arXiv:2303.14252v1 [math.LO] 24 Mar 2023

ˊ不可数基数上的 Rudin-Frolík 序中的长链

KLAAS PIETER HART

Abstract. 我们指出，Butkoviˇcovˊa 构造的一个长度为 $\mathfrak{c}^+$ 、位于 $\beta\omega$ 上 Rudin-Frolík 序中的链，可以轻易改造为：给定一个不可数基数 κ，构造一条长度为 $(2^\kappa)^+$ 、位于 $\beta\kappa$ 上 Rudin-Frolík 序中的链。

Introduction

超滤子的 Rudin-Frolík 序 $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ 由 Frolík 于 [4] 定义，并被用于证明 $\beta\omega_0 \setminus \omega_0$ 的非齐性。该序在 $\beta\omega_0 \setminus \omega_0$ 上具有树状结构；一个元素的前驱按线性序排列，且每个点都有 $2^{\mathfrak{c}}$ 个后继。

关于这个序的许多自然问题已针对 $\beta\omega_0 \setminus \omega_0$ 得到解答。例如，每个点至多有 $\mathfrak{c}$ 个前驱，因此一条链的基数至多为 $\mathfrak{c}^+$；而在 [1]，Butkoviˇcovˊa 构造了一条具有这一最大可能序型的链。

$\leqslant_{\mathrm{RF}}$ 的定义由 Frolík 提出，适用于任意集合上的超滤子。因此，自然会有人问：关于 ω_0 上超滤子的结果能否推广到不可数基数。

本文旨在指出，Butkoviˇcovˊa 的构造几乎可以原封不动地用于在 $\beta\kappa$中构造一条长度为（2^κ）$^+$的 $\leqslant_{\mathrm{RF}}$-链，其中 κ 不可数。

1. Preliminaries

1.1. Rudin-Frolík 序。设 κ 为一个无限基数。若指标集$\{u_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ 存在一个划分 $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$，其各部分的基数均为 κ，且对所有 α都有 $U_\alpha \in u_\alpha$，则称其为 κ-离散的。

当 $\kappa = \omega_0$ 时，这一概念与该集合在 ˇCech-Stone 紧化 $\beta\omega_0$ 中的相对离散性一致，因为在 Hausdorff 空间中，可用两两不相交的开集分离一个可数相对离散集的各个元素。

若 $X = \{u_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ 是 κ-离散的，则其在 $\beta\kappa$ 中的闭包同胚于 $\beta\kappa$；映射 $f : \alpha \to \beta\kappa$ 由 $f(\alpha) = u_\alpha$ 给出，它在 $\beta\kappa$ 与 $\{u_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ 的闭包之间诱导一个同胚映射。若 $u \in \beta\kappa$，那么按照 Frolík 的惯例，通常将 $\beta f(u)$ 记为 $\sum(X, u)$。

Rudin-Frolík 偏序 $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ 定义在 $\beta\kappa$ 上：当且仅当存在一个 κ-离散集 X，使得 $v = \sum(X, u)$。[5] 中关于 $\leqslant_{\mathrm{RF}}$ 是 ω_0 上超滤子类型的偏序的证明，可以直接推广到其他基数。

Date：2023年3月24日 20:27:57 (RF-unctble.tex)。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E05；次要分类：54D80。*Key words and phrases.* Rudin-Frolík 序、链、独立矩阵、一致超滤子。

1.2. 滤子的分层集。构造中的主要工具是滤子的分层集。

设 κ 为一个无限基数。在 κ 上的滤子分层集是一个由 κ上的滤子组成的 $\alpha\times\kappa$-矩阵$\langle\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$，其中 α 是一个序数，并且满足：

- 存在一组选取 $F_{\beta,\ \eta}\in\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$，使得对于每个 $\beta\in\alpha$，族 $\{F_{\beta,\eta}:\eta\in\kappa\}$ 两两不相交，并且
- 若 $\beta<\delta<\alpha$、$\eta\in\kappa$ 且 $F\in\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$，则 $\{\zeta\in\kappa:F\in\mathcal{F}_{\delta,\ \zeta}\}$ 的基数为 κ。

注意，在一个滤子分层集中，除最后一行中的滤子外，所有滤子都是一致的；如果 α 是后继序数，最后一行中的滤子可能例外。因为若 $F\in\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$ 且 $\beta+1<\alpha$，那么 F 会与许多两两不相交的集合 $F_{\beta+1,\ \zeta}$相交，因此其基数为 κ。

