecke和Ross Duncan。《交互量子可观测量：范畴代数与图示法》。载于：《新物理学杂志》13.4（2011年），第043016页。[45] Bob Coecke、Bill Edwards和Robert W. Spekkens。《量子比特的相位群与非定域性的起源》。载于：《理论计算机科学电子札记》270.2（2011年2月），第15–36页。 DOI： 10.1016/j.entcs.2011.01.021。[46] Bob Coecke和Chris Heunen。《任意维度中完全正性的图示》。载于：《信息与计算》250（2016年），第50–58页。[47] Bob Coecke和Aleks Kissinger。《量子过程图示：量子理论与图示推理入门课程》。剑桥大学出版社，2017年。DOI： 10.1017/9781316219317。[48] Bob Coecke和Dusko Pavlovic。《无求和的量子测量》。载于：《量子计算与量子技术的数学》。泰勒与弗朗西斯，2007年，第577–620页。[49] Bob Coecke、Dusko Pavlovic和Jamie Vicary。《正交基的新描述》。载于：《计算机科学中的数学结构》23.3（2012年），第555–567页。[50] Bob Coecke和Simon Perdrix。《范畴量子力学中的环境与经典信道》。载于：计算机科学逻辑国际研讨会。施普林格，2010年，第230–244页。

[51] Bob Coecke等。《范畴量子力学中的强互补性与非定域性》。载于：2012年第27届年度电气电子工程师学会计算机科学逻辑研讨会（2012年6月）。 DOI: 10.1109/lics.2012.35。[52] R. Crubill´e等。《概率相干空间的自由指数模态》。载于：Esparza J.、Murawski A.（编）《软件科学与计算结构基础》。FoSSaCS 2017。《计算机科学讲义》（柏林）。第10203卷。施普林格，2017年，第20–35页。[53] Marek Czachor。《卡通计算的基本门》。载于：《物理学杂志A：数学与理论》40.31（2007年7月），F753–F759。[54] Vincent Danos和Laurent Regnier。《乘法联结词的结构》。载于：《数理逻辑档案》28.3（1989年），第181–203页。[55] Brian Day和Craig Pastro。《关于Frobenius幺半函子的注记》。载于：《纽约数学杂志》14.733-742（2008年），第20页。[56] Jacques Dixmier。《冯·诺伊曼代数》。North Holland，2011年10月。[57] Chris Doran和Anthony Lasenby。《物理学家的几何代数》。剑桥大学出版社，2003年。 DOI: 10.1017/CBO9780511807497。[58] Chris Doran和Anthony Lasenby。《物理学家的几何代数》。剑桥大学出版社，2007年。[59] Ross Duncan。《量子计算的类型》。博士论文。牛津大学，2006年。[60] Ross Duncan和Kevin Dunne。《交互Frobenius代数是Hopf代数》。载于：第31届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集。LICS '16。美国纽约州纽约市：计算机协会，2016年，第535–544页。[61] Jeff Egger。《关于对合幺半范畴》。载于：《范畴理论及其应用》25.14（2011年），第368–393页。[62] Jeff Egger。《Frobenius关系与线性分配性相遇》。载于：《范畴理论及其应用》24（2010年），第25–38页。[63] Jeff Egger和Micah Blake McCurdy。《关于循环星自对偶范畴》。载于：《纯粹与应用代数杂志》216.8-9（2012年），第1706–1725页。[64] Thomas Ehrhard。《有限性空间》。载于：《计算机科学中的数学结构》15.4（2005年），第615–646页。

