arXiv:2303.14257v1 [math.CV] 24 Mar 2023

向量值全纯函数与多重调和函数的 p-博尔半径

Nilanjan Das

Abstract. 我们研究了著名博尔半径问题的一个“p-幂”版本 $K_n^p(F(R))$，其研究对象是全纯函数族 $F(R)$ $f:\ R\to X$ 满足$\|f\|<\infty$，其中 $\|.\|$ 是函数空间 $F(R)$上的一个范数， $R\subset\mathbb{C}^n$ 是一个完备 Reinhardt 域， X 是一个复巴拿赫空间。对于所有 $p>0$，我们详细描述了 $K_n^p(F(R))$ 的渐近行为，其中 $F(R)$ 是：(a) 定义在开单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上的 X 值全纯函数的 Hardy 空间；(b) 定义在闵可夫斯基空间 l_t^n的开单位球 $B(l_t^n)$ 上的有界 X 值全纯函数或复值多调和函数空间。根据这些结果，我们为复巴拿赫空间 X 给出了最优余型的另一种定义。此外，我们的结果还涵盖了两个定理的最佳可能版本： [B´en´eteau 等人发表于 Comput. Methods Funct. Theory, 4 (2004), no. 1, 1–19]的定理，以及 [Chen 与 Hamada 发表于 J. Funct. Anal., 282 (2022), no. 1, Paper No. 109254, 42 pp] 的定理。

1. Introduction and the main results

若一个完备 Reinhardt 域 R 包含于 n维复平面 $\mathbb{C}^n$ 中，则它满足：如果 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in R$，那么 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R$，其中 $|x_n|\leq|z_n|$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$成立。本文中，我们将使用标准的多重指标记号： α 表示一个由非负整数组成的 n元组（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$），$|\alpha|:=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $\alpha!:=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$， z表示一个由复数组成的 n元组（$z_1,z_2,\cdots,z_n$），而 z^α 是乘积 $z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$。给定一个复巴拿赫空间 X, 我们将博尔半径 $K_X(R)$定义为满足以下条件的所有 $r\in[0,1]$ 的上确界

$$\sup_{z\in rR}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha z^\alpha\|\leq 1 \tag{1.1}$$

对于所有全纯函数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}x_\alpha z^\alpha$: $R\to X$其中 $\|f(z)\|\leq 1$对所有 $z\in R$。Harald Bohr 的一个经典定理（由 Wiener、Riesz 和 Schur 分别独立优化）指出 $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})=1/3$ (参见 [10])。1995 年，Dixon [24]在算子代数领域发现了这一结果的一项意想不到的应用。此后，波尔定理从多个不同的

2020年数学主题分类。32A05，32A10，32A35，31C10，42B30，46E40。关键词和短语：博尔半径、全纯函数、多重调和函数、巴拿赫空间。本文作者获得印度统计学院加尔各答分校统计数学单位提供的研究助理职位资助。

方面得到了研究和推广——例如，可参阅文章 [1,2,4,17,18,26,27,29–32],、近期出版的书籍 [21] 及其参考文献。

本文将重点探讨该理论的 n 维推广及其向量值方面。量 $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}^n)$ 首先由 Dineen 和 Timoney [23], 考虑，随后 Boas 和 Khavinson [9], 也进行了研究，其中 $\mathbb{D}^n := \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1$ 对所有 $1 \le i \le n\}$ 均成立；$1 \le i \le n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位多圆盘。值得一提的是，至今 $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}^n)$ 对所有 $n > 1$ 的确切值仍然未知。因此，研究 $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}^n)$ 关于 n 的渐近行为是一个引人入胜的问题。在这方面，目前已知的最佳结果是 Bayart 等人给出的以下结果 [4]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}^n)}{\sqrt{\frac{\log n}{n}}} = 1$$

（另见 [18]）。另一项重要贡献是 Defant 和 Frerick 提出的以下定理 [19]:

$$K_{\mathbb{C}}(B(l_t^n)) \sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{t,2\}}},$$

其中 $B(l_t^n) := \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : (\sum_{i=1}^n |z_i|^t)^{1/t} < 1\}$ 是闵可夫斯基空间 l_t^n，$t \in [1, \infty)$ 的开单位球，而 $\mathbb{D}^n \equiv B(l_\infty^n)$。这里说明，对于任意两个正实数序列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$，若存在常数 $C, D > 0$，使得对所有$n > 1$均有 $p_n \le Cq_n$ 和 $p_n \ge Dq_n$，我们记作 $p_n \prec q_n$ 和$p_n \succ q_n$；并且当 $p_n \prec q_n$ 且 $p_n \succ q_n$ 时，记作 $p_n \sim q_n$。

此时，有必要指出，当 $\dim(X) > 1$ 时，经典形式的博尔不等式 (1.1) 已无法使用，因为我们已经知道，对所有 $t \in [1, \infty]$，均有 $K_{l_t^2}(\mathbb{D}) = 0$（参见定理 1.2]）。然而，适当修改该不等式后，可以得到关于相应“博尔半径”的有趣新结果。Defant 等人在 [20] 中证明，若将不等式 (1.1) 右端的 1 替换为 $\lambda > 1$，并以类似方式定义此情形下的博尔半径 $K_X(\mathbb{D}^n, \lambda)$，则对所有复巴拿赫空间 X，均有 $K_X(\mathbb{D}^n, \lambda) > 0$。此外，定理 1.2] 给出了 $K_X(\mathbb{D}^n, \lambda)$ 在有限维和无限维巴拿赫空间中的精确渐近行为。

另一方面，如果选择保持（1.1）右端不变并调整左端，那么一种做法是对各项 $\|x_\alpha z^\alpha\|$ 的正幂求和。具体来说，对于 $p > 0$，我们考虑博尔不等式

$$\sup_{z\in r\mathbb{D}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha z^\alpha\|^p \le 1$$

对于所有全纯函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha : \mathbb{D}^n \to X$，其中 $\|f(z)\| \le 1$ 属于 $\mathbb{D}^n$，并将 $K_X^p(\mathbb{D}^n)$ 记为使上述不等式仍然成立的最大 $r \in [0, 1]$。

量 $K_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{D})$ 和 $K_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{D}^n)$ 最早由 Djakov 和 Ramanujan[25] 研究。他们的研究表明，当 $p \in (0, 1)$ 时，这两个量均为 0；当 $p \ge 2$ 时，二者均为 1。Hardy 空间中这些半径的类似情形也曾得到研究

者为 B´en´eteau 等人 [5]。对于 $p \in (1, 2)$，Kayumov 和 Ponnusamy [28]，确定了 $K^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})$ 的精确值，而作者 [14] 最近得出了 $K^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}^n)$ 的精确渐近值。对于向量值情形，Blasco 在 [8, 定理 1.10] 中证明，$K^p_X(\mathbb{D}) > 0$ 当且仅当 X 是 p-一致 $\mathbb{C}$-凸的（$2 \leq p < \infty$）；并且当 $p \in [1, 2)$ 且 $\dim(X) \geq 2$ 时，$K^p_X(\mathbb{D})$ 不可能取非零值。因此，这样的定义并不能为所有复巴拿赫空间 X 给出非零的博尔半径。这引出了以下问题

问题：对于任意复巴拿赫空间 X，如何得到一种上述幂型 Bohr 不等式的变体，使其具有非零的博尔半径?