在我们的构造中，$\alpha=\beta+1$ 滤子 $\mathcal{F}_{\beta,\ \zeta}$总是一致的。

1.3. 独立矩阵。构造中的另一项辅助工具是由集合构成的独立矩阵，即一个矩阵 $\langle A_{\xi,\ \eta}:\ \langle\xi,\eta\rangle\in 2^\kappa\times\kappa\rangle$，其元素是 κ 的子集，并满足

(1) 对每个 ξ，族 $\{A_{\xi,\eta}:\ \eta\in\kappa\}$ 都是 κ 的一个划分，划分成基数为 κ 的集合；(2) 对每个有限函数 $p\subset 2^\kappa\times\kappa$，交集 $\bigcap_{\xi\in\operatorname{dom}p}A_{\xi,\ p(\xi)}$ 的基数为 κ。

关于此类族的构造，参见 [3, 定理 3]。

2. The main result

与 [1] 中一样，我们构造一个由 κ-离散超滤子族组成的三角数组。也就是说，一个数组

$$\left\langle\mathfrak{U}_{\alpha,\beta}:\beta<\alpha<(2^\kappa)^+\right\rangle$$

其中每个 $\mathfrak{U}_{\alpha,\ \beta}$ 都是 κ-离散的带指标族 $\langle u\ (\alpha,\beta,\eta):\ \eta\in\kappa\rangle$，由 κ 上的超滤子构成。

对这个数组的要求是，对于每个 $\alpha<(2^\kappa)^+$

(1) 行 $\langle\mathfrak{U}_{\alpha,\beta}:\beta<\alpha\rangle$ 是超滤子的分层族，并且

(2) 若 $\beta<\delta<\alpha$ 且 $\eta\in\kappa$，则

$$u(\alpha,\beta,\eta)=\sum\bigl(\mathfrak{U}_{\alpha,\delta},u(\delta,\beta,\eta)\bigr)$$

这将在 $\beta\kappa$ 上的 Rudin-Frolík 序中产生许多长度为 $(2^\kappa)^+$ 的链。事实上，对于每个固定的有序对 $\langle\beta,\eta\rangle$，上面的条件 (2) 表明，只要 $\beta<\delta<\alpha$，就有 $u(\delta,\beta,\eta)\ <_{\mathrm{RF}}u(\alpha,\beta,\eta)$，因此序列

$$\left\langle u(\alpha,\beta,\eta):\beta<\alpha<(2^\kappa)^+\right\rangle$$

是 $<_{\mathrm{RF}}$-递增的。

构造。我们逐行递归地构造数组。同时，我们构造一个数组

$$\left\langle\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}:\beta<\alpha<(2^\kappa)^+\right\rangle$$

的划分，其中 $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}=\{U(\alpha,\beta,\eta):\ \eta\in\kappa\}$ 是独立矩阵中的一行$\langle A_{\xi,\eta}:\ \langle\xi,\eta\rangle\in 2^\kappa\times\kappa\rangle$ 来自小节 1.3。我们始终有 $U(\alpha,\beta,\eta)\ \in u(\alpha,\beta,\eta)$，因此 $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ 证明了 $\mathfrak{U}_{\alpha,\beta}$ 的 κ-离散性。

首先，为了开始构造，我们取矩阵的第一行 $\{A_{0,\eta}:\eta\in\kappa\}$，于是 $U(1,0,\eta)=A_{0,\ \eta}$；并且对每个 η，我们选取一个一致超滤子 $u(1,0,\eta)$，使得 $U(1,0,\eta)\in u(1,0,\eta)$。那么集合 $\mathfrak{U}_{1,\ 0}=\{u(1,0,\eta):\ \eta\in\kappa\}$ 是 κ-离散的，而这个单元素行显然是分层的。

现在假设已给定 $\alpha \in (2^\kappa)^+$，并且我们有一个数组

$$\langle \mathfrak{U}_{\beta,\gamma} : \gamma < \beta < \alpha \rangle$$

满足直到 α 为止的要求 (1) 和 (2)。因此，每一行$\langle \mathfrak{U}_{\beta,\gamma} : \gamma < \beta \rangle$ 都是分层的，并且我们有

$$u(\beta,\gamma,\eta) = \sum \big(\mathfrak{U}_{\beta,\delta}, u(\delta,\gamma,\eta) \big)$$