[65] Marcelo P. Fiore。《乘法双加性直觉主义线性逻辑模型中的微分结构》。载于：《国际类型化 λ 演算与应用会议》。施普林格，2007年，第163–177页。[66] Matthew R. Francis 和 Arthur Kosowsky。《广义相对论中的几何代数技术》。载于：《物理年鉴》311.2（2004年6月），第459–502页。[67] Peter Freyd 和 Andre Scedrov。《范畴与寓类》。第39卷。North Holland，1989年。[68] Jean-Yves Girard。《线性逻辑》。载于：《理论计算机科学》50.1（1987年），第1–101页。[69] Jean-Yves Girard。《线性逻辑：语法与语义》。1995年。[70] Stefano Gogioso 和 Fabrizio Genovese。《无限维范畴量子力学》。载于：第十三届量子物理与逻辑国际会议论文集，格拉斯哥，苏格兰，2016年6月6日至10日。Ross Duncan 和 Chris Heunen 编。第236卷。《理论计算机科学电子会议录》。开放出版协会，2017年，第51–69页。 DOI: 10.4204/EPTCS.236.4。[71] David J. Griffiths 和 Darrell F. Schroeter。《量子力学导论》。剑桥大学出版社，2018年。[72] Stefano Guerrini。《乘法证明网的正确性是线性的》。载于：论文集。第14届计算机科学逻辑专题讨论会（目录号 PR00158）。电气电子工程师学会，1999年，第454–463页。[73] David Hestenes 和 Garret Sobczyk。《从克利福德代数到几何微积分：数学与物理的统一语言》。第5卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[74] Chris Heunen。《紧致可达范畴与量子密钥分发》。载于：《计算机科学中的逻辑方法》4（2008年）。[75] Chris Heunen。《紧致可达范畴与量子密钥分发》。载于：《计算机科学中的逻辑方法》4.4（2008年），第1–26页。[76] Chris Heunen 和 Vicary Jamie。《量子理论范畴：导论》。牛津大学出版社，2019年11月。[77] Chris Heunen 和 Manuel L Reyes。《希尔伯特 C*-模上的弗罗贝尼乌斯结构》。载于：《数学物理通讯》361.2（2018年），第787–824页。[78] Chris Heunen 和 Sean Tull。《作为量子理论模型的关系范畴》。载于：《理论计算机科学电子会议录》195（2015年11月），第247–261页。

[79] D. A. Higgs 和 K. Rowe。《完备半格范畴中的核性》。载于：《纯粹与应用代数杂志》57（1989年），第67–78页。[80] Basil J. Hiley 和 Robert E. Callaghan。《量子力学的克利福德代数方法 A：薛定谔粒子与泡利粒子》。2010年。arXiv：1011. 4031 [math-ph]。[81] Martin Hyland 和 Andrea Schalk。《线性逻辑模型的粘合与正交性》。载于：《理论计算机科学》294.1–2（2003年2月），第183–231页。[82] Andr´e Joyal。《自由双完备范畴》。载于：《数学报告》XVII（1995年），第219–225页。[83] Andr´e Joyal。《自由双完备范畴》。载于：《数学报告》XVII（1995年），第213–218页。[84] G. Max Kelly。《关于自然结合律、交换律等相干性的 Mac Lane 条件》。载于：《代数杂志》1.4（1964年），第397–402页。 ISSN：0021-8693。[85] G.M. Kelly 和 M.L. Laplaza。《紧闭范畴的相干性》。载于：《纯粹与应用代数杂志》19（1980年），第193–213页。 ISSN：0022-4049。 DOI： https://doi.org/10.1016/0022-4049(80)90101-2。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404980901012。[86] Max Kelly。《教义伴随》。载于：《范畴研讨会》。施普林格，1974年，第257–280页。[87] Alex Kissinger 和 Saunders Uijlen。《因果结构的范畴语义》。载于：《计算机科学中的逻辑方法》15（2019年）。[88] J¨urgen Koslowski。《Chu 构造的扩展观点》。载于：《范畴理论及其应用》17.6（2006年），第103–126页。[89] Yves Lafont。《逻辑、范畴与机器：由范畴逻辑引导的编程语言实现》。博士论文。 [不详： [未出版：巴黎狄德罗大学，1988年。[90] Jean-Simon Pacaud Lemay。《将余代数模态与 MELL 模型结构提升至 Eilenberg–Moore 范畴》。载于：《计算机科学中的逻辑方法》15.4（2019年11月），第215–242页。

[91] Jean-Simon Pacaud Lemay。《为什么 FHilb 不是一个有趣的（余）微分范畴》。《理论计算机科学电子会议录》《理论计算机科学电子会议录》318（2020年5月），第13–26 页。 ISSN：2075-2180。 DOI： 10.4204/eptcs.318.2。 URL： http://dx.doi.org/10.4204/EPTCS.318.2。[92] Robert Lin。使用广义克利福德代数进行多量子位计算的图形演算。2021年3月。arXiv： 2103.16081 [quant-ph]。[93] Robert Lin。使用广义克利福德代数进行多量子位计算的代数框架。2021年3月。arXiv： 2103.15324 [quant-ph]。[94] Douglas Lundholm 和 Lars Svensson。《克利福德代数、几何代数及其应用》。（2009）。arXiv： 0907.5356 [math-ph]。[95] Saunders MacLane。工作数学家的范畴论。第 5 卷。柏林/海德尔贝