为了解决这个问题，我们提出一个略有不同的定义。记 $F(R)$ 为满足 $\|f\| < \infty$ 的全纯函数 $f\colon R \to X$ 所组成的族，其中 $\|.\|$ 是函数空间 $F(R)$ 上的范数。这里，$R \subset \mathbb{C}^n$ 是一个完备 Reinhardt 域，X 是一个复巴拿赫空间。对于任意给定的 $p \in (0, \infty)$，族 $F(R)$ 的 p-博尔半径$K^p_n(F(R))$ 是所有满足下式的 $r \in [0, 1]$ 的上确界:

$$\sup_{z \in rR} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha z^\alpha\|^p \leq 1$$

对于所有满足 $\|f\| \leq 1$ 的 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \in F(R)$。

我们的结果很快就会表明，以下情形是其特例：对于任意复巴拿赫空间 X 和任意完备 Reinhardt 域 $R \subset \mathbb{C}^n$，$F(R)$ 是定义在 R 上的有界（相对于上确界范数）X 值全纯函数族时，$p > 0, K^p_n(F(R)) > 0$。

现在，我们将开始介绍主要定理以及必要的背景知识。据我们所知，在文章 [5]发表之后，关于多变量 Hardy 空间函数的幂型 Bohr 不等式的研究便再无进展。这促使我们考虑以下

问题：详细研究量 $K^p_n(F(R))$，其中 $F(R)$ 是定义在 $\mathbb{D}^n$ 中的 X 值全纯函数的 Hardy 空间。

我们将在定理 1 中回答这个问题，但首先需要介绍向量值 Hardy 空间以及巴拿赫空间 X 的“余型”这一概念。具体而言，对于 $s \in [1, \infty]$，我们定义

$$H^s(\mathbb{D}^n, X) := \{f : \mathbb{D}^n \to X \text{ holomorphic} : \|f\|_s < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_s := \begin{cases} \sup_{0<\rho<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(\rho z)\|^s dz\right)^{\frac{1}{s}} \text{ for } s < \infty, \text{ and} \\ \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \|f(z)\| \text{ for } s = \infty, \end{cases}$$

dz 是单位多圆环上的归一化 Lebesgue 测度 $\mathbb{T}^n := \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1$ 对所有 $1 \leq i \leq n\}$。此外，若存在常数 $C > 0$，使得对于任意选取的向量 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in X$，都有$X$ 余型为 $q \in [2, \infty]$，

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t) x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 r_n 是 $[0,1]$上的第 n 个拉德马赫函数。记

$$\mathrm{Cot}(X) := \inf\{2 \le q \le \infty : X \text{ has cotype } q\}.$$

量 $\mathrm{Cot}(X)$ 有时称为 X 的“最优余型”，其定义中的下确界未必能取到。余型的概念在巴拿赫空间的可求和性理论与几何研究中发挥着重要作用。我们建议感兴趣的读者参阅文献 [21,22]，以了解这些主题的更多信息。

做好上述准备后，我们现在可以陈述本文的第一个定理。

定理 1. 对于任意给定的复巴拿赫空间 X 和 $p \in (0,\infty)$ $s \in [1,\infty]$，有如下结论：

(i) 当 $\dim(X) = \infty$ 时，

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \prec K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\mathrm{Cot}(X)}} \text{ for } p \le \mathrm{Cot}(X), \text{ and}$$

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim 1 \text{ for } p > \mathrm{Cot}(X),$$

若 X 具有有限余型 q。否则

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) 当 $\dim(X) < \infty$ 且 $p < 2$,

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \text{ for } s \in [1,2], \text{ and} \\ \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \text{ for } s \in (2,\infty], \end{cases}$$

并且对所有 $s \ge 1, p \ge 2$, $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim 1$。

(iii) 特别地，对所有 $p < 2$

$$K_n^p(H^2(\mathbb{D}^n, \mathbb{C})) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

备注。值得注意的是，对于 $p = 1$ 和 $s = \infty$，本定理的第 (i) 部分和第 (ii) 部分与 [20,定理 1.2]一致。此外，对于 $X = \mathbb{C}$ 和 $p = 1$, $s = \infty$，第 (ii) 部分与 [18,定理 2] 一致。

以下推论可由定理 1 的第 (iii) 部分直接得出（证明中也会说明）。

推论 1. 对任意 $p \in (0, 2)$ 以及任意满足 $\|f\|_2 \le 1$ 的 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha z^\alpha \in H^2(\mathbb{D}^n, \mathbb{C})$，不等式 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p |z^\alpha| \le 1$ 对所有 $z \in R_n \mathbb{D}^n$ 均成立，其中 $R_n \le (1 - (1/2)^{1/n})^{1-(p/2)}$。这是 R_n 的最佳可能上界。

此推论 1 对 [5, 定理 4.1], 进行了强化，其中上述结果已证明对 $R_n \le (1/(2n))^{1-(p/2)}$成立。定理 1 和命题 1（见第 2 节）的另一个直接推论如下：

推论 2. 给定任意完备 Reinhardt 域 $R \subset \mathbb{C}^n$，对于所有复 Banach 空间 X 以及所有 $p \in (0,\infty)$，都有 $K_n^p(H^\infty(R,X)) > 0$。这里，$H^\infty(R,X)$ 是定义在 R 上的 X 值有界全纯函数空间，取上确界范数。

现在我们将注意力转向空间 $H^\infty(B(l_t^n)\ X)$、$t \in [1,\infty]$。正如我们已经提到的，关于 $K_n^1(H^\infty(B(l_t^n)\ \mathbb{C}))$ 的精确渐近值已见于 [19]，而 $H^\infty(\mathbb{D}^n, X)$ 中函数的类似量则已在 [20] 中得到研究。下述定理旨在通过一个以 p 为幂的框架统一这两种方法。

定理 2. 对任意给定的复巴拿赫空间 X 和 $p \in (0,\infty)$ $t \in [1,\infty]$，有如下结论：

(i) 当 $\dim(X) = \infty$ 时，

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\min\{q,t\}}} \prec K_n^p(H^\infty(B(l_t^n),X)) \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\min\{\mathrm{Cot}(X),t\}}} \text{ for } p \le \min\{\mathrm{Cot}(X),t\} \text{ and}$$

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n),X)) \sim 1 \text{ for } p > \min\{\mathrm{Cot}(X),t\},$$

若 X 具有有限余型 q。否则

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n),X)) \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{t}}.$$

(ii) 当 $\dim(X) < \infty$ 时，

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n),X)) \sim \begin{cases} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\min\{t,2\}}} \text{ for } p < \min\{t,2\}, \text{ and} \\ 1 \text{ for } p \ge \min\{t,2\}. \end{cases}$$

由定理 1 可知，对于任意给定的 $s \in [1,\infty]$，若 $p < \mathrm{Cot}(X)$，则 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n,X))$ 当 $n \to \infty$ 时趋于 0。另一方面，当 $p > \mathrm{Cot}(X)$ 时，$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n,X))$（作为 n 的函数）与 0 保持正距离；若 X 的余型为 $\mathrm{Cot}(X)$，则对于 $p = \mathrm{Cot}(X)$ 也同样如此。类似地，定理 2 表明，只要 $p < \min\{\mathrm{Cot}(X)\ t\}$，$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X))$ 就会在 $n \to \infty$ 时趋于 0；而当 $p > \min\{\mathrm{Cot}(X)\ t\}$ 时，$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X))$ 与 0 保持正距离。综上所述，我们提出以下关于 X 的最优余型（即 $\mathrm{Cot}(X)$）的刻画。

推论 3. 对任意复巴拿赫空间 X，我们有

(i) $\mathrm{Cot}(X) = \text{上确界}\{p > 0 : \lim_{n\to\infty} K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n,X)) = 0\}$ 对任意我们选择的 $s \in [1,\infty]$ 均成立。(ii) 如果 $K_n^{\mathrm{Cot}(X)}(H^s(\mathbb{D}^n,X)) \to 0$ 与 $n \to \infty$ 一样，则 X 不可能具有有限余型 $\mathrm{Cot}(X)$。(iii) 所有满足 $\lim_{n\to\infty} K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X)) = 0$ $(t \in [1,\infty])$ 的 $p > 0$ 的上确界，要么是 t，要么是 $\mathrm{Cot}(X)$。

最后，我们关注定义在 $B(l_t^n)$ 中的复值多调和函数。若二次连续可微函数 $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 在每一条复直线上的限制都是调和函数，则称其为多重调和函数。此外，若 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中包含原点的单连通域，则 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是多重调和函数

当且仅当它可以表示为 $f = h + \overline{g}$，其中 h、g 在 Ω 中全纯，且 $g(0) = 0$（见 [33]）。现在，我们用 $R_p(B(l_t^n))$ 表示所有满足不等式的 $r \in [0,1]$ 的上确界

$$\sup_{z\in rB(l_t^n)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left(|a_\alpha|^p + |b_\alpha|^p\right) |z^\alpha|^p \leq 1$$