当 $\gamma < \delta < \beta$ 且 $\eta \in \kappa$ 时。

我们构造第 α 行。

由于 $\alpha < (2^\kappa)^+$，我们可以取一个单射 $i : \alpha \to 2^\kappa$，并通过设定 $U(\alpha,\beta,\eta) = A_{i(\xi),\eta}$（对所有 ξ 和 η），构造一个独立矩阵 $\langle U(\alpha,\beta,\eta) : \langle \beta,\eta \rangle \in \alpha \times \kappa \rangle$。由此还可得到划分 $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$，其中 $\beta < \alpha$。

利用这个矩阵以及迄今构造的超滤子，我们构造一个分层的族

$$\langle \mathcal{F}_{\beta,\eta} : \langle \beta,\eta \rangle \in \alpha \times \kappa \rangle$$

滤子的如下构造。

设 $\langle \beta,\eta \rangle \in \alpha \times \kappa$。令 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 为由以下各族的并生成的滤子：

(1) Fr´echet 滤子 $\{F \subseteq \kappa : |\kappa \setminus X| < \kappa\}$，(2) 对于 $\gamma < \beta$，单元素集 $\{U(\alpha,\gamma,\zeta)\}$，其中 ζ 满足 $\eta \in U(\beta,\gamma,\zeta)$，(3) 单元素集 $\{U(\alpha,\beta,\eta)\}$，(4) 对于 $\gamma \in (\beta,\alpha)$，族 $\big\{\bigcup_{\zeta\in U} U(\alpha,\gamma,\zeta) : U \in u(\gamma,\beta,\eta)\big\}$

利用 $\big\langle U(\alpha,\gamma,\zeta) : \langle \gamma,\zeta \rangle \in \alpha\times\kappa \big\rangle$ 是独立矩阵这一事实，可以很容易地验证，上述各族的并具有有限交性质，并且 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 确实是一致滤子。还需证明所得的族是分层的。

为此，我们利用上述公式在构造的每个阶段都会用到这一点，因此对于小于 α 的所有序数三元组 $\gamma < \beta < \delta$，(1)–(4) 均成立。

现设 $\langle \beta、\eta \rangle$ 和 $\delta \in (\beta、\alpha)$ 给定。对于 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 的生成族中的每个元素 G，我们计算集合 $X_G = \{\zeta : G \in \mathcal{F}_{\delta,\zeta}\}$，并证明它属于 $u(\delta、\beta、\eta)$。由此可得，对于 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 中的所有 G，$X_G \in u(\delta、\beta、\eta)$ 成立，因此这些集合的基数均为 κ。

(1) 若 G 属于弗雷歇滤子，则 $X_G = \kappa$，因为所有滤子都是一致的。(2) 若 $G = U(\alpha、\gamma、\xi)$，且 $\gamma < \beta$，则 $G \in \mathcal{F}_{\delta、\zeta}$ 当且仅当 $\zeta \in U(\delta、\gamma、\xi)$，因此 $X_G = U(\delta、\gamma、\xi)$。但由于 $U(\alpha、\gamma、\xi) \in \mathcal{F}_{\beta、\eta}$，我们也有 $\eta \in U(\beta、\gamma、\xi)$；这意味着在构造行 δ 时，我们通过 (2) 确保了 $U(\delta、\gamma、\xi) \in u(\delta、\beta、\eta)$，也就是说，$X_G \in u(\delta、\beta、\eta)$。(3) 若 $G = U(\alpha、\beta、\eta)$，则 $G \in \mathcal{F}_{\delta、\zeta}$ 当且仅当 $\zeta \in U(\delta、\beta、\eta)$，所以 $X_G = U(\delta、\beta、\eta)$，并且 $X_G \in u(\delta、\beta、\eta)$。(4) 若 $G = \bigcup_{\xi\in U} U(\alpha、\gamma、\xi)$，且 $\beta < \gamma < \delta$ 和 $U \in u(\gamma、\beta、\eta)$，则 $G \in \mathcal{F}_{\delta、\zeta}$ 当且仅当对于某个属于 U 的 ξ，有 $\zeta \in U(\delta、\gamma、\xi)$；因此 $X_G = \bigcup_{\xi\in U} U(\delta、\gamma、\xi)$，进而 $X_G \in \sum(\mathfrak{U}_{\delta、\gamma、} u(\gamma、\beta、\eta)) = u(\delta、\beta、\eta)$。(5) 若对于某个 $U \in u(\delta、\beta、\eta)$，$G = \bigcup_{\xi\in U} U(\alpha、\delta、\xi)$，则 $X_G = U$，因为若 $\zeta \in \kappa$，则 $G \in \mathcal{F}_{\delta、\zeta}$ 当且仅当 $G \supseteq U(\alpha、\delta、\zeta)$，又当且仅当 $\zeta \in U$。(6) 若 $G = \bigcup_{\xi\in U} U(\alpha、\gamma、\xi)$，且 $\delta < \gamma$ 和 $U \in u(\gamma、\beta、\eta)$，那么由于 $u(\gamma、\beta、\eta) = \sum(\mathfrak{U}_{\gamma、\delta、} u(\delta、\beta、\eta))$，我们有 $\{\zeta : U \in u(\gamma、\delta、\zeta)\} \in u(\delta、\beta、\eta)$。但 $\mathcal{F}_{\delta、\zeta}$ 的定义随即表明 $X_G = \{\zeta : U \in u(\gamma、\delta、\zeta)\}$，因此 $X_G \in u(\delta、\beta、\eta)$。