rg,

德国：施普林格科学与商业媒体，2013年。[96] Roberto Maieli 和 Quintijn Puite。“证明网的模性”。载于：《数学逻辑档案》44.2（2005年），第167–193页。[97] Shahn Majid。《量子群理论基础》。剑桥大学出版社，2000年4月。[98] Paul-Andr´e Melli´er、Nicholas Tabareau 和 Christine Tasson。“线性逻辑自由指数模态的显式公式”。载于：《计算机科学中的数学结构》28.7（2018年），第1253–1286页。 DOI： 10.1017/S0960129516000426。[99] David Mermin。“这只枕头有什么问题？”载于：《计算机科学中的数学结构》42.4（1989年），第615–646页。 URL： https://doi.org/10.1063/1.2810963。[100] B. Musto 和 Jamie Vicary。“量子拉丁方与酉误差基”。载于：《量子信息与计算》16（2016年），第1318–1332页。[101] 约翰·冯·诺伊曼和 Robert T. Beyer。《量子力学的数学基础：新版》。NED——新版。普林斯顿大学出版社，2018年。[102] Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息：十周年纪念版》。剑桥大学出版社，2010年。[103] Craig Pastro 和 Ross Street。“编织幺半范畴中的弱霍普夫幺半群”。载于：《代数与数论》3.2（2009年），第149–207页。[104] Dusko Pavlovic。“量子计算玩具模型之间的关联：理解、互补性与匕首混合自对偶范畴”。载于：《理论计算机科学电子札记》270.2（2011年），第121–139页。

[105] Hans-E. Porst。“关于幺半群、余幺半群和双幺半群范畴”。载于：Quaes- tiones Mathematicae 31.2（2008年），第127–139页。[106] Vaughan Pratt。“广义量子力学的线性逻辑”。载于：《物理学与计算》研讨会论文集（PhysComp’92）。电气电子工程师学会，1993年，第166–180页。[107] Abraham Robinson。《非标准分析》。普林斯顿大学出版社，1996年6月。[108] Andrea Schalk。“什么是线性逻辑的范畴模型？”可从 www.cs.man.ac.uk/~schalk/notes/llmodel.pdf 下载的手稿。2004 年。（访问日期：2021年4月17日）。[109] Peter Selinger。“幺半范畴的图形语言综述”。载于：《New Structures for Physics》。施普林格，2010年，第289–355页。[110] Peter Selinger。“dagger 紧闭范畴与完全正映射”。载于：《理论计算机科学电子札记》170（2007年），第139–163页。[111] Peter Selinger。“Dagger范畴中的幂等元：（扩展摘要）”。载于：《理论计算机科学电子札记》210（2008年），第107–122页。[112] Peter Selinger。“迈向量子编程语言”。载于：《计算机科学中的数学结构》14（2004年），第527–586页。[113] Sergey Slavnov。“序列的 Banach空间与自由线性逻辑指数模态”。载于：《计算机科学中的数学结构》29.2（2017年），第215–242页。[114] Shyamal S. Somaroo、David G. Cory 和 Timothy F. Havel。“用多粒子几何代数表达量子计算的运算”。载于：《物理学快报A》240.1（1998年），第1–7页。[115] Christine Tasson。“线性逻辑的语义与向量句法”。论文。巴黎狄德罗大学——巴黎第七大学，2009年12月。 URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00440752。[116] Jayme Jr. Vaz 和 Rold˜ao Jr. da Rocha。《克利福德代数与旋量导论》。牛津大学出版社，2019年。[117] Jamie Vicary。“量子谐振子的范畴框架”。载于：《国际理论物理学杂志》47.12（2008年），第3408–3447页。[118] Jamie Vicary。“有限维量子代数的范畴表述”。载于：《数学物理通讯》304.3（2010年11月），第765–796页。[119] Alexander Yu Vlasov。“克利福德代数与量子门的通用集合”。载于：《物理评论A》63.5（2001年4月）。

[120] Alexander Yu Vlasov。量子门与克利福德代数。1999。arXiv：9907079 [quant-ph]。