对所有从 $B(l_t^n)$ 到 $\overline{\mathbb{D}}$ 的多重调和函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\alpha + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha z^\alpha}$ 均成立。下述定理表明，$R_p(B(l_t^n))$ 与 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), \mathbb{C}))$ 具有相同的渐近行为。

定理 3. 对任意给定的 $p \in (0,\infty)$ 和 $t \in [1,\infty]$，我们有

$$R_p(B(l_t^n)) \sim \begin{cases} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\min\{t,2\}}} \text{ for } p < \min\{t,2\}, \text{ and} \\ 1 \text{ for } p \geq \min\{t,2\}. \end{cases}$$

量 $R_1(B(l_t^n))$ 最初由 Chen 和 Hamada[13] 引入。特别地，[13,定理 2.11] 指出

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{t,2\}}} \prec R_1(B(l_t^n)) \prec \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{t,2\}}}$$

对所有 $t \in [1,\infty]$ 均成立。对于 $p = 1$，我们的定理 3 给出了这一结果的如下最优版本。

推论 4. 对所有 $t \in [1,\infty]$，我们有

$$R_1(B(l_t^n)) \sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{t,2\}}}.$$

2. Preliminaries

本节旨在列举一些已知的，或虽未知但易于推导的事实，这些事实对于证明上一节陈述的三个定理至关重要。我们用 $L^\beta(W, d\omega)$ $(1 \leq \beta \leq \infty)$ 表示由复值 ω-可测函数 f 构成的勒贝格空间，这些函数定义在 W 上，且满足

$$\|f\|_{L^\beta} = \begin{cases} \left(\int_W |f(x)|^\beta d\omega\right)^{\frac{1}{\beta}} \text{ for } \beta < \infty, \\ \sup_{x\in W} |f(x)| \text{ for } \beta = \infty \end{cases}$$

其值有限，其中 ω 始终为正测度。此外，我们用 T 表示这些空间之间的线性映射。采用这些记号，我们现在陈述著名的黎斯-托林插值定理如下：

定理 A（参见例如 [6, 定理 1.1.1]）。假设 $p_0 \neq p_1$ 和 $q_0 \neq q_1$，且 $T\colon L^{p_0}(U, d\mu) \to L^{q_0}(V, d\nu)$ 的范数为 M_0，$T\colon L^{p_1}(U, d\mu) \to L^{q_1}(V, d\nu)$ 的范数为 M_1。那么 $T\colon L^{p_2}(U, d\mu) \to L^{q_2}(V, d\nu)$ 是一个范数为 M_2 的线性映射，满足

$$M_2 \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

假设 $0 < \theta < 1$，并且

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q_2} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

对于 $1 \leq t < \infty$，若线性算子 $A: X_0 \to Y_0$ 定义在复巴拿赫空间 X_0 和 Y_0 之间，则称 A 为 t-可和的，如果存在常数 $c \geq 0$，使得无论自然数 m 取何值，也无论如何选取 X_0 中的 f_1、f_2、$\cdots$、f_m，均有

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|A(f_i)\|^t\right)^{1/t} \leq c \sup_{\phi \in B(X_0^*)} \left(\sum_{i=1}^{m} |\phi(f_i)|^t\right)^{1/t},$$

其中 $B(X_0^*)$ 是对偶空间 X_0^* 中的开单位球。使上述不等式恒成立的最小 c 记为 $\pi_t(A)$，从 X_0 到 Y_0 的所有 t-可和算子构成的集合记为 $\Pi_t(X_0, Y_0)$。现在，以下事实已为人所知：

定理 B（见 [**22**, 命题 2.3]）。若 $A: X_0 \to Y_0$ 是有界线性算子，且 $\dim(A(X_0)) < \infty$，则对于每个 $t \in [1, \infty)$，A 都是 t-可和的。

定理 C（参见 [**22**, 定理 2.8]）。若 $1 \leq t_1 < t_2 < \infty$，则 $\Pi_{t_1}(X_0, Y_0) \subset \Pi_{t_2}(X_0, Y_0)$。此外，对于 $A \in \Pi_{t_1}(X_0, Y_0)$，我们有 $\pi_{t_2}(A) \leq \pi_{t_1}(A)$。

我们还回顾 [3]，中的以下结果，它对于获得 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n) \ \mathbb{C}))$ 的上界（因而也能获得 $\dim(X) < \infty$ 时 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n) \ X))$ 的上界）至关重要。

定理 D（参见 [**3**, 推论 **3.2**]）。设 $Y = (\mathbb{C}^n, \|.\|_Y)$ 是一个 n 维复巴拿赫空间，其开单位球为 $B(Y)$，且 $k \geq 2$。另设 $u \in [1, 2]$ 和 u' 为其共轭指数。那么，对于任意复数序列 $\{c_\alpha\}_{|\alpha|=k}$，存在一组符号 $\{\epsilon_\alpha\}_{|\alpha|=k}$，使得

$$\sup_{z \in B(Y)} \left| \sum_{|\alpha|=k} \epsilon_\alpha c_\alpha z^\alpha \right| \leq \begin{cases} C(\log(n \log k)) \sup\limits_{|\alpha|=k} \left\{ |c_\alpha| \left(\frac{\alpha!}{k!}\right) \right\} \sup\limits_{\|z\|_Y \leq 1} \left(\sum_{m=1}^n |z_m|\right)^k & \text{if } u = 1, \\ C(n \log k)^{\frac{1}{u'}} \sup\limits_{|\alpha|=k} \left\{ |c_\alpha| \left(\frac{\alpha!}{k!}\right)^{\frac{1}{u}} \right\} \sup\limits_{\|z\|_Y \leq 1} \left(\sum_{m=1}^n |z_m|^u\right)^{\frac{k}{u}} & \text{if } u \neq 1. \end{cases}$$

类似地，Maurey 和 Pisier 的一个著名结果的以下推论，在 $\dim(X) = \infty$ 时给出了所需的上界。

定理 E（参见例如 [**21**, 定理 **14.5**]）。对于任意满足 $\dim(X) = \infty$ 的复巴拿赫空间 X，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$\frac{1}{2}\|z\|_\infty \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k z_k \right\| \leq \|z\|_{\mathrm{Cot}(X)}$$

对于 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 的每一种取法，均成立。显然，令 $z = e_k$-e_k 为 $\mathbb{C}^n$ 的第 k 个典范基向量，即可得到 $\|x_k\| \geq 1/2$。

此外，我们陈述以下命题，其证明可采用与 [21, 命题 **19.2**]的证明完全类似的论证方法。为求完整起见，我们仍给出证明。

命题 1. 对于任意完备 Reinhardt 域 $R \subset \mathbb{C}^n$，有

$$K_n^p(H^\infty(R,X)) \geq K_n^p(H^\infty(\mathbb{D}^n,X)).$$

Proof. 对于满足 $r_i > 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n$成立的 $\sigma = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$，我们赋予 $\mathbb{C}^n$ 范数 $\|z\| := \sup_{1\leq i\leq n} |z_i|/r_i$，并将由此得到的巴拿赫空间记为 $l_\infty^n(\sigma)$。该空间的单位球记为 $B(l_\infty^n(\sigma))$。根据完备 Reinhardt 域的定义，已知

$$R = \bigcup_{B(l_\infty^n(\sigma))\subset R} B(l_\infty^n(\sigma)).$$

现在，对于满足 $\|f\|_\infty \leq 1$的 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \in H^\infty(R,X)$，我们构造

$$f_\sigma(z) := \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha \sigma^\alpha z^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} y_\alpha z^\alpha \in H^\infty(\mathbb{D}^n,X)$$

对每个满足 $B(l_\infty^n(\sigma)) \subset R$的 σ。显然，$\|f_\sigma\|_\infty \leq 1$。因此，对于所有 $z \in K_n^p(H^\infty(\mathbb{D}^n,X))$ $\mathbb{D}^n$，都有 $\sum_{k=1}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \|y_\alpha z^\alpha\|^p \leq 1$。但是 $y_\alpha = \sigma^\alpha x_\alpha$，因此$\sum_{k=1}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha z^\alpha\|^p \leq 1$ 对所有 $z \in K_n^p(H^\infty(\mathbb{D}^n,X))B(l_\infty^n(\sigma))$成立。由于 R 是此类‘$B(l_\infty^n(\sigma))$’的并集，我们的证明就完成了。□