在下一节中，我们将说明如何找到一个超滤子的分层集 $\langle u(\alpha,\beta,\eta) : \langle \beta,\eta \rangle \in \alpha \times \kappa \rangle$，使得对于所有 $\langle \beta,\eta \rangle$，都有 $\mathcal{F}_{\beta,\eta} \subseteq u(\alpha,\beta,\eta)$。

现在我们证明，这样一个分层集将满足

$$u(\alpha,\beta,\eta)=\sum\bigl(\mathfrak{U}_{\alpha,\delta},u(\delta,\beta,\eta)\bigr)$$

每当 $\beta<\delta<\alpha$ 和 $\eta\in\kappa$。

设 $V\in u(\alpha,\beta,\eta)$ 且 $I=\{\zeta\colon\ V\in u(\alpha,\delta,\zeta)\}$。我们必须证明 $I\in u(\delta,\beta,\eta)$。

设 $U\in u(\delta,\beta,\eta)$，则 $W=\bigcup_{\xi\in U}U(\alpha,\delta,\xi)$ 属于 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}$，因此 $V\cap W\in u(\delta,\beta,\eta)$，进而推出 $J=\{\zeta\colon\ V\cap W\in u(\alpha,\delta,\zeta)\}$ 的基数为 κ。但是 $J\subseteq I\cap U$，所以 $I\cap U$ 的基数为 κ。由于 U 是任意的，这表明 $I\in u(\delta,\beta,\eta)$。

3. From stratified sets of filters to stratified sets of ultrafilters

给定一个分层集 $\langle\mathcal{F}_{\beta,\eta}\colon\ \langle\beta,\eta\rangle\in\alpha\times\kappa\rangle$，其中包含若干滤子，我们必须构造一个分层集 $\langle u_{\beta,\eta}\colon\ \langle\beta,\eta\rangle\in\alpha\times\kappa\rangle$，其中包含若干超滤子，使得对所有 $\langle\beta,\eta\rangle$，都有 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}\subseteq u_{\beta,\eta}$。

下面的引理给出了下述构造中的后继步骤。

引理 3.1. 设 $\langle\mathcal{F}_{\beta,\eta}\colon\langle\beta,\eta\rangle\in\alpha\times\kappa\rangle$ 是 κ 上的滤子分层集，且 $X\subseteq\kappa$。那么存在滤子的分层集 $\langle\mathcal{G}_{\beta,\eta}\colon\langle\beta,\eta\rangle\in\alpha\times\kappa\rangle$，使得对所有 $\langle\beta,\eta\rangle$，都有 $\mathcal{F}_{\beta,\eta}\subseteq\mathcal{G}_{\beta,\eta}$，并且 $X\in\mathcal{G}_{\beta,\eta}$ 或 $\kappa\setminus X\in\mathcal{G}_{\beta,\eta}$。

证明。首先，我们决定将 X 加入哪些滤子，并将其补集加入哪些滤子。

令 $C=\{\langle\beta,\eta\rangle:X\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}\}$，并以某种方式将其闭包：定义 $C_0=C$；递归地，当 ξ 是极限时，令 $C_\xi=\bigcup_{\delta<\xi}C_\delta$；而在后继阶段

$$C_{\xi+1}=C_\xi\cup\bigl\{\langle\beta,\eta\rangle:(\exists\varepsilon>\beta)(\exists F\in\mathcal{F}_{\beta,\eta})\bigl(\bigl|\{\langle\varepsilon,\zeta\rangle:F\in\mathcal{F}_{\varepsilon,\zeta}\}\setminus C_\xi\bigr|<\kappa\bigr)\bigr\}\quad(\dagger)$$