我们以一串不等式作为本节的结尾，这些不等式将在接下来的证明中多次用到。

$$\sum_{|\alpha|=k} 1 = \binom{n+k-1}{k} \leq e^k \left(1+\frac{n}{k}\right)^k \leq (2e)^k \max\left\{1, \left(\frac{n}{k}\right)^k\right\}. \tag{2.1}$$

3. Proofs of the theorems

Proof of Theorem 1. 我们首先指出这样一个（或许众所周知的）事实：对于任意满足 $\|f\|_s \leq 1$的 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \in H^s(\mathbb{D}^n,X)$：

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\|\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha\right\|^s dz\right)^{\frac{1}{s}} \leq 1 \text{ for } s<\infty, \ \sup_{z\in\mathbb{T}^n} \left\|\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha\right\| \leq 1 \text{ for } s=\infty. \tag{3.1}$$

事实上，对于任意 $\rho \in (0,1)$，我们有 $s<\infty$：

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\|\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha\right\|^s dz\right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta}z)}{\rho^k e^{ik\theta}} d\theta\right\|^s dz\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \frac{1}{\rho^k}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left\|f(\rho e^{i\theta}z)\right\|^s d\theta dz\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \frac{1}{\rho^k}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\mathbb{T}^n} \|f(\rho z)\|^s dz d\theta\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{\|f\|_s}{\rho^k},
\end{aligned}$$

因此令 $\rho \to 1-$，便得到 (3.1) 中的第一个不等式。对于 $s = \infty$，我们考虑函数 $g(u) = f(uz) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right) u^k$，其中 $u \in \mathbb{D}$，且对任意固定的 $z \in \mathbb{T}^n$。现在，g 是一个从 $\mathbb{D}$ 到 X 的全纯函数，其第 k 个系数为 $\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha$，并且对所有 $u \in \mathbb{D}$，$\|g(u)\| \leq 1$。因此，对任意满足 $\|\phi\| \leq 1$ 的 $\phi \in X^*$，$\phi \circ g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ 是全纯函数，其第 k 个系数为 $\phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right)$。因此 $\left| \phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right) \right| \leq 1$，进而推出 $\sup_{z \in \mathbb{T}^n} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right\| \leq 1$。

有了这些信息，我们现在可以开始证明该定理的 (i) 部分。

证明 (i) 部分：对于任意具有有限余型 q 的复巴拿赫空间 X（有限维或无限维），由 [12, 定理 3.1] 可知，存在 $C_1 > 0$ 使得

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_1^k \left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right\|^q dz \right)^{\frac{1}{q}}.$$

容易看出

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right\|^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{z \in \mathbb{T}^n} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right\|,$$

对于任意 $s < \infty$，多项式 Kahane 不等式（参见 [11, 命题 1.2]）保证存在 $C_2 > 0$ 使得

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right\|^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2^k \left(\int_{\mathbb{T}^n} \left\| \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right\|^s dz \right)^{\frac{1}{s}}.$$

上述不等式和 (3.1) 确保存在 $C > 0$ 使得

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C^k. \tag{3.2}$$

现在，对任意 $p > \text{Cot}(X)$，都存在 $q \in [\text{Cot}(X)\ p)$，使得 X 具有余型 q，从而 X 具有余型 p。由 (3.2) 可立即得到 $\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^p \leq C^{pk}$。因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{pk} \sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} (Cr)^{pk} \leq 1$$

对所有 $r \leq 1/(2^{1/p}C)$，其与 n 无关。另一方面，显然 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \leq K_1^p(H^s(\mathbb{D}, \mathbb{C})) \leq 1$。因此，$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim 1$ 对于$p >$余型(X)。

对于 $p \le$ 余型(X)，当且仅当 X 具有余型 q 时，$p \le q$。适当运用不等式 (2.1) 和 (3.2)，可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{pk} \sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} r^{pk} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{|\alpha|=k} 1 \right)^{1-\frac{p}{q}}$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} Cr)^{pk} (2n)^{(1-\frac{p}{q})k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C' r n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right)^{pk},$$

对于某个与 n 无关的常数 $C' > 0$，因此，对于所有 $r \le 1/\left(2^{\frac{1}{p}} C' n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)$，上述量都小于或等于 1。因此，在这种情况下

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \ge C'' \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{3.3}$$

对于某个常数 $C'' > 0$。到目前为止，我们得到的所有结果对有限维和无限维巴拿赫空间 X 均成立。现在假设 $\dim(X) = \infty$，考虑定义在 $\mathbb{D}^n$ 上的 X 值全纯函数 $F(z) = \sum_{k=1}^n x_k z_k$，其中 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{D}^n$，而 "$x_k$" 与定理 E 中相同。结合定理 E，根据 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X))$ 的定义可得

$$\frac{n}{2^p} \le \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p \le \frac{\|\sum_{k=1}^n x_k z_k\|_s^p}{(K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)))^p} \le \frac{\sup_{z\in\mathbb{D}^n} \|z\|_{\mathrm{Cot}(X)}^p}{(K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)))^p} \le \frac{n^{\frac{p}{\mathrm{Cot}(X)}}}{(K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)))^p},$$

i.e.

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \le 2 \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\mathrm{Cot}(X)}}. \tag{3.4}$$

不等式 (3.3) 和 (3.4) 一起完成了对具有有限余型的无限维巴拿赫空间 X 的证明。

如果 X 不具有有限余型，即 $\mathrm{Cot}(X) = \infty$，那么再次由 (3.4) 可立即得到 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \le 2\,(1/n)^{1/p}$，而所需的下界 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \succ (1/n)^{1/p}$ 则由以下事实以及与证明 (3.3) 时完全类似的计算得出：$\|x_\alpha\| \le 1$（可由柯西积分公式立即推出）。因此，我们关于该定理第一部分的证明就完成了。

第 (ii) 部分的证明：对于有限维的 X，已知 X 具有 2-余型。因此，由第 (i) 部分我们立即得出，对于所有 $s \ge 1$，若 $p \ge \mathrm{Cot}(X) = 2$，则 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim 1$。由 (3.3) 我们还得到，对于 $p < 2$,

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

现在设

$$G(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} r_0^{\frac{pk}{2-p}} z^\alpha, \text{ where } r_0 := \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

注意，对于 $s \in [1,2]$，有 $\|G\|_s \leq \|G\|_2 = 1$；当且仅当 $r \leq r_0$ 时，$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left(r_0^{\frac{p}{2-p}} r \right)^{pk} \leq 1$。这意味着

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \leq K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, \mathbb{C})) \leq r_0. \tag{3.7}$$

简单计算可得 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} r_0 = (\ln(2))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$，从而得到 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \prec (1/n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$。结合 (3.5)，可得

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n, X)) \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

当 $p < 2$ 且 $1 \leq s \leq 2$时。

现在我们来处理此证明的 $s > 2$ 部分。对于任意 k-齐次复多项式 $P(z) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha z^\alpha$，有

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{T}^n} |P(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

由于超收缩多项式博嫩布鲁斯特–希勒不等式（见 [18,定理 1]），存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^{\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \leq (C_1)^k \sup_{z\in\mathbb{T}^n} |P(z)|.$$

在定理 A 中，我们现在取 $p_0 = q_0 = 2$, $p_1 = \infty, q_1 = 2k/(k+1)$ 和 $p_2 = s$。由上述两个不等式可得 $M_0 \leq 1, M_1 \leq (C_1)^k$。此外

$$\theta = 1 - \frac{2}{s},\ \frac{1}{q_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{2}{s}\right),$$

and 定理 A 进一步断言 $M_2 \leq (C_2)^k$ $(C_2 = C_1^\theta)$。这等同于说 g

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq (C_2)^k \times \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |P(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} & \text{for } s < \infty, \\ \sup_{z\in\mathbb{T}^n} |P(z)| & \text{for } s = \infty. \end{cases} \tag{3.8}$$