由于 $C_{\kappa^+}+1=C_{\kappa^+}$，这一过程会在 κ^+ 处（或更早）停止。为此，注意到若 $\langle\beta,\eta\rangle\in C_{\kappa^+}+1$，如 $\varepsilon>\beta$ 和 $F\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 所示，则交集 $\{\langle\varepsilon,\zeta\rangle:F\in\mathcal{F}_{\varepsilon,\zeta}\}\cap C_{\kappa^+}$ 的基数为 κ，因此已包含于某个 C_ξ，其中 $\xi<\kappa^+$；这就说明 $\langle\beta,\eta\rangle$ 已经属于 $C_{\xi+1}$。我们称 C_{κ^+} 为 C 的闭包，并记作 $\overline{C}$。

若 $\langle\beta,\eta\rangle\in\overline{C}$，则当 $G\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 时，$G\cap X$ 的基数为 κ。我们对 ξ 使用归纳法来证明这一点。

若 $\langle\beta,\eta\rangle\in C_0$，则 $X\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}$，因此得证。

从 ξ 到 $\xi+1$，令 $\langle\beta,\eta\rangle\in C_{\xi+1}\setminus C_\xi$，并取 $\varepsilon>\beta$ 和 $F\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}$，使得 $\{\langle\varepsilon,\zeta\rangle:F\in\mathcal{F}_{\varepsilon,\zeta}\}\setminus C_\xi$ 的基数小于 κ。现在，若 $G\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}$，则 $\{\langle\varepsilon,\zeta\rangle:G\cap F\in\mathcal{F}\varepsilon,\zeta\}$ 是 $\{\langle\varepsilon,\zeta\rangle:F\in\mathcal{F}_{\varepsilon,\zeta}\}$ 的一个子集，其基数为 κ；因此，它与 C_ξ 的交集 I 的基数为 κ。但是，根据归纳假设，$G\cap F\cap F_{\varepsilon,\zeta}\cap X$ 对所有 $\langle\varepsilon,\zeta\rangle\in I$ 的基数均为 κ，故 $G\cap X$ 的基数当然为 κ。

若 $\langle\beta,\eta\rangle\notin\overline{C}$，那么特别地 $\langle\beta,\eta\rangle\notin C$，因此 $X\notin\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$，所以 $\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$ 的每个成员都与 $\kappa\setminus X$ 相交。

由于假设这些超滤子是一致的，这意味着对于所有 $F\in\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$，$F\cap(\kappa\setminus X)$ 的基数都是 κ。

若 $\langle\beta,\eta\rangle\in\overline{C}$，我们令 $\mathcal{G}_{\beta,\ \eta}$ 为由 $\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}\cup\{X\}$ 生成的滤子；否则令其为由 $\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}\cup\{\kappa\setminus X\}$ 生成的滤子。

我们需要证明 $\langle\mathcal{G}_{\beta,\ \eta}\colon\langle\beta,\eta\rangle\in\alpha\times\kappa\rangle$ 是分层的。

若 $\langle\beta,\eta\rangle\notin\overline{C}$，那么对于每个 $F\in\mathcal{F}_{\beta,\ \eta}$ 以及每个 $\gamma>\beta$，交集 $\{\langle\gamma,\zeta\rangle:F\in\mathcal{F}_{\gamma,\ \zeta}\}\setminus\overline{C}$ 的基数为 κ，因此 $\{\langle\gamma,\zeta\rangle\colon\ F\cap(\kappa\setminus X)\in\mathcal{G}_{\gamma,\ \zeta}\}$ 的基数也为 κ。

接下来令 $\langle\beta,\eta\rangle\in\overline{C}$。我们证明，对于每个 $G\in\mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 以及每个 $\gamma>\beta$，集合 $I_{G,\gamma}=\{\langle\gamma,\zeta\rangle\in\overline{C}:G\in\mathcal{F}_{\gamma,\zeta}\}$ 的基数为 κ。

一旦证明了这一点，我们就知道，对于 $\langle\gamma,\zeta\rangle \in G_{F,\gamma}$，有 $F,X \in \mathcal{G}_{\gamma,\zeta}$，因此 $F \cap X \in \mathcal{G}_{\gamma,\zeta}$。又由于 $\mathcal{G}_{\beta,\eta}$ 由 $\{F \cap X : F \in \mathcal{F}_{\beta,\eta}\}$ 生成，这表明该族在 $\overline{C}$ 的每个元素处都是分层的。