现在，对于任意满足 $\|f\|_s \leq 1$ 的 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \in H^s(\mathbb{D}^n, X)$，我们构造 t

$$f_1(z) := \phi(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \phi(x_\alpha) z^\alpha, \tag{3.9}$$

其中 $\phi \in B(X^*)$ 是 X^* 中的开单位球。容易看出，对于所有 $s \in [1,\infty]$，$f_1 \in H^s(\mathbb{D}^n, \mathbb{C})$ 满足 $\|f_1\|_s \leq 1$，并且由 (3.1) 还可直接验证

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} \left| \phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right) \right|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \leq 1 \text{ for } s < \infty, \sup_{z\in\mathbb{T}^n} \left| \phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right) \right| \leq 1 \text{ for } s = \infty.$$

由于 X 是有限维的，在此情形下 $\dim(I(X)) < \infty$，其中 $I: X \to X$ 是恒等算子。因此利用定理 B，对于所有 $t \geq 1$，有 $I \in \Pi_t(X, X)$。因此

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \pi_{q_2}(I) \sup_{\phi \in B(X^*)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\phi(x_\alpha)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。对于 $s < \infty$， $q_2 > 1$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立；对于 $s = \infty$， $q_2 = 1$ 对 $k = 1$ 成立，而在其他情况下对 $q_2 > 1$ 成立。因此，定理 C 断言 $\pi_{q_2}(I) \leq \pi_1(I)$，即存在一个常数 $D = \pi_1(I)$（仅取决于 X），使得

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq D \sup_{\phi \in B(X^*)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\phi(x_\alpha)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

结合 (3.8) 与上述不等式，可得

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq D \sup_{\phi \in B(X^*)} (C_2)^k \times \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}^n} \left|\phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha\right)\right|^s dz\right)^{\frac{1}{s}} & \text{for } s < \infty, \\ \sup_{z \in \mathbb{T}^n} \left|\phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha\right)\right| & \text{for } s = \infty. \end{cases}$$

因此显然

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq D(C_2)^k.$$

现取任意给定的 $p \in (0, 2)$，令 $k_0 := \lfloor p(1 - (2/s))/(2 - p) \rfloor + 1$（$\lfloor . \rfloor$ 为向下取整函数）。显然，对于 $k < k_0$，有 $q_2 \leq p$，进而得到

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(D^{\frac{1}{k}} C_2\right)^k \leq (C_2')^k,$$

$C_2' > 0$ 为一个新的常数。对于 $k \geq k_0$，有 $q_2 \geq p$，因此

$$\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^p \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha\|^{q_2}\right)^{\frac{p}{q_2}} \left(\sum_{|\alpha|=k} 1\right)^{1-\frac{p}{q_2}} \leq (C_3)^k \left(\max\left\{1, \left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{q_2}}\right\}\right)^k$$

（见（2.1））， 其中 $C_3 > 0$ 是某个新的常数。经过简单计算可知，函数 $g(x) = x^{1-\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2x}(1-\frac{2}{s})} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ 满足

$$g(x) \geq g\left(\frac{p\left(1 - \frac{2}{s}\right)}{2 - p} \log n\right) = C_4 (\log n)^{1-\frac{p}{2}}$$

其中 $C_4>0$ 是某个常数。利用这一点以及对所有 $k\geq 1$ 都有 $k^{1/k}\leq e^{1/e}$ 这一事实，我们注意到

$$\left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{q_2}}=\frac{n^{1-\frac{p}{2}}k^{\frac{p}{2k}\left(1-\frac{2}{s}\right)}}{g(k)}\leq C_5\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-\frac{p}{2}},$$

$C_5>0$ 是另一个常数，因此

$$\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha\|^p\leq\left(C_6\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-\frac{p}{2}}\right)^k \tag{3.10}$$

对于常数 $C_6>0$。现在显然

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}r^{pk}\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha\|^p&=\sum_{k=1}^{k_0-1}r^{pk}\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha\|^p+\sum_{k=k_0}^{\infty}r^{pk}\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha\|^p\\&\leq\sum_{k=1}^{k_0-1}r^{pk}(C_2')^{pk}+\sum_{k=k_0}^{\infty}r^{pk}\left(C_6\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-\frac{p}{2}}\right)^k,\end{aligned}$$

当 $r=C((\log n)/n)^{(1/p)-(1/2)}$ 时，该值小于或等于 1，其中 $C>0$ 是一个充分小的常数。也就是说

$$K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n,X))\succ\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

此外，完全采用 [25, p. 76]，中的相同论证，可以证明

$$K_n^p(H^\infty(\mathbb{D}^n,\mathbb{C}))\prec\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

对所有 $p\in(0,2)$ 都成立。由于 $K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n,X))\leq K_n^p(H^s(\mathbb{D}^n,\mathbb{C}))\leq K_n^p(H^\infty(\mathbb{D}^n,\mathbb{C}))$，这一步完成了我们对 $s>2$ 情形的证明。

（iii）部分的证明：对于任意满足 $\|f\|_2\leq 1$ 的 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}x_\alpha z^\alpha\in H^2(\mathbb{D}^n,\mathbb{C})$，容易看出 $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|x_\alpha|^2\leq 1$（此时的‘$x_\alpha$’是复数）。因此，对于 $p<2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}r^{pk}\sum_{|\alpha|=k}|x_\alpha|^p&\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|x_\alpha|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}r^{\frac{2pk}{2-p}}\right)^{1-\frac{p}{2}}\\&\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^{\frac{2pk}{2-p}}\right)^{1-\frac{p}{2}}=\left(\frac{1}{\left(1-r^{\frac{2p}{2-p}}\right)^n}-1\right)^{1-\frac{p}{2}},\end{aligned}$$

对于按 (3.6) 定义的 $r\leq r_0$, r_0，其值小于或等于 1。因此我们得出 $K_n^p(H^2(\mathbb{D}^n,\mathbb{C}))\geq r_0$，而由 (3.7) 我们已经有 $K_n^p(H^2(\mathbb{D}^n,\mathbb{C}))\leq r_0$。至此，定理的（iii）部分得证。□

Proof of Theorem 2. 由于情形 $t=\infty$ 已在定理 1 中讨论，因此我们只需考虑 $t\in[1,\infty)$）。下面先对

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \in H^\infty(B(l_t^n)\ X)$，其中 $\|f(z)\| \le 1$对所有 $z \in B(l_t^n)$均成立。我们按照 (3.9) 从 f 构造 f_1。显然，对所有 $z \in B(l_t^n)$，均有 $|f_1(z)| \le 1$，因此由 [16, 第 24] 页的不等式 (3.7) 可得

$$\|x_\alpha\| = \sup_{\phi\in B(X^*)} |\phi(x_\alpha)| \le e^{\frac{k}{t}} \left(\frac{k!}{\alpha!}\right)^{\frac{1}{t}}$$

对所有满足 $|\alpha| = k$ 的多重指标 α，都有此不等式。在本定理第一部分的证明中，这个不等式起着关键作用。

（i）部分的证明：对于任意 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in B(l_t^n)$ 和 $r \in (0, 1)$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha (rz)^\alpha\|^t &\le \sum_{k=1}^{\infty} r^{kt} e^k \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{k!}{\alpha!}\right) |z_1|^{\alpha_1 t}|z_2|^{\alpha_2 t}\cdots|z_n|^{\alpha_n t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^{kt} e^k \left(|z_1|^t + |z_2|^t + \cdots + |z_n|^t\right)^k \le \sum_{k=1}^{\infty} r^{kt} e^k,\end{aligned}$$

当 $r \le (1/(2e))^{1/t}$ 时，该值小于或等于 1；也就是说，$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X)) \sim 1$ 对于 $p \ge t$ 成立。此外，由于 $B(l_t^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的完备 Reinhardt 域，利用定理 1 的（i）部分和命题 1 可得 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X)) \sim 1$ 对于 $p > \mathrm{Cot}(X)$ 成立。因此，我们得到

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \sim 1$$

对于 $p > \min\{\mathrm{Cot}(X)\ t\}$。当 $p \le \min\{\mathrm{Cot}(X)\ t\}$ 时，$p \le q$，前提是 X 具有有限余型 q。记 $\gamma := \min\{q, t\}$。由上述讨论显然可知，存在一个与 n 无关的 $r_2 > 0$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha (r_2 z)^\alpha\|^\gamma \le 1,\ z \in B(l_t^n). \tag{3.11}$$

因此，对于任意 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in B(l_t^n)$ 且 $r = r_1 r_2 \in (0, 1)$，利用不等式 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha (rz)^\alpha\|^p &\le \sum_{k=1}^{\infty} r_1^{pk} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|x_\alpha (r_2 z)^\alpha\|^\gamma\right)^{\frac{p}{\gamma}} \left(\sum_{|\alpha|=k} 1\right)^{1-\frac{p}{\gamma}} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}} r_1)^{pk} (2n)^{(1-\frac{p}{\gamma})k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C' r_1 n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}\right)^{pk}\end{aligned}$$

（$C' > 0$为常数），当 $r_1 = C(1/n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}$在某个充分小的 $C > 0$ 下成立时，该值小于或等于 1。由此可得

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}. \tag{3.12}$$

请注意，到目前为止得到的所有结果对有限维和无限维巴拿赫空间均成立。现在，为了得到 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X))$ 的上界，我们需要假设 $\dim(X) = \infty$。证明的这一部分

与 (3.4) 的证明完全相同，即我们在 $B(l_t^n)$ 上定义 $F(z) = \sum_{k=1}^n x_k z_k$，其中“$x_k$”与定理 E 中的相同。根据 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X))$ 的定义，我们可以令

$$z = K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{t}}, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{t}}, \cdots, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \right),$$

应用定理 E 后，可得到以下不等式链:

$$\frac{n}{2^p} \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \leq n^{\frac{p}{t}} \frac{\sup_{z\in B(l_t^n)} \|\sum_{k=1}^n x_k z_k\|^p}{(K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)))^p} \leq n^{\frac{p}{t}} \frac{\sup_{z\in B(l_t^n)} \|z\|^p_{\mathrm{Cot}(X)}}{(K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)))^p}.$$

对于 $t \leq$ 余型(X)，$\sup_{z\in B(l_t^n)} \|z\|_{\mathrm{Cot}(X)} \leq 1$，从而有

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \leq 2 \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{t}},$$

对于 $t >$ 余型(X)，$\sup_{z\in B(l_t^n)} \|z\|_{\mathrm{Cot}(X)} \leq n^{(1/\mathrm{Cot}(X))-(1/t)}$，从而有

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \leq 2 \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\mathrm{Cot}(X)}}.$$

这也就是说

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\min\{\mathrm{Cot}(X),t\}}}. \tag{3.13}$$

不等式 (3.12) 和 (3.13) 共同完成了对具有有限余型的无限维复巴拿赫空间 X 的证明。

如果 X 不具有有限余型，则将 $\mathrm{Cot}(X) = \infty$代入 (3.13)，即可直接得到 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X))$ 的上界。对于下界，我们只需逐行重复 (3.12) 的证明，将 γ 替换为 t即可。这就完成了该定理证明的第一部分。

第 (ii) 部分的证明: 当 $\dim(X) < \infty$时，由于 X 具有余型 2 且 $\mathrm{Cot}(X) = 2$，断言 $\overline{K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X))} \sim 1$ 对 $p \geq \min\{t, 2\}$ 成立，可由第 (i) 部分立即推出。当$p < \min\{t, 2\}$时，我们仍需像 (3.9) 中那样处理 f_1，其定义在 $B(l_t^n)$ 上。现在，对于任意固定的 $z \in \mathbb{C}^n$，满足$\|z\|_{l_t^n} \leq 1$，$f_1(uz) : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ 是 $u \in \mathbb{D}$的全纯函数，其 k次系数为 $\phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha\right)$。因此

$$\sup_{\|z\|_{l_t^n}\leq 1} \left| \phi\left(\sum_{|\alpha|=k} x_\alpha z^\alpha \right) \right| \leq 1.$$

由 [15, 引理 2.1] 和 [19, 定理 1.2], 可知，对于一个复 k-齐次多项式 $P(z) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha z^\alpha$，若 $|P(z)| \leq 1$，则 $z \in B(l_t^n)$:

$$\sup_{\|z\|_{l_t^n}\leq 1} \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha z^\alpha| \leq \chi_M(\mathcal{P}(^k l_t^n)) \leq C^k \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{(k-1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}, \tag{3.14}$$

其中 $\delta := \min\{2,t\}$。我们说明，$\chi_M(\mathcal{P}(^kX))$是与单项式 z^α构成的基相关的无条件基常数，该基属于空间 $\mathcal{P}(^kX)$；此空间由给定巴拿赫空间X上的连续 k-齐次标量值多项式 P 构成，并赋予范数 $\|P\| = \sup_{\|x\|\le 1}|P(x)|$（更多详情见 [15]）。利用定理 B，我们现在得到

$$\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha z^\alpha\| \le \pi_1(I)\sup_{\phi\in B(X^*)}\left(\sum_{|\alpha|=k}|\phi(x_\alpha)z^\alpha|\right) \le \pi_1(I)\chi_M(\mathcal{P}(^k l_t^n))$$
$$\le \pi_1(I)C^k\left(1+\frac{n}{k}\right)^{(k-1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}$$

对所有 $z\in B(l_t^n)$ 均成立。因此显然，通过与证明 [19, 定理 1.1]（尤其参见 [19, 第 145] 页）中完全相同的计算，我们得到

$$K_X(1,t) := K_n^1(H^\infty(B(l_t^n),X)) \succ \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}.$$

此外，不等式 (3.11) 现在对 $\gamma = \delta$ 成立。对于任意 $p\in[1,\delta)$，我们注意到 $(1/p) = (1-\theta)/1 + (\theta/\delta)$，若 $\theta = (1-(1/p))/(1-(1/\delta))$。现在令$r = (K_X(1,t))^{1-\theta}r_2^\theta$($r_2$ 为使 (3.11) 成立的与 n 无关的常数，并将 γ 替换为 δ)，即可得到

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha(rz)^\alpha\|^p = \sum_{k=1}^\infty\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha(K_X(1,t)z)^\alpha\|^{p(1-\theta)}\|x_\alpha(r_2z)^\alpha\|^{p\theta}$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^\infty\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha(K_X(1,t)z)^\alpha\|\right)^{p(1-\theta)}\left(\sum_{k=1}^\infty\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha(r_2z)^\alpha\|^\delta\right)^{\frac{p\theta}{\delta}} \le 1,$$

这意味着 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ X)) \succ (K_X(1,t))^{1-\theta}$。由此得到所需的 $1\le p<\min\{t,2\}$ 下界。对于 $p\in(0,1)$:

$$\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha z^\alpha\|^p \le \left(\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha z^\alpha\|\right)^p\left(\sum_{|\alpha|=k}1\right)^{1-p} \le C_1^k\left(\max\left\{1,\left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{\delta}-\frac{p}{k}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}\right\}\right)^k$$

（参见（2.1）及上述关于$\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha z^\alpha\|$的估计），其中 $C_1>0$ 为常数。我们注意到，函数 $g(x) = x^{1-\frac{p}{\delta}}n^{\frac{p}{x}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)} : (0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足

$$g(x) \ge g\left(\frac{p\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}{1-\frac{p}{\delta}}\log n\right) = C_2(\log n)^{1-\frac{p}{\delta}},$$

因此

$$\left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{\delta}-\frac{p}{k}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)} = \frac{n^{1-\frac{p}{\delta}}k^{\frac{p}{k}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}}{g(k)} \le C_3\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-\frac{p}{\delta}},$$

其中， C_2 和 C_3 是两个新的常数。现在显然，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\|x_\alpha(rz)^\alpha\|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} r^{kp}\left(C_3'\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-\frac{p}{\delta}}\right)^k$$

（C_3' 是另一个常数），若取 $r = C((\log n)/n)^{(1/p)-(1/\delta)}$，则该值小于或等于 1，其中 $C > 0$ 足够小。因此我们已经证明

$$K_n^p(H^\infty(B(l_t^n), X)) \succ \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta}} \tag{3.15}$$