我们通过对 ξ 进行归纳法，证明该命题对每个 C_ξ都成立。

若 $\langle\beta,\eta\rangle \in C_0$，则 $X \in \mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 因此对每个 $G \in \mathcal{F}_{\beta,\eta}$ 以及每个 $\gamma > \beta$，集合$\{\langle\gamma,\zeta\rangle : G \cap X \in \mathcal{F}_{\gamma,\zeta}\}$ 的基数为 κ，且包含于 C_0中。

从 ξ到 $\xi+1$，令 $\langle\beta,\eta\rangle \in C_{\xi+1}$，由 $\varepsilon > \beta$和 $F \in \mathcal{F}_{\beta,\eta}$见证。令$I = \{\langle\varepsilon,\zeta\rangle : F \in \mathcal{F}_{\varepsilon,\zeta}\}$，则 $I \setminus C_\xi$ 的基数小于 κ。

现在令$G \in \mathcal{F}_{\beta,\eta}$，则 $\{\langle\varepsilon,\zeta\rangle \in I : G \in \mathcal{F}_{\varepsilon,\zeta}\}$ 的基数为此，因此$I_{G,\varepsilon} \cap C_\xi$的基数也相同。

由归纳假设可知，对于 $\gamma > \varepsilon$，集合 $\{\langle\gamma,\zeta\rangle \in C_\xi : G \in \mathcal{F}_{\gamma,\zeta}\}$ 的基数为 κ。

根据 $C_{\xi+1}$ 的定义可知，对于区间 (β,ε) 中的 γ，集合 $\{\langle\gamma,\zeta\rangle : G \cap F \in \mathcal{F}_{\gamma,\zeta}\}$ 是 $C_{\xi+1}$的子集，见证为 F 和 ε。□

为了构造超滤子的分层集，我们将 κ 的幂集枚举为$\langle X_\nu : \nu \in 2^\kappa\rangle$，并递归地构造矩阵$\langle\mathcal{F}^\nu_{\beta,\eta} : \langle\beta,\eta\rangle \in \alpha\times\kappa\rangle$，其中$\langle\mathcal{F}^0_{\beta,\eta} : \langle\beta,\eta\rangle \in \alpha\times\kappa\rangle$ 是给定的分层集；每次通过对$\langle\mathcal{F}^\nu_{\beta,\eta} : \langle\beta,\eta\rangle \in \alpha\times\kappa\rangle$ 和 X_ν 应用引理 3.1，得到$\langle\mathcal{F}^{\nu+1}_{\beta\eta}, : \langle\beta,\eta\rangle \in \alpha\times\kappa\rangle$；在极限阶段，对所有 $\langle\beta,\eta\rangle$，均有$\mathcal{F}^\nu_{\beta,\eta} = \bigcup_{\mu<\nu}\mathcal{F}^\mu_{\beta,\eta}$。

那么，对于所有 $\langle\beta,\eta\rangle$，我们可以令 $u_{\beta,\eta} = \mathcal{F}^{2^\kappa}_{\beta,\eta}$。

References

[1] Eva Butkovi˘cov´a, *Long chains in Rudin-Frolík order*, Comment. Math. Univ. Carolin. 24 (1983 3, 563 570 730151), 第 – 期。MR Ryszard Engelking, , 第 2 版，纯数学丛书，第 6 卷，[2] *General topology* Heldermann Verlag, 柏林, 1989。由作者从波兰语译出。MR1039321[3] R. Engelking 和 M. Kar lowicz, *Some theorems of set theory and their topological consequences* **57** 1965 275 285, 10 4064 57 3 275 285 , Fund. Math.（），– 196693 DOI . /fm- - - -。MR[4] ´ *Sums of ultrafilters* **73** 1967 87 Zden˘ ek Frolík, , Bull. Amer. Math. Soc.（），–91, DOI 10 1090 0002 9904 1967 11653 7 203676 。/S - - - -。 MR Mary Ellen Rudin, *Partial orders on the types in* βN, [5] Trans. Amer. Math. Soc. 155（1971），353–362, DOI 10.2307/1995690。MR273581

Faculty EEMCS, TU Delft, Postbus 5031, 2600 GA Delft, the Netherlands

Email address: k.p.hart@tudelft.nl*URL*: https://fa.ewi.tudelft.nl/˜hart