对所有满足 $0 < p < \delta = \min\{t, 2\}$ 的 p，均有此结论。

接下来需要求得上界。显然，只需对 $X = \mathbb{C}$ 推导这些上界。论证分为两部分：针对空间 l_1^n，以及针对所有其他空间 l_t^ns。我们使用的一个重要工具是斯特林公式

$$\lim_{k\to\infty} k!\left(\sqrt{2\pi k}(k/e)^k\right)^{-1} = 1,$$

我们将频繁使用该公式。为简便起见，在本文余下部分中，我们将 $K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ \mathbb{C}))$ 简记为 $K(p,t)$。对于 $t = 1$，我们已经看到 $K(p,1) \sim 1 \text{ for} p \geq 1$，因此在这种情况下，只需考虑 $p < 1$。在定理 D 的 $u = 1$ 部分中，令 $c_\alpha = (k!/\alpha!)^{1/p}$。根据 p-博尔半径的定义可得

$$\sum_{|\alpha|=k}\left(\frac{k!}{\alpha!}\right)\left(\frac{K(p,1)}{n}\right)^{pk} \leq C^p\left(\log(n\log k)\right)^p \sup_{|\alpha|=k}\left\{\left(\frac{k!}{\alpha!}\right)^{1-p}\right\}\sup_{\|z\|_{l_1^n}\leq 1}\left(\sum_{m=1}^{n}|z_m|\right)^{pk}$$

$$\implies \left(n^{1-p}(K(p,1))^p\right)^k \leq C_1\left(\log(n\log k)\right)^p\left(\frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{e^k}\right)^{1-p}$$

$$\implies \left(\frac{n}{k}\right)^{1-p}(K(p,1))^p \leq C_1^{\frac{1}{k}}\left(\log(n\log k)\right)^{\frac{p}{k}}\left(\frac{k^{\frac{1}{2k}}}{e}\right)^{1-p},$$

其中 C、$C_1 > 0$ 为常数。现在令 $k = \lfloor \log\ n \rfloor$，并注意到

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-p}(K(p,1))^p &\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\lfloor\log n\rfloor}\right)^{1-p}(K(p,1))^p \\ &\leq e^{p-1}\lim_{n\to\infty}\left(C_1^{\frac{1}{p}}\log(n\log\lfloor\log n\rfloor)\right)^{\frac{p}{\lfloor\log n\rfloor}}\lfloor\log n\rfloor^{\frac{1-p}{2\lfloor\log n\rfloor}} \\ &= e^{p-1},\end{aligned}$$

这意味着 $K(p,1) \prec ((\log\ n)/n)^{(1/p)-1}$。因此， l_1^n的证明完成。

对于 l_t^n且 $t \neq 1$，论证类似，但我们需要分别证明 $t \in (1, 2)$ 和 $t \in [2, \infty)$。当 $t \in (1, 2)$ 时，我们在定理 D 的 $u \neq 1$ 部分设定 $u = t$，并再次选择 $c_\alpha = (k!/\alpha!)^{1/p}$。 p-博尔半径的定义

给出

$$\sum_{|\alpha|=k}\left(\frac{k!}{\alpha!}\right)\left(\frac{K(p,t)}{n^{\frac{1}{t}}}\right)^{pk}\leq C^p\left(\log k\right)^{\frac{p}{t'}}n^{\frac{p}{t'}}\sup_{|\alpha|=k}\left\{\left(\frac{k!}{\alpha!}\right)^{1-\frac{p}{t}}\right\}\sup_{\|z\|_{l_t^n}\leq 1}\left(\sum_{m=1}^{n}|z_m|^t\right)^{\frac{pk}{t}}$$

$$\implies\left(n^{1-\frac{p}{t}}(K(p,t))^p\right)^k\leq C_1\left(\log k\right)^{\frac{p}{t'}}n^{\frac{p}{t'}}\left(\frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{e^k}\right)^{1-\frac{p}{t}}$$

$$\implies\left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{t}}(K(p,t))^p\leq C_1^{\frac{1}{k}}\left(\log k\right)^{\frac{p}{kt'}}n^{\frac{p}{kt'}}\left(\frac{k^{\frac{1}{2k}}}{e}\right)^{1-\frac{p}{t}},$$

其中， C、 $C_1>0$ 为常数（不一定与之前使用的常数相同）。同样，令 $k=\lfloor\log n\rfloor$ ，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1-\frac{p}{t}}(K(p,t))^p&\leq e^{\frac{p-t}{t}}\lim_{n\to\infty}\left(C_1^{\frac{t'}{p}}\log\lfloor\log n\rfloor\right)^{\frac{p}{t'\lfloor\log n\rfloor}}n^{\frac{p}{t'\lfloor\log n\rfloor}}\lfloor\log n\rfloor^{\frac{1-\frac{p}{t}}{2\lfloor\log n\rfloor}}\\&=e^{p-1},\end{aligned}$$

由此得到 $K(p,t)\prec((\log\ n)/n)^{(1/p)-(1/t)}$, $t\in(1,2)$。对于 $t\geq 2$的情形，我们需要在定理 D 中选择 $u=2$ ，并通过与上述完全相同的论证可得

$$\left(n^{1-\frac{p}{t}}(K(p,t))^p\right)^k\leq C_1\left(\log k\right)^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}\left(\frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{e^k}\right)^{1-\frac{p}{2}}\sup_{\|z\|_{l_t^n}\leq 1}\left(\sum_{m=1}^{n}|z_m|^2\right)^{\frac{pk}{2}}$$

$$\implies\left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{2}}(K(p,t))^p\leq C_1^{\frac{1}{k}}\left(\log k\right)^{\frac{p}{2k}}n^{\frac{p}{2k}}\left(\frac{k^{\frac{1}{2k}}}{e}\right)^{1-\frac{p}{2}}.$$

由这一步可清楚看出，前一种情形（即$t\ \in(1,2)$）的证明方法可以进一步沿用，从而得出结论 $K(p,t)\ \prec((\log n)/n)^{(1/p)-(1/2)}$。证明至此完成。□

Proof of Theorem 3. 对于从 $B(l_t^n)$到 $\overline{\mathbb{D}}$的多重调和函数 $f(z)$ $=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha z^\alpha+\overline{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}b_\alpha z^\alpha}$ ，显然，函数 $\mathrm{Re}(f(z))$ 和 $\mathrm{Im}(f(z))$ 都将 $B(l_t^n)$映入$\overline{\mathbb{D}}$内部。由于 $\mathrm{Im}(f(z))\ =\mathrm{Re}(-if(z))$，且不失一般性，我们可以假设$f(0)\geq 0$ ，由定理 2.7] 可容易看出

$$\sup_{\|z\|_{l_t^n}\leq 1}\left|\sum_{|\alpha|=k}\left(\frac{a_\alpha+b_\alpha}{2}\right)z^\alpha\right|\leq 1,\ \sup_{\|z\|_{l_t^n}\leq 1}\left|\sum_{|\alpha|=k}\left(\frac{a_\alpha-b_\alpha}{2}\right)z^\alpha\right|\leq 1.$$

我们对全纯函数的 p-博尔半径的定义直接得到

$$\sum_{|\alpha|=k}\left|\left(\frac{a_\alpha+b_\alpha}{2}\right)z^\alpha\right|^p\leq\frac{1}{K(p,t)^{pk}}\text{ and }\sum_{|\alpha|=k}\left|\left(\frac{a_\alpha-b_\alpha}{2}\right)z^\alpha\right|^p\leq\frac{1}{K(p,t)^{pk}}$$

对于所有 $z \in B(l_t^n)$, $K(p,t) = K_n^p(H^\infty(B(l_t^n)\ \mathbb{C}))$，其定义见定理 2 第 (ii) 部分证明的最后阶段。现在对于 $p \geq 1$，经过简单计算可知

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha z^\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \left|\left(\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2}\right) z^\alpha\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|=k} \left|\left(\frac{a_\alpha - b_\alpha}{2}\right) z^\alpha\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2}{K(p,t)^k}$$

对所有 $z \in B(l_t^n)$。类似地, $\left(\sum_{|\alpha|=k} |b_\alpha z^\alpha|^p\right)^{1/p} \leq 2/(K(p,t))^k$ 对所有 $z \in B(l_t^n)$。

因此，对于 $r \in (0,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left(|a_\alpha|^p + |b_\alpha|^p\right) |(rz)^\alpha|^p \leq 2^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{K(p,t)}\right)^{pk},$$

若选取足够小的 C，使得 $r = CK(p,t)$，则其小于或等于 1。此外，显然，对于所有 $p > 0$, $R_p(B(l_t^n)) \leq K(p,t)$，因此我们得到了以下结论：

$$R_p(B(l_t^n)) \sim \begin{cases} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\min\{t,2\}}} \ for\ 1 \leq p < \min\{t,2\},\ and \\ 1\ for\ p \geq \min\{t,2\}. \end{cases}$$

剩下要证明的是，对于 $p \in (0,1)$, $R_p(B(l_t^n)) \succ ((\log\ n)/n)^{(1/p)-(1/\delta)}$，其中 $\delta = \min\{t,2\}$ 的定义见定理 2 第 (ii) 部分的证明。事实上，不等式 (3.14) 表明

$$\sum_{|\alpha|=k} \left|\left(\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2}\right) z^\alpha\right| \leq \chi_M(\mathcal{P}({}^k l_t^n)) \text{ and } \sum_{|\alpha|=k} \left|\left(\frac{a_\alpha - b_\alpha}{2}\right) z^\alpha\right| \leq \chi_M(\mathcal{P}({}^k l_t^n)),$$

从而得出 ZWJ的结论

$$\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha z^\alpha| \leq 2\chi_M(\mathcal{P}({}^k l_t^n)) \leq 2C^k \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{(k-1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}$$

对所有 $z \in B(l_t^n)$。若将左边替换为 $\sum_{|\alpha|=k} |b_\alpha z^\alpha|$，上述不等式仍然成立。因此，利用 (2.1)，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=k} \left(|a_\alpha z^\alpha|^p + |b_\alpha z^\alpha|^p\right) &\leq \left(\left(\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha z^\alpha|\right)^p + \left(\sum_{|\alpha|=k} |b_\alpha z^\alpha|\right)^p\right) \left(\sum_{|\alpha|=k} 1\right)^{1-p} \\ &\leq \left(C_1^k + C_2^k\right) \left(\max\left\{1, \left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{\delta}-\frac{p}{k}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}\right\}\right)^k \\ &\leq C^k \left(\max\left\{1, \left(\frac{n}{k}\right)^{1-\frac{p}{\delta}-\frac{p}{k}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}\right\}\right)^k \end{aligned}$$

对于某些常数 $C, C_1, C_2 > 0$，且对所有 $z \in B(l_t^n)$ 均成立。证明将完全按照 (3.15) 的证明（$p \in (0,1)$ 部分）进行，因此省略细节。□

Acknowledgements

作者感谢 Bappaditya Bhowmik 教授的热心帮助，使其得以获取 [25] 的电子版。他还感谢 Samya Kumar Ray 博士与他进行的一些富有启发性的交谈。

References

[1] L. Aizenberg, A. Aytuna, P. Djakov：博尔现象的一种抽象方法，Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), no. 9, 2611–2619.[2] R. Balasubramanian, B. Calado, H. Queffélec：普通狄利克雷级数的博尔不等式，Studia Math., 175 (2006), no. 3, 285–304.[3] F. Bayart：随机多项式的最大模，Q. J. Math., 63 (2012), no. 1, 21–39.[4] F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda：n 维多圆盘的博尔半径等价于 $\sqrt{(\log n)/n}$，Adv. Math., 264 (2014), 726–746.[5] C. Bénéteau, A. Dahlner, D. Khavinson：关于博尔现象的评注，Comput. Methods Funct. Theory, 4 (2004), no. 1, 1–19.[6] J. Bergh, J. Löfström：插值空间：导论。Grundlehren der Mathema- tischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.[7] O. Blasco：巴拿赫空间的博尔半径，向量测度、积分及相关主题，59–64，Oper. Theory Adv. Appl., 201, Birkh ¨auser Verlag, Basel, 2010.[8] O. Blasco：巴拿赫空间的 p-博尔半径，Collect. Math., 68 (2017), no. 1, 87–100.[9] H. P. Boas, D. Khavinson：多变量中的博尔幂级数定理，Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), no. 10, 2975–2979.[10] H. Bohr：关于幂级数的一个定理，Proc. London Math. Soc., (2) 13 (1914), 1–5.[11] D. Carando, A. Defant, P. Sevilla-Peris：余型的一些多项式版本及其应用，J. Funct. Anal., 270 (2016), no. 1, 68–87.[12] D. Carando, F. Marceca, P. Sevilla-Peris：向量值狄利克雷级数的豪斯多夫–杨型不等式，Trans. Amer. Math. Soc., 373 (2020), no. 8, 5627–5652.[13] S. Chen, H. Hamada：调和函数与多重调和函数的一些尖锐 Schwarz-Pick 型估计及其应用，J. Funct. Anal., 282 (2022), no. 1, Paper No. 109254, 42 pp.[14] N. Das：一维及高维广义博尔半径的估计，Canad. Math. Bull., pp. 1-18，网址：https://doi.org/10.4153/S0008439522000674.[15] A. Defant, D. García, M. Maestre：博尔幂级数定理与局部巴拿赫空间理论，J. Reine Angew. Math., 557 (2003), 173–197.[16] A. Defant, L. Frerick：多维博尔半径的对数下界，Israel J. Math., 152 (2006), 17–28.[17] A. Defant, D. García, M. Maestre, D. Pérez-García：向量值狄利克雷级数的博尔带，Math. Ann., 342 (2008), no. 3, 533–555.[18] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes, K. Seip：齐次多项式的 Bohnenblust-Hille 不等式具有超收缩性，Ann. of Math., (2) 174 (2011), no. 1, 485–497.[19] A. Defant, L. Frerick：ℓ_p^n 单位球的博尔半径，J. Reine Angew. Math., 660 (2011), 131–147.[20] A. Defant, M. Maestre, U. Schwarting：向量值全纯函数的博尔半径，Adv. Math., 231 (2012), no. 5, 2837–2857.[21] A. Defant, D. García, M. Maestre, P. Sevilla-Peris：高维中的狄利克雷级数与全纯函数，New Mathematical Monographs, 37. Cambridge University Press, Cambridge, 2019.[22] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge：绝对求和算子，Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[23] S. Dineen, R. M. Timoney：绝对基、张量积与波尔定理，Studia Math., 94 (1989), no. 3, 227–234.[24] P. G. Dixon：满足非幺 von Neumann 不等式的巴拿赫代数，Bull. Lon- do n Math. Soc., 27 (1995), no. 4, 359–362.[25] P. B. Djakov, M. S. Ramanujan：关于波尔定理及其推广的一个评注，J. Anal., 8 (2000), 65–77.[26] D. Galicer, M. Mansilla, S. Muro：多变量中的混合波尔半径，Trans. Amer. Math. Soc., 373 (2020), no. 2, 777–796.
[27] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr：取值于齐性球的全纯映射的波尔定理，Israel J. Math., 173 (2009), 177–187.[28] I. R. Kayumov, S. Ponnusamy：关于幂型 Bohr 不等式，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 44 (2019), no. 1, 301–310.[29] P. Lassère, E. Mazzilli：复平面中法贝尔-格林电容器的博尔半径估计，Constr. Approx., 45 (2017), no. 3, 409–426.
[30] T. Liu, J. Wang：全纯映射齐次展开的一个绝对估计，Pacific J. Math., 231 (2007), no. 1, 155–166.[31] V. I. Paulsen, G. Popescu, D. Singh：关于博尔不等式，Proc. London Math. Soc., (3) 85 (2002), no. 2, 493–512.[32] G. Popescu：多圆球上的自由全纯函数的博尔不等式，Adv. Math., 347 (2019), 1002–1053.[33] V. S. Vladimirov：多复变函数论的方法。由 Scripta Technica, Inc. 从俄文翻译。译文由 Leon Ehrenpreis 编辑，The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1966, xii+353 页。

Nilanjan Das, Theoretical Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute Kolkata, Kolkata-700108, India.电子邮箱：nilanjand7@gmail.com